КВАНТ
ЖУРНАЛ

1975

1 - 12

НОМЕР
1

ОРГКОМИТЕТ
МОСКОВСКОЙ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ
ОЛИМПИАДЫ
МОСКОВСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО

Основан в 1970 году.
1975
1
Квант
Научно-популярный
физико-математический
журнал
Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической
литературы

Главный редактор
академик И. К. Кикоин

Первый заместитель
главного редактора
академик А. Н. Колмогоров

Редакционная коллегия:
М. И. Башмаков,
С. Т. Беляев,
В. Г. Болтянский,
Н. Б. Васильев,
Ю. Н. Ефремов,
В. Г. Зубов,
П. Л. Капица,
В. А. Кириллин,
главный художник
А. И. Климанов,
С. М. Козел,
зам. главного редактора
В. А. Лешковцев,
Л. Г. Макар-Лиманов,
А. И. Маркушевич,
Н. А. Патрикеева,
И. С. Петраков,
Н. Х. Розов,
А. П. Савин,
И. Ш. Слободецкий,
зам. главного редактора
М. Л. Смолянский,
Я. А. Смородинский,
В. А. Фабрикант,
А. Т. Цветков,
М. П. Шаскольская,
С. И. Шварцбурд,
А. И. Ширшов.

Редакция:
В. Н. Березин,
А. Н. Виленкин,
И. Н. Клумова,
художественный редактор
Т. М. Макарова,
Н. А. Минц,
Т. С. Петрова,
В. А. Тихомирова,
зав. редакцией
Л. В. Чернова

В НОМЕРЕ:

2 *И. Н. Бронштейн.* Эллипс
9 *А. С. Компанеец*. Размерность физических величин и подобие явлений
18 *Н. Д. Кришталь.* Метод размерностей
22 *Б. С. Ратнер.* Оценка физической величины
24 *Ю. А. Гастев.* С чего начинается логика
30 *А. М. Лопшиц.* Функциональные уравнения

Математический кружок

36 *Я. Н. Суконник.* Арифметико-геометрическая прогрессия

Задачник «Кванта»

41 Задачи М301—М305; Ф313—Ф317
43 Решения задач М261—М268; Ф273—Ф277

Практикум абитуриента

55 *Г. В. Дорофеев.* Отношения отрезков, площадей и объемов
60 *Л. П. Баканина.* Задачи о воздушных шарах
64 *А. И. Забоев, Г. И. Пантюхов, В. И. Ростокин, Н. В. Шолохов.* Московский инженерно-физический институт
66 **Спрашивайте — отвечаем**

Информация

68 Новый прием во Всесоюзную заочную математическую школу

Рецензии, библиография

70 *В. А. Лешковцев.* Всесоюзный конкурс общества «Знание» на лучшие произведения научно-популярной литературы
71 *В. А. Рудов.* Будущее науки

«Квант» для младших школьников

73 Задачи
74 *В. А. Тихомирова.* Электризация через влияние
77 **Ответы, указания, решения**
Смесь *(с. 23, 39, 59, 63)*

На первой странице обложки вы видите фотографию одной из башен Московского университета. Если спросить вас, какую форму имеет шкала сфотографированного термометра, то вы, разумеется, ответите — форму окружности. Однако на фотографии вы видите вовсе не окружность, а некоторую другую кривую — эллипс. Об этой кривой и некоторых ее свойствах вы можете прочитать в статье И. Н. Бронштейна на с. 2—8.

© Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», «Квант», 1975 год.

ЭЛЛИПС

И. Н. Бронштейн

Три замечательные кривые — эллипс, гипербола и парабола, объединенные общим названием «конические сечения» — были известны еще в Древней Греции. Их открыл около 360 года до нашей эры Менехм, один из учеников знаменитого астронома, врача и математика Евдокса. Сочинения Менехма до нас не дошли, но нам известно замечательное сочинение Аполлония, посвященное этому же вопросу и написанное примерно 200 лет спустя после Менехма.

В этом номере мы начинаем цикл статей о конических сечениях.

Растяжение-сжатие плоскости (РС)

Возьмем в плоскости π некоторую прямую l и зададим положительное число k. Будем называть *растяжением-сжатием* (сокращенно РС*)) плоскости π относительно оси l с коэффициентом k такое преобразование плоскости в себя, при котором каждая ее точка m переходит в точку M по следующим правилам:

1) *точки m и M лежат на одном перпендикуляре к оси l по одну сторону от нее; точка, лежащая на самой оси, переходит в себя;*

2) *расстояние от точки до оси умножается на k, то есть $m_0M = k \cdot m_0m$, где m_0 — основание перпендикуляра, опущенного из точки m на ось l* (см. рис. 1 *а*, *б*).

Если $k > 1$, то все точки плоскости (кроме точек самой оси) удаляются от оси — плоскость растягивается, а если $k < 1$, то приближаются к оси — плоскость сжимается. При $k = 1$ все точки плоскости остаются на месте; в этом случае мы по-

---

*) Это преобразование обычно называют *сжатием к оси*, понимая под этим также и растяжение (при $k>1$). По нашему мнению, такое название неудачно, так как оно иногда приводит к путанице. Например, эллипсом считают линию, полученную только сжатием окружности (см. ниже), и поэтому часто думают, что в уравнении эллипса всегда $a>b$, что не обязательно.

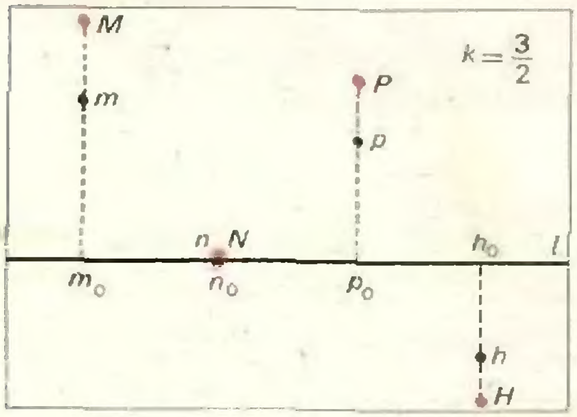


Рис. 1 а.

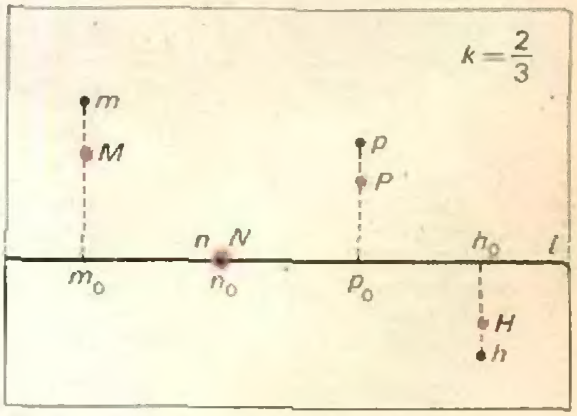


Рис. 1 б.

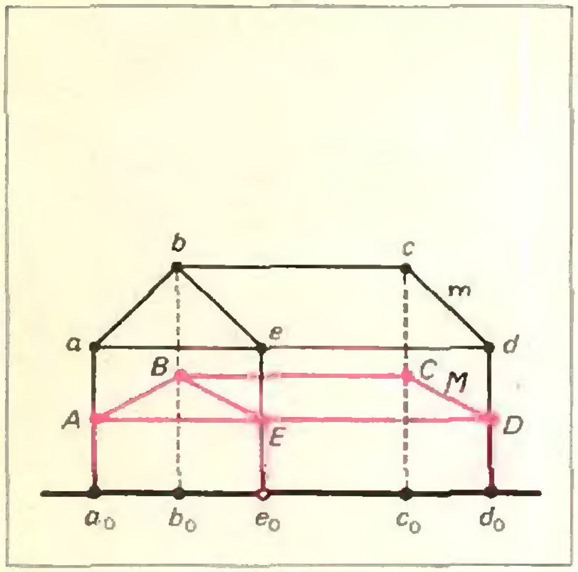


Рис. 2 а. $k=1/2$.

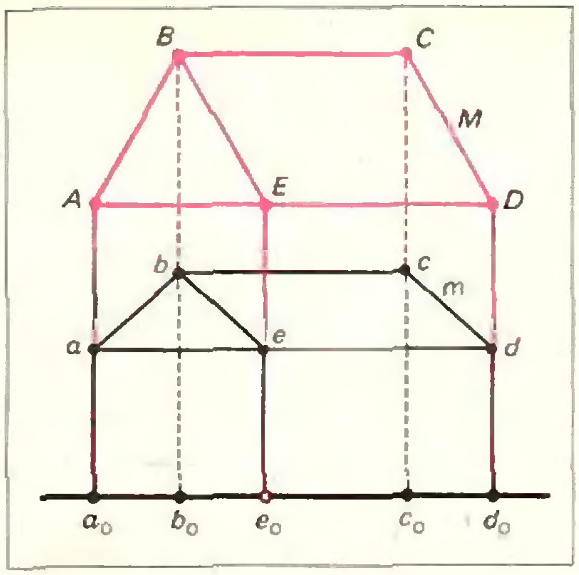


Рис. 2 б. $k=2$.

лучаем *тождественное преобразование плоскости*.

Пусть в плоскости π дана какая-нибудь фигура ω (то есть некоторое множество точек). Нас будет интересовать множество Ω всех точек, полученных из ω в результате РС (см. рис. 2 *а*, *б*). Важно отметить, что при РС прямая линия перейдет в прямую, параллельные прямые — в параллельные, а середина отрезка — в середину. Например, если $cd \parallel be$, $cm = md$, то $CD \parallel BE$, $CM = MD$ (см. рис. 2). Доказательства этих фактов предоставляем читателю.

Определение эллипса. Элементы эллипса

Эллипсом называется фигура, полученная в результате РС окружности (или круга *)). Пусть a — радиус окружности (рис. 3; ось РС будем считать проходящей через центр окружности). Тогда диаметр cd, лежащий на оси, перейдет в себя ($CD = 2a$), а перпендикулярный к нему диаметр eh — в отрезок EH ($EH = 2ka$). Обозначим $OE (= OH)$ через b, тогда $ka = b$.

Отрезки CD и EH называются *осями* эллипса, а их половины OC, OD, OE, OH (а также числа a и b)— его *полуосями*. Если $k > 1$ (растяжение), то $b > a$ (рис. 3), если же $k < 1$ (сжатие), то $b < a$ (см. следующие рисунки). При $k = 1$ окружность перейдет в окружность *).

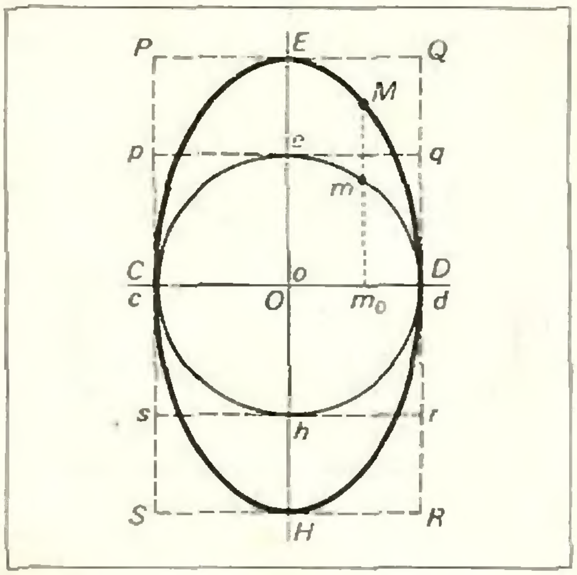


Рис. 3.

---

*) *Окружность* — линия, а *круг* — часть плоскости внутри нее. Для эллипса двух аналогичных слов нет; как сама кривая, так и часть плоскости внутри нее называются одинаково — говорят «длина эллипса», «площадь эллипса». Читатель в каждом случае без труда установит, о каком смысле слова «эллипс» идет речь.

*) Чтобы не нарушать общности определения, окружность считается частным случаем эллипса ($b = a$).

Больший из отрезков CD, EH называется *большой осью* эллипса, а меньший — *малой* осью. Значит, если $k > 1$, то a — малая полуось, а b — большая, а если $k < 1$, то наоборот. В обоих случаях $k = \frac{b}{a}$.

Точка o — центр окружности — при PC переходит в себя, эта точка O называется *центром* эллипса, точки C, D, E, H — его *вершинами*. Квадрат $pqrs$, описанный вокруг окружности («матери» эллипса) так, что $pq \parallel rs \parallel l$, а $qr \parallel sp \perp l$, преобразуется в прямоугольник $PQRS$ со сторонами $2a$ и $2b$, описанный вокруг эллипса; его называют *фундаментальным прямоугольником* для нашего эллипса. Стороны этого прямоугольника касаются эллипса в его вершинах.

Как начертить эллипс

Если заданы оси эллипса, то проще всего начертить эллипс от руки, построив сначала фундаментальный прямоугольник, а затем вписав в него овальную кривую. Но этот метод не точен, существует много овальных кривых с одними и теми же осями симметрии (несколько таких кривых изображено на рисунке 4), но только одна из них (на рисунке 4 — красная) является эллипсом. Можно точно построить сколько угодно точек эллипса. Наиболее употребительный и простой способ такого построения изображен на рисунке 5.

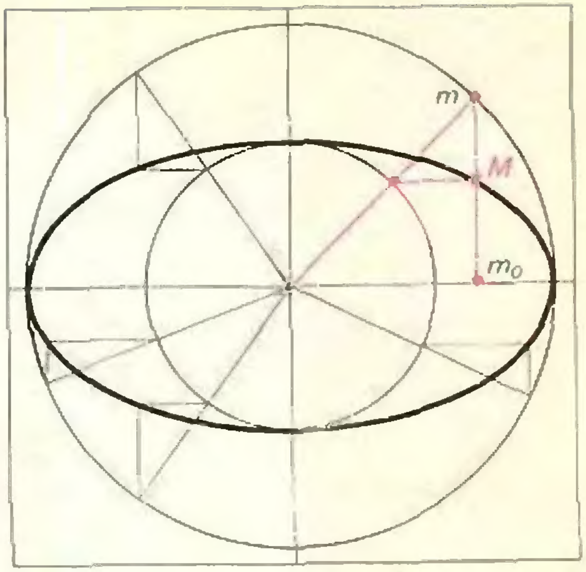


Рис. 5

На нем две концентрические окружности имеют радиусы a и b. Разберитесь сами в этом построении и докажите, что $m_0M = m_0m \cdot \frac{b}{a}$.

Сделав такое построение для нескольких точек m_1, m_2, m_3,... окружности, можно получить соответствующие точки эллипса. Останется соединить их плавной линией от руки или с помощью лекала.

Начертить эллипс непрерывным движением, не отрывая карандаша от бумаги, подобно тому, как мы вычеркиваем окружность циркулем, можно специальным прибором — эллипсо-

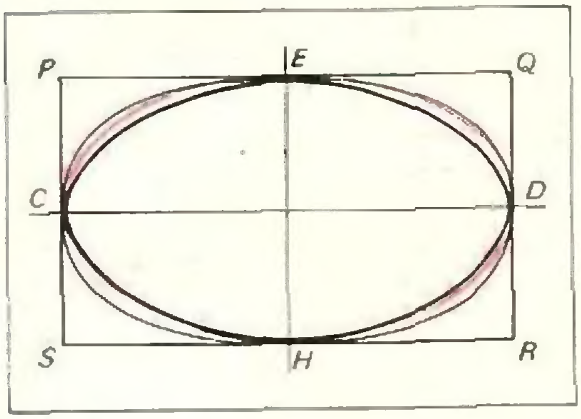


Рис. 4.

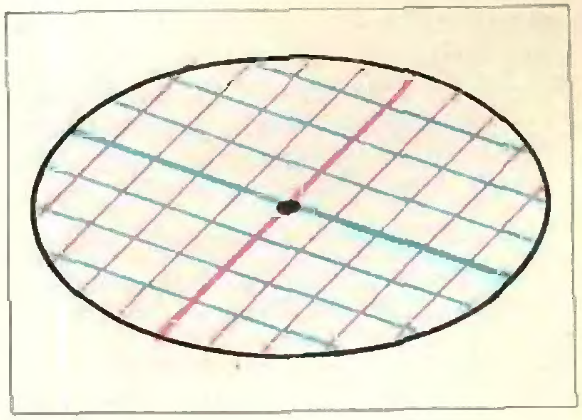


Рис. 6.

графом *). В конце статьи мы укажем простой способ непрерывного вычерчивания эллипса при помощи нити.

Сопряженные диаметры эллипса

Отметим следующее интересное свойство эллипса: *середины всех параллельных хорд эллипса образуют отрезок, проходящий через центр эллипса* (рис. 6). Это свойство очевидно для окружности: для нее середины параллельных хорд лежат на диаметре, перпендикулярном к этим хордам. При сжатии параллельные хорды окружности переходят в параллельные хорды эллипса, а середины хорд окружности — в середины хорд эллипса. Отсюда и вытекает справедливость сформулированного свойства.

Хорда, проходящая через центр эллипса, называется его *диаметром*. У эллипса длины диаметров, вообще говоря, не одинаковы. Наибольший из них — большая ось эллипса, а наименьший — малая. Если провести в эллипсе вторую серию хорд, параллельных полученному диаметру, то их середины лежат на диаметре, принадлежащем к первой серии хорд (рис. 6). Два полученных диаметра называются *взаимно сопряженными*. Для каждого диаметра эллипса существует ему сопряженный. У окружности каждая пара сопряженных диаметров взаимно перпендикулярна, а у эллипса есть только одна пара взаимно перпендикулярных сопряженных диаметров, это — большая и малая оси.

Уравнение линии. Уравнение эллипса

Одним из самых замечательных открытий XVII века является *метод координат* **), позволяющий переводить геометрические понятия на алгебраический язык. Этот метод дает возможность устанавливать соответствие между линиями, лежащими на плоскости, на которой введена система координат, и уравнениями, содержащими две буквы x и y

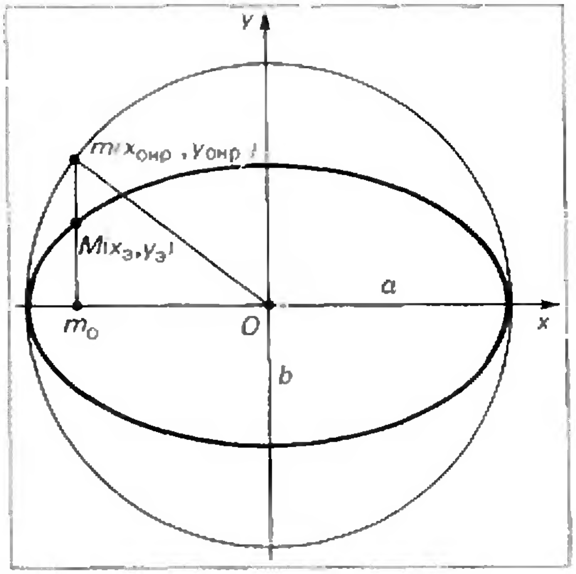


Рис. 7

Уравнением линии называется такое уравнение относительно x и y, которое обращается в тождество при подстановке вместо x и y значений x_0, y_0 в том и только в том случае, когда точка с координатами x_0, y_0 лежит на этой линии. Например, уравнение $y=x$ есть уравнение биссектрисы I и III координатных углов, а уравнение окружности радиуса a с центром в начале координат имеет вид $x^2+y^2=a^2$.

Пусть данный эллипс с полуосями a и b получен как РС окружности радиуса a с коэффициентом $k=\frac{b}{a}$ (рис. 7). Введем на плоскости, содержащей обе эти линии, систему координат следующим образом: ось Ox направим по оси РС, а ось Oy — через центр окружности o, который является и центром эллипса, перпендикулярно к оси Ox. Пусть m — точка на окружности, а M — та точка эллипса, в которую перейдет m при РС.

Координаты точки m обозначим через $x_{окр}$, $y_{окр}$, а точки M — $x_э$, $y_э$. По определению РС $x_э=x_{окр}$, $y_э=ky_{окр}$, откуда

$$x_{окр}=x_э,\quad y_{окр}=\frac{y_э}{k}. \qquad (*)$$

Если подставить в уравнение окружности $x^2+y^2=a^2$ координаты любой точки $(x_{окр}, y_{окр})$, то будет верно равенство $x_{окр}^2+y_{окр}^2=a^2$, и, значит, на основании (*) верным будет равенство

$$x_э^2+\frac{y_э^2}{k^2}=a^2.$$

---

*) В первой публикации настоящей статьи («Квант», 1970, № 9, с. 32) приведено описание и теоретическое обоснование эллипсографа.

**) Он обычно излагается в курсе аналитической геометрии.

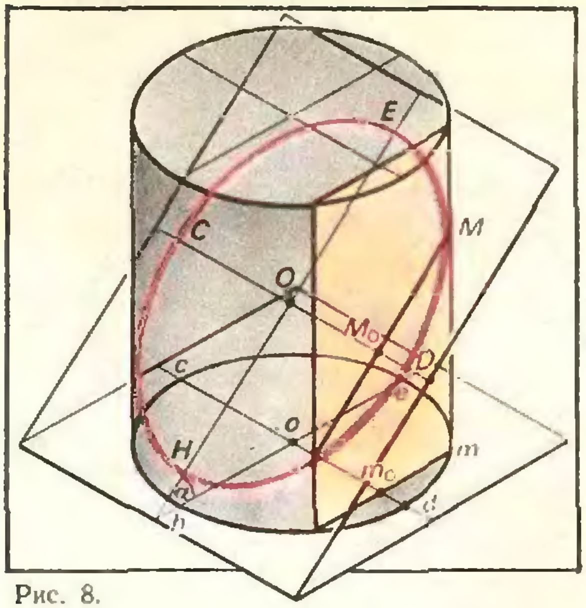


Рис. 8.

Если же точка M' (X', Y') не лежит на эллипсе, то точка m' (x', y'), переведенная в M' в результате РС, не лежала на окружности, и равенство $(x')^2 + (y')^2 = a^2$ неверно, значит, неверно и равенство

$$(X')^2 + \frac{(Y')^2}{k^2} = a^2.$$

В соответствии с определением уравнения линии мы получили такое уравнение эллипса: $x^2 + \frac{y^2}{k^2} = a^2$. Поскольку $ka = b$, последнее уравнение приводится к виду

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (Э)$$

Это и есть уравнение эллипса в наиболее удобной (так называемой *канонической*) форме.

Наклонные сечения кругового цилиндра

Пересекая круговой цилиндр плоскостями, наклоненными к его основанию под острым углом α, мы получаем овальные кривые. Докажем, что они являются эллипсами. Для этого достаточно установить, что каждый такой овал получается из окружности в результате РС (а именно — растяжения) с коэффициентом $k = \frac{1}{\cos\alpha}$.

Возьмем (рис. 8) в основании цилиндра два диаметра: cd — параллельный и eh — перпендикулярный к линии пересечения плоскости основания с плоскостью сечения цилиндра. Проведем через них и ось цилиндра плоскости $cdDC$ и $ehHE$, а также плоскость M_0Mmm_0, параллельную $ehHE$, проходящую через некоторую точку M сечения. Зная, что проекция отрезка на некоторую прямую равна длине этого отрезка, умноженной на косинус угла между ним и его проекцией, получаем

$$\frac{M_0M}{m_0m} = \frac{OE}{oe} = \frac{1}{\cos\alpha} = k.$$

Если положить обе фигуры $CEDH$ и $cedh$ на одну плоскость, так, чтобы CD совместилась с cd, то они займут положение, показанное на рисунке 3, причем $M_0M : m_0m = k$, где $k > 1$. Этим наше утверждение доказано.

Каждый эллипс с малой полуосью a и большой b можно получить как сечение кругового цилиндра, радиус которого равен малой полуоси эллипса. Для этого достаточно провести сечение цилиндра плоскостью, наклоненной к основанию цилиндра под углом, косинус которого равен $\frac{a}{b}$. Это всегда возможно, так как здесь $\frac{a}{b} < 1$.

Проекция окружности — эллипс

Если спроектировать окружность, лежащую в некоторой плоскости, на вторую плоскость, пересекающую первую под острым углом α, то в проекции получится эллипс. Доказательство этого читатель легко проведет сам, пользуясь рисунком 8, на который нужно теперь смотреть с другой точки зрения: будем линию $CEDH$ считать окружностью $(OC = OD = OE = OH = a)$, а проектирующий цилиндр — не круговым, а овальным. Здесь $cd = CD = 2a$, $eh = EH \cdot \cos\alpha = 2b$. Нужно доказать, что $cedh$ — эллипс (поверхность в этом случае называется *эллиптическим цилиндром* — по форме перпендикулярного сечения).

Путь доказательства тот же, что и для наклонного сечения кругового цилиндра. На этот раз $m_0m = M_0M\cos\alpha$. Следовательно, овал *cedh* получен из *CEDH* в результате PC (на этот раз — сжатия) с коэффициентом $k = \cos\alpha = \frac{b}{a}$.

Перпендикулярные диаметры окружности проектируются во взаимно сопряженные диаметры эллипса. Этот факт имеет большое значение в теории изображений пространственных фигур на плоскости*).

Фокальное свойство эллипса

Мы переходим к наиболее важному свойству эллипса — фокальному (фокальный — прилагательное от слова *фокус* **), так называются две замечательные точки, лежащие на большой оси симметрично относительно центра эллипса).

Будем рассматривать эллипс как сечение кругового цилиндра — мы видели, что всегда имеем право это сделать. Вкатим теперь в цилиндр с обоих его концов по шару (того же радиуса, что и цилиндр) так, чтобы оба шара стукнулись о плоскость этого сечения (рис. 9), на геометрическом языке — впишем шары в цилиндр так, чтобы они касались плоскости сечения.

Точки прикосновения F_1 и F_2 и будут фокусами нашего эллипса.

Каждый шар касается цилиндра по окружности (красной). Возьмем любую точку M эллипса и отметим ту образующую PQ цилиндра, на которой точка M лежит (P и Q — точки этой образующей, лежащие на красных окружностях). Ясно, что $MF_1 = MQ$, так как это длины двух касательных к правому шару, проведенных из M до точек прикосновения F_1 и Q (эти отрезки равны как образующие конуса с вершиной M, описанного около правого шара). Рассуждая так же для левого шара, получаем: $MF_2 = MP$. Сложив оба равенства, имеем

$$MF_1 + MF_2 = MQ + MP = PQ.$$

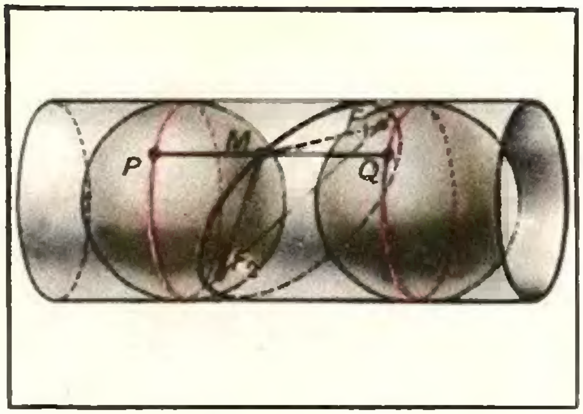


Рис. 9.

Но длина PQ одна и та же для всех образующих цилиндра, это — расстояние между плоскостями красных окружностей. Значит, какую бы точку M на эллипсе ни взять, будет удовлетворяться равенство $MF_1 + MF_2 = \text{const}$.

Таким образом, *сумма расстояний от любой точки эллипса до двух его фокусов — величина постоянная*. В этом и состоит фокальное свойство эллипса. Часто эллипс и определяется как множество точек, лежащих в одной плоскости, для которых сумма расстояний до двух точек (фокусов)— величина постоянная.

Расстояние от каждого фокуса до конца малой оси равно половине длины большой оси эллипса (рис. 10) или, иначе,

$$c^2 = a^2 - b^2.$$

В этой формуле a — большая полуось, b — малая *) c — половина

---

*) См. статью Н. М. Бескина «Изображение пространственных фигур», «Квант», 1970, № 12.

**) Латинское слово «*focus*» означает *очаг*. О происхождении этого термина будет рассказано в следующих статьях.

*) Следует обратить внимание на то, что на этот раз a — именно большая полуось. В формуле (Э) на с. 6 это не предполагалось. В эллипсе, полученном растяжением окружности радиуса a, приводимая здесь формула должна быть заменена такой:

$$c^2 = b^2 - a^2.$$

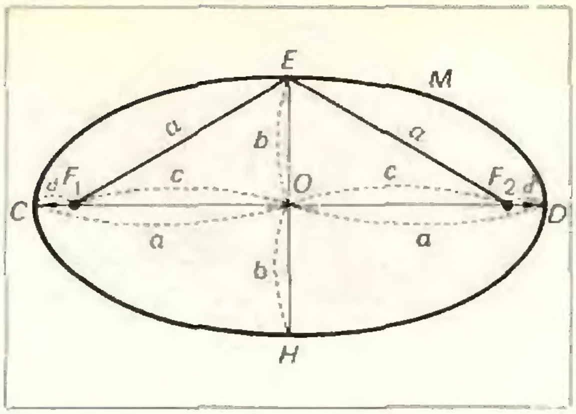


Рис. 10.

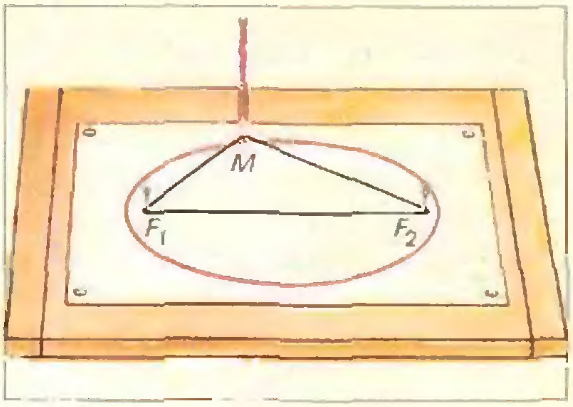


Рис. 11.

расстояния между фокусами. Для доказательства этой формулы рассмотрим конец большой оси эллипса (точка C на рисунке 10). По фокальному свойству $CF_1 + CF_2 = \text{const}$; вследствии симметрии $CF_1 = DF_2$; значит, постоянная const равна $CF_2 + F_2D$, то есть большой оси $2a$. С другой стороны, для конца малой оси, например, E, $EF_1 + EF_2 = 2a$, а так как, в силу симметрии, $EF_1 = EF_2$, то каждый из этих отрезков равен a. Это дает способ построения фокусов эллипса по его осям (рис. 10).

Вычерчивание эллипса при помощи нити

Положим лист бумаги на чертежную доску и приколем к нему две кнопки (или булавки, рис. 11). Набросив на них нитяное кольцо (длина кольца должна быть больше удвоенного расстояния между кнопками), натянем нить острием карандаша, чтобы получился треугольник F_1MF_2. Если вести карандаш по бумаге так, чтобы нить оставалась натянутой, то треугольник будет деформироваться, но его периметр останется постоянным. Постоянной будет и длина стороны F_1F_2; значит, $F_1M + F_2M = \text{const}$ и карандаш опишет эллипс.

Этот способ вычерчивания эллипса используют садовники при изготовлении цветочных эллиптических клумб. Вместо кнопок к землю втыкают два колышка, кольцо делается из толстой веревки, а эллипс вычерчивается на земле не карандашом, а палкой.

* * *

Мы не объяснили происхождения названия «эллипс» (на древнегреческом «эллипсис» означает «недостаток» — причем здесь недостаток?), не рассказали о других интересных свойствах этой кривой — свойствах, общих для всех конических сечений: эллипса, гиперболы и параболы. Этому будет посвящена отдельная статья. Но предварительно в ближайших номерах мы познакомимся с гиперболой и параболой.

Размерность физических величин и подобие явлений

А. С. Компанеец

Смысл размерности физических величин

Все знают, что числа бывают именованные и отвлеченные. Именованные числа зависят от выбранных единиц измерения, неименованные не зависят. Если, например, в одном участке земли 100 квадратных метров ($м^2$), а в другом — 200 $м^2$, то 100 и 200 — именованные числа, а их отношение $^1/_2$ — число отвлеченное. Оно не изменится, если перейти от метрической системы мер к любой иной, измеряя площадь в квадратных аршинах или квадратных футах *). Так же точно отношение двух денежных сумм не зависит от того, в какой валюте эти суммы выражены. Важно только, чтобы обе суммы выражались в одинаковой валюте.

Можно делить друг на друга именованные числа, выражающие и совсем разные понятия, например рубли на квадратные метры. Участок земли в 100 $м^2$, который стоит 100 рублей, продается по цене 1 рубль за 1 $м^2$. Но числовое выражение результата зависит от того, в какой валюте выражена сумма и в каких единицах измерялась площадь. Иначе говоря, в результате такого деления получается опять именованная величина. Другим примером может служить скорость — столько-то единиц длины за единицу времени. Иногда единица измерения скорости получает специальное наименование: одна морская миля (или 1852 *м*) в час — один узел.

---

*) 1 аршин = 71,1 *см*; 1 фут = 30,5 *см*.

Всякое уравнение в физике выражает соотношение, объективно существующее в природе, независимо от воли того, кто это уравнение пишет. И, конечно, обе части уравнения должны выражаться величинами, измеряемыми в одних и тех же единицах.

Единицы измерения каждой физической величины выражаются через основные единицы измерения, выбор которых в значительной степени условен. Формула, выражающая единицу измерения данной величины через основные единицы измерения, называется размерностью этой величины. Обе части каждого физического уравнения должны иметь одинаковую размерность.

Сколько основных единиц измерения необходимо выбрать? Механическое движение описывается в терминах расстояния, то есть длины, и времени. Эталоны этих двух величин необходимы во всяком случае. Но двух эталонов недостаточно. Действительно, если, например, взаимодействуют два тела одинаковой формы и размеров, то их ускорения могут быть существенно различными. Ускорение каждого из них, согласно второму закону Ньютона, зависит от его массы. Следовательно, необходим по крайней мере еще один эталон — массы. В настоящее время не известны какие-либо физические закономерности в механике, для описания которых нужны были бы новые основные эталоны, кроме длины, времени и массы. Для единиц измерения этих основных величин введены соответствующие символы L, T и M. Для обозначения размерности какой-нибудь величины A пользуются символом $[A]$. Таким образом, размерность длины обозначается $[l]=\mathrm{L}$, размерность времени — $[t]=\mathrm{T}$, а размерность массы — $[m]=\mathrm{M}$. Длину, время и массу называют основными величинами, а все остальные физические величины — производными.

Заметим, что о размерности есть смысл говорить только по отношению к определенной системе единиц. Формулы размерности одной и той же физической величины в разных системах единиц могут быть различными. В данной статье мы в основном будем пользоваться системой СГС. В этой системе единиц все формулы размерности имеют вид степенных функций типа

$$[f]=\mathrm{L}^{\alpha}\mathrm{M}^{\beta}\mathrm{T}^{\gamma}.$$

Такой вид формул обусловлен следующими физическими соображениями. Очевидно, что отношение двух численных значений какой-либо производной величины не должно зависеть от выбора единиц измерения основных величин. Например, будем ли мы измерять время в секундах или минутах, отношение двух промежутков времени, измеренных в секундах, будет таким же, как и отношение этих промежутков, измеренных в минутах. А это требование выполняется всегда при условии, что формула размерности имеет вид степенного одночлена.

Рассмотрим теперь размерности некоторых производных физических величин. Начнем с кинематической величины — ускорения a. По определению это — изменение скорости за единицу времени. Следовательно, размерность ускорения есть размерность скорости, деленной на время, то есть $\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{T}}:\mathrm{T}$, или

$$[a]=\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{T}^2}.$$

По второму закону Ньютона сила F равна массе, умноженной на ускорение. Отсюда можно получить размерность силы:

$$[F]=[m][a]=\left[\frac{ml}{t^2}\right]=\frac{\mathrm{ML}}{\mathrm{T}^2}.$$

Эвристическое значение размерности

Итак, физическое равенство может иметь смысл только между величинами одной и той же размерности. Если, скажем, при решении задачи проверка показала, что размерности обеих сторон полученного равенства не совпадают, значит, в решении допущена ошибка.

Цель этой статьи — показать, что понятие размерности помогает не только находить ошибки, но и получать новые результаты.

Даже тот, кто забыл самый закон Архимеда, конечно, помнит предание о том, что Архимед при открытии этого закона воскликнул «эврика», что в переводе с греческого на русский язык означает «нашел». Отсюда прилагательное «эвристический», что по-русски значит «помогающий находить», или «наводящий», «указывающий истину». Именно об этом значении теории размерности пойдет речь в этой статье.

Рассмотрим связь между законом тяготения Ньютона и третьим законом Кеплера. Заранее формулировать закон Кеплера пока нет надобности: он сам получится из дальнейших рассуждений. Чтобы не писать одни формулы, дадим волю воображению и попробуем сочинить научно-фантастический рассказ.

Итак, пусть в семье космонавтов, летящих к далекой звезде, в пути родился ребенок. Когда он подрос, отец захотел помочь ему получить наглядное представление о родной Земле и ее спутнице Луне. Для этого было решено запустить искусственный спутник космического корабля. Нельзя ли сделать это таким образом, чтобы спутник обращался вокруг космического корабля за то же время, за которое Луна обращается вокруг Земли? Каковы должны быть при этом другие параметры, описывающие движение такого спутника?

Еще Галилей установил, что в пустоте все тела свободно падают с одинаковыми ускорениями. Этот закон справедлив, если масса притягиваемого тела во много раз меньше массы тела притягивающего. Пусть масса космического корабля, предназначенного для дальнейшего путешествия, около 100 *т*. Тогда закон Галилея может быть применен, например, к детскому мячику, взятому в качестве спутника этого корабля. Обычно масса m такого мячика не больше 1 *кг*, что, действительно, гораздо меньше, чем масса корабля.

Закон всемирного тяготения в элементарной форме $\left(F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}\right)$ применим к материальным точкам, то есть к таким телам, размеры которых гораздо меньше расстояния между ними. Предположим, что расстояние от космического корабля до мячика гораздо больше корабля в любом его измерении (дальше это будет подтверждено расчетом). Орбита Луны приближенно круговая, следовательно, надо, чтобы и орбита мячика была круговой — иначе не будет желаемого подобия. Такая орбита характеризуется радиусом r и периодом обращения τ. Покажем, как найти период обращения из учения о размерностях физических величин.

Так как сила тяготения F для заданных материальных точек зависит только от расстояния между ними, а на круговой орбите расстояние не изменяется, сила тоже постоянна по величине. Именно эта сила и может сообщить спутнику необходимое центростремительное ускорение. Но вместо того, чтобы написать соответствующее уравнение движения и из него найти период обращения, воспользуемся только размерностями. Нам заданы следующие постоянные величины: сила F размерности $\frac{\mathrm{ML}}{\mathrm{T}^2}$, радиус орбиты r размерности L и масса m движущегося тела размерности M. Надо найти период обращения τ размерности T.

Будем искать выражение для времени обращения в виде

$$\tau = AF^x r^y m^z,$$

где x, y и z — неизвестные показатели степени, A — некоторое отвлеченное число. Перепишем уравнение для τ как равенство размерностей:

$$|\tau| = |F|^x\,|r|^y\,|m|^z = \left(\frac{\mathrm{ML}}{\mathrm{T}^2}\right)^x \mathrm{L}^y\,\mathrm{M}^z.$$

Запишем левую часть в виде $\mathrm{M}^0\mathrm{L}^0\mathrm{T}^1$, а правую часть — $\mathrm{M}^{x+z}\mathrm{L}^{x+y}\,\mathrm{T}^{-2x}$ и сравним показатели степени при М, L и Т. Получим три уравнения с тремя неизвестными:

$$\begin{aligned} x + z &= 0,\\ x + y &= 0,\\ -2x &= 1. \end{aligned}$$

Отсюда $x = -\frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}$, $z = \frac{1}{2}$.

Следовательно, искомое выражение для τ должно иметь вид

$$\tau = Am^{1/2}r^{1/2}F^{-1/2} = A\left(\frac{mr}{F}\right)^{1/2}. \qquad (1)$$

Если космонавты хотят, чтобы период обращения мячика был равен периоду обращения Луны вокруг Земли, они должны подобрать соответствующие величины так, чтобы отношение $\frac{mr}{F}$ было таким же, как для Луны. Как же это сделать?

Выпишем выражение для силы притяжения F:

$$F = \gamma\frac{mM}{r^2}. \qquad (2)$$

Здесь две новые величины: масса притягивающего тела M и универсальная постоянная тяготения γ. Подставим выражение для силы F в равенство (1) и запишем это равенство два раза:

для системы Земля — Луна

$$\tau_1 = A\left(mr_1\,\frac{r_1^2}{mm_1\gamma}\right)^{1/2} = A\left(\frac{r_1^3}{m_1\gamma}\right)^{1/2} \qquad (3)$$

(m — масса Луны, m_1 — масса Земли, r_1 — расстояние от Луны до Земли);

для системы корабль — мячик

$$\tau_2 = A\left(\frac{r_2^3}{m_2\gamma}\right)^{1/2} \qquad (4)$$

(m_2 — масса корабля, r_2 — расстояние от мячика до корабля).

Тогда отношение периодов обращения

$$\frac{\tau_1}{\tau_2} = \left(\frac{m_2}{m_1}\,\frac{r_1^3}{r_2^3}\right)^{1/2} \qquad (5)$$

Масса Земли $m_1 = 6\cdot10^{27}$ *г*, масса корабля $m_2 = 100$ *т* $= 10^8$ *г*, радиус лунной орбиты $r_1 = 3{,}84\cdot10^{10}$ *см*. Космонавты хотят, чтобы $\tau_1 = \tau_2$. Для этого надо взять $r_2 \approx 10^4$ *см* $=$ $= 100$ *м*. Легко проверить, что при этих условиях мячик будет обходить корабль за столько же времени, за сколько Луна обходит Землю, то есть за 29 суток.

Перепишем равенство (5) так:

$$\frac{\tau_1^2}{\tau_2^2} = \frac{m_2}{m_1}\,\frac{r_1^3}{r_2^3}. \qquad (6)$$

Если два разных тела обращаются вокруг общего центра (то есть $m_1 = m_2$), как, например, планеты солнечной системы, то равенство (6) и выражает третий закон Кеплера *): квадраты времен обращения планет относятся как кубы их средних расстояний до Солнца. Слово «средних» можно было бы и опустить, потому что эллипсы планетных орбит вытянуты мало и близки к окружностям.

Напомним, что Кеплер жил до Ньютона. Фактически закон тяготения был получен из законов Кеплера, а не наоборот, как это было сделано в нашем «научно-фантастическом» примере и как это делается теперь в учебниках физики и астрономии. Покажем, что для вывода закона тяготения из законов Кеплера достаточно воспользоваться учением о размерностях. Тем самым еще раз подчеркнем эвристическую, то есть наводящую силу размерностей.

---

*) Приведем формулировки и первых двух законов Кеплера.

I. Планеты описывают эллипсы, в одном из фокусов которых находится Солнце.

II. Радиус-вектор, соединяющий Солнце с планетой, ометает в равные промежутки времени равные площади.

Заметим, что III закон в более общем виде формулируется так: квадраты периодов обращения планет относятся как кубы больших полуосей орбит.

Предположим, что сила притяжения планет к Солнцу имеет вид

$$F = Bmr^n. \qquad (7)$$

Здесь B — величина, одинаковая для всех планет, m — масса планеты, r — расстояние от планеты до Солнца. Как можно догадаться, что сила F зависит от массы m именно линейно? Это видно из закона Галилея: ускорения всех тел под действием сил тяжести на одном и том же расстоянии от притягивающего тела одинаковы. Но ускорение равно силе, деленной на массу тела, так что ускорение при свободном падении тел может быть одним и тем же только в том случае, когда сила пропорциональна массе. Показатель степени n в законе тяготения будем считать пока неизвестным, его-то нам и предстоит определить из закона Кеплера. Ведь мы как бы стали на место Ньютона и хотим прийти к закону тяготения, зная общий закон движения (то есть второй закон Ньютона) и результаты ранее живших Кеплера и Галилея.

Рассуждая так же, как при выводе формулы (5), используя предположение (7), получим

$$\frac{\tau_1}{\tau_2} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{\frac{1-n}{2}} \qquad (8)$$

Чтобы это равенство совпало с законом Кеплера, надо положить $n = -2$, а это приводит выражение (7) к закону Ньютона, по которому сила тяготения обратно пропорциональна квадрату расстояния между телами.

Можно еще спросить, почему закон притяжения был заранее выбран в степенной форме (7)? Дело в том, что только отношение степенных функций дает степенную же функцию отношения. Равенство

$$\frac{f(r_1)}{f(r_2)} = f\left(\frac{r_1}{r_2}\right)$$

выполняется, только если $f(r) = r^n$. А именно степенная функция отношения входит в третий закон Кеплера:

$$\frac{\tau_1}{\tau_2} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{3/2}.$$

Так с необходимостью из законов Кеплера и Галилея получается ньютоновский закон тяготения.

Размерности универсальных постоянных

В закон тяготения входит универсальная постоянная γ, которая одна и та же для всех тел. Физика знает и другие универсальные постоянные. Например, скорость света в вакууме c, постоянная Планка h, элементарный электрический заряд e и т. д.

Определим, в каких единицах измеряются h и e, найдем размерности этих величин.

Для электромагнитной волны частоты ν справедливо равенство

$$E = h\nu, \qquad (9)$$

где E — энергия, переносимая волной. Величина $h\nu$ называется квантом энергии. Так как частота — это число колебаний в единицу времени, ν имеет размерность обратного времени:

$$[\nu] = \left[\frac{1}{t}\right] = \frac{1}{\mathrm{T}}.$$

Универсальный коэффициент пропорциональности между энергией и частотой и есть постоянная Планка h. Размерность h, таким образом, это размерность энергии, умноженной на время

$$[h] = [Et].$$

Размерность энергии можно определить двумя способами. Либо это размерность работы — то есть силы, умноженной на путь, —

$$[E] = [Fl] = \left[\frac{ml^2}{t^2}\right] = \frac{\mathrm{ML}^2}{\mathrm{T}^2},$$

либо размерность кинетической энергии $\frac{mv^2}{2}$ —

$$[E] = [mv^2] = \left[\frac{ml^2}{t^2}\right] = \frac{\mathrm{ML}^2}{\mathrm{T}^2}.$$

В обоих случаях размерность должна быть одной и той же. Отсюда

$$[h] = \left[\frac{ml^2}{t}\right] = \frac{\mathrm{ML}^2}{t}.$$

Теперь с помощью закона Кулона найдем размерность электрического заряда e (в системе единиц СГСЭ). Положим, что два единичных заряда в вакууме на единичном расстоянии отталкивают друг друга с силой, равной единице. Так как единицы длины и силы определены в механике, то можно найти единицу заряда через М, L и Т. По закону Кулона

$$F_э = \frac{e^2}{r^2},$$

где $F_э$ — электростатическая сила. Ее размерность, как и размерность всякой силы, есть $\frac{\mathrm{ML}}{\mathrm{T}^2}$. Следовательно, размерность квадрата заряда равна

$$[e^2] = \frac{\mathrm{ML}^3}{\mathrm{T}^2},$$

а размерность заряда есть

$$[e] = \frac{\mathrm{M}^{\frac{1}{2}}\mathrm{L}^{\frac{3}{2}}}{\mathrm{T}}. \qquad (10)$$

Природные единицы измерения

Все наши предыдущие рассуждения о размерностях основывались на произвольном выборе основных единиц измерения — сантиметра, грамма, секунды. Для этих единиц (или для кратных им единиц) были созданы соответствующие эталоны длины, массы и времени.

Известно, что хранение и сверка эталонов метрической системы мер представляют большие трудности. Знаменитый парижский эталон метра, изготовленный из сплава платины с иридием, несколько изменил свою длину и продолжает ее изменять вследствие процессов рекристаллизации. Земля вращается вокруг оси не строго равномерно, так что и эталон времени имеет погрешность. Масса одного кубического дециметра воды при 4° С (таким был первоначальный эталон массы в 1 *кг*) зависит от источника воды: в обычной воде H_2O в виде примеси содержится некоторое количество тяжелой воды, в которой один из атомов водорода замещен дейтерием. Вот почему ученым приходится искать более надежные эталоны.

К счастью, такие более надежные эталоны есть, их хранит сама природа без усилий с нашей стороны. Такие эталоны уже частично перечислены: это скорость света c, элементарный заряд e и другие универсальные постоянные величины. Иначе говоря, вместо эталонов длины, времени и массы можно выбрать эталоны других величин, изготовленные не искусственно, а содержащиеся прямо в законах физики. Количество основных величин, а значит, и основных единиц измерения, вообще говоря, можно выбирать произвольно. Но оказывается, что наиболее удобно выбирать три основные величины. Какие же тройки величин подходят для этой цели, и какие не дают полного описания размерностей?

Для примера покажем, что если в качестве эталонов выбраны e и h, то нельзя третьим эталоном выбрать c. Составим отношение $\frac{e^2}{h}$ и найдем его размерность (например, в системе СГС):

$$\left[\frac{e^2}{h}\right] = \left[\frac{ml^3}{t^2}\,\frac{t}{ml^2}\right] = \left[\frac{l}{t}\right] = \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{T}}.$$

Это размерность скорости, значит, величина $\frac{e^2}{h}$ вполне может служить эталоном скорости, так что скорость света c в качестве эталона уже не нужна.

Какой же выбрать третий эталон?

Если нас интересует поведение электронов в атомах, то оказывается, что для его описания разумно в качестве третьей основной величины взять массу электрона m. Добавим еще, что в уравнения для электронов фактически входит не сама величина h, а h, деленное на 2π. Это частное принято обозначать $\hbar$.

Тогда в качестве трех независимых эталонов удобно выбрать следующие величины: e, $\hbar$ и m. Размерность ни одной из них нельзя выразить через комбинацию размерностей двух других, в чем легко убедиться путем немногих попыток.

Если мы захотим в выбранной нами системе единиц найти радиус орбиты электрона — величину, имеющую размерность длины, то, используя метод размерностей, получим выражение

$$r = \frac{\hbar^2}{me^2}, \tag{11}$$

то есть размерность длины в нашей системе

$$[r] = \frac{[\hbar^2]}{[m]\,[e^2]}.$$

Легко проверить, подставив размерности для $\hbar$, m и e, например, в системе СГС (именно этой системой единиц чаще всего пользуются физики), что величина $\frac{\hbar^2}{me^2}$, действительно, имеет размерность длины:

$$\left[\frac{\hbar^2}{me^2}\right] = \left[\frac{m^2l^4}{t^2}\,\frac{1}{m}\,\frac{t^2}{ml^3}\right] = [l] = \mathrm{L}.$$

Аналогично из величин $\hbar$, m и e можно единственным образом получить величину с размерностью энергии:

$$E = \frac{me^4}{\hbar^2}, \tag{12}$$

то есть

$$[E] = \left[\frac{me^4}{\hbar^2}\right].$$

Предоставим читателю убедиться по способу, которым была получена формула (7), что других величин с такими размерностями из e, $\hbar$ и m построить нельзя.

Формулы (11) и (12) содержат в себе результаты фундаментальной важности; они позволяют оценить, по крайней мере по порядку, величины, характеризующие атом: его размеры, энергию, необходимую для удаления из него электрона. Точные значения этих величин получаются при строгом решении соответствующих уравнений. Но как бы строго ни решалось уравнение, ответ должен иметь всегда одну и ту же размерность, а она однозначно определяется формулами (11) и (12). Остается, конечно, вопрос о численных коэффициентах при размерных величинах. Эти коэффициенты могут быть получены только из строгих решений. При этом оказывается, что в ряде случаев численные коэффициенты отличаются от единицы не более чем в 2—3 раза. Например, для электрона в атоме водорода значение радиуса орбиты электрона из формулы (11) получается абсолютно точно:

$$r = \frac{\hbar^2}{me^2} = 0{,}5\cdot10^{-8}\ \text{см},$$

а значение энергии ионизации

$$E = \frac{me^4}{\hbar^2} = 4{,}3\cdot10^{-11}\ \text{эрг}$$

оказывается в 2 раза больше истинного.

Некоторые природные единицы измерения можно получить и не из атомного мира, например, выбрав в качестве основных величин скорость света c и гравитационную постоянную γ. Они дают столь же надежные эталоны, как e, $\hbar$ и m. Но из двух эталонов нельзя получить любые величины. Третий эталон берется произвольно.

Если оставить в стороне величину c, то в добавление к γ понадобится два произвольных эталона. В качестве таких эталонов можно взять сантиметр и секунду, тогда грамм не понадобится. Ведь вместо него взята гравитационная постоянная, равная в системе СГС $6{,}7\cdot10^{-8}$ $см^3/г\cdot с^2$. Но теперь она принята за единицу, так что единицей массы стал не один грамм, а новая величина, равная $1/(6{,}7\cdot10^{-8})$ грамма, что, как легко убедиться, составляет примерно 15 тонн. Такая единица была бы удобна для оптовой торговли с представителями внеземных цивилизаций, если они согласятся выбрать в качестве двух других единиц сантиметр и секунду.

Механика жидкостей и газов и теория подобия

Когда проектируют самолет или судно, сначала их рисует художник по замыслу конструктора, чтобы наметить общие пропорции. По такому рисунку выполняются более детальные чертежи и делаются расчеты. Но самые совершенные вычисления не могут предусмотреть всего — ведь новая конструкция должна обладать и новыми свойствами. Если сразу построить самолет или судно по чертежам и расчетам, то испытывать их будет слишком опасно и очень дорого обойдется доводка до серийного выпуска. Поэтому сначала делают уменьшенную модель, подобную проектируемому изделию, и испытывают в аэродинамической трубе или в бассейне для опытов с судами.

При каких условиях обтекание модели воздухом или водой будет подобно обтеканию оригинала? Иначе говоря, когда получится модель, а не просто игрушка, внешне похожая на предмет, пусть даже детально уменьшенная копия?

На основании учения о размерностях можно дать общий ответ на поставленный вопрос. Истинное динамическое подобие между объектом и моделью получится, когда отношения всех величин, входящих в уравнения движения газа или жидкости, одинаковы для натуры и для модели. Что же это за величины?

Так как модель геометрически подобна натуре, все ее размеры определяются одним-единственным размером. Если, например, в натуре размах крыльев самолета 50 *м*, а длина фюзеляжа 30 *м*, то модель с размахом крыльев 10 *м* должна иметь фюзеляж в 6 *м*. Тогда все сравнения достаточно производить с каким-то одним выбранным размером d.

Текущую жидкость или газ характеризует скорость v. При моделировании делают так, чтобы сама модель покоилась, а газ или жидкость на нее натекали. Все относительные скорости от этого не изменятся, а только они и важны для испытания динамических свойств. Достаточно производить сравнение с одной характерной скоростью, в качестве которой берется скорость натекания потока или скорость самого объекта (в натуре). С механической точки зрения не существенно, что именно выбрать. Кроме скорости, движущаяся среда характеризуется плотностью ρ, то есть массой единицы объема. Жидкости и газы различаются еще и по вязкости: вода течет легче растительного или смазочного масла, масло течет легче меда и т. п. Иначе говоря, течение зависит от особой характеристики среды, называемой *коэффициентом вязкости* η.

Выясним, какую размерность имеет η. Еще в прошлом веке Пуазейль экспериментально установил, что скорость, с которой жидкость протекает через узкий капилляр, прямо пропорциональна разности давлений Δp (на разных концах капилляра), квадрату его радиуса r и обратно пропорциональна длине капилляра l и коэффициенту η. Запишем соответствующее уравнение для размерностей:

$$[v] = \left[\frac{\Delta p r^2}{\eta l}\right].$$

Отсюда размерность η

$$[\eta] = \left[\frac{\Delta p r^2}{v l}\right].$$

Но произведение $\Delta p r^2$ имеет размерность силы (давление — это сила, приходящаяся на единицу площади), так что

$$[\eta] = \left[\frac{mlt}{t^2 ll}\right] = \left[\frac{m}{lt}\right] = \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{LT}}.$$

В системе СГС единица измерения коэффициента вязкости называется «пуазом» (по имени Пуазейля). Один пуаз — большая вязкость; например, у воды при комнатной температуре вязкость всего лишь 0,01 пуаза.

Итак, при равномерном движении объекта в среде его обтекание полностью задается четырьмя величинами d, v, ρ и η. При данной форме обтекаемых тел картины течения полностью подобны, если безразмерные отношения размерных величин одинаковы. Но, оказывается, из четырех перечисленных размерных величин можно построить только одну безразмерную комбинацию. Она называется числом Рейнольдса и обозначается символом Re:

$$\mathrm{Re} = \frac{dv\rho}{\eta}.$$

(Здесь можно снова воспользоваться методом неизвестных показателей степени x, y, z, что и при выводе формулы (1).)

Два течения, обладающие одинаковыми числами Re, во всем подобны. (Строго говоря, это справедливо до тех пор, пока не надо учитывать сжимаемость среды, которая дает лишнюю постоянную в уравнениях движения. Так будет при скоростях, близких к скорости звука, но этот вопрос мы оставим в стороне). Заметим, что если можно построить несколько безразмерных отношений из величин, характеризующих течение, то динамическое подобие достигается только при равенстве всех отношений, не имеющих размерности. Действительно, только в этом случае два явления можно считать подобными и по заданным характеристикам одного явления можно получить характеристики другого простым пересчетом, подобно тому, как мы переходим от одной системы единиц к другой.

Для примера допустим, что испытываемая модель в 5 раз меньше натуры. Тогда надо либо обдувать ее со скоростью, впятеро большей, либо вместо воздуха взять газ, для которого отношение $\frac{\rho}{\eta}$ в 5 раз больше, чем для воздуха, либо поменять и скорость, и газ, но так, чтобы Re не изменилось. Таким образом, можно, в частности, измерить подъемную силу или сопротивление воздуха для модели самолета и пересчитать их для натуры. Определяются так же силы, действующие на отдельные точки самолета, что важно для расчетов на прочность.

Исходя из размерностей величин, можно показать, как производится пересчет с модели на объект. Из d, v, ρ и η величину с размерностью силы удается построить двумя способами:

$$F_1 = \rho v^2 d^2$$

и

$$F_2 = d\eta v.$$

Какому из них отдать предпочтение? Возьмем отношение $\frac{F_1}{F_2}$:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{dv\rho}{\eta} = \mathrm{Re}.$$

Оказывается, это отношение равно числу Рейнольдса. Следовательно, если у модели и натуры числа Рейнольдса одинаковы, оба выражения для силы равноценны и можно пользоваться любым. Таким образом, сила, действующая на модель, во столько раз отличается от силы в натуре, во сколько раз отличаются произведения $dv\eta$ (или $\rho v^2 d^2$) для модели и для натуры.

На этом конкретном примере мы хотели показать, что теория размерностей лежит в основе моделирования.

Метод размерностей

Н. Д. Кришталь

В этой статье рассматриваются несколько задач, при решении которых используется метод размерностей. Об этом методе подробно рассказывается в статье А. С. Компанейца «Размерность физических величин и подобие явлений» в этом номере журнала.

Удобнее всего продемонстрировать основные положения метода размерностей на конкретных примерах. Мы сделаем это, анализируя деформации и давления, возникающие при упругом взаимодействии двух тел. Абсолютная величина силы F, с которой тела сопротивляются внешнему воздействию, стремящемуся изменить их форму и размеры, определяется законом Гука:

$$F = kx, \qquad (1)$$

где x — величина деформации, k — коэффициент упругости. Для деформации растяжения (или сжатия) выражение (1) можно переписать в развернутом виде:

$$F = \frac{ES}{l}\Delta l. \qquad (2)$$

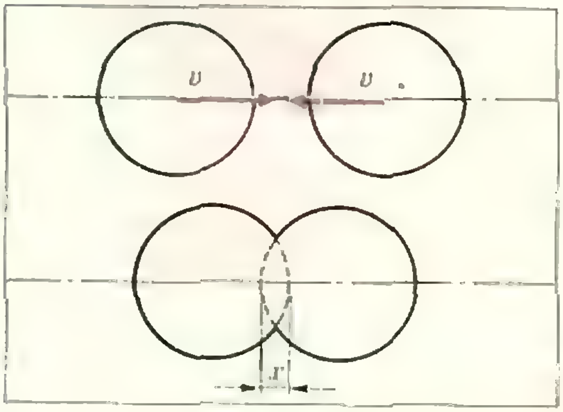


Рис. 1

Здесь E — модуль упругости (модуль Юнга) — величина, характеризующая способность материала сопротивляться внешнему воздействию, она не зависит от формы и размеров исследуемого образца, S — площадь сечения, перпендикулярного к направлению действующей извне силы, l — длина и Δl — изменение длины деформируемого тела.

Рассмотрим упругое соударение шариков.

Задача 1. *Два шарика радиусом R, изготовленные из материала с плотностью ρ и модулем упругости E, двигаются навстречу друг другу по прямой, соединяющей их центры, с одинаковыми по величине скоростями v (рис. 1). Между шариками происходит абсолютно упругий удар. Найти максимальную величину деформации x во время удара.*

Очевидно, что величина x может зависеть от всех параметров, характеризующих шарики в процессе удара, то есть от v, ρ, R и E:

$$x = x(v,\ \rho,\ R,\ E).$$

Будем искать эту зависимость в виде *)

$$x = Av^p \rho^b R^c E^d, \qquad (3)$$

где A — безразмерный коэффициент пропорциональности ($[A] = 1$), p, b, c и d — неизвестные пока безразмерные показатели степени.

Согласно учению о размерностях формулы размерностей левой и правой частей равенства (3) должны быть одинаковыми:

$$[x] = [v^p]\,[\rho^b]\,[R^c]\,[E^d]. \qquad (4)$$

Это налагает определенные условия на значения показателей p, b, c и d. Выпишем размерности всех величин, стоящих в обеих частях равенства (3).

Длина — это основная единица измерения, поэтому сразу записываем

---

*) Представление искомой зависимости в виде степенной функции является допущением, справедливость которого нужно доказать. При строгом использовании метода размерностей такое допущение не делается.

$$[x] = \mathrm{L}, \quad [R] = \mathrm{L}.$$

Отсюда следует, что объемы и площади имеют размерности L^3 и L^2. По определению скорость характеризует путь, проходимый в единицу времени, значит,

$$[v] = \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{T}} = \mathrm{LT}^{-1}.$$

Плотность материала — это количество вещества в единице объема, следовательно,

$$[\rho] = \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{L}^3} = \mathrm{ML}^{-3}.$$

Размерность модуля упругости можно установить, воспользовавшись законом Гука и II законом Ньютона. Из формулы (2) следует, что

$$E = \frac{F}{S}\frac{l}{\Delta l}.$$

По II закону Ньютона сила равна массе, умноженной на ускорение:

$$F = ma.$$

Значит,

$$E = \frac{ma}{S}\frac{l}{\Delta l}. \qquad (5)$$

Ускорение — это изменение скорости в единицу времени, поэтому

$$[a] = \frac{[v]}{[t]} = \mathrm{LT}^{-2}.$$

Размерности остальных величин, входящих в уравнение (5), можно выписать сразу:

$$[m] = M, \quad [S] = \mathrm{L}^2,$$
$$[l] = [\Delta l] = \mathrm{L}.$$

Следовательно,

$$[E] = \frac{\mathrm{MLT}^{-2}}{\mathrm{L}^2}\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{L}} = \mathrm{ML}^{-1}\mathrm{T}^{-2}.$$

Подставим размерности соответствующих величин в равенство (4):

$$\mathrm{L} = (\mathrm{LT}^{-1})^p (\mathrm{ML}^{-3})^b (\mathrm{L})^c (\mathrm{ML}^{-1}\mathrm{T}^{-2})^d,$$

или

$$\mathrm{L}^1 = \mathrm{L}^{p-3b+c-d}\,\mathrm{M}^{b+d}\,\mathrm{T}^{-(p+2d)}. \qquad (6)$$

Формулы размерностей левой и правой частей одинаковы, если равны показатели степени у одинаковых символов в левой и правой частях. Перепишем уравнение (6) в виде

$$\mathrm{L}^1\mathrm{M}^0\mathrm{T}^0 = \mathrm{L}^{p-3b+c-d}\mathrm{M}^{b+d}\mathrm{T}^{-(p+2d)}.$$

Приравнивая показатели степени при одинаковых символах в левой и правой частях, получим систему уравнений

$$\begin{cases} 1 = p - 3b + c - d, \\ 0 = b + d, \\ 0 = p + 2d, \end{cases}$$

из которой находим

$$c = 1, \quad b = \frac{p}{2}, \quad d = -\frac{p}{2}.$$

Подставим эти значения в (3):

$$x = Av^p \rho^{p/2} E^{-p/2} R,$$

или

$$\frac{x}{R} = A\left(\frac{\rho^{1/2} v}{E^{1/2}}\right)^p = A\left(\frac{\rho v^2}{E}\right)^{p/2}. \qquad (7)$$

Полученное выражение определяет вид уравнения для относительной деформации $\frac{x}{R}$ шариков. При этом A и p по-прежнему неизвестны.

Сравнивая выражения (3) и (7), можно заметить, что рассмотрение размерностей величин позволило заменить соотношение между пятью размерными величинами (x, v, ρ, R, E) соотношением между двумя безразмерными величинами:

$$\left[\frac{x}{R}\right] = 1, \quad \left[\frac{\rho v^2}{E}\right] = 1.$$

Если бы мы искали зависимость $x = x(v, \rho, R, E)$ с помощью эксперимента, то использование метода размерностей позволило бы исследовать вместо влияния на x четырех размерных величин влияние только одной безразмерной величины $\frac{\rho v^2}{E}$ на $\frac{x}{R}$. Это дает большие удобства экспериментатору, так как позволяет намного уменьшить число необходимых опытов.

Следует обратить внимание на то, что коэффициент A невозможно определить методом размерностей, поскольку он никак не связан с показателями степени в формулах размерностей величин. Показатель p связан формулами размерностей, поэтому в некоторых случаях его можно определить. Попробуем выделить случаи, когда это можно сделать.

В нашей задаче четыре неизвестных показателя p, b, c, d и три уравнения для их определения. Число уравнений, которые можно составить для отыскания неизвестных коэффициентов, равно числу основных единиц измерений. Для определения численных значений всех неизвестных показателей необходимо, чтобы их число было равно числу независимых уравнений в системе. Это возможно только в двух случаях: если выбрать систему единиц измерений с четырьмя основными единицами или если обоснованно уменьшить число независимых переменных (а значит, и число неизвестных показателей).

Мы рассмотрим второй путь. Предположим, что возникающая при ударе деформация зависит только от модуля упругости E и от кинетической энергии шара $\mathrm{K} = \frac{mv^2}{2}$, где m — масса шара. Здесь мы учитываем размер шара только в выражении для кинетической энергии: $\mathrm{K} = \frac{1}{2}\frac{4}{3}\pi R^3\rho v^2$. (Это грубое допущение, потому что величина деформации зависит не только от кинетической энергии, но и от радиуса шара R.) Такое допущение позволяет приближенно записать:

$$x = A_1 \mathrm{K}^{p_1} E^{b_1}.$$

Размерность кинетической энергии

$$[\mathrm{K}] = [mv^2] = \mathrm{ML^2T^{-2}}.$$

Если теперь составить систему уравнений и определить значения p_1 и b_1 (аналогично тому, как это было сделано выше), то получим

$$\frac{x}{R} = \frac{A_1}{R}\left(\frac{\mathrm{K}}{E}\right)^{1/3} = A_2\left(\frac{\rho v^2}{E}\right)^{1/3}. \qquad (8)$$

Показатель степени $^1/_3$ в формуле (8) близок к показателю степени $^2/_5$, полученному при строгом математическом решении задачи *).

При использовании метода размерностей очень важно правильно сформулировать задачу, потому что формулировка задачи выделяет те параметры, от которых зависит искомая величина. Решая задачу об упругом соударении шаров, мы учли способность материала шаров сопротивляться распространению деформации внутри шара (E), форму и размер исследуемой области (шары радиуса R), внешнее воздействие на исследуемую область (через скорость v и плотность материала каждого шара ρ).

Задача 2. *Найти деформацию, возникающую в шарах радиуса R при действии на них двух сжимающих сил F, направленных по линии, соединяющей центры шаров. Материал шаров одинаков, и его модуль упругости E.*

Здесь нам, как и в первой задаче, известны форма и размеры объектов (шары радиуса R), внешнее воздействие на шары (силы F) и свойства материала шаров (модуль Юнга E).

Для решения задачи нам нужно найти зависимость величины деформации x от величин F, R и E. Будем опять искать эту зависимость в виде

$$x = A_3 F^n R^s E^t, \qquad (9)$$

или для размерностей

$$[x] = [F^n]\,[R^s]\,[E^t]. \qquad (10)$$

Размерность силы F равна

$$[F] = [ma] = \mathrm{MLT^{-2}}.$$

Подставив размерности величин x, F, R, E в (10), получим

$$\mathrm{L} = (\mathrm{MLT^{-2}})^n \mathrm{L}^s (\mathrm{ML^{-1}T^{-2}})^t,$$

или

$$\mathrm{L^1M^0T^0} = \mathrm{L}^{n+s-t}\mathrm{M}^{n+t}\mathrm{T}^{-2n-2t}.$$

Приравняем показатели степени при одинаковых символах в левой и правой частях этого уравнения:

$$\begin{cases} 1 = n + s - t, \\ 0 = n + t, \\ 0 = -2n - 2t. \end{cases}$$

Отсюда

$$t = -n, \quad s = 1 - 2n.$$

Следовательно,

$$x = A_3 F^n R^{1-2n} E^{-n} = A_3 R\left(\frac{F}{ER^2}\right)^n,$$

---

*) Еще об одном способе получения формулы (8) см., например, статью Г. Л. Коткина «Столкновение шариков», «Квант», 1973, № 3.

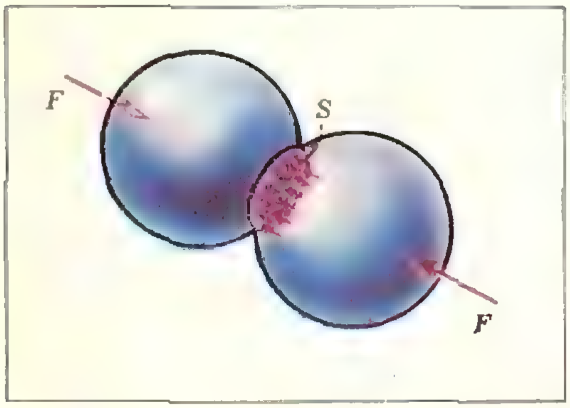


Рис. 2.

или

$$\frac{x}{R} = A_3\left(\frac{F}{ER^2}\right)^n. \qquad (11)$$

В общем случае внешнее воздействие на шары изменяет состояние материала шаров. Это изменение состояния материала характеризуют понятием «напряжение». Напряжением материала в сечении S (рис. 2) под действием внешних сил F называется величина $\sigma = F/S$, где S — площадь сечения. Напряжение, возникающее под действием сил, направленных перпендикулярно к рассматриваемому сечению, называется нормальным напряжением или давлением. Напряжение характеризует удельную нагрузку на материал (нагрузку на единицу площади сечения тела). При увеличении удельных нагрузок материал сначала становится неупругим, а потом разрушается. Поэтому определение напряжений представляет практический интерес.

Задача 3. *Найти напряжение σ в месте соприкосновения двух шаров радиуса R, возникающее под действием сжимающих сил F (см. рис. 2), если шары изготовлены из материала с модулем упругости E.*

Очевидно, что σ зависит от F, E и R:

$$\sigma = \sigma(F, E, R).$$

Будем снова считать, что эта зависимость имеет вид

$$\sigma = A_4 F^{n_1} R^{s_1} E^{t_1}. \qquad (12)$$

Из определения напряжения следует, что размерность напряжения — это размерность силы, поделенная на размерность площади:

$$[\sigma] = \frac{[F]}{[S]} = \frac{\mathrm{MLT^{-2}}}{\mathrm{L^2}} = \mathrm{ML^{-1}T^{-2}}.$$

Следовательно, учитывая (12),

$$\mathrm{ML^{-1}T^{-2}} = (\mathrm{MLT^{-2}})^{n_1}\,\mathrm{L}^{s_1}\,(\mathrm{ML^{-1}T^{-2}})^{t_1},$$

откуда

$$\begin{cases} 1 = n_1 + t_1, \\ -1 = n_1 + s_1 - t_1, \\ -2 = -2n_1 - 2t_1. \end{cases}$$

Проделав соответствующие выкладки, получаем

$$\sigma = A_4 F^{n_1} R^{-2n_1} E^{1-n_1},$$

или

$$\frac{\sigma}{E} = A_4\left(\frac{F}{ER^2}\right)^{n_1}. \qquad (13)$$

Заметим еще раз, что метод размерностей широко используют в тех задачах, где из-за большого числа переменных и сложности уравнений, описывающих явление, аналитическое решение невозможно. В этом случае для отыскания нужных зависимостей проводят эксперимент. Результаты эксперимента обрабатывают с помощью безразмерных комбинаций параметров задачи, которые позволяет выделить метод размерностей. Так, в задачах, рассмотренных в этой статье, метод размерностей позволяет утверждать, что относительные деформации и напряжения определяются не отдельными численными значениями параметров v, ρ, E, R или F, E, R, а численным значением безразмерных комбинаций параметров $\frac{\rho v^2}{E}$ и $\frac{F}{ER^2}$.

Упражнения

1. Показать, что напряжение, возникающее в шарах, движущихся навстречу друг другу со скоростью v, в момент столкновения определяется выражением

$$\frac{\sigma}{E} = A\left(\frac{\rho v^2}{E}\right)^n.$$

2. Показать, что при столкновении двух шаров с радиусами R_1 и R_2 напряжение в месте соприкосновения описывается формулой

$$\frac{\sigma}{E} = A\left(\frac{\rho v^2}{E}\right)^n\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^r.$$

Оценка физической величины

Б. С. Ратнер

В физике, как, впрочем, и в других науках, значения различных величин, получаемые в результате расчетов или экспериментов, определяются с неодинаковой точностью. В одних случаях значение физической величины важно знать с наибольшей точностью, в других случаях достаточно оценить ее примерное значение. Точность подобных оценок может изменяться от порядка величины до нескольких процентов.

В качестве примера оценочного, неточного расчета найдем период колебаний T математического маятника несколько необычным способом. Из школьного курса физики известно, что для малых углов отклонения нити маятника от вертикали величина T находится с большой точностью из формулы $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, где l — длина нити маятника и g — ускорение свободного падения. Наш пример поэтому носит характер чисто иллюстративный — никто в реальных условиях не станет приблизительно оценивать величину, уже известную точно. Зато мы сразу будем знать, насколько близка к истине полученная оценка.

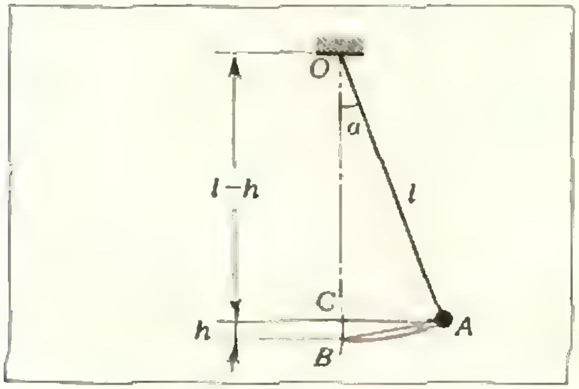


Рис. 1.

Пусть в начальный момент маятник находится в точке A — точке максимального удаления от положения равновесия B, при этом нить составляет с вертикалью малый угол α (рис. 1). Период колебаний T — это учетверенный промежуток времени t, за который маятник опишет дугу AB:

$$T = 4t = 4\,\frac{\smile AB}{v_{\text{ср}}},$$

где $v_{\text{ср}}$ — средняя скорость на этом участке.

Так как угол α мал, дугу $\smile AB$ можно заменить хордой AB. Из прямоугольных треугольников ACO и ACB

$$AC^2 = l^2 - (l - h)^2$$

и

$$AC^2 = AB^2 - h^2,$$

следовательно,

$$AB = \sqrt{2lh}.$$

Предположим, что

$$v_{\text{ср}} = \frac{v_0 + v_l}{2} = \frac{0 + \sqrt{2gh}}{2}.$$

Здесь v_0 — скорость в начальный момент времени, а v_l — скорость маятника при прохождении положения равновесия. Неточность такого предположения очевидна, так как оно соответствует равноускоренному движению, то есть движению под действием постоянной силы. В нашем же случае на шарик действует переменная по времени сила — тангенциальная составляющая силы тяжести. К сожалению, более близкое к истинному значение $v_{\text{ср}}$ с помощью элементарной математики получить нельзя.

Подставим значения для $\smile AB$ и $v_{\text{ср}}$ в выражение для периода колебаний T и получим

$$T = 8\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

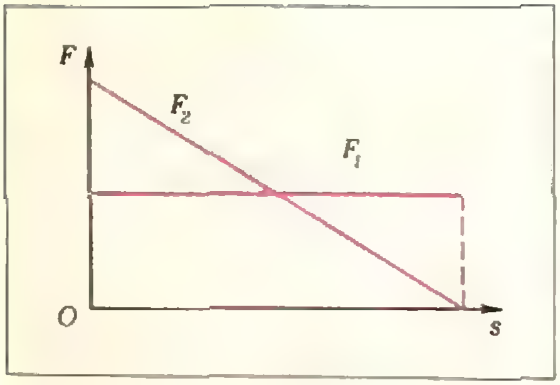


Рис. 2.

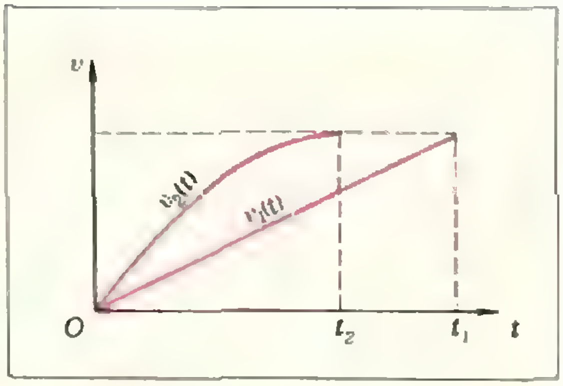


Рис. 3.

Значение периода колебаний, полученное путем оценки, примерно на 27% больше истинного. Чем вызвано такое расхождение? В основном, выбранным нами значением средней скорости, замена дуги хордой малосущественна. На рисунке 2 показаны графики зависимости силы от перемещения для двух случаев: гармонического колебания, когда сила F_2 линейно уменьшается по мере приближения к положению равновесия, и использованного при оценке равноускоренного движения, когда сила F_1 постоянна. Площади под графиками, равные энергии движения, естественно должны быть равны. Попробуем теперь сравнить промежутки времени, затрачиваемые в обоих случаях. Воспользуемся для этого зависимостью $v = v(t)$ (рис. 3). При равноускоренном движении график $v = v_1(t)$ — прямая линия. При гармоническом колебании кривая $v = v_2(t)$ вначале идет выше (тангенс угла наклона кривой при $t = 0$ в два раза больше тангенса наклона прямой), в середине пути наклоны кривых примерно одинаковы, а в конце тангенс угла наклона кривой $v_2(t)$ равен нулю. Но площади под обеими кривыми должны быть равны, так как равны пути. Следовательно, $t_1 > t_2$, что соответствует знаку расхождения в значении периода колебаний.

Случай на олимпиаде

Только что закончилась школьная олимпиада. Всегда самой легкой задачей бывает первая, но в этот раз начались споры даже из-за ответа. В условии первой задачи было сказано: *Найти все значения параметра a, при которых уравнение $x^2 - |x| + a = 0$ имеет единственный корень.*

— Я решал задачу так,— сказал ученик Крестиков. — Известно, что $x^2 = |x|^2$, поэтому вместо данного уравнения можно написать такое:

$$|x|^2 - |x| + a = 0.$$

Так как оно квадратное относительно $|x|$, то единственный корень может быть только в случае, когда дискриминант равен нулю, то есть при $a = \frac{1}{4}$. Значит, $a = \frac{1}{4}$.

— Вовсе нет,— сказал ученик Нуликов.— Смотри, как решал я. Пусть данное уравнение имеет корень x_0. Ясно, что $-x_0$ тоже будет его корнем. А для того чтобы корень был единственный, необходимо, чтобы $x_0 = -x_0$. Это возможно только при $x_0 = 0$. Подставив это значение x в уравнение, видим, что $a = 0$, а не $\frac{1}{4}$!

— Вы оба не довели решение примера до конца,— сказал *ученик Квадратиков*.— Надо было еще...

— Ничего уже не надо,— безапелляционно заявил ученик Треугольников.— Все и так ясно.

Попробуйте ответить на такие вопросы.

1. Чей ответ верен?
2. Что имел в виду Квадратиков?
3. Что ясно Треугольникову?

В. И. Рыжик

р. Амазонка
р. Клязьма
Me
Малюта
оз. Мичиган
р. Волга

С ЧЕГО НАЧИНАЕТСЯ ЛОГИКА?

Ю. А. Гастев

1. Все люди смертны. (I)
2. Сократ — человек.
3. Следовательно, Сократ смертен.

Таким примером *силлогизма* (на более понятном языке — *умозаключения*) начинался в свое время почти каждый учебник логики. «Ну, что ж, все верно, — скажет сегодняшний школьник, никакой такой специальной логики не проходящий. — Невелика, однако ж, наука: больно просто все».

Не торопитесь!

Вот вам еще пример (в замечательное пьесе Эжена Ионеско «Носороги» его изрекает малоприятный персонаж, так и именуемый: «логик»):

1. Все кошки смертны.
2. Сократ смертен. (II)
3. Следовательно, Сократ — кошка.

«Ну что за вздор, — скажете вы, — какая же он кошка?» Но разве *этим* плох «силлогизм» «логика»?! Оцените, пожалуйста, еще два примера:

1. Все кошки смертны.
2. Сократ — кошка. (III)
3. Следовательно, Сократ смертен.

1. Все люди смертны.
2. Сократ смертен. (IV)
3. Следовательно, Сократ — человек.

Так какой же из примеров «вздор»? (III), где опять повторяется чушь про кошку? Ничего подобного! Неверно как раз умозаключение (IV), в котором все *по отдельности* верно: и *посылки* 1 и 2, и *заключение* 3, — но заключение вовсе *не следует* из посылок! И этим же — с интересующей нас сейчас точки зрения — умозаключение (II) отличается от (I).

Итак, логику интересуют не столько сами по себе истинность и ложность отдельных утверждений, сколько прежде всего связь между различными утверждениями, законы (правила), согласно которым из одних истинных утверждений можно с полной уверенностью получать новые истинные утверждения, то есть, как говорят, *нормы правильных рассуждений*.

Так, значит, логика все-таки не безразлична к вопросу об *истинности*? Конечно, нет. Это вообще, по существу, важнейший для нее вопрос. Но, в отличие от обычной разговорной практики, мы будем всегда стремиться к максимальной точности и потому вынуждены будем различать несколько видов истинности (соответственно ложности).

Так называемая *фактическая истинность* предложений, понимаемая как «соответствие действительности», принимается в логике без всякого обсуждения и без заинтересованности к способу удостовериться в ней. То, что Волга впадает в Каспийское море, истинно, но истинно чисто фактически, и дело географии, а не логики, гарантировать эту истинность. Высказывания «Волга впадает в озеро Мичиган» и «Амазонка впадает в Клязьму», конечно, ложны — но опять-таки чисто фактически: ни из каких «законов логики» это вовсе не вытекает. Суждения же «Если Волга впадает в Каспийское море, то Волга впадает в Каспийское море», «Если Волга впадает в озеро Мичиган, то Волга впадает в озеро Мичиган» и «Если Амазонка впадает в Клязьму, то Амазонка впадает в Клязьму» — все три в равной мере — *логически истинны*, то есть истинны, так сказать, исключительно в силу своей структуры, независимо от истинности или ложности их посылок и заключений. Истинность законов Ньютона или закона Кулона удостоверяет опыт, но никак не логика, из которой вовсе не вытекает ни одна из конкретных физических закономерностей. Умозаключение «Греки — люди, Сократ — грек, следовательно, Сократ — человек», напротив, правильно само по себе, а отнюдь не в силу истинности первой посылки, удостоверяемой всемирной историей, или второй, констатирующей некоторый факт истории философии.

Строго говоря, предыдущая фраза весьма условна: просто мы в данном случае молчаливо соглашаемся иметь в виду *именно того* Сократа, а не, скажем, тестя Чернышевского (жену Николая Гавриловича звали Ольгой Сократовной) или кота по кличке «Сократ» (в последнем случае умозаключение (II) не стало бы, разумеется, более законным, но вот в верном умозаключении (III) обе посылки оказались бы истинными). Таким образом, фактическая истинность высказываний часто зависит от ряда дополнительных (не всегда высказываемых явно) соглашений и условий, вследствие чего в таких случаях иногда говорят о *возможной истинности* — в отличие от *необходимой истинности* утверждений типа «12 делится на 3 или нет» и «12 делится на 5 или нет», истинных безотносительно к нашим арифметическим познаниям и даже к тому, в какой системе счисления записаны числа 12, 3 и 5.

Таким образом, *логические истины* — в отличие от опытных, фактических истин конкретных наук и повседневной практики — *не несут нам никакой информации о реальном мире*. Как говорил Лейбниц, это *истины во всех возможных мирах*. Поэтому их называют также *всегда истинными*, или *тождественно истинными* высказываниями. Или еще короче и выразительнее: *тавтологиями*. Так (буквальный перевод с греческого: «то же самое слово») называют в обыденной речи бессодержательные повторения, не сообщающие нам ничего нового. Присмотритесь к логически истинным предложениям вроде «Из A следует A», «B верно или B неверно», «Если истинны высказывания C и D, то истинны высказывания D и C» и т. п., — и вы согласитесь, что термин очень нагляден и уместен.

Не все тавтологии (в логическом смысле этого слова) так уж непосредственно очевидны — иногда их логическую истинность не сразу удается усмотреть из-за чисто внешней сложности, громоздкости их строения. Скажем, высказывание «Если из *А* следует *Б*, из *В* следует *Г*, из *Д* следует *Е*, из *Ж* следует *З*, из *И* следует *К*, из *Л* следует *М*, из *Н* следует *О*, из *П* следует *Р*, из *С* следует *Т*, из *У* следует не-*Ф*, из *Х* следует *Ц*, из *Ч* следует *Ш*, из *Щ* следует *Э*, а из *Ю* следует *Я*, то не-*Б* влечет не-*А*, не-*Г* влечет не-*В*, не-*Е* влечет не-*Д*, не-*З* влечет не-*Ж*, не-*К* влечет не-*И*, не-*М* влечет не-*Л*, не-*О* влечет не-*Н*, не-*Р* влечет не-*П*, не-*Т* влечет не-*С*, *Ф* влечет не-*У*, не-*Ц* влечет не-*Х*, не-*Ш* влечет не-*Ч*, не-*Э* влечет не-*Щ*, а не-*Я* влечет не-*Ю*» тавтологично в той же мере, что и примеры предыдущего абзаца, но проверить это обстоятельство — дело достаточно канительное. Здесь ситуация в точности та же, что в школьной арифметике: пример, требующий произвести тридцать три арифметических действия, ничуть «в принципе» не сложнее, чем пример на одно-два умножения — но кто из нас не помнит, насколько в первом случае вероятнее ошибиться.

Нельзя ли в вопросе о правильности умозаключений и логической истинности высказываний достичь такого же «уровня беглости», как при выполнении и проверке обычных арифметических операций, сколь угодно сложные нагромождения которых нас теперь совсем не пугают? Можно. И именно выявление правил, обеспечивающих такую «беглость», составляет первейшую задачу логики как науки. Опять — все как в арифметике и алгебре: задача не в том, чтобы научиться «автоматически» (то есть без специальных раздумий) складывать 2 + 3, 3 + 5 или даже 678 930 567 + 809 376 542 и т. п., а именно $a + b$ для *произвольных* a и b.

Для алгебры и арифметики два выражения, имеющие одну и ту же форму (см. предыдущий абзац), в определенном смысле равноправны — даже если они и имеют разные «величины». Точно так же, если мы хотим «алгебраизировать» логику, мы должны полностью отвлечься от *содержания* высказываний (изучение которого, как мы уже видели, как правило, вообще не имеет никакого отношения к логике), строя весь наш анализ исключительно на основе их *формы*. [*] Именно в уяснении этого обстоятельства и состояла, собственно говоря, гениальная идея «отца логики» Аристотеля, и именно потому логику как науку [**]) называют *формальной*.

Но что такое *форма предложения* (высказывания)? Если высказывания или отдельные их «элементарные части» обозначаются, как это принято в современной логике, (подобно обычной алгебре) буквами, то тождество (или различие) их формы усмотреть обычно нетрудно. Скажем, предложения «Из *A* и *B* вытекает *A*» и «Из *C* и *F* вытекает *C*», отличающиеся лишь обозначением «компонент», естественно считать равноправными, чего никак нельзя утверждать (во всяком случае, без дополнительных уточнений и соглашений), например, о предложениях «Из *Х* следует *У*» и «Из не-*У* следует не-*Х*». Но когда мы сравниваем предложения обычного языка, дело обстоит не всегда так просто. Например, явно одну и ту же форму имеют умозаключения (I), (III), а также следующие рассуждения:

1. Все целые числа рациональны.
2. 7 — целое число. (V)

3. Следовательно, 7 — рациональное число.

---

[*] Пока разговор идет на уровне метафор и сравнений, нет беды в том, что многие термины не имеют точного, вполне определенного значения; на это, в частности, указывают кавычки. Когда же нам нужны точные термины, мы вводим их с помощью определений или поясняющих примеров и выделяем *курсивом*.

[**]) Не надо забывать, что слово «логика» употребляется в обыденной речи и во многих других смыслах, обычно не уточняемых и в данной статье нас не интересующих.

1. Все целые числа рациональны.
2. π — целое число. (VI)
3. Следовательно, π — рациональное число.

1. Все тигры полосаты.
2. Шер-Хан — тигр. (VII)
3. Следовательно, Шер-Хан полосат.

и т. п. — все они имеют «общий вид»

1. Все x обладают свойством P.
2. Предмет y есть x. (VIII)
3. Следовательно, y обладает свойством P.

Но что вы скажете о следующей серии примеров*)

1. Колумб открыл Америку.
2. На стене висит портрет Колумба. (IX)
3. Следовательно, на стене висит портрет открывателя Америки

1. Пушкин написал «Евгения Онегина».
2. На стене висит портрет Пушкина. (X)
3. Следовательно, на стене висит портрет автора «Онегина».

1. Булат Окуджава написал «Гамлета».
2. На стене висит портрет Окуджавы. (XI)
3. Следовательно, на стене висит портрет автора «Гамлета».

1. Малюта Скуратов создал теорию относительности.
2. На стене висит портрет Малюты. (XII)
3. Следовательно, на стене висит портрет создателя теории относительности.

Пока все в точности одинаково, не правда ли? (Вам, конечно, уже ясно, что нам незачем здесь обсуждать вопрос об авторстве «Гамлета», «Онегина» и теории относительности.) А нельзя ли еще в эту же группу отнести и такой «силлогизм»:

1. Какой-то человек изобрел самовар.
2. На стене висит портрет какого-то человека. (XIII)
3. Следовательно, на стене висит портрет изобретателя самовара.

Вот вам и «тождество формы!» (А ведь «формально», казалось бы, здесь все как в примерах (I), (III), (V)—(VIII) — кто может помешать нам, как и раньше, обозначить подлежащие в посылках и заключениях через x и y?)

Конечно, никакой тут «загадки» нет — вы сами легко объясните, что в русском языке собственные существительные и существительные нарицательные с неопределенными местоимениями в роли подлежащих далеко не равноправны (а в английском, французском и вообще во всех германских и романских языках подобные недоразумения возникнуть не могут при правильном употреблении определенных и неопределенных артиклей). Но мне бы хотелось обратить ваше внимание не только, на простоту и естественность постановки задач формальной логики но и на то, что подлинная ее «формализация» может быть затруднена как раз теми качествами нашего разговорного языка, которые делают его таким удобным, богатым и гибким средством общения между людьми: обилием смысловых оттенков слов и отсутствием жесткой, «стандартной» структуры (формы) предложений.

В современной формальной логике *) затруднения эти преодолеваются использованием специальных *формализованных языков*. В этих языках, как можно прочесть во множестве популярных книжек, все неточности и двусмысленности обычных разговорных языков тщательно изгоняются (разумеется, язык при этом обедняется — но мы и не собираемся писать на нем обычную хорошую прозу, не говоря уже о стихах). Но, с другой стороны, во всех существенных чертах своей структуры эти формализованные языки следуют хорошо нам всем известным закономерностям обычных «человеческих» языков. Мне особенно хотелось бы подчеркнуть это обстоятельство, часто оставляемое в тени авторами популярных книг, подчас слишком настойчиво *противопоставляющих* языки естественные и искусственные: непонимание глубокого родства этих групп языков (при всем их очевидном различии) очень затрудняет усвоение самых начальных, «азбучных» понятий современной логики.

---

*) Навеянной (как и вообще бо́льшая часть настоящего изложения) введением к книге А. Чёрча «Введение в математическую логику», т. 1, перевод с английского, М., ИЛ, 1960.

*) Часто (по очевидным мотивам) называемой *символической логикой*, или *математической логикой*.

Рассмотрение этой «азбуки логики» очень напоминает, как вы сами увидите, синтаксис и морфологию обычного русского (или какого-либо другого) языка. Отчасти поэтому термином *«синтаксис»* часто вообще обозначают изучение *формы* (структуры) формализованных языков. Понятия эти распадаются на две основные группы, первая из которых очень близко соответствует хорошо знакомому вам из школы «разбору по членам предложения». Другая часть синтаксиса формализованных языков очень похожа на ту часть школьной грамматики, которая посвящена вопросу образования (построения) сложных предложений из простых. В отличие от привычной вам схемы изучения грамматических понятий, оказывается более удобным начать со второй группы понятий — она более проста и элементарна, так что ее легко рассматривать независимо от первой. Более того, принято строить специальный язык, соответствующий этой группе грамматических категорий. Этот язык, основной «атомарной» единицей которого служит *высказывание* — то есть предложение, относительно которого имеет смысл говорить, что оно истинно или ложно, — так и называется: *исчисление высказываний*. Никакого «разбора по членам предложения» в исчислении высказываний нет — по той простой причине, что внутренняя структура предложений = «атомов» здесь вообще не рассматривается: «атомы» пока считаются «неделимыми».

Следующий этап в теории формализованных языков, на котором, напротив, уже интересуются «строением атома» и только с помощью которого нам удастся — но не в этот раз — завершить анализ приведенных выше формальных примеров (I) — (XIII), — это так называемое *исчисление предикатов*. Исчисление предикатов обычно строится так, что оно включает в себя исчисление высказываний; точно так же при изучении структуры атома в физике и химии нам незачем забывать, что мы узнали раньше о связи атомов между собой.

Итак, исчисление высказываний. Повторяю: высказывание — это любое предложение (естественного или формализованного языка — безразлично), о котором имеет смысл говорить, что оно истинно или ложно. Именно говорить, точнее даже — спрашивать — но вовсе не отвечать. *У* самой *логики*, как мы уже не раз говорили, попросту *нет средств для ответа на* многие *такие вопросы* (хотя и не на все): логика (исчисление высказываний) готова считаться как с фактом, что высказывания «Волга впадает в Каспийское море» и «2 × 2 = 4» истинны, а высказывания «Волга впадает в Индийский океан» «2 × 2 = 5» ложны. Но ее выводы никак не зависят от этих фактов и остались бы верными, если геологическая катастрофа изменила бы течение Волги или если бы мы изменили привычные написания цифр, условных, как и всякие обозначения.

Более того, логика высказываний (так часто говорят вместо «исчисление высказываний») может вполне обойтись (и фактически обходится) без ответа на вопросы *что такое* «истина» и *что такое* «ложь». Вместо этого достаточно бывает говорить просто о двух различных *значениях истинности* (или *истинностных значениях*), не задаваясь вопросом «а что это значит». Одно из этих значений принято называть «выделенным» и обозначать через «и» (от «истина»), «*t*» (от «true») или, например, просто «1» (без всяких «естественных аналогий» с обычной логической интуицией), а второе — «невыделенное» —

через «л» («ложь»), «f» («falce») или «0». Каждое высказывание, как и высказывания, из которых оно состоит (и от которых, в зависимости от способа их соединения, зависит его значение), может принимать два различных значения, вовсе не обязательно называемые «истиной» и «ложью» и ассоциируемые с этими понятиями. Таким образом, исчисление высказываний можно понимать как *«алгебру логики»* — исследование функций, принимающих, так же как и их аргументы, два различных значения. Эти значения можно (но, повторяем, вовсе не обязательно) называть истиной и ложью. Если мы не только принимаем эти наименования, но и интересуемся их связью с «обычными» понятиями истины и лжи (и пытаемся уточнить их), то мы занимаемся *семантикой*.

В противном случае мы, оставаясь в рамках чистого *синтаксиса*, можем вообще спокойно забыть о происхождении нашей «логической» терминологии. Такое «чистое» исчисление высказываний есть попросту раздел *комбинаторики*, и «логические задачи», рассматриваемые в нем, ничем, в принципе, не отличаются от обычных комбинаторных задач.

Итак, кроме самих по себе высказываний, исчисление высказываний изучает различные функции между ними — различные способы образования «сложных» высказываний из «простых». В рамках семантики эти функции очень напоминают обычные союзы русского (или любого другого) языка, с помощью которых сложные предложения строятся из простых. Но эту связь с обычным языком (и с «обычной логикой») мы отложим до следующего разговора. Поэтому мы закончим нашу статью тем, чем обычно подобные статьи начинаются: определением нескольких «основных» таких функций, или, как их называют, *логических операций*.

Поскольку речь идет о функциях, принимающих, как и их аргументы, конечное число значений (а именно два), мы сможем задать интересующие нас функции явным указанием на то, какие именно значения они принимают при всевозможных распределениях значений аргументов («простых составляющих высказываний»). Такие задания-определения удобно представлять в виде так называемых *истинностных таблиц*, на «входах» которых указаны значения исходных высказываний, а на «выходах» (в клетках самой таблицы) — значения результирующего высказывания.

Вот эти логические операции.

1) *Отрицание* истинного высказывания ложно, а отрицание ложного высказывания истинно. Это, обозначаемая символом «⌝» операция, соответствующая частице «не» в русском языке, задается следующей истинностной таблицей:

A	$\urcorner A$
и	л
л	и

2) *Конъюнкция* двух истинных высказываний (соответствующая союзу «и» между ними, обозначение — $\wedge$) истинна, если же хоть одно из них ложно — ложна:

A	B	$A \wedge B$
и	и	и
и	л	л
л	и	л
л	л	л

3) *Дизъюнкция* двух высказываний (обозначение — $\vee$, читается как «или») истинна, если истинно хотя бы одно из них, и ложна, если оба они ложны:

A	B	$A \vee B$
и	и	и
и	л	и
л	и	и
л	л	л

(Окончание см с 35)

А. М. Лопшиц

Функциональные уравнения

Прежде чем начать чтение этой статьи, вам нужно убедиться, что вы хорошо владеете важным математическим понятием «функция». Поэтому мы советуем прочитать статью А. Н. Колмогорова *) и те страницы школьных учебников, в которых это понятие вводится и разъясняется.

Напомним, что для задания функции от вещественного аргумента, значения которой также являются вещественными числами (только такие функции мы будем рассматривать в нашей статье), следует: 1) раньше всего указать «область ее определения», то есть указать то множество вещественных чисел, из которого будут выбираться значения x аргумента, и 2) отчетливо сформулировать правило, по которому для каждого такого значения x будет построено соответствующее ему вещественное число — его называют: значение функции, соответствующее выбранному значению аргумента. Если какая-либо функция обозначена символом, скажем, $Ф$, то значение, которое она принимает для выбранного значения x аргумента, обозначают $Ф(x)$.

Каждой рассматриваемой функции (каждому правилу) полезно присвоить название. Так, например, функцию, область определения которой есть множество всех вещественных чисел, а правило построения значения функций, соответствующего выбранному значению x аргумента, состоит в том, что это значение умножается на некоторое фиксированное вещественное число a, называют *линейной однородной функцией.*

Именно такая функция и будет главным действующим лицом нашей статьи.

1. Линейная однородная функция аддитивна

Среди разнообразных функций, изучаемых в математике, читатель несомненно отметил одну, которая выделяется среди остальных своей особой простотой — эта функция $Л_a$ определена для всех вещественных значений аргумента x и ее значения определяются формулой

$$Л_a(x) = ax$$

(в которой a есть некоторое заданное вещественное число). Ее мы и назвали: *линейная однородная функция.* Она встречается во всех тех задачах физики (и не только физики), в которых изучаются пропорциональные величины.

Наблюдения преподавателей показывают, что одно ее свойство школьники ощущают очень хорошо, настолько хорошо, что часто (даже слишком часто!) приписывают его другим, более сложным функциям. В самом деле, замечал ли читатель-школьник, что некоторые его друзья по классу, начавши изучение тригонометрических функций, считают, что синус суммы двух углов равен сумме синусов этих углов? Суть этой «детской» ошибки в том, что школьник, познакомившись с какой-либо новой функцией — назовем ее Φ,— склонен считать, что она должна обладать следующим «простым» свойством:

---

*) «Квант», 1970, №№ 1 и 2.

$$\Phi(x_1 + x_2) = \Phi(x_1) + \Phi(x_2). \quad (1)$$

Линейная однородная функция этим свойством действительно (проверьте!) обладает, но, увы, им *не обладают другие функции*, изучаемые в школе.

Всякую функцию, обладающую свойством, выраженным равенством (1), называют *аддитивной* функцией. Легко проверить, что *линейная неоднородная* функция, то есть функция G, определенная для любого вещественного значения аргумента формулой

$$G(x) = ax + b \qquad (b \neq 0),$$

уже не является аддитивной; точно так же не обладают свойством аддитивности и функции, определенные для любого значения аргумента x, значения которых определяются по следующим правилам:

$$x \to ax^2 + bx + c,$$

$$x \to \frac{1}{x^2 + a^2},$$

и многие, многие другие функции.

Да существует ли хоть одна какая-нибудь аддитивная функция от вещественного аргумента, отличная от линейной однородной,— спросит читатель.

Ответ на этот вопрос он получит, если не поленится внимательно прочитать эту небольшую статью.

2. Исследования произвольной аддитивной функции

1. Если функция Φ обладает свойством (1), то, как легко проверить, она обладает и следующим свойством:

$$\Phi(x_1 + x_2 + x_3) = \Phi(x_1) + \Phi(x_2) + \Phi(x_3). \quad (1')$$

В самом деле, в силу свойства (1) имеем

$$\Phi(x_1 + x_2 + x_3) = \Phi((x_1 + x_2) + x_3) = \Phi(x_1 + x_2) + \Phi(x_3) = \Phi(x_1) + \Phi(x_2) + \Phi(x_3).$$

Читателя не затруднит доказать, что и

$$\Phi(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = \Phi(x_1) + \Phi(x_2) + \ldots + \Phi(x_n) \quad (1'')$$

(придется, конечно, воспользоваться методом математической индукции).

Из формулы (1″) следует равенство

$$\Phi(nx) = n\Phi(x) \qquad (2)$$

(n — произвольное *целое* положительное число).

Так как равенство (2) справедливо при любом значении x, положим в нем x равным $\frac{m}{n}y$ (m и n — целые положительные). Получим

$$\Phi(my) = n\Phi\left(\frac{m}{n}y\right).$$

Вновь используя равенство (2), получим

$$m\Phi(y) = n\Phi\left(\frac{m}{n}y\right),$$

то есть

$$\Phi\left(\frac{m}{n}y\right) = \frac{m}{n}\Phi(y). \qquad (2')$$

Итак, мы убедились в том, что если функция Φ аддитивна, то для любого положительного рационального числа $\alpha = \frac{m}{n}$ имеет место равенство

$$\Phi(\alpha x) = \alpha\Phi(x) \qquad (3)$$

(каково бы ни было вещественное число x!).

Это замечательное соотношение дает нам *возможность вычислить для любой аддитивной функции Φ ее значение для любого положительного рационального значения x аргумента, если задано только одно ее значение — а именно то, которое она принимает, когда аргумент равен единице*.

В самом деле, положив в (3) x равным единице, мы получим

$$\Phi(\alpha) = \alpha\Phi(1). \qquad (4)$$

2. Не менее удивительным является то, что *формула (4) для вычисления значений любой аддитивной функции Φ применима для всех рациональных значений аргумента* (а не только для положительных его значений).

а) Прежде всего убедимся в том, что

$$\Phi(0) = 0\Phi(1),$$

то есть что

$$\Phi(0) = 0.$$

В самом деле, в силу аддитивности функции Φ, имеет место равенство

$$\Phi(x + 0) = \Phi(x) + \Phi(0),$$

то есть

$$\Phi(x) = \Phi(x) + \Phi(0)$$

и, следовательно

$$\Phi(0) = 0. \qquad (5)$$

б) Далее, в силу аддитивности функции Φ, имеем

$$\Phi(x) + \Phi(-x) = \\ = \Phi(x + (-x)) = \Phi(0)$$

откуда (в силу (5))

$$\Phi(-x) = -\Phi(x) \qquad (6)$$

(каково бы ни было вещественное значение x!).

Итак, мы убедились, что *любая аддитивная функция есть нечетная функция*.

Теперь мы уже можем доказать, что формула (4) годится для вычисления значений аддитивной функции и для *отрицательных* рациональных значений аргумента.

Пусть β — какое-либо отрицательное рациональное число; тогда, в силу (6),

$$\Phi(\beta) = -\Phi(-\beta). \qquad (7)$$

Здесь $(-\beta)$ уже положительное рациональное число, поэтому мы можем использовать формулу (4)

$$\Phi(-\beta) = (-\beta)\,\Phi(1).$$

Подставляя последнее соотношение в (7), получим

$$\Phi(\beta) = \beta\Phi(1),$$

что мы и хотели доказать.

3. Функции, не ограниченные сверху

«Вот и ответ на вопрос, поставленный в конце первого пункта этой статьи — скажет читатель: никаких аддитивных функций, кроме однородных линейных, не существует!»

Нет, это не так!

Ведь мы доказали формулу (4) только для рациональных значений x. Применять же ее для вычисления значений нашей аддитивной функции Φ для x, скажем, равного $\sqrt{2}$, у нас нет никаких оснований.

Неудивительно поэтому, что математики настойчиво продолжали искать аддитивную функцию, которая отличалась бы от линейной однородной.

Найти такую функцию действительно нелегко! Ведь мы уже убедились, что ее значения (если она существует!) должны совпадать со значениями некоторой линейной однородной функции $x \to xa$, грубо говоря, «почти» для всех x: хотя рациональные числа и не исчерпывают множества всех вещественных чисел, но их практически достаточно для приближенного решения задач с любой степенью точности.

Построил пример такой функции в 1905 году немецкий математик Гамель (Hamel) *).

Но в этой статье, к сожалению, мы не сможем познакомить читателя с этим примером — даже если пойдем на отступления от строго математического изложения. Рассуждения Гамеля настолько своеобразны, что полностью разобраться в них можно, лишь обладая математическими навыками и культурой, приобретающимися в результате длительного изучения математики. Поэтому мы отметим здесь только одно важное свойство функции, построенной Гамелем: *среди значений, которые она принимает на произвольно выбранном*

---

*) Статья Гамеля напечатана в журнале Matematiche Annalen в томе 60, с. 454—462, 1905 г.

Нам не известно ни одного изложения этого результата Гамеля на русском языке.

интервале (p, q) (*то есть при* $p \leqslant x \leqslant q$), *имеется такое, которое больше любого произвольно взятого положительного числа.*

Про такую функцию говорят, что на интервале (p, q) она *не ограничена сверху*.

Примером функции, не ограниченной сверху, например, на интервале (−1, 1), может служить функция H, определяемая формулой $H(x) = \frac{1}{x}$ для значений аргумента, не равных нулю, и принимающая значение нуль для $x = 0$ (рис. 1). Другим примером может быть функция, определяемая формулой

$$P(x) = \frac{1}{(x-p)(x-q)}$$

при $x \neq p$ и $x \neq q$, и принимающая значение нуль для $x = p$ и $x = q$.

Эта функция не ограничена сверху на любом интервале, содержащем либо точку p, либо точку q (см., например, рисунок 2).

Однако в обоих этих примерах существует такой интервал, в котором эти функции все же ограничены сверху (функция называется ограниченной сверху на данном интервале, если значения, которые она принимает на этом интервале, остаются меньше некоторого наперед заданного числа). А вот функция Гамеля, как мы уже сказали, не ограничена сверху на любом (сколь угодно малом!) интервале. Это и делает открытие Гамеля еще более интересным: он не только построил пример аддитивной функции, не являющейся линейной, но и ввел в математику функции, обладающие «странным» (для наглядного восприятия) свойством: они не ограничены сверху в любом интервале.

Откажемся теперь от рассмотрения таких «*странных*» функций и поищем *аддитивную функцию, ограниченную сверху хотя бы в каком-нибудь одном интервале.*

4. Аддитивная функция, ограниченная сверху хотя бы на одном интервале

1. Пусть аддитивная функция Φ ограничена сверху на интервале (p, $p + s$), где s — некоторое положительное число. Легко убедиться, что тогда Φ ограничена сверху и на интервале (0, s).

В самом деле, пусть x — любое положительное число, не большее чем s, тогда число $p + x$ лежит в интервале (p, $p + s$) и, следовательно, $\Phi(p + x)$ меньше, чем некоторое заданное число M; в силу аддитивности Φ,

$$\Phi(p) + \Phi(x) < M$$

и, следовательно,

$$\Phi(x) < M - \Phi(p)$$

для любого значения x, лежащего в интервале (0, s).

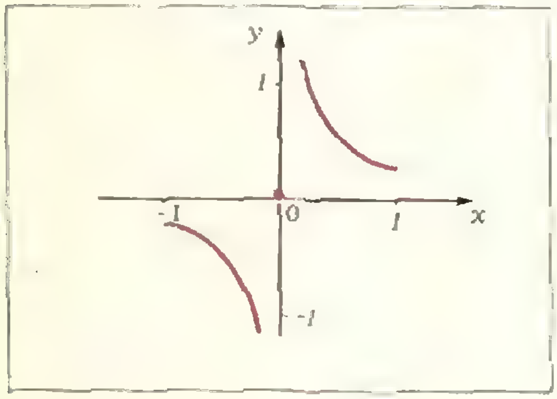


Рис. 1.

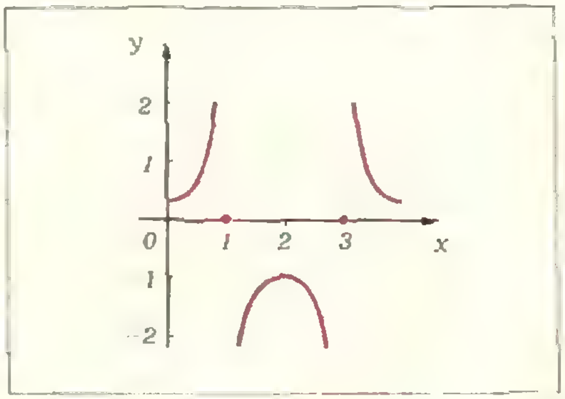


Рис. 2.

2. Рассмотрим теперь новую функцию G, значение которой для произвольного значения x аргумента будем вычислять по формуле

$$G(x) = \Phi(x) - \frac{\Phi(s)}{s}x. \qquad (8)$$

Функция $G(x)$ тоже ограничена сверху на интервале $(0, s)$: ее значение на этом интервале меньше чем $M' = M - \Phi(p) + |\Phi(s)|$.

3. Очевидно (см. (8)), что функция G аддитивна и что $G(s) = 0$. Поэтому

$$G(x+s) = G(x) + G(s) = G(x)$$

и, следовательно, число s *период* функции G!

Таким образом, значение, которое принимает функция G для какого-либо значения аргумента x, равно значению, которое она принимает для некоторого значения аргумента из интервала $(0, s)$, и, следовательно, оно меньше, чем M', то есть $G(x) < M'$ для любого значения x.

4. Теперь мы уже можем доказать утверждение — быть может, и неожиданное для читателя:

Любое значение функции G равно нулю.

Это мы сделаем «методом от противного». Пусть для какого-либо положительного значения x_0 аргумента x, меньшего чем s, соответствующее ему значение $G(x_0)$ отлично от нуля, $G(x_0) \neq 0$.

Тогда, в силу аддитивности функции G, имеем (см. формулу (4))

$$G(\alpha x_0) = \alpha G(x_0).$$

Подобрав α так, чтобы

$$\alpha G(x_0) > M',$$

мы получим

$$G(\alpha x_0) > M'.$$

А это противоречит тому, что $G(x) < M'$ при всех x. Следовательно, наше предположение было неверно, и $G(x_0) = 0$ для любого значения x_0, лежащего в интервале $(0, s)$. Приняв же во внимание, что функция $G(x)$ имеет период s, придем к выводу, что

$$G(x) = 0 \qquad (9)$$

для любого значения x.

5. Возвращаясь теперь к определению (8) функции G, получим, в силу (9), что

$$\Phi(x) = ax \quad \left(\text{где } a = \frac{\Phi(s)}{s}\right).$$

Вероятно, читатель предчувствовал этот результат. Вот его словесная формулировка: *если аддитивная функция ограничена сверху хотя бы на одном (даже сколь угодно малом) интервале, то она линейная однородная функция!*

5. Функциональные уравнения

Этот результат можно сформулировать еще и так:

Задача — *найти функцию Φ, определенную для любого вещественного значения аргумента и обладающую тем свойством, что для любых значений x и y аргумента имеет место равенство*

$$\Phi(x+y) = \Phi(x) + \Phi(y) \qquad (10)$$

имеет много решений. И если даже искать только те решения Φ этого *уравнения*, которые ограничены сверху — хотя бы на каком-нибудь одном интервале,— то все же решений будет много. Но любое такое решение есть линейная однородная функция, то есть функция вида

$$x \to ax$$

(a — некоторое вещественное число).

Следует сказать, что эту задачу принято формулировать следующим образом:

Найти функцию Φ, удовлетворяющую функциональному уравнению (10).

Задачи, в которых требуется найти функцию, обладающую некоторым указанным свойством, редко встречаются в школе, но часто рассматриваются в математике и играют в ней важную роль. Вот еще одна такая задача:

Найти функцию G, обладающую тем свойством, что для любых значений x и y аргумента (принадлежащих, конечно, области определения искомой функции G имеет место *равенство*

$$G(x+y)=G(x)+G(y)+p, \quad (11)$$

в котором p — заданное число.

Читатель легко проверит; что функция

$$x \to ax - p$$

является ее решением. Заманчиво узнать, существуют ли какие-либо другие решения?

Интересна и такая задача: решить функциональное уравнение

$$H(x+2y)+H(x)=2H(x+y). \quad (12)$$

Легко убедиться, что функция

$$x \to ax + b$$

(a и b — произвольные числа) является решением уравнения (12). Существуют ли другие решения?

Выдающиеся математики прошлого времени — и среди них такие, как Эйлер, Гаус, Коши, Абель, Лобачевский, Вейерштрас, Дарбу, Гильберт,— часто обращались к функциональным уравнениям и использовали их для решения многих важных вопросов. Систематическое изучение функциональных уравнений начал еще Коши — в 1821 году он издал свой Курс Анализа *) (этот курс он читал в Парижском политехническом институте). В нем он подробно (но все же недостаточно полно) изучил рассмотренное в нашей статье функциональное уравнение (10)— его называют теперь «функциональное уравнение Коши»; это уравнение особенно часто используется в различных математических теориях. Вместе с ним Коши рассматривает и следующие функциональные уравнения:

$$\Phi(x+y)=\Phi(x)\Phi(y),$$
$$G(xy)=G(x)G(y),$$
$$H(xy)=H(x)+H(y).$$

«Частные» решения этих уравнений читатель несомненно сумеет найти. Значительно более трудно найти для каждого из них все решения. Мы надеемся поговорить об этом в другой статье.

С чего начинается логика?

(Окончание. Начало см. с. 24)

4) *Импликация* высказываний A и B (символически $A \supset B$, читается как «A влечет B», или «Из A следует B», или «Если A, то B») ложна, если *посылка* A истинна, а *заключение* B ложно, и истинна во всех остальных случаях:

A	B	$A \supset B$
и	и	и
и	л	л
л	и	и
л	л	и

5) *Эквиваленция* высказываний A и B ($A \sim B$ читается как «A равносильно B») истинна, если A и B имеют одинаковые истинностные значения, и ложна, если значения истинности A и B различны:

A	B	$A \sim B$
и	и	и
и	л	л
л	и	л
л	л	и

Конечно, определения эти сами по себе достаточно просты и запомнить их нетрудно. Но они вызывают ряд вопросов, без ответа на которые дальнейшее обсуждение темы было бы совершенно беспредметным. Например, почему мы именно так, а не иначе определили и назвали эти операции? Иными словами, какая связь между всеми этими таблицами и «обычным» смыслом таких всем известных слов, как «не», «и», «или», «следует»? Каковы основания считать эти операции «основными»? Какие еще (не «основные») бывают и могут быть логические операции? Да и что в них, собственно говоря, «логического»? Ограничимся пока советом: подумайте над всеми этими вопросами сами.

---

*) A. Cauchy, Cours d'analyse de l'Ecole polytechnique I. Analyse algebreque. V (Paris, 1821).

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
КРУЖОК

Арифметико-геометрическая прогрессия

Я. Н. Суконник

Математику можно изучать по-разному. Можно слушать лекции или взять толстую книгу и читать ее подряд: определения, теоремы, доказательства. А можно действовать более активно: прочитать определения и формулировки теорем, отложить книгу в сторону и придумывать доказательства самому. Первый способ поначалу дает возможность двигаться быстрее. Но только второй способ позволяет глубоко разобраться в математической теории, надолго ее запомнить и научиться применять. Поэтому именно этот способ — самостоятельное открытие старых истин — часто используется в работе математических семинаров, школ, кружков.

Именно на такую активную работу читателей рассчитаны статьи, помещаемые в разделе «Математический кружок». Обычно эти статьи представляют собой цикл задач, объединенных общей темой или методом решения. Некоторые из них решены в тексте, но большинство — и легких, и трудных — оставлены для самостоятельного решения читателю. Иногда краткие решения этих задач (или указания и ответы) помещаются в том же номере, но чаще — в одном из следующих номеров журнала на последних страницах.

Как правило, наш «Математический кружок» доступен ученикам 8—9, а иногда и 7 классов. Письма с замечаниями и пожеланиями по поводу этого раздела просьба присылать с пометкой «Математический кружок» на конверте.

Многие участники Всесоюзной олимпиады ведут регулярную переписку с «Математическим кружком».

В этой статье рассматривается одна последовательность, которую можно условно назвать *арифметико-геометрической прогрессией*; она задается следующим рекуррентным соотношением:

$$u_1 = a_1, \quad u_{n+1} = qu_n + d, \qquad (1)$$

где q и d — постоянные параметры. Положив в (1) $q = 1$, получим *арифметическую* прогрессию

$$u_1 = a_1, \quad u_{n+1} = u_n + d,$$

положив $d = 0$, — *геометрическую*:

$$u_1 = a_1, \quad u_{n+1} = qu_n.$$

(Этим и объясняется то, что мы последовательность (1) назвали арифметико-геометрической прогрессией. По аналогии будем говорить, что q — знаменатель, а d — разность арифметико-геометрической прогрессии.)

Примеры арифметико-геометрических прогрессий

а) $1, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, \frac{15}{8}, \frac{31}{16}, \ldots$

$$\left(u_1 = 1,\ q = \frac{1}{2},\ d = 1\right);$$

б) $-1, \frac{3}{2}, \frac{1}{4}, \frac{7}{8}, \frac{9}{16}, \ldots$

$$\left(u_1 = -1,\ q = -\frac{1}{2},\ d = 1\right).$$

На мысль поговорить о таких последовательностях нас натолкнула задача М97, которая была опубликована в «Кванте» № 8 за 1971 год (в «Задачнике «Кванта»). Вот ее условие (несколько видоизмененное):

В трапеции AA_1B_1B с основаниями $AB = a$ и $A_1B_1 = a_1$ $(a < a_1)$ проведен отрезок A_2B_2, соединяющий середины диагоналей. В полученной трапеции AA_2B_2B снова проведен отрезок A_3B_3, соединяющий середины диагоналей, и так далее. Найти длину отрезка $A_{n+1}B_{n+1}$.

На рисунке 1 изображена трапеция AA_nB_nB — здесь $AB = a$, CD — средняя линия трапеции, A_{n+1} и B_{n+1} — середины диагоналей A_nB и AB_n. Понятно, что точки A_{n+1} и B_{n+1} лежат на CD. Обозначив длины отрезков A_nB_n и $A_{n+1}B_{n+1}$ через a_n и a_{n+1}, получим

$$a_{n+1} = |A_{n+1}B_{n+1}| = |A_{n+1}D| - |B_{n+1}D| = \frac{1}{2}a_n - \frac{1}{2}a,$$

и, значит, длины отрезков A_nB_n образуют как раз *арифметико-геометрическую прогрессию.*

Арифметико-геометрическая прогрессия обладает признаками и арифметической, и геометрической прогрессий. Выведем формулу ее общего члена.

Пусть в соотношении (1) $q \neq 1$ (и $d \neq 0$). Прибавив к обеим частям (1) выражение $\frac{d}{q-1}$, получим

$$u_{n+1} + \frac{d}{q-1} = q\left(u_n + \frac{d}{q-1}\right).$$

Учитывая, что это соотношение — рекуррентное, напишем аналогичные равенства для $k = n+1, n, \ldots, 2$:

$$u_{n+1} + \frac{d}{q-1} = q\left(u_n + \frac{d}{q-1}\right),$$

. . . .

$$u_2 + \frac{d}{q-1} = q\left(a_1 + \frac{d}{q-1}\right).$$

Перемножив выписанные равенства и сократив одинаковые сомножители, получим *формулу общего члена арифметико-геометрической прогрессии*

$$\boxed{u_{n+1} = q^n\left(a_1 + \frac{d}{q-1}\right) + \frac{d}{1-q}.} \qquad (2)$$

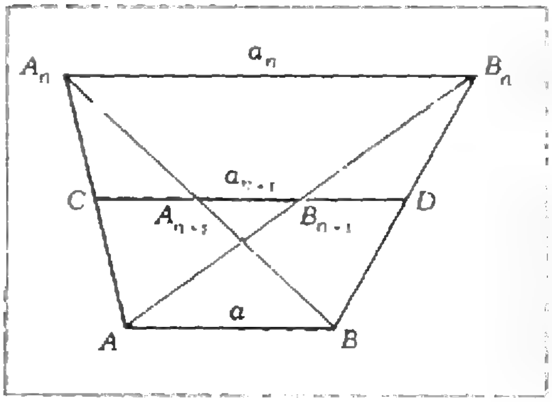


Рис. 1.

В задаче М97 $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n - \frac{1}{2}a$, то есть $q = \frac{1}{2}$, $d = -\frac{1}{2}a$; поэтому

$$a_{n+1} = |A_{n+1}B_{n+1}| = \frac{1}{2^n}(a_1 + a) - a.$$

Сформулируем теперь некоторые основные **свойства** арифметико-геометрической прогрессии (их доказательства мы оставляем читателям).

1°. Арифметико-геометрическая прогрессия (1) является *возвратной последовательностью второго порядка* *) и задается уравнением

$$u_{n+1} = (q+1)u_n - qu_{n-1}. \qquad (3)$$

В частности, при $q = 1$ получаем характеристическое свойство арифметической прогрессии

$$u_n = \frac{u_{n-1} + u_{n+1}}{2}.$$

Следствие. Знаменатель q арифметико-геометрической прогрессии определяется по формуле

$$q = \frac{u_{n+1} - u_n}{u_n - u_{n-1}}. \qquad (4)$$

2°. Разность d арифметико-геометрической прогрессии определяется

---

*) Последовательность $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ называется *возвратной последовательностью k-го порядка*, если существует натуральное число k и числа $a_1, a_2, \ldots, a_k$ такие, что, начиная с некоторого номера N и для всех следующих номеров $m \geqslant N$

$$u_{m+k} = a_1u_{m+k-1} + a_2u_{m+k-2} + \ldots + a_ku_m.$$

Последнее соотношение называется *возвратным уравнением k-го порядка.*

по формуле

$$d = \frac{u_n^2 - u_{n-1} \cdot u_{n+1}}{u_n - u_{n-1}}. \qquad (5)$$

В частности, если $d = 0$ (и $q \neq 1$), получаем характеристическое свойство геометрической прогрессии

$$u_n = \sqrt{u_{n-1} \cdot u_{n+1}}.$$

3° (*характеристическое свойство арифметико-геометрической прогрессии*). Последовательность $\{a_n\}$, где $a_n = u_{n+1} - u_n$, является геометрической прогрессией с тем же знаменателем q, то есть

$$|u_{n+1} - u_n| = \sqrt{|u_n - u_{n-1}| \cdot |u_{n+2} - u_{n+1}|}. \qquad (6)$$

4°. Последовательность

$$S_1 = u_1, \; S_2 = u_1 + u_2, \; \ldots, \; S_n = u_1 + \ldots + u_n, \; S_{n+1} = S_n + u_{n+1}, \; \ldots$$

частичных сумм членов арифметико-геометрической прогрессии является возвратной последовательностью третьего порядка и задается следующим уравнением:

$$S_{n+1} = (q+2) S_n - (2q+1) S_{n-1} + q S_{n-2}. \qquad (7)$$

5°. Если последовательность частичных сумм $S_1, \ldots, S_n, \ldots$ является арифметико-геометрической прогрессией, то последовательность $u_1, \ldots, u_n \ldots$ является геометрической прогрессией.

Замечание. Из формулы общего члена арифметико-геометрической прогрессии (см. формулу (2)) следует, что

а) при $|q| < 1$ арифметико-геометрическая прогрессия *сходится* (причем при $0 \leqslant q < 1$ — *монотонно*) к числу

$$A = \lim_{n \to \infty} u_n = \frac{d}{1-q};$$

б) при $|q| \geqslant 1$ арифметико-геометрическая прогрессия *расходится*.

В частности, устремив в задаче М97 число n к бесконечности, получим, что в пределе

$$b = \lim_{n \to \infty} |A_{n+1}B_{n+1}| = \left| \frac{-\frac{1}{2} a}{1 - \frac{1}{2}} \right| = a.$$

(Интересно, что если в задаче М97 вместо условия $a < a_1$ потребовать $a > a_1$, то тогда

$$|A_{n+1}B_{n+1}| = -\frac{1}{2} a_n + \frac{1}{2} a,$$

то есть

$$|A_{n+1}B_{n+1}| = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \left(a_1 - \frac{a}{3}\right) + \frac{a}{3},$$

и

$$b = \lim_{n \to \infty} A_{n+1}B_{n+1} = \frac{a}{3}\Big).$$

Знакомство с арифметико-геометрической прогрессией иногда помогает при решении некоторых геометрических задач. Рассмотрим, например, такую задачу:

Высоты остроугольного треугольника $A_1B_1C_1$ продолжены до пересечения с описанной окружностью соответственно в точках A_2, B_2, C_2, служащих вершинами остроугольного треугольника $A_2B_2C_2$. Высоты треугольника $A_2B_2C_2$ продолжены до пересечения с описанной окружностью соответственно в точках A_3, B_3, C_3, служащих вершинами остроугольного треугольника $A_3B_3C_3$, и так далее — до треугольника $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$ включительно. Найти углы треугольника $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$, считая углы треугольника $A_1B_1C_1$ известными.

Решение. На рисунке 2 изображены окружность и вписанные в нее остроугольные треугольники $A_nB_nC_n$ и $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$. Выразим угол A_{n+1} через угол A_n:

$$\begin{aligned}\angle A_{n+1} &= \angle B_{n+1}A_{n+1}C_{n+1} = \\ &= \angle B_{n+1}A_{n+1}A_n + \angle A_nA_{n+1}C_{n+1} = \\ &= \angle B_{n+1}B_nA_n + \angle A_nC_nC_{n+1} = \\ &= \left(\frac{\pi}{2} - \angle A_n\right) + \\ &+ \left(\frac{\pi}{2} - \angle A_n\right) = \pi - 2\angle A_n,\end{aligned}$$

то есть

$$\angle A_{n+1} = -2\angle A_n + \pi$$

и последовательность углов $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$ образует арифметико-геометрическую прогрессию. По формуле (2) находим

$$\angle A_{n+1} = (-2)^n \cdot \left(\angle A_1 - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\pi}{3}.$$

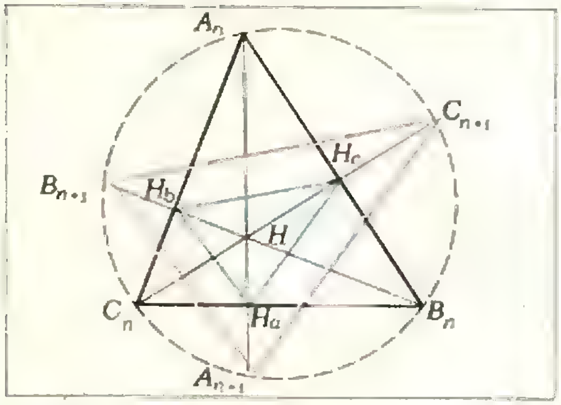


Рис. 2.

Аналогично получаем

$$\angle B_{n+1} = (-2)^n \cdot \left(\angle B_1 - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\pi}{3}$$

и

$$\angle C_{n+1} = (-2)^n \cdot \left(\angle C_1 - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\pi}{3}.$$

В заключение мы предлагаем читателям несколько задач для самостоятельного решения.

Упражнения

1. Около остроугольного треугольника $A_1B_1C_1$ описан остроугольный треугольник $A_2B_2C_2$, стороны которого являются касательными к окружности, описанной около треугольника $A_1B_1C_1$ в его вершинах. Около треугольника $A_2B_2C_2$ аналогичным образом описан остроугольный треугольник $A_3B_3C_3$ и так далее, вплоть до треугольника $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$ включительно. Найти углы треугольника $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$.

2. Около треугольника $A_1B_1C_1$ описан треугольник $A_2B_2C_2$, вершины которого совпадают с центрами вневписанных окружностей в треугольник $A_1B_1C_1$. Около треугольника $A_2B_2C_2$ аналогичным образом описан треугольник $A_3B_3C_3$ и так далее. Найти углы треугольника $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$. Доказать, что треугольник $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$ при неограниченном возрастании n стремится к правильному треугольнику.

3. Биссектрисы треугольника $A_1B_1C_1$ продолжены до пересечения с описанной вокруг треугольника $A_1B_1C_1$ окружностью соответственно в точках A_2, B_2, C_2. Биссектрисы треугольника $A_2B_2C_2$ пересекают описанную окружность соответственно в точках A_3, B_3, C_3 и так далее. Найти углы треугольника $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$.

4. В треугольник $A_1B_1C_1$ вписан треугольник $A_2B_2C_2$, образованный проекциями центра вписанной окружности на его стороны. В треугольник $A_2B_2C_2$ аналогичным образом вписан треугольник $A_3B_3C_3$ и так далее. Найти углы треугольника $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$.

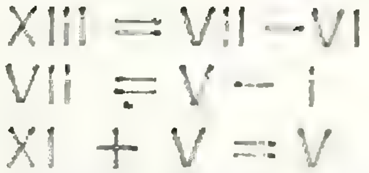
Головоломки

В следующих примерах разные цифры зашифрованы разными буквами (в разных примерах, возможно, разными). Расшифруйте!

1. do×do = sol.
2. la×la = sol.
3. си×си = соль.
4. до×до×до = соль.
5. ля×ля×ля = соль.

В. С. Максимов

Равенства из спичек



В этих равенствах, сложенных из спичек, допущены ошибки. Переложите в каждом из равенств только по одной спичке так, чтобы все равенства стали верными.

Н. К. Антонович

Задачи

1. Решить уравнение $x^4 - 3x^3 + 3 = 0$.

2. Показать, что при любом действительном p таком, что $|p| \leqslant \sqrt[4]{4q}$, уравнение

$$x^4 + px^3 + q = 0, \quad q > 0$$

действительных решений не имеет.

3. Показать, что при любом действительном p таком, что $|p| \leqslant \sqrt[4]{12}$ уравнение

$$x^4 - px^3 + 3 = 0$$

действительных решений не имеет.

4. Найти действительные решения системы $x^3y = -4$, $x - y = 1{,}5$.

Г. Ю. Зайцев

задачник кванта

В этом разделе, который ведется из номера в номер с момента основания журнала, предлагаются разнообразные задачи — и относительно простые, и такие, которые нелегко решить даже специалисту. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. Если задача вас заинтересовала, но сразу решить ее не удается, — не опускайте руки, попробуйте вернуться к ней снова через день, через неделю. Даже после того как задача решена — если это действительно интересная задача, — работу над ней можно продолжить: подумать, нет ли более простого и красивого решения, постараться наиболее рационально и убедительно записать решение (иногда это совсем не просто сделать), попробовать обобщить задачу, уточнить или усилить ее результат.

Редакция помещает списки читателей, приславших правильные решения задач. Школьники, которые в течение года регулярно присылают интересные и полные решения, получают право участвовать в областных турах Всесоюзной олимпиады по математике и физике наряду с победителями районных и городских олимпиад. Кроме того, для победителей конкурса по решению задач из «Задачника «Кванта» редакция устанавливает специальные премии.

Разумеется, не все задачи в «Задачнике» публикуются впервые, хотя мы и стремимся выбирать наиболее оригинальные задачи. Обычно после формулировки мы указываем, кто предложил нам задачу. Придумать новую задачу, пожалуй, даже труднее, чем решить чужую. Если это удастся, пришлите нам задачу вместе с решением. Напишите, как возникла у вас задача, встречали ли вы похожие задачи, с какими явлениями или математическими теоремами связан ваш новый результат. Наиболее красивые задачи мы опубликуем в «Задачнике» или в других разделах журнала. Обычно мы публикуем решения задач с учетом присланных читателями писем через 6—8 месяцев.

Наш адрес: 117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15, редакция журнала «Квант». На конверте после адреса напишите, решения каких задач вы посылаете (например, «задачи М301, М305» или «... Ф311»). Решения задач по каждому предмету (если вы посылаете задачи и по математике, и по физике) присылайте в отдельных конвертах. Формулировки новых задач нужно присылать в двух экземплярах (на конверте пометьте: «Новая задача по математике» или «...по физике»).

Мы получаем очень много писем и стараемся отвечать всем нашим корреспондентам. Просим оформлять решения аккуратно, чтобы облегчить работу редакции и консультантов отдела «Задачник «Кванта». В начале письма обязательно напишите свою фамилию, имя, отчество, домашний адрес, а также класс и школу, в которой вы учитесь. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (для ответа после проверки решений). Письма от читателей мы сможем учитывать только в том случае, если они будут написаны на русском языке и присланы не позднее, чем через полтора месяца после выхода из печати соответствующего номера. Например, письма с решениями задач из этого номера просим присылать не позднее 1 марта 1975 года.

Задачи

М301—М305; Ф313—Ф317

М301. На плоскости заданы $2n$ точек — n синих и n красных, причем никакие три точки не лежат на одной прямой. Докажите, что можно провести n отрезков так, что у каждого отрезка один конец лежит в красной точке, другой — в синей точке, и никакие два отрезка не имеют общих точек.

С. Охитин, ученик 10 класса (Оренбург)

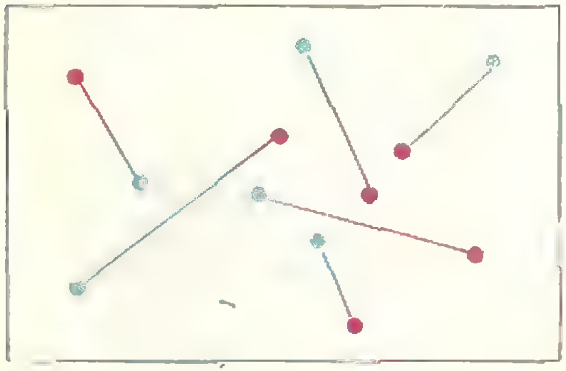


Рис. 1.

М302. Пусть O — точка пересечения диагоналей трапеции $ABCD$ ($[AB] \parallel [CD]$), A' и B' — точки, симметричные точкам A и B относительно биссектрисы угла AOB. Докажите, что $ACA' = BDB'$.

А. Буяновский, ученик 10 класса (Гомель)

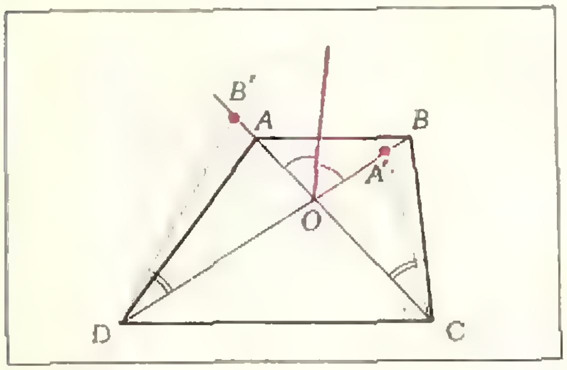


Рис. 2.

М303. Прямоугольник 300×1000 разрезан на квадраты 1×1, и в некоторых 30 вершинах квадратов помещены одинаковые гирьки. Докажите, что можно выбрать две непересекающиеся группы гирек — не более чем по 10 в каждой — так, что их центры тяжести совпадут.

А. В. Шерстюк

М304. Будем обозначать кружочком некоторую (неизвестную пока) операцию, применимую к любым двум целым неотрицательным числам a и b и дающую в результате тоже целое неотрицательное число $a \circ b = c$. Пусть операция «$\circ$» удовлетворяет следующим условиям:

1) $a \circ b = b \circ a$;

2) если $a \circ b = c$, то $b \circ c = a$;

3) если $a \circ b > c$, то $b \circ c < a$ или $a \circ c < b$.

а) Найдите $0 \circ 0$; $0 \circ 1$; $1 \circ 1$; $0 \circ 2$.

б) Докажите, что $0 \circ a = a$ и

$$1 \circ a = \begin{cases} a+1, & \text{если } a \text{ четно,} \\ a-1, & \text{если } a \text{ нечетно.} \end{cases}$$

в) * Докажите, что существует не более чем одна операция, удовлетворяющая условиям задачи.

г) * Докажите, что такая операция существует, и укажите правило, позволяющее по заданным a и b вычислять $a \circ b$.

А. А. Григорян

М305 *. а) На хордах AB и $A'B'$ окружности выбрано по точке C и C' так, что три прямые AA', BB' и CC' пересекаются в одной точке P. Введем обозначения: $|AP|\cdot|A'P| = t$, $|AC|\cdot|CB| = s$, $|A'C'|\cdot|C'B'| = s'$, $|CP| = q$, $|C'P| = q'$. Докажите, что (при $q \neq 0$) $\sqrt{\frac{s'}{s}} = \frac{q'}{q} = \frac{s' + (q')^2}{t} = \frac{t}{s+q^2}$.

б) Через точку P, не лежащую на данной сфере, и каждую точку некоторой окружности σ, лежащей на этой сфере, проведена прямая. Докажите, что вторые точки пересечения проведенных прямых со сферой также лежат на некоторой окружности σ'.

Замечание. Одно из решений задачи б) можно получить, используя а), поэтому мы и объединили их под одним номером. Подумайте однако, как решить задачу б) другим способом.

А. И. Ширшов

Ф313. Коэффициент преломления атмосферы планеты X уменьшается с высотой h над ее поверхностью по закону $n = n_0 - \alpha h$. Радиус планеты R. Найти, на какой высоте h_0 над поверхностью планеты находится оптический канал, по которому световые лучи будут обходить планету, оставаясь на постоянной высоте.

Н. Н. Седов

Ф314. По гладкой и абсолютно неупругой коленчатой трубке, содержащей очень большое число колен, начинает скользить шарик (рис. 3). Найти установившуюся скорость движения шарика по горизонтальным участкам трубки. Зависит ли она от начальной скорости? Разность высот соседних горизонтальных участков h. Наклонные участки образуют с горизонтом угол α.

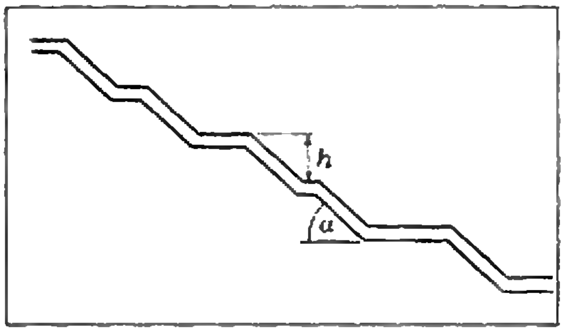


Рис. 3.

Ф315. Проволочная спираль, присоединенная к городской осветительной сети, нагревается электрическим током. Половину спирали начинают охлаждать (например, водой). Как это отразится на количестве тепла, выделяемого этой половиной спирали? Другой половиной? Всей спиралью? Напряжение сети считать неизменным.

В. Д. Горбунова

Ф316. Если выпуклый «звездчатый» многогранник, вылепленный из пластилина, с силой бросать вертикально вниз, то он будет отскакивать от пола как упругий резиновый мячик, практически не сминаясь. В то же время пластилин легко мнется руками. Почему?

Ф317. В воздухе при нормальных условиях молекула сталкивается с другими молекулами, причем путь между столкновениями (длина свободного пробега) равен в среднем $\lambda = 10^{-5}$ *см*. Оцените размер молекулы воздуха.

С. М. Козел

Решения задач

М261—М267; Ф273—Ф277

М261. *Обруч радиуса R, висевший на неподвижном круге радиуса $r<R$, начинают катить по этому кругу. Докажите, что точка обруча описывает ту же траекторию, которую описывала бы точка колеса радиуса $R-r$, катящегося снаружи по тому же кругу радиуса r (рис. 1). (Качение происходит без скольжения — так, что длины прокатившихся друг по другу дуг равны.)*

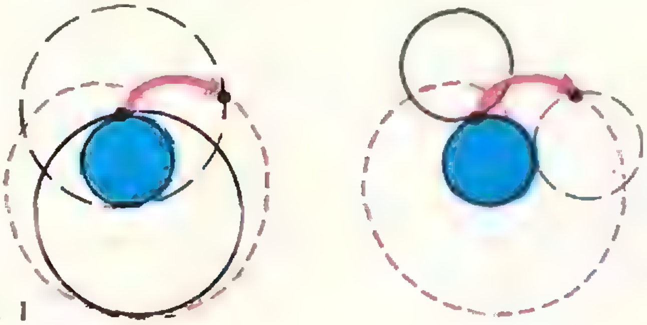


Рис. 1

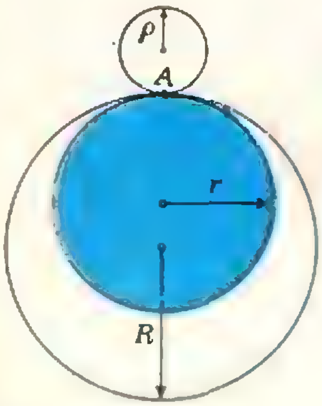


Рис. 2.

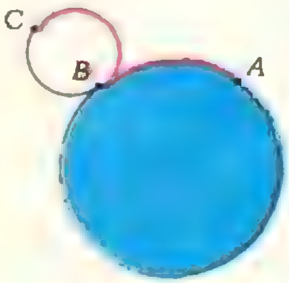


Рис. 3.

Обозначим радиус колеса $R-r$ через ρ. Кривые, описываемые при указанном качении точками границы колеса, называются *эпициклоидами*, вид их определяется отношением $\frac{\rho}{r}$; кривые, описываемые точками обруча — *перициклоидами*. Докажем, что при указанном в условии соотношении между радиусами ($R=r+\rho$) перициклоиды совпадают с эпициклоидами.

Зафиксируем по одной точке на колесе и на обруче. Пусть в начальный момент точки, наблюдаемые на колесе и обруче, совпадают с одной и той же точкой A границы неподвижного круга (рис. 2). Пусть для определенности и колесо, и обруч катятся по кругу против часовой стрелки. Если в некоторый момент колесо касается неподвижного круга в точке B, то точка, наблюдаемая на его границе (точка эпициклоиды), занимает такое положение C, что длины $\smile AB$ и $\smile BC$ равны ($\smile BC$ выбирается с учетом направления качения (рис. 3)): в этом и состоит условие качения без скольжения.

Аналогично, положение точки C', наблюдаемой на обруче (точки перициклоиды), в тот момент, когда он касается неподвижного круга в точке B', находится из условия равенства длин $\smile AB'$ и $\smile B'C'$ (с учетом направления качения) (см. рисунок 4).

Докажем, что для любой точки B на границе неподвижного круга можно так подобрать точку B' (тоже — на границе неподвижного круга), что соответствующие точки C (эпициклоиды) и C' (перициклоиды) совпадут (рис. 5). (Из нашего доказательства будет ясно также, как по B выбирать B'.)

Возьмем точку B' так, чтобы отношение длин дуг AB и BB' было равно $\frac{\rho}{r}$: тогда — радианная мера $\smile BC$ равна радианной мере $\smile BB'$ — обозначим ее через φ. Имеем

$$\text{дл. } \smile AB = \text{дл. } \smile BC = \rho\varphi, \quad \text{дл. } \smile BB' = r\varphi.$$

Поэтому дл. $\smile B'C' =$ дл. $\smile AB' = \rho\varphi + r\varphi = R\varphi$, и радианная мера $\smile B'C'$ также равна φ. Пусть O — центр неподвижного круга, O_1 — положение центра колеса в момент, когда

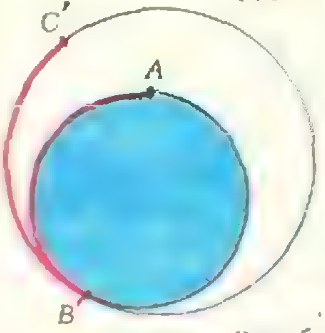


Рис. 4.

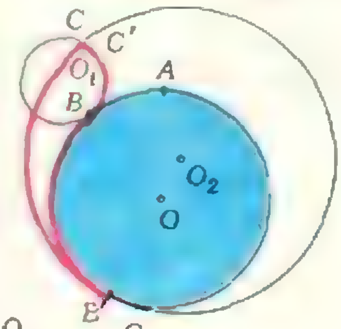


Рис. 5.

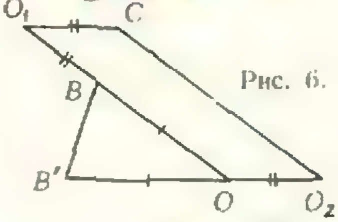


Рис. 6.

оно касается неподвижного круга в точке B. O_2 — положение центра обруча в момент касания обруча с неподвижным кругом в точке B'; точки $\{O, B, O_1\}$ и $\{O_2, O, B'\}$ лежат на одной прямой.

Пусть $0 < \varphi < \pi$. Имеем (рис. 6) $OB = OB' = r$, $O_2B' = R$, $OO_2 = R - r = \rho$, $O_1B = O_1C = \rho$, $O_1O = r + \rho = R$, $\angle BOB' = \angle OO_1C = \varphi$.

Значит, четырехугольник OO_1CO_2 — параллелограмм, и, значит, $O_2C = R$, $\angle CO_2B' = \varphi$. Таким образом, точка C лежит на окружности радиуса R с центром в O_2, причем радианная мера дуги $B'C$ равна φ. Это и означает, что C совпадает с C'. Итак, мы доказали, что *если по неподвижному кругу прокатились дуги колеса и обручи одной и той же радианной меры $\varphi < \pi$, то получившиеся точки эпициклоиды и перициклоиды совпадут.*

Остается убедиться в справедливости этого утверждения и при $\varphi \geqslant \pi$. Посмотрите сами, во что «превращается» рисунок 5 при $\varphi = \pi$, а также при $\pi < \varphi < 2\pi$. Отметим, что поскольку разность между длинами обруча и колеса равна $2\pi r$ — длине границы неподвижного круга, то в тот момент, когда и колесо, и обруч сделают полные обороты, наблюдаемые точки, вновь попав на границу неподвижного круга, займут одно и то же положение A_1. Случай $2\pi < \varphi < 4\pi$ сводится к случаю $\varphi < 2\pi$, если считать точку A_1 начальной точкой вместо A. Если же считать A_1 начальной точкой и одновременно изменить направление качения, то случай $\pi \leqslant \leqslant \pi < 2\pi$ сведется к случаю $\varphi \leqslant \pi$.

С. Г. Гиндикин

Это решение можно коротко записать с помощью векторов. Если пользоваться «обобщенными углами» — углами вращения φ, которые могут принимать любые значения (не только в пределах от 0 до 2π), то не придется рассматривать отдельно разных случаев: нужно использовать только, что для любых трех векторов **a**, **b**, **c**

$$\widehat{\mathbf{ab}} + \widehat{\mathbf{bc}} = \widehat{\mathbf{ac}}$$

(здесь $\widehat{\mathbf{ab}}$ — величина угла между векторами **a** и **b**).

Пусть **e** (φ) — вектор длины 1, получающийся поворотом на угол φ по часовой стрелке из начального вектора $\mathbf{e}_0 = \mathbf{e}(0)$ *(скажем, направленного вверх). Тогда* $\mathbf{e}(\varphi + \pi) = -\mathbf{e}(\varphi)$.

Для точки M_1 колеса (рис. 7, *а*)

$$\overrightarrow{OO_1} = (\rho + r)\,\mathbf{e}(\varphi),$$

$$\overrightarrow{O_1M_1} = \rho\mathbf{e}(\pi + \varphi + \varphi_1).$$

Поскольку $\rho\varphi_1 = r\varphi$ (условие качения без скольжения), $\rho = R - r$, то

$$\overrightarrow{OM_1} = \overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1M_1} = R\mathbf{e}(\varphi) - (R - r)\,\mathbf{e}\left(\frac{R}{R - r}\,\varphi\right). \quad (1)$$

Для точки M_2 обруча (рис. 7, *б*)

$$\overrightarrow{OO_2} = (R - r)\,\mathbf{e}(\psi + \pi),$$

$$\overrightarrow{O_2M_2} = R \cdot \mathbf{e}(\psi - \psi_1),$$

и так как $R\psi_1 = r\psi$, то

$$\overrightarrow{OM_2} = \overrightarrow{OO_2} + \overrightarrow{Q_2M_2} = R\mathbf{e}\left(\frac{R - r}{R}\,\psi\right) - (R - r)\,\mathbf{e}(\psi). \quad (2)$$

Сравнивая (1) и (2), видим что $\overrightarrow{OM_1} = \overrightarrow{OM_2}$ при $\frac{R}{R - r}\varphi = \psi$. Значит, множество точек M_1 и M_2 совпадают.

Н. Б. Васильев

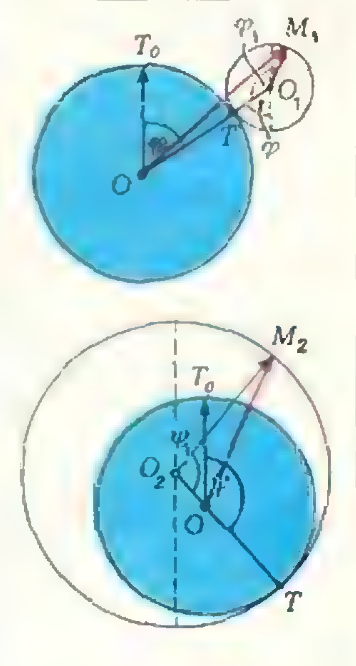


Рис. 7, *а*, *б*

М262. *Какое наибольшее число а) ладей, б) ферзей можно расставить на шахматной доске 8×8 так, чтобы каждая из этих фигур была под ударом не более чем одной из остальных?*

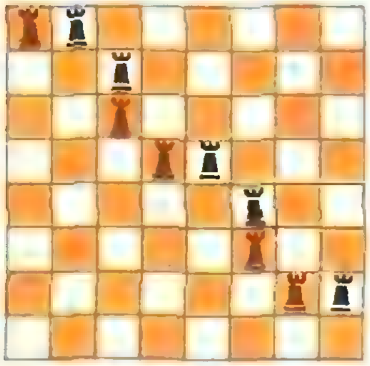


Рис. 8.

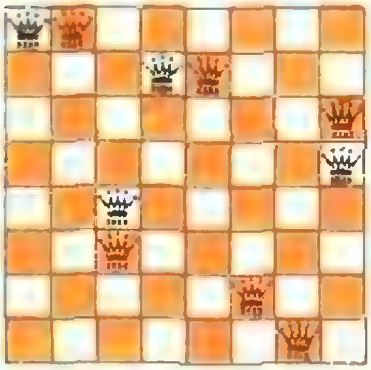


Рис. 9.

Следуя письму *Бориса* и *Льва Рабиновичей*, предложивших эту задачу, рассмотрим сразу доску размером $n \times n$ и докажем, что на ней нельзя расставить более $\frac{4n}{3}$ ладей так, как требуется в условии.

Пусть k ладей расположены на доске $n \times n$ с соблюдением условия. На каждом поле, где стоит ладья, напишем число 0. *В каждом из n столбцов* проделаем следующую операцию: если в столбце стоят два числа, то прибавим к обоим по 1, если одно число, то к нему прибавим 2 (в пустом столбце ничего писать не будем). Затем проделаем точно такую же операцию с каждой строкой. Ясно, что на месте каждой из k ладей в результате будет написано число, не меньшее 3 — а именно, либо 3, либо 4, — поэтому сумма S всех написанных чисел не меньше $3k$; с другой стороны, поскольку в каждый из n столбцов и затем в каждую из n строк мы добавили не более чем 2, то сумма S не больше $4n$. Итак, $3k \leqslant S \leqslant 4n$, откуда $k \leqslant \frac{4n}{3}$.

В частности, для $n = 8$ получаем $k < \frac{32}{3}$, то есть $k \leqslant 10$. Пример расстановки 10 ладей, удовлетворяющей условию, показан на рисунке 8.

Нетрудно проверить, что для любого натурального n тем же самым способом можно на доске $n \times n$ расставить $\left[\frac{4n}{3}\right]$ ладей с соблюдением условия ($[x]$ означает целую часть числа x).

Перейдем к задаче о расстановке ферзей. Ясно, что с соблюдением условия задачи ферзей можно поставить не больше, чем ладей. На рисунке 9 показано, что на доске 8 × 8 можно расставить 10 ферзей. Итак, в обеих задачах а) и б) ответ одинаковый: 10.

Что же касается обобщения задачи Рабиновичей о расстановке ферзей для доски $n \times n$, то ее полностью не решил никто из читателей. Можно убедиться, что для $n = 3, 4, 5$ наибольшее число ферзей, которое можно расставить на доске $n \times n$ так, чтобы каждый попал не более чем под один удар, на единицу меньше $\left[\frac{4n}{3}\right]$. Но для больших n решение задачи требует, по-видимому, либо очень *большого перебора вариантов, либо привлечения дополнительных* соображений.

Н. Б. Васильев

◆

М263. *Даны два числа p и q, большие 1. На сторонах BC и DC прямоугольника $ABCD$ берутся точки P и Q так, что $|BC| = p \cdot |BP|$ и $|DC| = q \cdot |DQ|$. При каком отношении длин сторон AB и AD угол PAQ будет иметь наибольшую величину? Какова эта наибольшая величина в частном случае $p = 2$, $q = \frac{3}{2}$?*

Обозначим длины сторон прямоугольника AB и AD через a и b соответственно. Тогда

$$\operatorname{tg}(\measuredangle PAQ) = \frac{\operatorname{tg}(\measuredangle PAD) - \operatorname{tg}(\measuredangle QAD)}{1 + \operatorname{tg}(\measuredangle PAD)\cdot\operatorname{tg}(\measuredangle QAD)} =$$

$$= \frac{\frac{ap}{b} - \frac{a}{qb}}{1 + \frac{a^2p}{b^2q}} = \frac{ab(pq-1)}{a^2p + b^2q}.$$

В силу теоремы о среднем арифметическом и среднем геометрическом, имеем

$$a^2p + b^2q \geqslant 2\sqrt{a^2pb^2q} = 2ab\sqrt{pq}$$

(знак равенства имеет место при $a^2p = b^2q$, то есть когда

$$\frac{a}{b} = \sqrt{\frac{q}{p}}\Big).$$

Поэтому

$$\operatorname{tg}(\sphericalangle PAQ) = \frac{ab(pq-1)}{a^2p + b^2q} \leqslant \frac{pq-1}{2\sqrt{pq}},$$

и $\sphericalangle PAQ$ достигает максимума $\operatorname{arctg}\dfrac{pq-1}{2\sqrt{pq}}$, когда

$$\frac{a}{b} = \frac{|AB|}{|AD|} = \sqrt{\frac{q}{p}}$$

($\sphericalangle PAQ$ — меньше 90°, а тангенс в первой четверти — возрастающая функция).

В частности, если $p = 2$, $q = \dfrac{3}{2}$, наибольшая величина угла PAQ равна $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\pi}{6}$.

◆

M264. *В городе одна синяя площадь и n зеленых, причем каждая зеленая площадь соединена улицами с синей и с двумя зелеными (рис. 10). На каждой из $2n$ улиц введено одностороннее движение так, что на каждую площадь можно приехать и с каждой — уехать. Докажите, что с любой площади этого города можно, не нарушая введенных правил, доехать до любой из остальных.*

Прежде чем приступать к решению, отметим, что в условии задачи ссылка на рисунок 10 *существенна* — он является частью условия; так, например, для города, изображенного на рисунке 11 (с одной синей и n зелеными площадями), все условия задачи выполнены, а утверждение — неверно: из части I нельзя проехать в часть II.

Перейдем теперь к решению нашей задачи. Разобьем доказательство на две части: докажем, что

а) от любой зеленой площади можно доехать до синей;

б) от синей площади можно доехать до любой зеленой.

Условимся обозначать направление движения на улицах стрелочками.

а) Предположим, что от зеленой площади A_1 нельзя доехать до синей площади. Поскольку уехать с площади A_1 можно, то от нее, проехав по одной улице, мы доедем до зеленой площади A_2. *От площади A_2 тоже нельзя доехать до синей площади.* Выехав с нее, мы доедем до площади A_3, потом A_4 и т. д. Поскольку всего зеленых площадей n, проехав по n улицам, мы вернемся на площадь A_1 и убедимся, что стрелки в городе расставлены так, как на рисунке 12. Но тогда на синюю площадь нельзя приехать, что противоречит условиям задачи.

б) Изменим направления всех стрелок. Полученная схема движения удовлетворяет условиям задачи. Поэтому, как доказано в пункте а), при этой расстановке стрелок от любой зеленой площади можно доехать до синей. Но это и означает, что при старой расстановке стрелок от синей площади можно доехать до любой зеленой.

Обобщить задачу Б. Розенштейна о городе с односторонним движением можно так. Пусть в городе нет «тупиков» (в таком случае можно расставить направления на улицах так, что на каждую площадь можно приехать и с каждой уехать). Необходимое и достаточное условие того, что при любой такой расстановке стрелок от каждой площади можно доехать до любой другой; можно сформулировать так: *любые два кольцевые маршрута* (по городу, на улицах которого еще не расставлены стрелки) *должны проходить через одну площадь.* Докажите это.

И. Н. Клумова

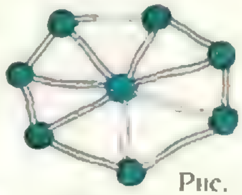


Рис. 10.

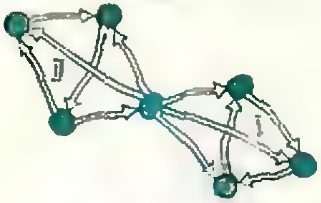


Рис. 11.

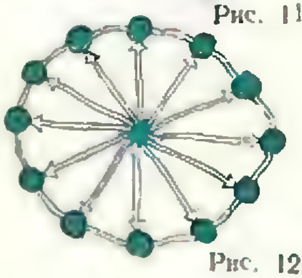


Рис. 12.

M265. *Диагональ d прямоугольного параллелепипеда образует с его ребрами a, b и c углы α, β и γ. Докажите, что $\alpha+\beta+\gamma$ меньше π.*

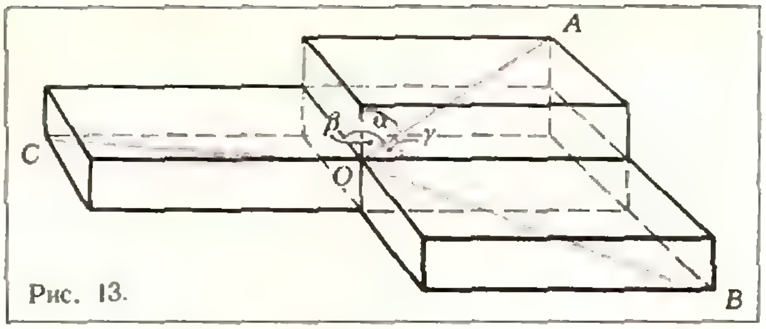


Рис. 13.

Приведем решение, которое прислал *Андрей Вятчин* (г. Павлово Горьковской области). Расположим три равных параллелепипеда так, как показано на рисунке 13. Тогда $\measuredangle BOC = 2\alpha$, $\measuredangle AOC = 2\beta$, $\measuredangle AOB = 2\gamma$. Точка O не лежит в плоскости, проходящей через точки A, B, C (проверьте). Значит, $2\alpha+2\beta+2\gamma < 2\pi$ (по теореме о сумме плоских углов трехгранного угла), то есть $\alpha+\beta+\gamma<\pi$.

Большинство читателей, приславших верные решения, свело задачу к проверке неравенства $\sin(\alpha+\beta+\gamma)>0$.

В заключение приведем две задачи — проверьте, что они эквивалентны задаче M265.

1. Для любого $\triangle ABC$ можно вычислить такую сумму:

$$S=\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C.$$

Докажите, что $S=1$ для прямоугольных треугольников, $S<1$ для остроугольных и $S>1$ для тупоугольных треугольников.

2. Если $0<x<\frac{\pi}{2}$, $0<y<\frac{\pi}{2}$ и $\sin^2 x+\sin^2 y<1$, то $\sin^2 x+\sin^2 y<\sin^2(x+y)$.

М. Л. Гервер

◆

M266. *Дан выпуклый n-угольник.*

а) Докажите, что если для каждой тройки последовательных вершин n-угольника построить окружность, проходящую через эти вершины, и из n полученных окружностей выбрать такую, у которой радиус наибольший, то эта окружность содержит внутри себя весь данный n-угольник;

б) Докажите, что если для каждой тройки последовательных сторон n-угольника построить окружность, касающуюся этих сторон, и из n полученных окружностей выбрать такую, у которой радиус наименьший, то она будет содержаться внутри данного n-угольника.

а) Пусть s — одна из окружностей с наибольшим радиусом. Обозначим ее центр через S, радиус — через r, лежащие на s вершины многоугольника — через A_1, A_2, A_3. Предположим, что многоугольник M не содержится внутри s целиком; тогда найдется вершина — обозначим ее через A_k, — лежащая вне s; проведем через точки S и A_2 прямую. Пусть A_k находится в правой полуплоскости (см. рис. 14). Рассмотрим вершину A_l, лежащую вне s, у которой $3<l\leqslant k$ и номер l — минимальный из возможных. Проверьте самостоятельно, что радиус R окружности s_1, описанный около треугольника $A_2A_3A_l$, больше r, и что вершины A_2, A_3, …, A_l лежат в s_1 (см. рис. 15). Постараемся теперь прийти к противоречию — построить окружность, проходящую через три *соседние* вершины многоугольника, радиус которой больше r. Если A_3 и A_l — соседние вершины, то противоречие уже получено. Пусть A_3 и A_l — не соседние. Рассмотрим все окружности, проходящие через точки A_3, A_l и A_i, где $3<i<l$, — радиусы этих окружностей не меньше R. Пусть та из них, у которой радиус наименьший, проходит через вершину A_{l_1}, где $3<l_1<l$. Если A_3, A_{l_1} и A_l — тройка последовательных вершин, то противоречие получено. Если нет, то мы от цепочки вершин A_3, …, A_l перейдем к более короткой цепочке: A_3, …, A_{l_1} или A_{l_1}, …, A_l. Повторив несколько раз такой переход, мы придем к тройке соседних вершин. Поскольку при каждом переходе радиусы окружностей не убывали, радиус описанной около них окружности не меньше R, то есть больше r, — обещанное противоречие получено.

б) Пусть s — одна из окружностей минимального радиуса, касающаяся сторон a_1, a_2 и a_3. Обозначим ее центр через S, а радиус через R. Если многоугольник M не содержит s, то есть сторона a_k, ее пересекающая. Стороны a_2 и a_k либо параллельны, либо пересекаются — предположим, что они пересекаются (см. рис. 16 — случай, когда они параллельны, разбирается аналогично). Рассмотрим сторону a_l, пересекающую s, у которой $3 \leqslant l \leqslant k$ и номер l минимальный из возможных. Докажите самостоятельно, что радиус r окружности, касающейся сторон a_2, a_3 и a_l, меньше R, и что стороны a_2, a_3, …, a_l лежат вне этой окружности (см. рис. 17). Придем теперь к противоречию так же, как и в пункте а). Если $l = 4$, то противоречие получено. Если $l > 4$, то выберем из окружностей, касающихся сторон a_3, a_l и a_i, где $3 < i < l$, окружность с максимальным радиусом. Ее радиус не больше r; пусть ей соответствует тройка a_3, a_{l_1}, a_l. Если $l_1 = 4$, $l = 5$, то противоречие получено. В противном случае выберем из пар a_3, a_{l_1} и $a_{l_1}a_l$ не соседнюю и применим к ней то же построение, что и к паре a_3, a_l. За конечное число шагов мы придем к тройке соседних сторон, причем радиус касающейся их окружности будет не больше r. Противоречие получено.

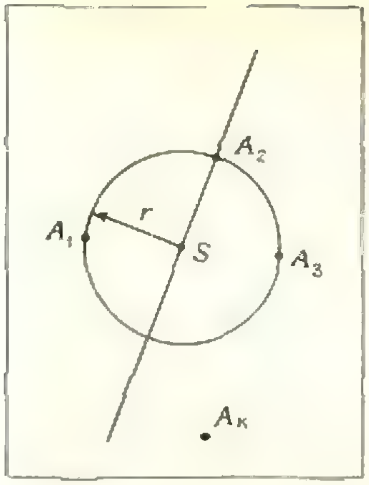


Рис. 14.

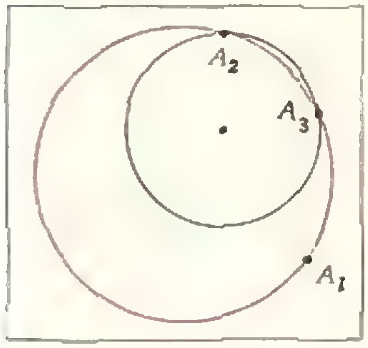


Рис. 15.

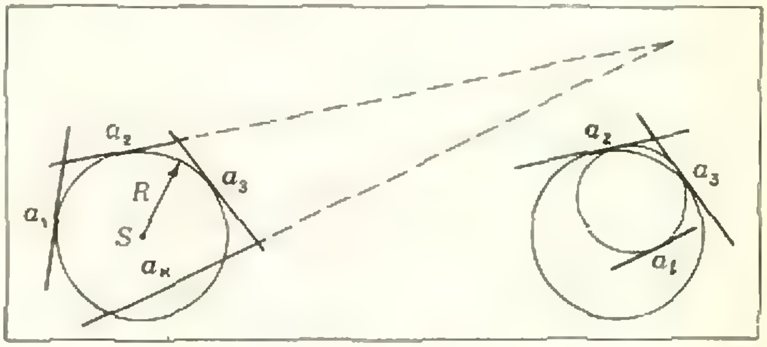


Рис. 16.

Рис. 17.

Внимание! В пункте а) мы пользовались тем, что при каждом переходе радиусы окружностей не убывали, а в пункте б) — тем, что они не возрастали. Продумайте самостоятельно, почему это так.

Л. Г. Лиманов

◆

М267. *В последовательности троек целых чисел (2, 3, 5) (6, 15, 10) . . . каждая тройка получается из предыдущей таким образом: первое число множится на второе, второе — на третье, а третье — на первое, и полученные произведения дают новую тройку.*

Докажите, что ни одно из чисел, получаемых таким образом, не будет степенью целого числа: квадратом, кубом и т. д.

Заметим, что порядок чисел внутри тройки не существен. Числа, входящие в следующую тройку, от него не зависят.

Докажем, что тройка с номером $2l+1$ имеет вид $\{2^{k+1}3^k5^k, 2^k3^{k+1}5^k, 2^k3^k5^{k+1}\}$, а с номером $2l$ — $\{2^{m-1}3^m5^m, 2^m3^{m-1}5^m, 2^m3^m5^{m-1}\}$, где k и m зависят от l. Воспользуемся для этого математической индукцией. Предположим, что тройки с номером $2l$ и $2l+1$ имеют такой вид. Легко убедиться, что из тройки $\{a, b, c\}$ через два шага получается тройка $\{a^2bc, ab^2c, abc^2\}$. Подставив сюда вместо a, b и c элементы $2l$-й и $2l+1$-й троек, мы получим

$$\{2^{4m-2}3^{4m-1}5^{4m-1}, 2^{4m-1}3^{4m-2}5^{4m-1}, 2^{4m-1}3^{4m-1}5^{4m-2}\}$$
$$\text{и } \{2^{4k+2}3^{4k+1}5^{4k+1}, 2^{4k+1}3^{4k+2}5^{4k+1}, 2^{4k+1}3^{4k+1}5^{4k+2}\}$$

соответственно, то есть тройки такого же вида. Поскольку *первая и вторая тройка удовлетворяют* предположению индукции, ему удовлетворяют и все тройки.

Итак, доказано, что все числа, входящие в тройки, имеют вид $p_1^{n\pm1}\cdot p_2^n\cdot p_3^n$, где p_1, p_2 и p_3 это числа 2, 3 и 5, взятые в любой последовательности. Очевидно, что ни одно из них не может быть степенью натурального числа.

И. Н. Клумова

Ф273. *Для получения газов при сверхвысоких температурах и давлениях иногда применяется установка, состоящая из закрытого с одного конца цилиндра-ствола и поршня-пули, влетающей в цилиндр с открытой стороны. При хорошей обработке пули и ствола удается добиться малой утечки газа через зазор. Благодаря очень высоким температурам сильно сжатые газы в этих условиях еще можно считать идеальными. Оценить верхний предел температуры аргона, подвергнутого сжатию в такой установке, если пуля массы $m = 100$ г влетает в ствол, имеющий объем $V_0 = 200$ см^3, с начальной скоростью $v = 250$ м/с. Начальные температура и давление газа равны соответственно $T_0 = 300°$ K и $p_0 = 1$ атм.*

При торможении пули ее кинетическая энергия переходит в тепло. Для оценки максимальной температуры, до которой может нагреться газ в цилиндре, будем считать, что все выделенное тепло идет на изменение внутренней энергии газа. То есть не будем учитывать потери энергии на нагревание пули и стенок цилиндра. Тогда можно записать

$$\frac{mv^2}{2} = \Delta U.$$

Так как аргон одноатомный газ, то $U = \frac{3}{2}\,nRT$ (n — число молей газа) и

$$\Delta U = \frac{3}{2}\,nRT_{\max} - \frac{3}{2}\,nRT_0 = \frac{3}{2}\,nR\,(T_{\max} - T_0).$$

Величину n можно найти из уравнения состояния идеального газа:

$$n = \frac{p_0V_0}{RT_0}.$$

Поэтому

$$\Delta U = \frac{3}{2}\,p_0V_0\,\frac{T_{\max} - T_0}{T_0}.$$

Следовательно,

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{3}{2}\,p_0V_0\,\frac{T_{\max} - T_0}{T_0},$$

откуда

$$T_{\max} = T_0\left(1 + \frac{mv^2}{3p_0V_0}\right) \approx 30\,000\ °\text{K}.$$

◆

Ф274. *Диод включен в цепь, изображенную на рисунке 18, а. Идеализированная вольтамперная характеристика диода приведена на рисунке 18, б. Конденсатор предварительно не заряжен. Ключ K замыкают. Какое количество тепла выделится на сопротивлении R при зарядке конденсатора? Емкость конденсатора C, э. д. с. источника E. Внутреннее сопротивление источника пренебрежимо мало.*

После замыкания ключа по цепи пойдет ток. Напряжение на конденсаторе будет увеличиваться, а ток соответственно уменьшаться. При этом пока ток не уменьшится до значения I_0, напряжение на диоде все время будет равно U_0*). Пусть уменьшение тока до I_0 произошло за время t_1. Найдем, сколько тепла выделилось на сопротивлении R за это время.

По закону сохранения энергии работа A, совершенная источником во всей цепи, равна сумме работ на отдельных участках цепи:

$$A = A_д + A_c + A_R.$$

Напряжение на конденсаторе в момент времени $t = t_1$ равно

$$U_c = E - U_0 - I_0R,$$

значит, за время t_1 по цепи прошел заряд

$$q_1 = CU_c = C\,(E - U_0 - I_0R).$$

Работа, совершенная источником за это время,

$$A_1 = q_1E = CE\,(E - U_0 - I_0R).$$

Работы на участках, содержащих диод и конденсатор, равны

$$A_д = q_1U_0 = CU_0\,(E - U_0 - I_0R),$$

$$A_c = W_c = \frac{q_1^2}{2C} = \frac{C\,(E - U_0 - I_0R)^2}{2}.$$

---

*) См. решение задачи Ф232, «Квант», 1974, № 5.

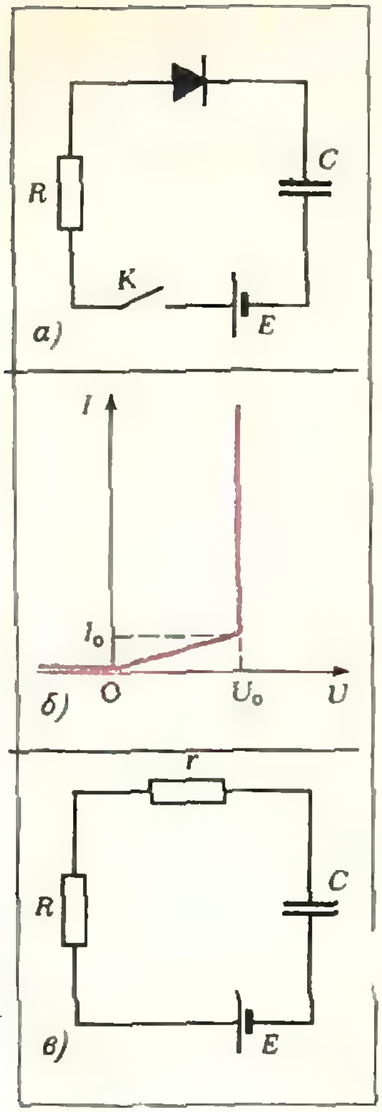


Рис. 18.

Тогда работа на сопротивлении R

$$A_R = Q_1 - A_1 - A_д - A_c = \frac{C}{2}\,[(E - U_0)^2 - (I_0R)^2].$$

При дальнейшем уменьшении тока от I_0 до 0 напряжение на диоде не будет постоянным. Согласно вольтамперной характеристике диода напряжение будет уменьшаться с уменьшением тока по линейному закону. Это значит, что в течение промежутка времени t_2, когда ток в цепи уменьшается от I_0 до 0, диод эквивалентен обычному сопротивлению, величина которого равна $r = \frac{U_0}{I_0}$ (рис. 18 *в*).

Чтобы найти количество тепла Q_2, выделившегося на сопротивлении R за время t_2, опять воспользуемся законом сохранения энергии:

$$A_2 = \Delta W_c + Q,$$

где ΔW_c — изменение энергии конденсатора, а $Q = Q_2 + Q_r$ — количество тепла, выделившегося на сопротивлениях R и r.

Когда ток в цепи прекратится, напряжения на диоде и на сопротивлении R будут равны нулю, поэтому напряжение на конденсаторе будет равно E, а заряд — $q' = CE$. Следовательно, за время t_2 по цепи прошел заряд

$$q_2 = q' - q_1 = CE - C\,(E - U_0 - I_0R) = C\,(U_0 + I_0R).$$

Тогда

$$A_2 = q_2E = CE\,(U_0 + I_0R),$$

$$\Delta W_c = \frac{q'^2}{2C} - \frac{q_1^2}{2C} = \frac{CE^2}{2} - \frac{C}{2}\,(E - U_0 - I_0R)^2$$

и

$$Q = A_2 - \Delta W_c = \frac{C}{2}\,(U_0 + I_0R)^2.$$

Сопротивления r и R соединены последовательно, то есть в любой момент времени через эти сопротивления течет один и тот же ток. Поэтому количества тепла Q_2 и Q_r, выделившегося на сопротивлениях R и r за одно и то же время, относятся как величины сопротивлений, то есть

$$\frac{Q_2}{Q_r} = \frac{R}{r}.$$

Зная сумму Q_2 и Q_r и их отношение, можно найти Q_2:

$$Q_2 = \frac{R}{R + r}\,Q = \frac{R}{R + r}\,\frac{C\,(U_0 + I_0R)^2}{2}.$$

Тогда окончательно

$$Q_R = Q_1 + Q_2 = \frac{C\,[(E - U_0)^2 - (I_0R)^2]}{2} + \frac{R}{R + r}\,\frac{C\,(U_0 + I_0R)^2}{2}.$$

◆

Ф275. *На обод массивного колеса массы M надет дополнительный груз малого размера и массы m, причем $\frac{M}{m} = 15$. С какой скоростью должно катиться колесо, чтобы оно подпрыгивало?*

Так как масса груза много меньше массы колеса, то можно не учитывать влияние силы тяжести груза на движение колеса и считать, что колесо катится с постоянной скоростью. В этом случае ускорение груза в системе координат, связанной с землей, равно центростремительному ускорению груза в системе координат, связанной с центром катящегося колеса, то есть

$$a = \frac{v^2}{R}$$

(v — скорость колеса, R — его радиус). Это ускорение грузу сообщает равнодействующая двух сил: силы тяжести $m\mathbf{g}$ и силы реакции колеса $\mathbf{N}$ (рис. 19, *а*).

Со стороны груза на колесо действует сила $\mathbf{Q}$ (рис. 19, *б*), равная по абсолютной величине силе $\mathbf{N}$, но направленная в противоположную сторону. Ясно, что колесо подскочит, если вертикальная составляющая силы $\mathbf{Q}$ будет больше силы тяжести колеса Mg. Вертикальная составляющая силы $\mathbf{Q}$ максимальна и равна самой силе $\mathbf{Q}$ в тот момент, когда груз находится в верхней точке колеса. Следовательно, величина скорости, при которой колесо подскочит, определится из условия

$$Q \geqslant Mg. \qquad (1)$$

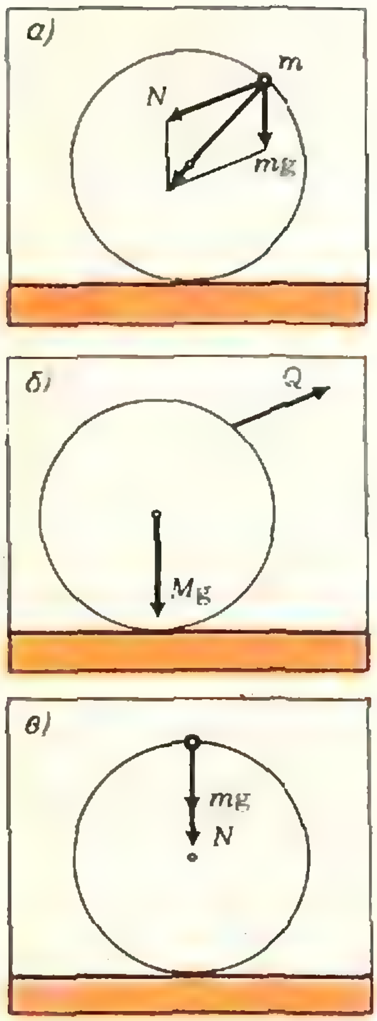


Рис. 19.

Согласно второму закону Ньютона для груза в наивысшей точке можно записать (рис. 19, *в*)

$$mg + N = m\frac{v^2}{R},$$

откуда

$$N = m\left(\frac{v^2}{R} - g\right).$$

Так как $Q = N$, выражение (1) можно представить в виде

$$m\left(\frac{v^2}{R} - g\right) \geqslant Mg,$$

откуда

$$v \geqslant \sqrt{Rg\left(\frac{M}{m} + 1\right)} = 4\sqrt{Rg}.$$

◆

Ф276. *Какие очки следует прописать человеку, если в воде он видит нормально?*

Нарисуем ход луча от бесконечно удаленного источника через глаз. Этот луч испытывает два преломления на двух поверхностях хрусталика (рис. 20). Согласно закону преломления

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{n_2}{n_1},$$

где n_1 — абсолютный показатель преломления первой среды (воды или воздуха), n_2 — абсолютный показатель преломления вещества хрусталика.

Из этой формулы видно, что при уменьшении n_1 (замене воды на воздух) угол β уменьшается. Это означает, что после

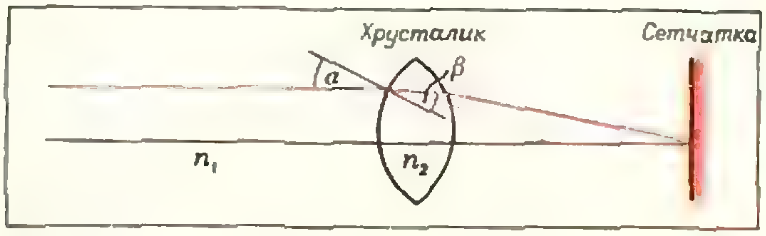


Рис. 20.

преломления на входной поверхности хрусталика в том случае, когда перед глазом воздух, луч идет ниже, чем в том случае, когда перед глазом вода. Поэтому, если в воде изображение удаленного предмета при ненапряженном глазе образуется на сетчатке, то в воздухе изображение этого предмета при ненапряженном глазе будет получаться перед сетчаткой. Следовательно, человек близорук.

◆

Ф277. *Определить период колебаний грузика C, шарнирно прикрепленного двумя очень легкими стержнями длины l к стержню AB, укрепленному под углом α к горизонту (рис. 21, а). $\sphericalangle BAC = \sphericalangle ABC = \beta$. Трением пренебречь.*

Траекторией движения грузика будет часть окружности радиусом $r = l \sin\beta$, плоскость которой перпендикулярна стержню AB и наклонена под углом $90° - \alpha$ к горизонтальной плоскости (рис. 21, *б*).

Запишем уравнение движения грузика, считая, что его отклонения от положения равновесия малы. Для этого нужно найти сумму проекций всех сил, действующих на грузик, на касательную к траектории движения грузика. Силы упругости Q_1 и Q_2, действующие на грузик со стороны стержней, лежат в плоскости стержней, перпендикулярной траектории грузика. Поэтому их проекции на касательную к траектории равны нулю.

Для того чтобы найти проекцию силы тяжести mg, разложим эту силу на составляющие (см. рис. 21, *б*) F_1, лежащую в плоскости траектории, и F_2, перпендикулярную к этой плоскости. Проекция силы F_2 на касательную к траектории грузика равна нулю, а проекция силы F_1 равна $F_1 \sin\gamma$ (рис. 21, *в*). Так как $F_1 = mg\cos\alpha$, то величина этой проекции равна $mg\cos\alpha\sin\gamma$.

Теперь можно записать уравнение движения грузика вдоль траектории. При этом нужно учесть, как и при движении математического маятника, что ускорение грузика вдоль траектории направлено противоположно отклонению грузика от положения равновесия. Поэтому проекция силы тяжести и ускорение грузика имеют противоположные знаки. Следовательно,

$$ma_\tau = -mg\cos\alpha\sin\gamma.$$

Так как угол γ мал, то $\sin\gamma \approx \gamma$ и можно записать, что

$$a_\tau = -(g\cos\alpha)\gamma.$$

Это уравнение совпадает с уравнением движения математического маятника, в котором ускорение свободного падения g заменено на $g\cos\alpha$. Это означает, что период колебаний грузика равен

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l'}{g'}} = 2\pi\sqrt{\frac{r}{g\cos\alpha}} = 2\pi\sqrt{\frac{l\sin\beta}{g\cos\alpha}}.$$

И. Ш. Слободецкий

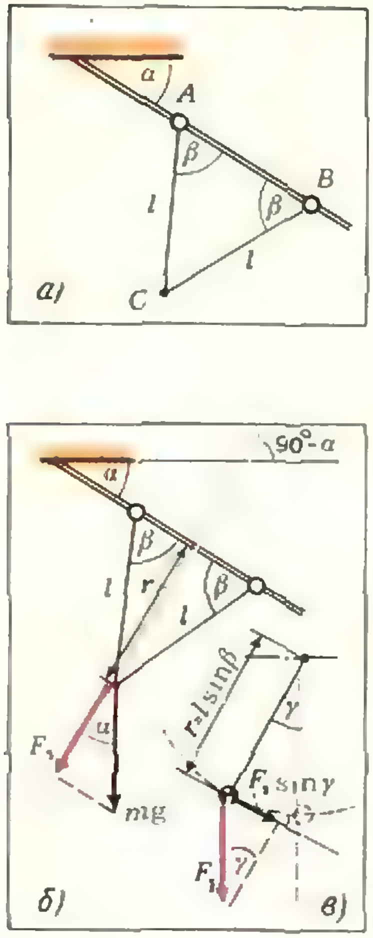


Рис. 21. *а, б* — маятник находится в положении равновесия. Рисунки сделаны в плоскости стержней. Плоскость колебания перпендикулярна плоскости рисунка, ее след показан красной штриховой линией.
в — плоскость рисунка совпадает с плоскостью колебаний

В этом номере мы приводим список читателей, приславших верные решения задач **М256—М265** (жирные цифры после фамилии — последние две цифры номера решенной задачи). *О. Азимов* (Смоленск) **63**; *Д. Азов* (Челябинск) **56—59, 62, 63, 65**; *А. Александрин* (Валуйки Белгородской обл.) **59**; *В. Басманов* (Воронеж) **56, 59, 61—65**; *В. Бегларян* (Калинин) **58, 63, 64**; *А. Белоусов* (Сумгаит) **63**; *Р. Бикшев* (Орск) **63**; *В. Бильдин* (с. Молодия Черновицкой обл.) **56—58**; *А. Бирман* (Бутово Московской обл.) **62, 65**; *М. Бирман* (Саратов) **58, 63**; *А. Блох* (Харьков) **61—65**; *С. Бодров* (Реутово Московской обл.) **56**; *А. Бразма* (Елгава Латв. ССР) **62**; *А. Бузинов* (Днепропетровск) **62**; *В. Булавкин* (Елец) **56**; *Д. Вайсман* (Запорожье) **56**; *И. Вандамуров* (Ленинград) **58**; *Ю. Виницкий* (Ташкент) **56, 58, 63, 65**; *В. Виноградов* (Владивосток) **56, 58**; *В. Витюков* (Орел) **63—65**; *А. Воеводский* (Богородицк Тульской обл.) **58**; *Л. Воробьев* (Витебск) **58**; *А. Ворович* (Москва) **58, 64**; *А. Выборнов* (Развилка Московской обл.) **62, 64**; *А. Вятчин* (Павлово Горьковской обл.) **56—59, 61, 62—65**; *Е. Галинский* (Ташкент) **58**; *Л. Ганчев* (Болгария) **63, 65**; *М. Гедалин* (Тбилиси) **61, 63, 65**; *Р. Гибадуллин* (Бугульма Тат. АССР) **62, 63**; *В. Гожий* (Кишинев) **63**; *А. Гончаров* (Никополь) **56—59**; *Е. Горбатый* (Одесса) **56, 57, 59, 63—65**; *С. Горишний* (Таганрог) **56, 57, 59, 63, 65**; *О. Гриб* (Сумы) **63—65**; *А. Григорян* (Баку) **56—58**; *С. Гродский* (Корсунь-Шевченковский) **57, 58, 63, 64**; *А. Гулиев* (с. Сулейманлы Аз. ССР) **63**; *Л. Гурвиц* (Черновцы) **63**; **65**; *О. Гурская* (Москва) **58, 64**; *О. Гусарова* (Харьков) **63, 65**; *А. Гусейнов* (Акстафа Аз. ССР) **63**; *В. Гусейнов* (Нахичевань) **56, 59, 61—64**; *М. Даниелян* (Баку) **57**; *С. Данилов* (ст. Павловская Краснодарского края) **63**; *К. Данильченко* (Волгоград) **57, 63—65**; *А. Диденко* (Краснодар) **59, 62**; *Ю. Докучаев* (Ленинград) **63, 64**; *Э. Дяченко* (Андрушевка Житомирской обл.) **61—63, 65**; *С. Ефимов* (Наманган) **58**; *Г. Зайцев* (Хабаровск) **57, 63, 64**; *А. Заргарян* (Тбилиси) **57, 58, 63, 65**; *Я. Захаревич* (Ташкент) **57, 58**; *С. Золотарев* (Москва) **57, 63, 65**; *А. Зубков* (Красный Яр Омской обл.) **63**; *З. Ибашов* (Сальяны Аз. ССР) **63, 65**; *Ф. Ибрагимов* (Кривой Рог) **56, 63, 65**; *Т. Иванова* (Москва) **63, 64**; *В. Ивацук* (Киев) **62—65**; *В. Игнатов* (Москва) **63**; *М. Имерлишвили* (Тбилиси) **56, 58, 59, 62, 63, 65**; *И. Калика* (Киев) **62—64**; *В. Калюжный* (Лермонтов Ставропольского края) **58**; *А. Касьянов* (Курск) **63**; *О. Катановский* (Москва) **63**; *П. Кацыло* (Москва) **56, 57, 59**; *Г. Квинакадзе* (Тбилиси) **58, 63, 64**; *П. Кикоть* (Москва) **58**; *Н. Киричук* (Луцк) **56**; *Л. Клименок* (Москва) **63, 65**; *А. Клочков* (Челябинск) **63, 64**; *В. Кобылецкий* (Баку) **56, 57, 59, 63, 64**; *И. Кокорин* (Сочи) **56**; *С. Коляда* (Киев) **56, 58, 63, 65**; *В. Комарицкий* (Магадан) **58**; *В. Конев* (Ангарск) **56, 63, 65**; *О. Копыжев* (Пржевальск) **64**; *В. Куликовский* (Москва) **56**; *А. Куряндчик* (Вильнюс) **56, 57, 59**; *А. Кутыркин* (Пенза) **62, 63**, *В. Лашин* (Гагарин) **64, 65**; *А. Лейдерман* (Могилев-Подольский Винницкой обл.) **61, 62, 64**; *Г. Лепешкина* (Актюбинск) **65**; *М. Липовский* (Волгоград) **56, 58**; *Л. Лисус* (Симферополь) **63, 64**; *М. Любич* (Харьков) **56—59, 61—65**; *Г. Люсов* (Тейково Ивановской обл.) **62**; *В. Мигунов* (Обнинск Калужской обл.) **63**; *Л. Михлин* (Курск) **63**; *Н. Мощук* (Новосибирск) **56, 58, 63—65**; *А. Мучник* (Жданов) **63**; *В. Небогатов* (Бобровка Восточно-Казахстанской обл.) **64**; *О. Окунев* (Казань) **64**; *С. Охитин* (Оренбург) **56, 58, 62—64**; *Е. Павленко* (Армавир) **63**; *И. Панин* (Апатиты) **58, 62, 64**; *М. Панченко* (Бровары) **58**; *Е. Парилис* (Ташкент) **63—65**; *Т. Пастухова* (Уфа) **65**; *Б. Певзнер* (Москва) **57, 63, 65**; *И. Пенков* (Москва) **56, 58, 63**; **64**; *Н. Пивторак* (с. Соколовка Винницкой обл.) **61, 63**; *А. Плахов* (Москва) **56, 58, 61, 63—65**; *Т. Поборцева* (Орша) **64**; *В. Пойда* (с. Голятин Закарпатской обл.) **64, 65**; *М. Половинник* (Мена Черниговской обл.) **58, 59, 63**; *Н. Поляков* (п/о Сизый Бугор Астраханской обл.) **63**; *Р. Портной* (Черновцы) **57, 63—65**; *С. Посланский* (Харьков) **56, 58, 59**; *М. Райтер* (Ленинград) **56, 57, 59, 62—65**; *С. Рашхеев* (Солнечногорск Московской обл.) **61, 63**; *А. Резников* (Киев) **63—65**; *А. Рейбольд* (с. Соколовка Северо-Казахстанской обл.) **59, 64**; *Ф. Рожков* (Рязань) **63, 65**; *В. Романов* (Димитровград) **57, 58, 64, 65**; *Е. Романовский* (Киев) **56, 58, 62, 63, 65**; *Л. Рубинштейн* (Калининград) **56, 57, 59**; *А. Ряхин* (Калинин) **63, 64**; *В. Свиридов* (п/о Рамонь Воронежской обл.) **62—64**; *Т. Седрединов* (Куруш ДАССР) **63—65**; *М. Ситников* (Москва) **64**; *Ю. Скрынников* (Рустави) **64, 65**; *В. Смелянский* (Севастополь) **56, 58**; *С. Солнцев* (Киев) **63, 65**; *С. Соловьев* (Орел) **61, 63, 65**; *В. Тарасов* (Ленинград) **62, 63**; *В. Татаренко* (Киев) **63**; *С. Тимошин* (Кировоград) **62, 64**; *В. Ткачук* (Выкса Горьковской обл.) **56—59, 61—65**; *С. Трегуб* (Ташкент) **57**; *М. Тумашян* (Ереван) **65**; *А. Туровский* (Псков) **61, 63—65**; *И. Федяк* (Парица Ивано-Франковской обл.) **63**; *С. Финашин* (Ленинград) **56, 59**; *В. Фомин* (Орск) **63**; *И. Фомина* (Харьков) **56, 58, 63, 65**; *С. Харовский* (с. Великие Чернокопцы Тернопольской обл.) **58**; *А. Хомич* (Брест) **57—59, 62**; *И. Цукерман* (Ленинград) **57, 59**; *Г. Черный* (Бровары) **62, 63**.

Ю. П. Лысов

Окончание списка будет опубликовано в следующем номере.

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

Какие вопросы и задачи могут ожидать поступающего на приемных экзаменах? Как эти экзамены проходят? В чем состоят типичные недостатки ответов абитуриентов? Чему при подготовке уделить внимание в первую очередь и как наиболее эффективно организовать повторение?

Ответам на эти вопросы посвящены материалы нашего традиционного раздела «Практикум абитуриента». Здесь читатель найдет статьи по отдельным темам и наиболее важным или трудным вопросам программы вступительных экзаменов по физике и математике, условия и разбор задач вариантов, предлагавшихся в прошлом году абитуриентам различных вузов страны, информацию о книгах в помощь поступающим и т. д.

Подчеркнем, что материалы «Практикума абитуриента» не могут заменить собой школьные учебники, да и не ставят перед собой такой цели. В публикуемых статьях читатели найдут по возможности углубленное, подробное изложение лишь нескольких теоретических вопросов, сопровождаемое, однако, разбором задач, взятых из практики приемных экзаменов. Намечая темы статей, редакция использовала опыт вступительных экзаменов и учитывала соображения и предложения, содержащиеся в обширной редакционной почте. Читателям, конечно, будет полезно познакомиться и с теми материалами «Практикума абитуриента», которые уже публиковались в журнале в прошлые годы. Подробный тематический список статей для поступающих за 1970—1973 годы помещен в «Кванте» № 1, 1974 г., с. 52.

Многие наши читатели, особенно те, кто окончил школу несколько лет назад, интересуются вопросом, как отразился происходящий сейчас переход к новым программам по математике и физике в школе на содержании программ вступительных экзаменов.

Напомним, что в 1972 году программа вступительных экзаменов по математике была пересмотрена, но по содержанию она полностью соответствует старому курсу средней школы. Эта программа действует и сейчас. Она содержит перечень основных математических понятий, которыми должен владеть поступающий, теорем, которые необходимо уметь доказывать, и формул, которые надо уметь выводить. Кроме того, в программе охарактеризованы основные математические умения и навыки, которыми должен владеть абитуриент. Никаких знаний сверх программы от поступающих не требуется. В частности, не предусматривается знакомство абитуриентов с понятиями производной, интеграла, с основами математического анализа, с элементами векторного исчисления и т. п.

Программа вступительных экзаменов по физике также полностью соответствует старому курсу средней школы.

Мы надеемся, что знакомство с вариантами вступительных экзаменов даст возможность будущим абитуриентам конкретно представить себе, что такое письменный экзамен по физике и математике в университетах, педагогических и технических вузах. Эти варианты — удобный повод заранее попробовать свои силы в решении определенного набора задач за фиксированное время.

Залог успеха на вступительных экзаменах — систематическая и регулярная самостоятельная работа. Необходимо повторить и активно закрепить теоретический материал, получить достаточную практику в решении задач. Для этого нужно время. Поэтому начинайте готовиться к приемным экзаменам, не откладывая, особенно если вы собираетесь поступать в институт уже через полгода!

Г. В. Дорофеев

Отношения отрезков, площадей и объемов

Программа школьного курса геометрии построена, как известно, так, что учащиеся девятых и десятых классов решают в основном задачи по стереометрии, а планиметрические задачи появляются в их практике лишь в связи с применением тригонометрии. Это, конечно, совершенно естественно, однако на вступительных экзаменах такое положение вещей сказывается далеко не лучшим образом: поступающие, неплохо справляясь с задачами, поддающимися прямому (иногда весьма громоздкому) тригонометрическому расчету, становятся в тупик перед сравнительно простыми задачами, для решения которых требуется лишь активное владение стандартными и, в общем, хорошо им известными теоремами планиметрии.

Отсюда вытекает очевидный вывод: при подготовке к вступительным экзаменам особое внимание следует уделить активизации геометрических знаний, полученных еще в 6—8-х классах, следует решать больше задач, требующих «чисто геометрических» идей.

Подчеркнем сразу же, что здесь не идет речи о каком-то противопоставлении чисто геометрических и тригонометрических методов решения задач. Напротив, наиболее успешным может быть именно их разумное сочетание, и тогда на экзаменах не будет встречаться стремление с помощью головоломных вычислений решить простую геометрическую задачу или, наоборот, рассматривать многочисленные подобные треугольники в задачах, где введение тригонометрических функций является естественным и оправданным путем к решению. Научиться разумно сочетать эти методы — главная задача при подготовке к вступительным экзаменам.

В этой статье мы рассмотрим задачи, связанные с делением отрезков, площадей и объемов в некотором отношении. Мы убедимся, что задачи подобного рода совсем не сложны и, во всяком случае, их объективная сложность не соответствует тем затруднениям, которые они обычно вызывают у поступающих.

Начнем с совсем простой задачи, которую, однако, решили совсем немногие поступающие.

Задача 1 (МГУ, геологич. ф-т, 1964). *Точка K делит медиану AD треугольника ABC в отношении* $3:1$, *считая от вершины. В каком отношении прямая BK делит площадь треугольника ABC?*

Не составляет труда заметить, что треугольники BAE и BEC (рис. 1) имеют общую вершину, и их основания лежат на одной прямой, так что искомое отношение их площадей равно отношению длин отрезков AE и EC, и таким образом, требуется узнать, в каком отношении прямая BE делит сторону BC.

Представляется совершенно очевидным, что прямой вычислительный путь (ввести, например, вспомога-

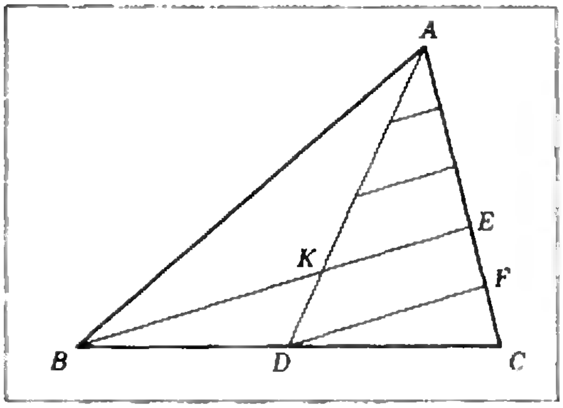


Рис. 1.

тельные элементы — длины сторон или величины углов) связан с большими трудностями и вряд ли приведет к успеху. В то же время естественно отыскивается чисто геометрическая идея решения. В самом деле, нам нужно узнать, в каком отношении делится одна сторона угла DAC, а известно, что его вторая сторона разделена на 4 равных отрезка. И теперь уже не может не прийти на память теорема о делении сторон угла параллельными прямыми, и уж, конечно, совершенно естественно провести через точки деления медианы прямые, параллельные BK. Тогда на стороне AC возникают четыре равных отрезка. Что же касается пятого отрезка FC, то ведь еще надо воспользоваться тем, что AD — медиана, так что DF — средняя линия треугольника BCE, и следовательно, $FC = EF$.

Таким образом, сторона AC разделена на 5 равных отрезков, и искомое отношение равно 3 : 2.

Если дополнительно обдумать предложенное решение, то станет ясно, что таким же способом можно решить и более общую задачу: вместо отношения 3 : 1 можно рассмотреть произвольное деление отрезка AD, и более того, в решении существенно не то, что AD — медиана, а лишь то, что точка D делит BC в известном отношении.

Решите самостоятельно эту более общую задачу.

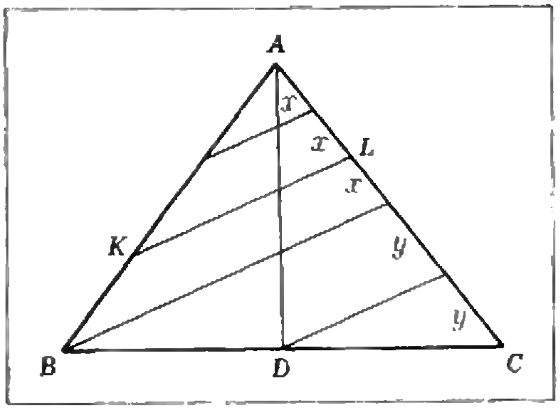


Рис. 2.

Задача 2. *На боковых сторонах AB и AC равнобедренного треугольника ABC взяты точки K и L так, что $AK : KB = 2$, $AL : LC = 1/2$. В каком отношении прямая KL делит высоту AD?*

Идея решения этой задачи — та же, что и предыдущей, а само решение очевидно из рисунка 2: искомое отношение равно $2x : (x + y)$, а по условию $\frac{2x}{x + 2y} = \frac{1}{2}$, откуда $3x = 2y$, и следовательно,

$$\frac{2x}{x + y} = \frac{2}{1 + \frac{y}{x}} = \frac{4}{5}.$$

И снова оказывается, что фактически мы решали более общую задачу: равенство сторон треугольника ABC понадобилось нам лишь для того, чтобы считать высоту AD медианой, так что аналогичным способом можно решать задачу для произвольного треугольника, в котором известно, в каком отношении делят его стороны точки D, K и L.

Очень часто в задачах, предлагаемых поступающим, возникает необходимость вычислить площадь отсекаемой части многоугольника или объем отсекаемой части многогранника, если каким-то образом заданы точки деления сторон или ребер. В этих задачах чрезвычайно полезны следующие утверждения:

(1) *Если в треугольнике ABC $AK = \alpha AB$, $AL = \beta AC$, то*

$$S_{\triangle AKL} = \alpha\beta S_{\triangle ABC}.$$

(2) *Если в треугольной пирамиде $SABC$ $SK = \alpha SA$, $SL = \beta SB$, $SM = \gamma SC$, то $V_{SKLM} = \alpha\beta\gamma V_{SABC}$.*

Утверждение (1) наиболее просто доказывается применением формулы площади треугольника $S = \frac{1}{2} bc \sin A$, а утверждение (2) — методом «последовательного отсечения»: от пирамиды $SABC$ надо перейти к пирамиде $SABM$, затем к $SALM$ и к $SKLM$. Эта идея приводит к простому решению следующей задачи.

Задача 3 (МГУ, геологич. ф-т, 1968). *В треугольнике ABC проведены биссектрисы AD и CF углов BAC*

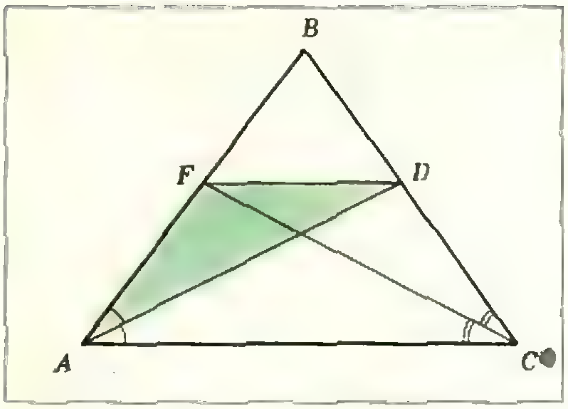


Рис. 3.

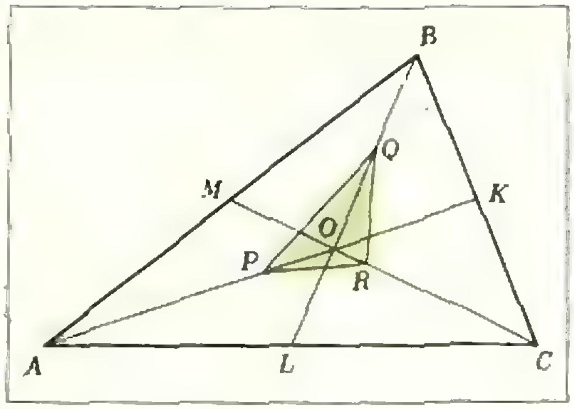


Рис. 4.

и ACB. *Найти отношение площадей треугольников* ABC *и* AFD, *если* $AB = 21$, $AC = 28$, $CB = 20$.

Треугольник AFD (рис. 3) может быть получен из ABC следующим образом: сначала отсекается треугольник ADB, а от него — треугольник AFD. Для подсчета искомого отношения воспользуемся теоремой о том, что биссектриса внутреннего угла треугольника делит противоположные стороны на части, пропорциональные прилежащим сторонам. Имеем

$$\frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AC} = \frac{3}{4}, \quad \frac{BF}{FA} = \frac{BC}{CA} = \frac{5}{7},$$

откуда (с помощью производных пропорций)

$$\frac{BD}{BC} = \frac{3}{7}, \quad \frac{BF}{BA} = \frac{5}{12}.$$

Следовательно,

$$S_{\triangle AFD} = \frac{7}{12}\cdot S_{\triangle ABD} = \frac{7}{12}\cdot\frac{3}{7}\times$$

$$\times S_{\triangle ABC} = \frac{1}{4} S_{\triangle ABC},$$

так что искомое отношение равно 4.

Задача 4 (МГУ, биологич. ф-т, 1970). *Дан треугольник* ABC *площади* 1. *На его медианах* AK, BL *и* CM *взяты соответственно точки* P, Q *и* R *так, что*

$$AP = PK, \quad BQ = \frac{1}{2}QL, \quad CR = \frac{5}{4}RM.$$

Найти площадь треугольника PQR.

Пусть O — точка пересечения медиан (рис. 4); искомую площадь подсчитаем как сумму площадей трех маленьких треугольников с вершиной O. Треугольник OPQ получается из треугольника OAB отсечением на его сторонах отрезков OP и OQ; при этом $AP = \frac{1}{2}AK$, $AO = \frac{3}{2}AK$, так что $OP = \frac{1}{6}AK = \frac{1}{4}AO$. Аналогично, $OQ = \frac{1}{2}OB$, поэтому

$$S_{\triangle OPQ} = \frac{1}{8} S_{\triangle OAB}.$$

С другой стороны, нетрудно видеть, что $S_{\triangle AOB} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC}$, так что

$$S_{\triangle OPQ} = \frac{1}{24}.$$

Подсчитав аналогично площади треугольников OPR и OQR, получаем, что $S_{\triangle PQR} = \frac{1}{12}$.

Задача 5 (МГУ, химич. ф-т, 1970). *В прямой треугольной призме* $ABCA_1B_1C_1$, *у которой* $AC = 6$, $AA_1 = 8$, *через вершину* A *проведена плоскость, пересекающая ребра* BB_1 *и* CC_1 *соответственно в точках* M *и* N. *В каком отношении делит эта плоскость объем призмы, если* $BM = MB_1$, *а* AN — *биссектриса угла* CAC_1?

Легко видеть, что отношение объемов пирамид $ACBMN$ и $ACBB_1C_1$ равно отношению площадей их оснований, а для нахождения этого отношения следует найти, в каком отношении делит точка N ребро CC_1

(рис. 5). Последнее отношение легко находится: по теореме Пифагора $AC_1 = 10$ и по теореме о биссектрисе $CN : NC_1 = 3 : 5$.

Теперь нетрудно подсчитать, что $S_{CBMN} : S_{CBB_1C_1} = 7 : 16$, и поэтому

$$V_{ACBMN} = \frac{7}{16} V_{ACBB_1C_1}.$$

С другой стороны, пирамида $ACBB_1C_1$ дополняется до всей призмы пирамидой $AA_1B_1C_1$, объем которой составляет $^1/_3$ объема призмы, так что объем пирамиды $ACBB_1C_1$ равен $^2/_3$ объема призмы. Следовательно, объем пирамиды $ACBMN$ составляет $^7/_{24}$ объема призмы, и искомое отношение равно $7 : 17$.

Задача 6 (МГУ, ф-т вычислительной математики и кибернетики, 1973). *Сфера проходит через точки A, B, C, D и пересекает отрезки SA, SB, SC и SD в точках A_1, B_1, C_1, D_1 соответственно. Известно, что* $SD_1 = 9/4$, $DD_1 = 47/36$, *отношение площадей треугольников SA_1B_1 и SAB равно* $15 : 32$, *отношение объемов пирамид $SB_1C_1D_1$ и $SBCD$ равно* $1701 : 4096$, *а отношение объемов пирамид $SA_1B_1C_1$ и $SABC$ равно* $105 : 256$. *Найти отрезки SA_1, SB_1, SC_1.*

Легко понять, что в задаче речь идет о четырехугольной пирамиде $SABCD$, на ребрах которой взяты точки A_1, B_1, C_1, D_1 (рис. 6). Для решения задачи запутанные данные об отношениях площадей и объемов сведем к отношениям соответствующих отрезков.

Составив систему равенств

$$\frac{SA_1}{SA}\cdot\frac{SB_1}{SB} = \frac{15}{32}, \quad \frac{SB_1}{SB}\cdot\frac{SC_1}{SC}\cdot\frac{SD_1}{SD} = \frac{1701}{4096},$$

$$\frac{SA_1}{SA}\cdot\frac{SB_1}{SB}\cdot\frac{SC_1}{SC} = \frac{105}{256}$$

и учитывая, что $SD_1 : SD = 81 : 128$, находим

$$\frac{SA_1}{SA} = \frac{5}{8}, \quad \frac{SB_1}{SB} = \frac{3}{4}, \quad \frac{SC_1}{SC} = \frac{7}{8}.$$

С другой стороны, отрезки SA, SB, SC, SD являются секущими к сфере, о которой идет речь в условии задачи, и поэтому произведения этих секущих на их внешние части равны все квадрату касательной к сфере, проведенной из точки S (здесь мы пользуемся очевидным, но не доказанным утверждением о касательной и секущей для сферы, аналогия его с соответствующим утверждением для окружности не является, разумеется, доказательством; докажите это утверждение самостоятельно). Таким образом, $SA_1 \cdot SA = SB_1 \cdot SB = SC_1 \cdot SC = SD_1 \cdot SD = \frac{9}{4}\cdot\frac{128}{36} = 8$.

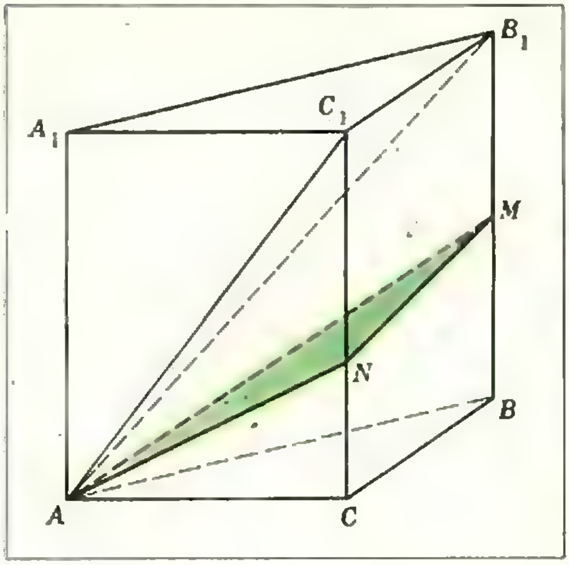


Рис. 5.

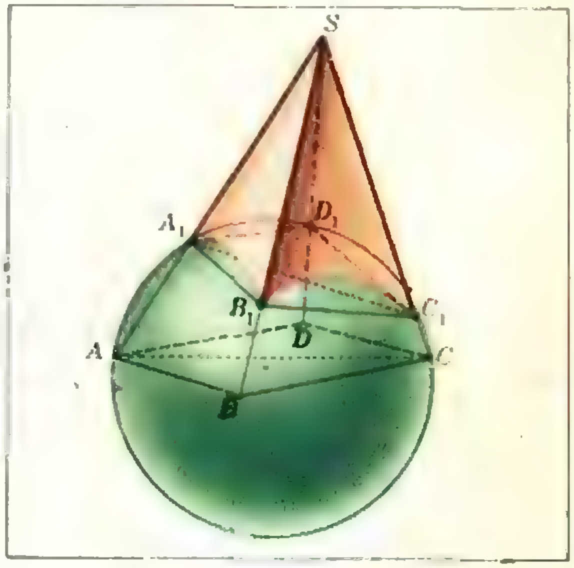


Рис. 6.

Теперь не составляет труда найти требуемые отрезки:

$$SA_1 = \sqrt{5},\ SB_1 = \sqrt{6},\ SC_1 = \sqrt{7}.$$

Упражнения

1 (МГУ, биологич. ф-т, 1970). На сторонах выпуклого четырехугольника $ABCD$ площади 1 взяты точки: K на AB, L на BC, M на CD и N на DA. При этом $AK : KB = 2 : 1$, $BL : LC = 1 : 3$, $CM : MD = 1 : 1$, $DN : NA = 1 : 5$. Найти площадь шестиугольника $AKLCMN$.

2 (МГУ, биологич. ф-т, 1972). В треугольнике ABC биссектрисы AD и BE пересекаются в точке O. Найти отношение площади треугольника ABC к площади четырехугольника $ODCE$, зная, что $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$.

3 (МГУ, химич. ф-т, 1972). В треугольнике ABC угол A равен 45°, а угол C острый. Из середины стороны BC опущен перпендикуляр NM на сторону AC. Площади треугольников NMC и ABC относятся как $1 : 8$. Найти углы треугольника ABC.

4 (МГУ, биологич. ф-т, 1972). В параллелограмме $ABCD$ точка E делит пополам сторону CD, биссектриса угла ABC пересекает отрезок AE в точке O. Найти площадь четырехугольника $OBCE$, зная, что $AD = a$, $DE = b$, $\angle ABO = \alpha$.

5 (МГУ, химич. ф-т, 1970). Плоскость пересекает боковые ребра SA, SB, SC пирамиды $SABC$ в точках K, L, M соответственно. В каком отношении делит эта плоскость объем пирамиды, если $SK : KA = SL : LB = 2 : 1$, а медиана SN треугольника SBC делится этой плоскостью пополам?

6 (МГУ, химич. ф-т, 1970). Плоскость пересекает ребра A_1B_1, B_1C_1 и BC треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ в точках M, N и P соответственно. В каком отношении делит эта плоскость объем призмы, если $B_1M : A_1B_1 = 1 : 2$, $B_1N : B_1C_1 = 2 : 3$, $BP : CB = 1 : 3$?

7. Сформулируйте утверждения 1 и 2 из статьи (с. 56) для случая, когда точки K, L, M лежат не на самих сторонах (ребрах), а на их продолжениях.

8. (МГУ, ф-т вычислительной математики и кибернетики, 1973). Точки A, B, C, D, E, F лежат на сфере радиуса $\sqrt{2}$. Отрезки AD, BE и CF пересекаются в точке S, находящейся на расстоянии 1 от центра сферы. Объемы пирамид $SABC$ и $SDEF$ относятся как $1 : 9$, пирамид $SABF$ и $SDEC$ как $4 : 9$, пирамид $SAEC$ и $SDBF$ как $9 : 4$. Найти отрезки SA, SB, SC.

9. Точки K, L, M делят стороны AB, BC и CA треугольника ABC соответственно в отношении $\alpha : \beta$, $\gamma : \delta$, $\rho : \sigma$ (считая каждый раз от вершины, упомянутой первой), причем $\alpha + \beta = \gamma + \delta = \rho + \sigma = 1$. В каком отношении прямая KM делит отрезок AL? В каком отношении прямая BM делит CK?

Квадраты из монет

1. На плоскости расположено 9 одинаковых монет так, как показано на рисунке 1.

Какое минимальное число монет нужно убрать, чтобы не осталось ни одного квадрата с вершинами в центрах монет?

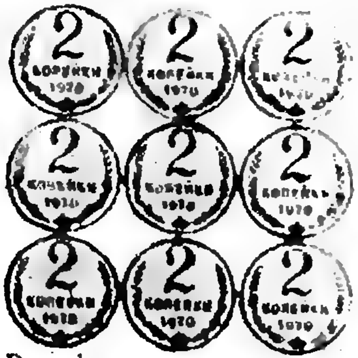


Рис. 1.

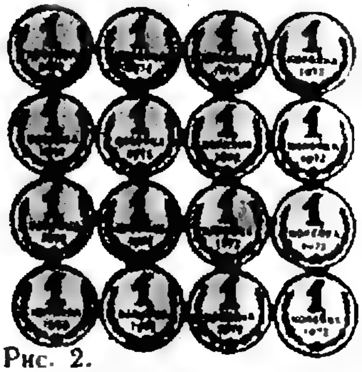


Рис. 2.

2. Та же задача, если монет 16, и они расположены так, как показано на рисунке 2.

В. Е. Колков

Задачи о воздушных шарах

Л. П. Баканина

В наш век самолетов и ракет, для которых доступны любые высоты над поверхностью Земли, воздушные шары, громоздкие, ненадежные и неуправляемые, уже отошли в прошлое, хотя когда-то именно они дали человеку возможность подняться в воздух. Впрочем, в некоторых случаях воздушные шары очень удобны, они используются и сейчас. Например, с аэростата удобно обучать прыжкам с парашютом, а метеорологи исследуют давление, температуру и воздушные потоки в атмосфере с помощью шаров-зондов.

Задачи о воздушных шарах даются иногда на вступительных экзаменах. Обычно их можно разделить на два типа:

1) задачи, в которых нужно найти связь между габаритами и наполнением шара и подъемной силой, действующей на шар у поверхности Земли;

2) задачи, в которых нужно определить максимальную высоту подъема шара; при этом задается какая-нибудь модель атмосферы, то есть закон изменения давления и температуры с высотой.

По существу, задачи обоих типов — это задачи на статику. Для их решения нужно уметь применять уравнение состояния газов и найти условие равновесия шара, на который действует сила притяжения Земли и выталкивающая сила со стороны окружающего шар воздуха. Если выталкивающая сила больше силы притяжения (разность этих сил называют подъемной силой), шар поднимается вверх. Но по мере подъема уменьшается плотность окружающего воздуха, а следовательно, уменьшается и выталкивающая сила, по закону Архимеда равная

$$F = \rho g V,$$

где ρ — плотность воздуха, а V — объем шара. На некоторой высоте выталкивающая сила окажется равной силе притяжения — это и будет максимальной высотой подъема шара.

Разберем теперь несколько конкретных задач, которые в разные годы предлагались на вступительных экзаменах в Московский физико-технический институт.

Задача 1. *Сферическая оболочка воздушного шара сделана из материала, квадратный метр которого имеет массу $b = 1$ кг/м². Шар наполнен гелием при нормальном атмосферном давлении. При каком минимальном радиусе шар поднимает сам себя? Температура гелия и температура окружающего воздуха одинаковы и равны* 0 °С. *Молекулярная масса воздуха* 29 *кг/кмоль, молекулярная масса гелия* 4 *кг/кмоль.*

При увеличении радиуса шара выталкивающая сила растет пропорционально кубу радиуса, а вес оболочки — пропорционально квадрату радиуса. Следовательно, выталкивающая сила растет быстрее и, начиная с какого-то значения радиуса, станет больше, чем вес оболочки. Тогда шар начнет подниматься. Обозначим этот радиус оболочки через r. При этом

$$\rho_в \cdot g\,\frac{4}{3}\pi r^3 = bg\cdot 4\pi r^2 + \rho_{He}\cdot g\,\frac{4}{3}\pi r^3,$$

откуда

$$r = 3\,\frac{b}{\rho_в - \rho_{He}}.$$

Плотности воздуха $\rho_в$ и гелия ρ_{He} при данных условиях найдем с помощью закона Менделеева — Клапейрона $pV = \frac{m}{\mu} RT$:

$$\rho_{\text{в}} = \frac{m}{V} = \frac{p\mu_{\text{в}}}{RT},$$

$$\rho_{\text{He}} = \frac{p\mu_{\text{He}}}{RT}; \quad \rho_{\text{в}} - \rho_{\text{He}} = \frac{p}{RT}(\mu_{\text{в}} - \mu_{\text{He}}).$$

Окончательно получаем

$$r = \frac{3b \cdot RT}{p(\mu_{\text{в}} - \mu_{\text{He}})} \approx 2{,}8\ \text{м}.$$

Задача 2. *Объем воздушного шара равен $V = 230\ м^3$, масса оболочки $M = 145\ кг$. Шар наполнен горячим воздухом при нормальном атмосферном давлении. Какую температуру должен иметь воздух внутри оболочки, чтобы шар начал подниматься? Температура наружного воздуха $t_0 = 0\ ^\circ C$.*

При нагревании воздуха его плотность уменьшается, так как $\rho = \frac{p\mu}{RT}$ (см. задачу 1). Шар начнет подниматься, если $\rho_0 gV \geqslant Mg + \rho gV$ (ρ_0 — плотность наружного воздуха). Подставляя выражения для плотности наружного воздуха и воздуха внутри шара ρ, получаем

$$\frac{pV\mu}{R}\left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T}\right) \geqslant M.$$

Отсюда

$$1 - \frac{T_0}{T_{\min}} = \frac{MRT_0}{\mu pV} \approx 0{,}5,$$

значит,

$$T_{\min} \approx 2T_0 = 546\ ^\circ K = 273\ ^\circ C.$$

Задача 3. *Для удержания на поверхности Земли метеорологического шара-зонда с массой $M = 20\ кг$ необходимо приложить силу $F = 1000\ н$. Шар поднимается до такой высоты, где его объем увеличивается в два раза. Температура воздуха, измеренная на этой высоте с помощью зонда, оказалась равной $t = -43\ ^\circ C$. Вычислить давление воздуха на этой высоте, если на поверхности Земли давление $p_0 = 754$ мм рт. ст., а температура $t_0 = +17\ ^\circ C$.*

Условие равновесия шара у поверхности Земли записывается так:

$$F = \rho_0 gV - Mg. \qquad (1)$$

где V — объем шара у поверхности Земли, а $\rho_0 = \frac{\mu p_0}{RT}$ — плотность воздуха. При этом масса шара M включает в себя массу оболочки, приборов и газа, заключенного внутри оболочки. Из условия известно, что объем шара при подъеме увеличивается. Следовательно, оболочка шара мягкая и герметичная. Объем увеличивается потому, что при мягкой оболочке давление газа внутри должно быть таким же, как давление окружающего воздуха, которое уменьшается с высотой. Если оболочка герметичная, масса шара не изменяется при подъеме и максимальная высота его подъема определяется условием

$$\rho g \cdot 2V = Mg, \qquad (2)$$

где $\rho = \frac{\mu p}{RT}$. Решая совместно уравнения (1) и (2), находим

$$p = p_0 \frac{T}{2T_0(1 + F/Mg)} \approx 79\ \text{мм рт. ст.}$$

Задача 4. *Шар-зонд, наполненный водородом, имеет герметичную оболочку постоянного объема $V = 50\ м^3$. Масса шара вместе с водородом $M = 5\ кг$. Определить, на какую максимальную высоту он сможет подняться, если известно, что атмосферное давление уменьшается в два раза через каждые $h = 5\ км$ высоты. Температура в стратосфере $t = -60\ ^\circ C$. Молекулярная масса воздуха 29 кг/кмоль. Давление у поверхности Земли $p_0 = 1\ атм$.*

На максимальной высоте выталкивающая сила равна весу шара-зонда:

$$Mg = \rho gV.$$

Выразив плотность окружающего воздуха через давление и температуру, получим

$$M = \frac{\mu p}{RT} V.$$

Таким образом, давление воздуха на

этой высоте равно

$$p = \frac{M}{\mu}\frac{RT}{V} \approx 6{,}12\cdot 10^3\ н/м^2.$$

Посмотрим теперь, во сколько раз давление p меньше давления у поверхности Земли p_0: $\frac{p_0}{p} \approx 16$.

Из условия известно, что давление падает в два раза через каждые 5 *км* подъема, то есть $p_0/p = 2^{H/h}$, где H — высота подъема, а $h = 5$ *км*. В нашем случае

$$2^{H/h} = 16 = 2^4.$$

Отсюда

$$H = 4h = 20\ км.$$

Задача 5. *Нерастяжимая оболочка шара-зонда объема $V = 75\ м^3$ имеет в нижней части небольшое отверстие. Масса оболочки $m = 7$ кг. Шар наполнен водородом. Определить, на какую максимальную высоту сможет подняться этот шар-зонд, если известно, что атмосферное давление уменьшается в два раза через каждые $h = 5$ км высоты. Температура воздуха в стратосфере $t = -60\ ^\circ C$, температура водорода равна температуре окружающего воздуха. Давление у поверхности Земли $p_0 = 1$ атм.*

Эта задача отличается от предыдущей тем, что оболочка шара не герметична, а имеет отверстие. Следовательно, давление внутри шара все время равно давлению в атмосфере, и по мере увеличения высоты подъема шара водород вытекает из отверстия. Будем считать, что подъем происходит достаточно быстро и можно пренебречь диффузией воздуха внутрь оболочки, тогда условие равновесия шара на максимальной высоте

$$mg + \rho_{H_2}gV = \rho_в gV.$$

Плотности водорода и воздуха можно найти из уравнения Менделеева — Клапейрона:

$$\rho_{H_2} = \frac{\mu_{H_2}p}{RT}, \quad \rho_в = \frac{\mu_в p}{RT}.$$

Таким образом, давление на максимальной высоте

$$p = \frac{mRT}{(\mu_в - \mu_{H_2})V} \approx 6{,}12\cdot 10^3\ н/м^2.$$

Отношение $\frac{p_0}{p} = 16$, и следовательно, высота подъема $H = 20$ *км* (см. решение предыдущей задачи).

Высота подъема в задаче 5 получилась такая же, как для герметичного шара в задаче 4, но не следует забывать, что мы рассматривали разные шары, с разными объемами и массами. А если оба шара совершенно одинаковы и отличаются только тем, что у одного оболочка герметичная, а у другого имеет отверстие,— какой из шаров поднимется выше в этом случае?

Выталкивающая сила будет одинакова для обоих шаров, так как их объемы равны. Если начальные массы шаров были одинаковы, то после подъема шар с отверстием окажется легче, так как часть наполняющего его газа вытечет при подъеме. Следовательно, шар с отверстием сможет подняться на бо́льшую высоту.

Обычно человеку, впервые задумавшемуся над этим вопросом, такой результат кажется странным. Часто задают вопрос: «Как вообще в шаре с отверстием возникает подъемная сила? Ведь снизу, там, где отверстие, воздух и газ внутри шара находятся в равновесии».

Давайте рассмотрим верхнюю точку шара. Если в нижней точке шара давление воздуха и газа равно p_0, в верхней точке давление воздуха $p_1 = p_0 - \rho_в gh$, а давление газа $p_2 = p_0 - \rho_г gh$ (h — высота шара). Если $\rho_г < \rho_в$, то $p_2 > p_1$ и, следовательно, на оболочку снизу действует большая сила, чем сверху — возникает подъемная сила. Легко убедиться (вы сможете это сделать сами для тела достаточно простой формы), что именно эта разница давлений и дает результирующую выталкивающую силу, определяемую законом Архимеда. Недоумение часто возникает потому, что при расчетах плотности газа внутри шара обычно считают давление в шаре всюду одинаковым. Не нужно забывать, что это всего лишь приближение. Если мы определяем саму величину

$$p_2 = p_0 - \rho_г g h,$$

то, так как h мало — всего несколько метров, $\rho_г g h \ll p_0$, и мы можем считать $p_2 \approx p_0$. Если же нас интересует разность

$$p_2 - p_1 = \rho_г g h - \rho_в g h,$$

то здесь оба члена одинаковы по порядку величины, и учитывать их надо оба. Кстати сказать, то, что мы считаем $\rho_в$ и $\rho_г$ постоянными,— тоже приближение, на самом деле они уменьшаются с высотой по мере уменьшения давления. Но учет этого обстоятельства дал бы значительно меньшую поправку к выталкивающей силе, этой поправкой можно пренебречь.

Упражнения

1. Определить подъемную силу воздушного шара, в котором находится *m г* водорода. Оболочка шара герметичная и сделана из легкого неупругого материала, который может свободно растягиваться.

2. На сколько градусов надо нагреть воздух внутри сообщающегося с атмосферой воздушного шара, сферическая оболочка которого имеет диаметр 10 *м* и весит 10 *кг*, для того чтобы шар взлетел? Атмосферное давление 735 *мм. рт. ст.*, температура окружающего воздуха +27 °C.

3. Воздушный шар представляет собой баллон постоянного объема, наполненный гелием. Через отверстие в нижней части шар сообщается с атмосферой. Как изменится максимальная высота подъема шара, если гелий нагреть до температуры T_1? Температуру атмосферы считать постоянной и равной T_0, а давление изменяющимся по закону $p = p_0(1 - ah)$, где a — постоянная, h — высота подъема, p_0 — давление у поверхности Земли.

Геометрические задачи

1. Высоты AK, BL и CM остроугольного треугольника ABC продолжены до пересечения с описанной окружностью в точках D, E, F соответственно. Пусть P, Q, R — такие точки окружности, что $\smile AP = \frac{1}{3} \smile ABD$, $\smile BQ = \frac{1}{3} \smile BCE$, $\smile CR = \frac{1}{3} \smile CAF$, причем все дуги имеют одно и то же направление. Доказать, что $\smile AR = \frac{1}{3} \smile ACD$, $\smile CQ = {}^1/_3 \smile CBF$, $\smile BP = {}^1/_3 \smile BAE$, а треугольник PQR — равносторонний.

2. Дана трапеция $ABCD$ с параллельными сторонами AB и CD, $AB < CD$. Циркулем и линейкой построить точку H на боковой стороне трапеции такую, что прямая HK, параллельная основанию трапеции, делит ее на части, площади которых относятся так $m : n$.

3. Пусть O — центр окружности, описанной вокруг треугольника ABC, R — ее радиус, H — точка пересечения высот треугольника ABC и U, V, W — точки пересечения описанной окружности с прямыми AH, BH и CH. Доказать, что прямые, проведенные через точки U, V, W параллельно прямым OA, OB и OC соответственно, пересекаются в одной точке P. Доказать также, что если H' — точка на продолжении отрезка OH, такая, что $OH = HH'$, то $PH' = \frac{OH^2}{R^2}$.

4. Построить вписанный в окружность треугольник, зная одну его вершину A и точку H пересечения высот треугольника.

5. Заданы окружность, прямая линия AB и точка X на прямой. Построить окружность, касающуюся прямой AB в точке X, так, чтобы общая касательная данной и проведенной окружностей имела заданную длину l.

Н. В.

Московский инженерно-физический институт

Подробно о Московском ордена Трудового Красного Знамени инженерно-физическом институте мы рассказывали в «Кванте» № 1 за 1973 год.
Ниже приводятся варианты письменного экзамена по математике и задачи устного экзамена по физике в 1974 году. Содержание теоретических вопросов по физике полностью соответствует программе вступительных экзаменов для поступающих в вузы.

Математика

Вариант 1

1. Из пункта A отправилась моторная лодка вверх по Волге, а из пункта B одновременно вышел плот по течению. Через a часов они встретились и далее двигались без остановок. Дойдя до пункта B, лодка, не задерживаясь, повернула обратно и догнала плот в пункте A. Предполагается, что собственная скорость лодки была все время неизменной. Сколько времени находились в плавании плот и лодка?

2. Радиус основания конуса равен r, а образующая наклонена к плоскости основания под углом φ; около этого конуса описана пирамида, имеющая в основании прямоугольный треугольник с острым углом α. Определить объем и боковую поверхность пирамиды.

3. Решить неравенство

$$\log_{\frac{4}{3}}\left(\sqrt{x+3}-x\right)>0.$$

4. Решить уравнение

$$\sin^4 x+\cos^4 x+\sin 2x+a=0.$$

Вариант 2

1. В куске сплава массой 6 *кг* содержится медь. В куске другого сплава массой 8 *кг* содержится меди в процентном отношении вдвое меньше, чем в куске первого сплава. От первого куска отделили некоторую часть, а от второго куска отделили часть, вдвое большую по массе, чем от первого куска. Каждую из отделенных частей сплавили с остатком другого куска, после чего получили два новых сплава с одинаковым процентным содержанием меди. Какова масса каждой из частей, отделенных от кусков первоначальных сплавов?

2. Дана окружность радиуса R. Из ее центра проведены два радиуса OA и OB, образующие угол α. В меньший сегмент круга, отсекаемого хордой AB, вписан равносторонний треугольник, одна из сторон которого перпендикулярна к хорде AB. Найти сторону этого треугольника.

3. Решить неравенство

$$\log_{\frac{1}{3}}(x-1)+\log_{\frac{1}{3}}(x+1)+\log_{\frac{1}{3}}(5-x)<1.$$

4. Решить уравнение

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}(1-\sin x\cos x).$$

Вариант 3

1. Из пункта A в пункт B одновременно отправляются пешеход и велосипедист. Доехав до B, велосипедист поворачивает обратно и встречает пешехода через 1 час после начала движения. После встречи пешеход продолжает идти в B, а велосипедист поворачивает и тоже едет в B. Доехав до B, велосипедист снова поворачивает обратно и встречает пешехода через 40 минут после первой встречи. Определить, за какое время пешеход пройдет расстояние от A до B.

2. Вычислить объем правильной треугольной пирамиды, если плоский угол при вершине равен α, а радиус окружности, описанной около боковой грани, равен r.

3. Решить уравнение

$$\log_{\frac{1}{\sqrt{1+x}}}10\cdot\log_{10}(x^2-3x+2)=-2+\log_{\frac{1}{\sqrt{1+x}}}10\cdot\log_{10}(x-3).$$

4. Решить уравнение $\sin^2 x=a^2\sin^2 3x$ $(a>0)$.

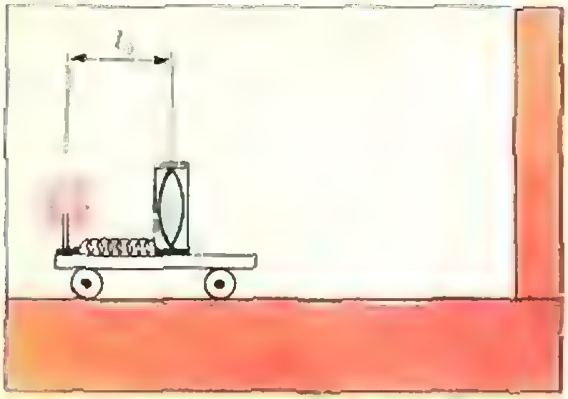


Рис. 1.

Физика

1. Рамка площадью $S = 1$ *дм*^{2} из проволоки с сопротивлением $R = 0{,}45$ *ом* вращается с угловой скоростью $\omega = 100$ *рад/с* в однородном магнитном поле с индукцией $B = 0{,}1$ *тл*. Ось вращения рамки лежит в ее плоскости и перпендикулярна к вектору магнитной индукции **B**. Найти количество тепла Q, которое выделится в рамке за $N = 10^3$ оборотов. Самоиндукцией пренебречь.

2. На тележке смонтированы изотропно излучающий точечный источник света и линза в оправе, прикрепленной к одному концу пружинки жесткостью $k = 2$ *н/м* (рис. 1). Другой конец пружинки прикреплен к тележке под источником света. Оправа с линзой общей массы $m = 200$ *г* может без трения перемещаться вдоль тележки, движущейся перпендикулярно к вертикальной стенке. Определите ускорение **a**, с которым должна двигаться тележка, чтобы пучок света, выходящий из линзы, создавал на экране центральное светлое пятно, освещенность которого не изменялась бы во время движения тележки. Источник света находится на главной оптической оси линзы с фокусным расстоянием $F = 8$ *см*. Длина нерастянутой пружинки $l_0 = 9$ *см*.

3. Небольшой шарик, заряд которого $q = 1$ *мкк*, подвешен на невесомой изолирующей пружинке жесткостью $k = 9$ *н/м*. Из бесконечности медленно приближают другой небольшой шарик с таким же зарядом и помещают его в точку, где первоначально находился шарик на пружинке. Какую работу совершили при этом электростатические силы?

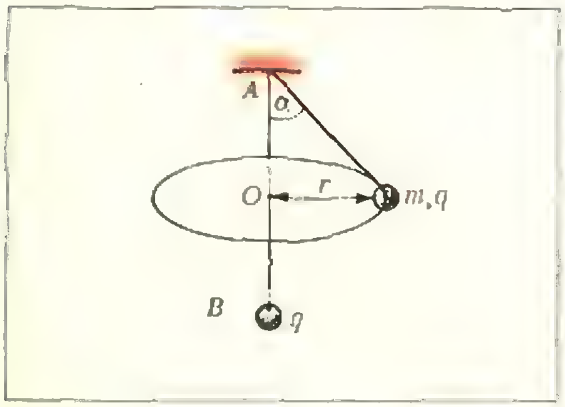


Рис. 2

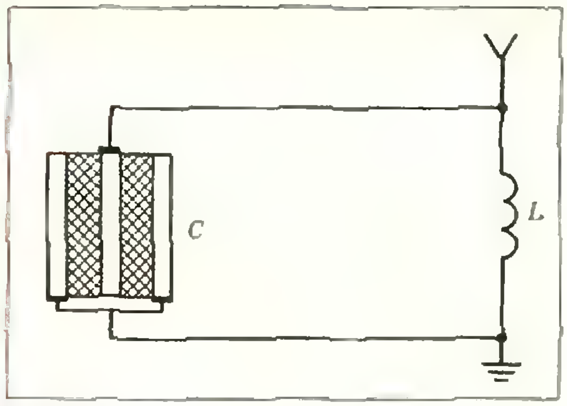


Рис. 3.

4. Заряженный шарик массы $m = 10$ *г*, подвешенный на изолирующей нерастяжимой нити, движется с постоянной угловой скоростью $\omega = 10$ *рад/с* по окружности радиуса $r = 5$ *см* (рис. 2). Под точкой подвеса A находится другой, неподвижный заряженный шарик B, причем расстояния AO и BO до центра окружности O одинаковы, а угол $\alpha = 45°$. Заряды обоих шариков одинаковы. Найти их величину q.

5. Колебательный контур состоит из катушки индуктивности и конденсатора, который представляет собой три металлические пластины площадью $S = 10$ *см*^{2} каждая, разделенные диэлектриком толщиной $d = 1$ *мм* с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 4$. Пластины конденсатора подключены к контуру, как показано на рисунке 3. При каком значении индуктивности катушки L контур будет настроен на длину волны $\lambda = 2{,}5$ *км*?

6. В вертикальном цилиндрическом сосуде с гладкими стенками под поршнем с массой $m = 10$ *кг* и сечением $S = 50$ *см*^{2} находится газ. При движении сосуда по вертикали с ускорением $a = 1$ *м/с*^{2} высота столба газа под поршнем уменьшается на $\eta = 5\%$ по сравнению с высотой в покоящемся сосуде. Считая температуру газа в сосуде неизменной, определите наружное давление p_0. Поршень герметично прилегает к стенкам сосуда.

А. И. Забоев, Г. И. Пантюхов,
В. И. Ростокин, Н. В. Шолохов

Спрашивайте — отвечаем

Редакция «Кванта» получает много писем от своих читателей. В некоторых письмах нам задают вопросы, ответы на которые представляют несомненный интерес не только для автора письма, но и для других читателей. Такие вопросы и ответы на них мы будем помещать на страницах журнала под рубрикой «Спрашивайте — отвечаем».

Возможно, некоторые из вас не решаются писать в редакцию из боязни задать «глупый» вопрос, допустить в письме ошибки или неточности. Конечно, лучше их не допускать, но ведь анализ иных ошибок может оказаться и плодотворным, и интересным, и поучительным. В науке нередко анализ ошибок приводит даже к открытиям.

В этом номере мы помещаем ответ на вопрос нашего читателя А. Сиднева.

Вот что пишет А. Сиднев:

Уважаемая редакция

В журнале «Квант» № 2 за 1974 г. помещена статья «Необычное путешествие», в которой излагается идея так называемого «гравилета», предложенная В. В. Белецким и М. Е. Гиверцем.

Не противоречит ли эта идея закону сохранения энергии? Ведь если «гравилет» будет выведен на геоцентрическую орбиту с первой космической скоростью $v_1 = 8000$ м/с, а уйдет в мировое пространство со второй космической скоростью $v_2 = 11\,000$ м/с, то при массе $m = 1000$ кг за период пребывания на орбите он должен приобрести энергию

$$E = \frac{m}{2}(v_2^2 - v_1^2) \approx 285 \cdot 10^8 \text{ дж}.$$

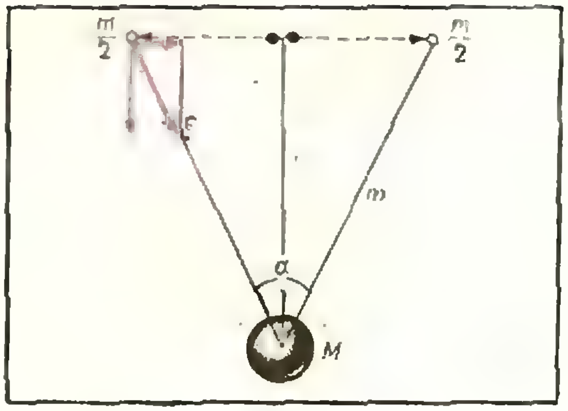
Откуда «гравилет» возьмет эту энергию?

Напомним, что в статье «Необычное путешествие» рассказывалось о космическом корабле в виде гантели, шары которой можно сдвигать или раздвигать. В статье было показано, что такой корабль, движущийся вокруг Земли, можно разогнать до второй космической скорости, если каждый раз в точках перигея быстро разводить шары, а в точках апогея — сдвигать их.

Ниже мы публикуем ответ автора статьи «Необычное путешествие» И. И. Воробьева.

Противоречие с законом сохранения энергии действительно было бы, если бы раздвижение массивных частей корабля не требовало затрат энергии. Рассмотрим разведение шаров в перигее. Будем считать разведение быстрым (так что перемещением по орбите можно пренебречь) и происходящим перпендикулярно плоскости орбиты.

Пусть r — расстояние от Земли до центра масс корабля (см. рис.). При разведении на угол α расстояние от каждого из шаров до центра Земли станет $r' = \frac{r}{\cos(\alpha/2)}$. Работа против сил гравитации (минимально необходимая работа для разведения шаров) равна



Напомним, что при движении по орбите угол α удерживается постоянным. Поэтому сила, действующая на гантель (гравилет с раздвинутыми шарами), отличается от силы, действующей на материальную точку той же массы (гравилет со сдвинутыми шарами), постоянным множителем $\cos\frac{\alpha}{2}$.

$$A = -\gamma\frac{mM}{r'} - \left(-\gamma\frac{mM}{r}\right) = \gamma\frac{mM}{r}\left(1 - \cos\frac{\alpha}{2}\right).$$

То, что надо совершать работу, ясно, потому что имеется составляющая силы притяжения, направленная против перемещения частей гравилета. Эта работа идет на увеличение потенциальной энергии корабля в гравитационном поле Земли. Таким образом, увеличение потенциальной энергии корабля происходит за счет затрат энергии внутренних источников на разведение шаров.

При сдвиге в апогее, наоборот, работа совершается гравитационными силами (можно даже запасти энергию в источниках). Но так как расстояние до корабля в апогее больше, то эта работа меньше «перигейной». Так что в целом за цикл приходится затрачивать энергию, которая и идет в конечном счете на разгон корабля.

Наименьшее необходимое количество энергии для ухода с орбиты одинаково при любом способе разгона. Однако, может оказаться, что гравилет в энергетическом отношении более эффективен, чем, например, ракетный двигатель. Ведь очевидно, что при реактивном движении часть энергии тратится впустую — переходит в кинетическую энергию выброшенных газов.

ИНФОРМАЦИЯ

Новый прием во Всесоюзную заочную математическую школу

Во Всесоюзную заочную математическую школу (ВЗМШ) принимаются ученики седьмых классов. Школьники, проживающие в Москве, Ленинграде и их пригородах, в ВЗМШ не принимаются.

Занятия начнутся с 1-го сентября. Обучение в школе бесплатное.

Учащиеся, принятые в школу, будут регулярно (примерно раз в месяц) получать задания, которые содержат объяснения теоретических вопросов и задачи для решения.

Во Всесоюзной заочной математической школе три курса обучения.

Желающие поступить в ВЗМШ должны выслать решения задач не позднее 20 марта 1975 года. После проверки работы (примерно в июле 1975 года) будет сообщено, приняты ли вы в ВЗМШ. Преимуществом при поступлении пользуются школьники, проживающие в сельской местности и рабочих поселках.

Хотя некоторые из вступительных задач по внешнему виду отличаются от обычных школьных, для их решения не требуется никаких дополнительных знаний по математике.

Для того, чтобы быть принятым в школу, не обязательно решить все задачи без исключения. При оценке работы будет учитываться не только количество решенных задач, но и качество решения. Решение каждой задачи должно быть обосновано. Ответ без всяких объяснений может быть не засчитан. Если в задаче возможны несколько разных ответов, то надо указать их все.

Работа должна быть выполнена на русском языке в ученической тетради в клетку. Вступительные работы обратно не высылаются.

В конверт вместе с тетрадью нужно вложить листок бумаги размером 14×6 *см* с вашим почтовым адресом (мы наклеим его на конверт, когда будем посылать вам ответ).

На обложку тетради наклейте лист клетчатой бумаги, разграфив и заполнив его по следующему образцу (иначе ваша работа проверяться не будет):

Область	*Вологодская*
Фамилия, имя	*Иванов Петр*
Год рождения	*1961 г.*
Класс	*7-й класс*
Школа (полное название)	*школа № 2 г. Тотьмы*
Фамилия, имя, отчество учителя математики	*Никаноров Владимир Алексеевич*
Место работы и должность родителей	*Отец — шофер автобазы № 3* *Мать — домашняя хозяйка*
Полный почтовый адрес	*г. Тотьма, ул. Ленина, д. 3, кв. 23*

Результаты проверки

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12а	12б

Школьники, проживающие в Архангельской, Вологодской, Калининградской, Ленинградской, Мурманской, Новгородской и Псковской областях, Коми и Карельской АССР, Белорусской, Латвийской, Литовской и Эстонской ССР, должны присылать работы по адресу: *Ленинград, П-228, ул. Савушкина, 61. Специнтернат при ЛГУ. Заочная математическая школа. На конкурс.*

Учащиеся, проживающие в Воронежской, Белгородской, Тамбовской, Курской и Липецкой областях, должны высылать работы по адресу: *г. Воронеж, Университет, ФЗМШ. На конкурс.*

Школьники, проживающие в остальных областях РСФСР и других союзных республиках, должны присылать работы по адресу: *117234, Москва, В-234, МГУ, мех.-мат, ВЗМШ. На конкурс.*

Задачи вступительной контрольной работы в ВЗМШ в 1975 году

1. Можно ли расположить на плоскости шесть точек и соединить их отрезками так, чтобы каждая точка была соединена отрезками с четырьмя другими точками и отрезки не пересекались друг с другом?

2. После окончания спектакля «Ревизор» Бобчинский и Добчинский начали препираться на сцене по поводу того, кто первый сказал «Э!».

Бобчинский: Это Вы, Петр Иванович, первый сказали «Э!». Вы сами раньше так говорили.

Добчинский: Нет, Петр Иванович, я так не говорил. Это Вы семгу первый заказали. Вы и сказали «Э!». А у меня зуб во рту со свистом.

Бобчинский: Что я семгу первый заказал, это верно. И верно, что у Вас зуб со свистом. Но все-таки это Вы первый сказали «Э!».

Выясните, кто первый сказал «Э!», если известно, что из девяти произнесенных в этом разговоре фраз нечетное число верных.

3. Найдите четыре числа, если известно, что произведение любых трех из них на 120 больше оставшегося числа.

4. Докажите, что если в треугольнике совпадают какие-нибудь две точки из следующих трех:

1) центр вписанного круга,
2) центр описанного круга,
3) точка пересечения медиан,

то треугольник равносторонний.

5. Четыре девочки — Катя, Лена, Маша и Нина — участвовали в концерте. Они пели песни. Каждую песню исполняли три девочки. Катя спела 8 песен — больше, чем все остальные, а Лена 5 песен — меньше, чем все остальные. Сколько песен было спето?

6. Верно ли, что при любом натуральном n число $n^4+(n+1)^4$ простое?

7. Найдите величину угла B треугольника ABC, если длина высоты CH вдвое меньше длины стороны AB, а величина угла A равна 75°.

8. Допишите к числам 10, 12, 15 еще семь целых чисел так, чтобы наибольший общий делитель любых двух из десяти написанных чисел встречался среди этих чисел и наименьшее общее кратное любых двух написанных чисел тоже встречалось среди этих чисел.

9. Докажите, что если $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)=0$, то какие-то два из трех чисел a, b, c равны друг другу.

10. Найдите все значения p и q, при которых многочлен

$$x^4+px^3+17x^2+qx+16$$

может быть представлен в виде квадрата некоторого квадратного трехчлена от x.

11. Элементами множеств A, B и C служат числа $1, 2, \ldots, 9$. Известно следующее:

$$A\cap B=\{1,2\},$$
$$B\cap C=\{3,7\},$$
$$A\cup B=\{1,2,3,6,7,8\},$$
$$A\cup C=\{1,2,3,4,5,7,9\}.$$

Найдите множества A, B и C. (Здесь $A\cap B$ — пересечение множеств A и B, $A\cup B$ — объединение этих множеств.)

12. Про некоторую фигуру на плоскости известно, что при повороте вокруг точки O на угол 48° она переходит в себя. Можно ли утверждать, что она перейдет в себя при повороте вокруг точки O на угол

а) 90°?
б) 72°?

РЕЦЕНЗИИ. БИБЛИОГРАФИЯ

Всесоюзный конкурс общества «Знание»

на лучшие произведения научно-популярной литературы

Всесоюзное общество «Знание» ежегодно проводит открытый конкурс на лучшие научно-популярные книги и брошюры по всем областям современной науки и техники. В конкурсе участвуют центральные и республиканские издательства, выпускающие научно-популярную литературу: «Молодая гвардия» и «Детская литература», «Просвещение» и «Радяньска школа», «Атомиздат», «Наука», «Наукова думка», «Беларусь» и десятки других издательств. Цель конкурса — активизировать работу издательств по созданию научно-популярной литературы для широких кругов читателей, а также для специалистов, интересующихся развитием смежных отраслей науки, повысить качество выпускаемой литературы.

В 1974 году на конкурс было представлено около 400 книг и брошюр, выпущенных в свет в 1973 году. Жюри конкурса под председательством академика А. Л. Яншина отметило лучшие из них премиями и поощрительными дипломами. Среди награжденных имеется несколько книг и брошюр, посвященных различным проблемам математики, физики и астрономии. О них-то мы и хотим кратко рассказать нашим читателям.

Диплом первой степени получили два ежегодника, регулярно выпускаемые издательством «Знание» — «Наука и человечество» и «Будущее науки». Первый ежегодник популярно рассказывает о крупнейших достижениях современной науки. В 1973 году в нем были помещены статьи академика А. Н. Скринского «Физика элементарных частиц и встречные пучки», академика С. Н. Журкова «Физические основы прочности», лауреата Нобелевской премии французского физика А. Кастлера «Нерезонансные взаимодействия между атомами и электромагнитным излучением», члена-корреспондента АН СССР Ю. Н. Денисюка «Голография», доктора физико-математических наук М. Я. Марова «Современные представления о Венере» и ряд других. О втором ежегоднике подробно рассказано в этом же номере нашего журнала (см. с. 71). Такой же диплом присужден коллективу авторов под руководством академика И. В. Петрянова-Соколова, подготовившему третий том Детской энциклопедии. В этом томе рассказывается о веществе и энергии.

Диплом первой степени и денежную премию за прекрасную научно-популярную книгу «Вселенная, жизнь, разум», выпущенную издательством «Наука» третьим изданием в 1973 году, получил известный советский астрофизик член-корреспондент АН СССР И. С. Шкловский. Рассказ об этой книге помещен в десятом номере нашего журнала за 1973 год *).

Дипломами второй степени и денежными премиями награждены профессор Я. Е. Гегузин за книгу «Капля», о которой мы рассказывали в девятом номере «Кванта» за 1974 год, и член редакционной коллегии нашего журнала доктор физико-математических наук Ю. Н. Ефремов за книгу «В глубины Вселенной». Рассказ о ней вы найдете в двенадцатом номере «Кванта» за 1974 год **).

Такой же диплом получила весьма оригинальная книга известного популяризатора науки профессора А. И. Китайгородского «Реникса», вышедшая вторым изданием в издательстве «Молодая гвардия». В ней автор разоблачает антинаучные сенсации, проникшие на страницы газет и журналов в последние годы.

Название книги заимствовано у А. П. Чехова. В пьесе «Три сестры» учитель гимназии Кулыгин рассказывает о таком случае: «В какой-то семинарии учитель написал на сочинении «чепуха», а ученик прочел «реникса» — думал, что по-латыни написано...»

Поощрительные дипломы получили книги «Извечные тайны неба» А. А. Гурштейна (выпущена в свет издательством «Просвещение») и «Загадки микромира» В. А. Черниковой (выпущена в свет издательством «Молодая гвардия»).

---

*) См. статью И. Е. Евгеньева «Книга о Вселенной», «Квант», 1973, № 10.

**) См. статью Е. П. Левитана «Приглашение в дальний космический рейс», «Квант», 1974, № 12.

Среди научно-популярных брошюр диплома первой степени и денежной премии удостоена брошюра академика АН УССР Б. В. Гнеденко «Беседы о теории массового обслуживания». Она содержит восемь небольших бесед о различных проблемах этой сравнительно молодой области прикладной математики. Телефонная связь, обслуживание механизмов, работа морских и речных портов, скорая медицинская помощь — вот некоторые примеры областей применения этой теории. Она требует существенного изменения традиционных методов работы многих сфер обслуживания, открывая огромные возможности совершенствования их деятельности.

Такая же награда присуждена еще одному члену редакционной коллегии нашего журнала профессору Я. А. Смородинскому за научно-популярную брошюру «Частицы, кванты, волны». Это — популярный рассказ о квантовой механике, как говорит сам автор в обращении к читателю, своеобразная прогулка по главным проспектам огромного города, в который превратилась эта наука.

Несмотря на то, что квантовая механика скоро будет отмечать свое 75-летие, она все еще сохраняет репутацию весьма сложной науки, далеко отстоящей от той физики, о которой написано в школьных учебниках. Дело в том, что законы, управляющие явлениями в микромире, совершенно отличны от законов, с которыми мы имеем дело в обычном мире. О законах микромира и рассказывается в этой брошюре. Ну а читать ее могут все, кто, по словам автора, хотя бы в общих чертах знаком со школьным курсом физики.

Диплом второй степени и денежная премия присуждены авторам брошюры «Чарльз Бэббедж» Р. С. Гутеру и Ю. Л. Полунову. Они написали биографию создателя одной из первых действующих вычислительных машин, выдающегося английского математика и изобретателя XIX века Чарльза Бэббеджа. Причем написали ее весьма доступно, живо и увлекательно, с большой любовью к своему герою.

Все упомянутые здесь брошюры вышли в издательстве «Знание».

Поощрительные дипломы присуждены председателю Комитета по атомной энергии А. М. Петросьянцу и вице-президенту АН СССР А. А. Логунову за брошюру «Физика высоких энергий и ускорители заряженных частиц» (издательство «Знание»), Л. М. Письмену за брошюру «От чуда к числу» (издательство «Педагогика») и ряду других авторов научно-популярных брошюр.

В. А. Лешковцев

Будущее науки

В начале 1966 года на прилавках книжных магазинов появилась и вскоре была раскуплена небольшая книжечка с привлекательным названием «Будущее науки». На титульном листе подзаголовок: «Перспективы. Гипотезы. Нерешенные проблемы». А в предисловии было написано следующее:

«Трудно найти сейчас человека, которого не интересовало бы, что даст людям наука через пять, десять, а то и через сто лет. Роль науки в нашей жизни возрастает так стремительно, что ее будущее становится неотделимым от будущего самого человеческого общества.

Ежегодник «Будущее науки» — первое в нашей стране популярное издание, целиком посвященное перспективам развития и нерешенным проблемам науки. На его страницах выступают ведущие советские и зарубежные ученые, которые делятся своими мыслями о путях познания и технического прогресса, рассказывают о новых гипотезах, о грядущих победах разума.

Участие наиболее авторитетных специалистов служит гарантией максимальной обоснованности высказываемых прогнозов и предположений.

Ежегодник рассчитан на самые широкие круги читателей, интересующихся современным состоянием и перспективами развития науки».

Первый выпуск ежегодника открывался статьей академика И. Е. Тамма, в которой популярно рассказывалось о современном состоянии и перспективах развития физики элементарных частиц. Статья называлась «На пороге новой теории». Далее шли статьи академика Е. К. Завойского «Пути изучения плазмы», английского физика Д. Д. Кокрофта «К лучшему пониманию сил природы», академика Г. Н. Флерова «Будущее синтеза и изучения трансурановых элементов», профессора Л. Д. Розенберга «Новое научное направление — квантовая акустика». Президент Академии наук Армянской ССР академик В. А. Амбарцумян написал статью об основных проблемах космогонии — науки о происхождении и развитии небесных тел, а вице-президент Академии наук Украинской ССР академик В. М. Глушков — статью о роли электронно-вычислительных устройств в автоматизации умственного труда. Были в этом сборнике также статьи, посвященные нерешенным проблемам биологии, географии, геологии и ряда других наук.

С тех пор вышло в свет уже семь выпусков этого международного ежегодника. И в каждом из них по несколько интереснейших статей о перспективах развития различных областей физики, астрономии, кибернетики.

Ни один из любителей физики не откажет себе в удовольствии познакомиться со статьями на такие темы, как: «Может ли кончиться физическая наука?» (автор — профессор А. С. Компанеец, вып. 2), «Макромикросимметрическая Вселенная» (академик М. А. Марков, вып. 6), «Физика XX века» (В. Вайскопф (США), вып. 4), «Рождение элементарных частиц» (академик Я. Б. Зельдович, вып. 5), «Пути термоядерных исследований» (академик Л. А. Арцимович, вып 6).

Каждому любителю астрономии захочется поскорее прочитать статьи «Полеты к астероидам» (Х. Альвен (Швеция), вып. 6), «Настоящее и будущее астрометрии (член-корреспондент АН СССР М. С. Зверев, вып. 6), «Энергетические проблемы астрофизики» (член-корреспондент АН СССР В. В. Соболев, вып. 6), «Проблема дозвездной материи» (доктор физико-математических наук Л. В. Мирзоян, вып. 4), «Пульсары» (член-корреспондент АН СССР И. С. Шкловский, вып. 4), «Квазары» (В. Зонн (Польша), вып. 5).

В опубликованных выпусках рассказано о будущих ускорителях заряженных частиц (статьи академиков А. Л. Минца, М. А. Маркова и Дж. Гамильтона (США)), о нерешенных проблемах физики элементарных частиц (статьи Дж. Чу (США), А. Салама (Пакистан)), о перспективах развития квантовой электроники (статьи академиков Н. Г. Басова, А. М. Прохорова, академика АН БССР Б. И. Степанова), о проблемах физики твердого тела (статья академика И. М. Лифшица). Проблемы общения человека и ЭВМ рассмотрены в статье члена-корреспондента АН СССР Н. П. Бусленко.

Только математике в этих ежегодниках пока что не очень повезло. Она представлена всего лишь двумя статьями — статьей академика АН УССР Б. В. Гнеденко «О будущем прикладной математики» и статьей академика АН БССР Н. П. Еругина «Математика — барометр цивилизации».

В последнем (седьмом) номере ежегодника*) помещены статьи академика Г. Н. Флерова и доктора физико-математических наук В. С. Барашенкова «Практические аспекты физики тяжелых ионов», члена-корреспондента АН СССР Л. Д. Бахраха и кандидата физико-математических наук Г. А. Гаврилова «Голография в науке и технике будущего», члена корреспондента АН СССР В. С. Троицкого «Поиски внеземных цивилизаций», члена-корреспондента АН СССР В. А. Крата «Телескопы в стратосфере» и другие интересные статьи.

Редакционная коллегия ежегодника строго придерживается принципов, провозглашенных в предисловии к первому выпуску. Тематика статей актуальна, а авторами их являются широко известные советские и иностранные ученые, которые внесли большой вклад в развитие рассматриваемых областей науки.

Молодежь активно интересуется нерешенными проблемами науки. И это естественно. Ведь именно тем, кто сегодня еще сидит за школьной партой, придется в будущем решать многие из этих проблем. Но из школьных учебников об этих проблемах можно узнать лишь немногое. Приходится обращаться к научно-популярной и научно-фантастической литературе. К сожалению, нередко в этих книгах, брошюрах, статьях встречаются «проблемы» и «гипотезы», которые ничего общего с наукой не имеют. Ежегодники «Будущее науки» избавлены от этого недостатка. Все, о чем они рассказывают, имеет строгую научную основу, волнует и занимает внимание современных ученых.

Сборники «Будущее науки» написаны популярно. Большинство помещенных в них статей доступны для учащихся старших классов. И мы охотно рекомендуем их нашим юным читателям.

В. А. Рудов

---

*) «Будущее науки», Международный ежегодник, вып. 7, М., «Знание», 1974, 400 с., 71 коп.

«Квант» для младших школьников

Задачи

1. Старый пират, умирая, завещал наследнику найти зарытый на острове клад по трем ориентирам — часовне, дубу и вязу — следующим образом: сначала пройти от часовни до дуба и от него направо под прямым углом на такое же расстояние, воткнуть на этом месте палку; затем пройти от часовни до вяза и от него налево под прямым углом на такое же расстояние, воткнуть в этом месте еще одну палку, в середине отрезка, соединяющего палки, зарыт клад.

Приплыв на остров, наследник увидел, что дуб и вяз на месте, а от часовни не осталось и следа. Помогите ему отыскать клад.

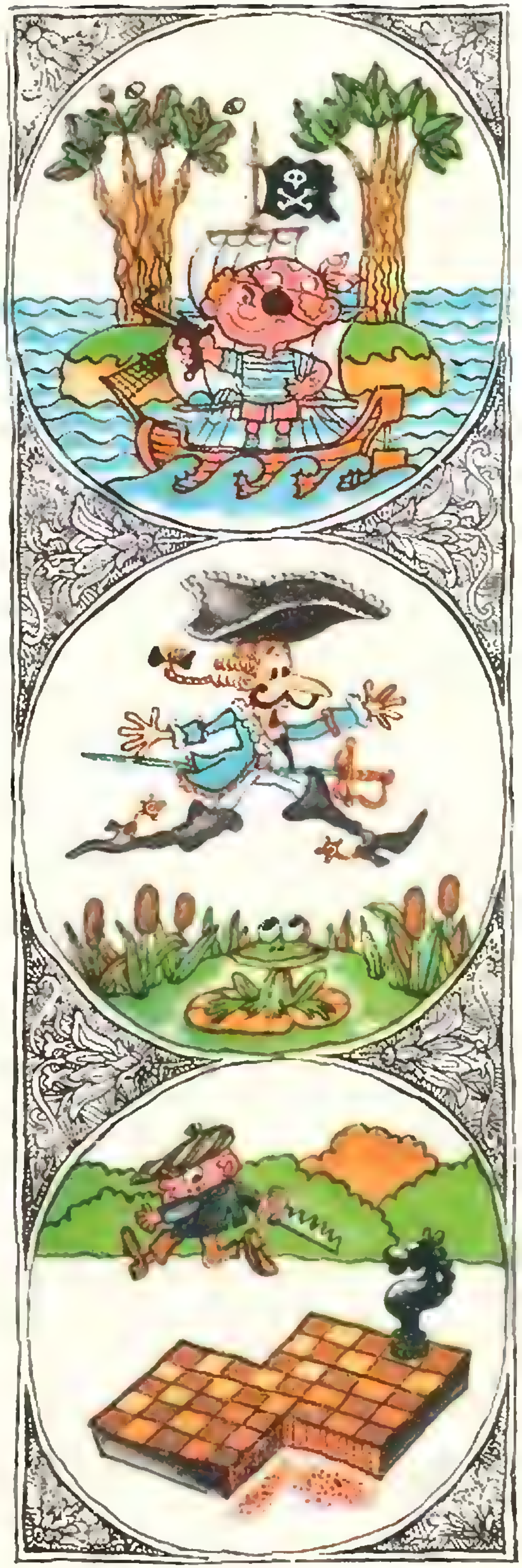
2. Когда $\overline{\textit{заказ}}$ умножили на 99 999, получили число, три последние цифры которого были 705. Какое число обозначено словом «заказ»? (Одинаковые буквы заменяют одинаковые цифры.)

3. 100 фишек стоят в ряд. Любые две фишки, стоящие через одну, можно менять местами. Удастся ли расположить фишки в обратном порядке?

4. Барон Мюнхгаузен рассказывает про следующий «правдивый случай», произошедший с ним.

Он разбежался, чтобы прыгнуть через болото. Во время прыжка он заметил, что не допрыгнет до противоположного берега. Тогда, прямо в воздухе, он повернул обратно и возвратился на берег, с которого прыгал. Почему это невозможно?

5. Хулиган Вася отпилил от шахматной доски два противоположных угловых квадрата размером 3 × × 3 клетки. Можно ли остаток обойти конем и вернуться на исходное поле?



Рисунки Э. Назарова

В. А. Тихомирова

Электризация через влияние

Могут ли два одноименно заряженных тела притягиваться друг к другу?

Можно ли с помощью одного заряженного тела зарядить другое тело так, чтобы его заряд был больше заряда первого тела?

Чтобы ответить на эти вопросы, давайте разберемся в одном интересном физическом явлении — явлении электростатической индукции, или, другими словами, электризации тел через влияние.

Рассмотрим такой опыт. К шарику A, заряженному положительным зарядом q_A, подносится незаряженный металлический шар B (рис. 1). При этом на поверхности шара B появляются заряды: на ближней к шарику A стороне отрицательные, а на дальней — положительные. В этом можно наглядно убедиться, если шариком электроскопа касаться соответствующих участков поверхности шара B. Объяснить такое распределение зарядов нетрудно. Дело в том, что свободные электроны, которые раньше были равномерно распределены по всему шару B, под влиянием зарядов шарика A приходят в движение и перераспределяются по шару так, что слева их оказывается больше, чем справа. Таким образом, в левой части шара индуцируется, то есть наводится, отрицательный заряд $-q_B$, а в правой части — положительный заряд $+q_B$. В этом и заключается явление электростатической индукции. Заметим кстати, что в нашем случае величина наведенного заряда q_B, конечно, меньше величины наводящего заряда q_A, поскольку влияние наводящего заряда распространяется и на другие окружающие его тела, где

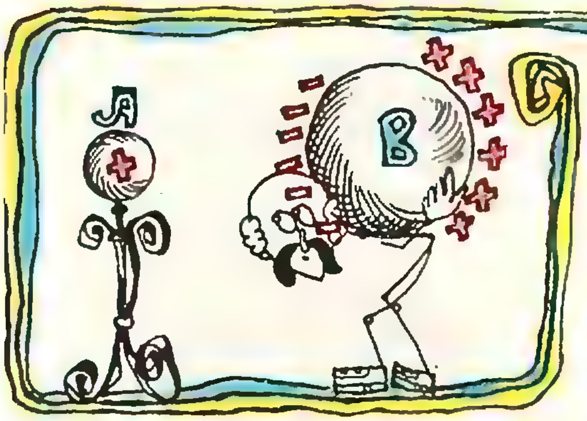


Рис. 1.

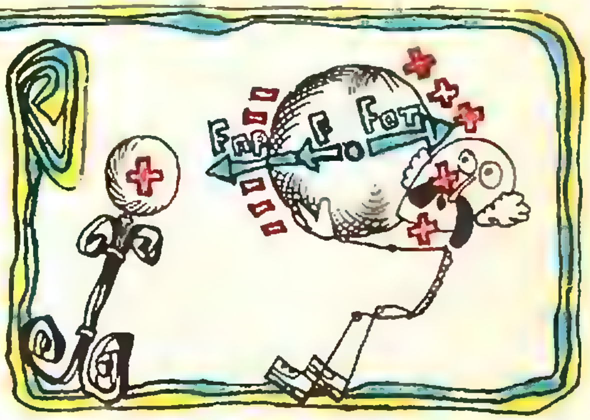


Рис. 2.

тоже индуцируются электрические заряды.

Между заряженными телами всегда действует электрическая сила. Так будет и с шарами A и B. Точнее сказать, в этом случае возникают две силы — сила притяжения $F_{пр}$ между шариком A и левой частью шара B и сила отталкивания $F_{от}$ между шариком A и правой частью шара B (рис. 2). Поскольку отрицательно заряженная часть находится ближе к шарику A, сила $F_{пр}$ больше силы $F_{от}$, и в результате шары будут притягиваться друг к другу под действием результирующей силы $F = F_{пр} - F_{от}$.

Что изменится, если шар B предварительно зарядить некоторым зарядом q'_B, причем тоже положительным? Конечно, все прежние рассуждения о наведении зарядов остаются в силе, но теперь надо учесть еще взаимодействие зарядов q_A и q'_B. Появляется еще одна сила $F'_{от}$ — сила отталкивания зарядов q_A и q'_B. Окончательный результат будет зависеть от соотношения между величинами сил F и $F'_{от}$, вернее, от соотношения между величинами зарядов q_B и q'_B, так как чем больше величина заряда, тем больше сила электрического взаимодействия.

Если величина наведенного заряда q_B окажется больше величины имеющегося на шаре заряда q'_B, то в итоге одноименно заряженные шары все-таки будут притягиваться. Когда же это возможно? Мы уже говорили о том, что величина наведенного заряда на проводнике меньше величины влияющего заряда. Поэтому только если заряд q_A намного больше заряда q'_B, может оказаться, что величина заряда q_B будет больше заряда q'_B.

Итак, два одноименно заряженных тела могут притягиваться друг к другу, но для этого заряд одного из них должен быть намного больше, чем заряд другого.

Мы показали, что под влиянием заряженного тела на проводнике можно навести электрические заряды, но при этом проводник в целом остается электрически нейтральным (рис. 3). А нельзя ли его зарядить по-настоящему, так чтобы суммарный заряд не был равен нулю? Оказывается можно, и даже совсем просто. Для этого достаточно проводник в присутствии заряженного тела заземлить на некоторое время, а затем убрать и заземление, и заряженное тело (рис. 4). При этом знак заряда проводника будет противоположен знаку заряда тела. Действительно, при заземлении свободные электроны под влиянием положительного заряда на теле приходят из земли и остаются на проводнике, заряжая его в целом отрицательно.

Величину наведенного заряда можно существенно увеличить, практически приблизив ее к величине наводящего заряда, если заряженное тело поместить внутрь длинного ме-

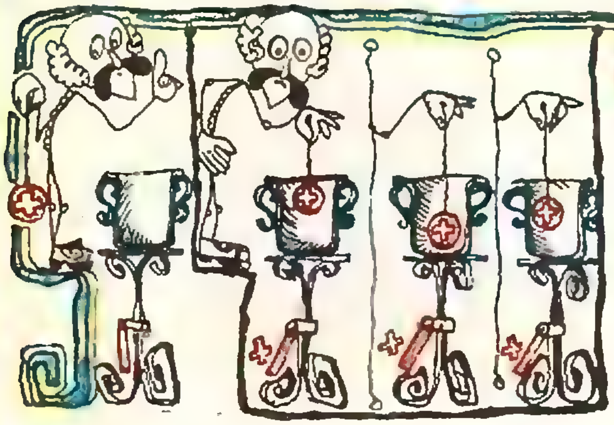


Рис. 3.

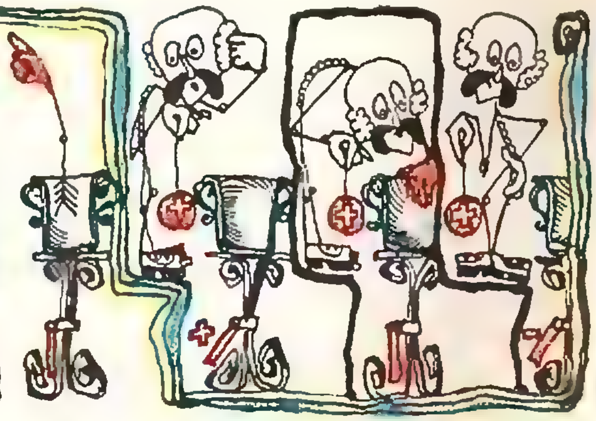


Рис. 4.

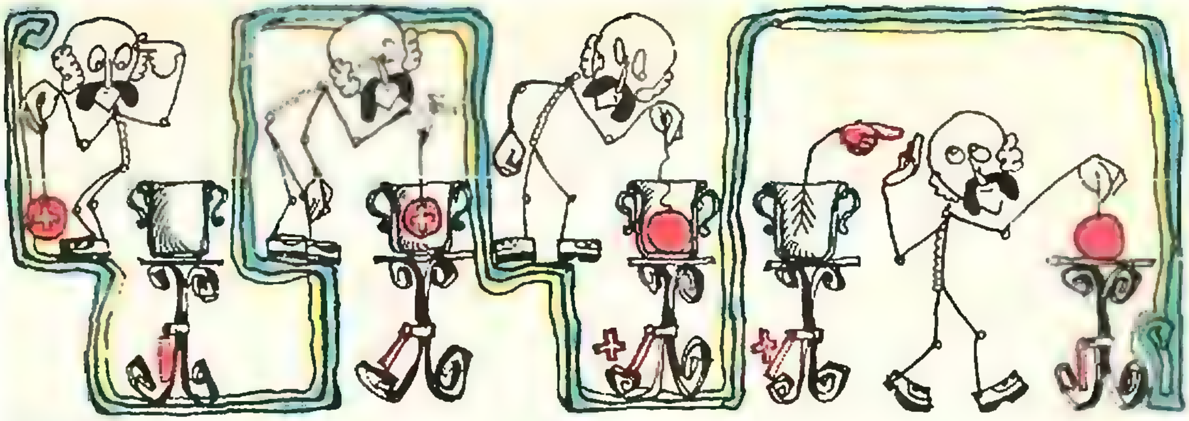


Рис. 5.

таллического цилиндра (или шара) с небольшим отверстием. В этом случае влияние заряженного тела на другие тела почти исключено, поэтому на внутренней поверхности цилиндра (или шара) наведется заряд, по величине практически равный заряду шарика, но противоположный по знаку, а на наружной поверхности — такой же и по величине, и по знаку. Если заряженным телом коснуться внутренней стенки цилиндра, противоположные по знаку заряды нейтрализуются, и на цилиндре останутся заряды того же знака, что были на заряженном теле (рис. 5). Таким образом, можно практически целиком передавать заряд с одного тела на другое.

Теперь попробуем ответить и на второй вопрос, поставленный в самом начале. Пусть у нас имеются: заряженный шарик A, незаряженный шарик B, полый металлический шар и электроскоп, на котором мы хотим накопить заряд бо́льший, чем заряд шарика A.

Прежде всего зарядим по индукции шарик B (естественно, зарядом противоположного знака). Внесем на некоторое время шарик B внутрь заземленного шара, а затем уберем и заземление, и шарик B. На шаре останется заряд, равный по величине заряду шарика B, но противоположный ему по знаку, то есть совпадающий со знаком заряда шарика A. Теперь передадим этот заряд электроскопу. Если проделать такую операцию многократно, то на электроскопе, действительно, можно будет получить заряд того же знака, что и исходный, но значительно больший по величине.

В заключение попробуйте ответить на два вопроса.

1. Незаряженный проводящий шарик C с помощью длинного гибкого проводника присоединили к левой части шара B (см. рис. 2). В результате на шарике появились положительные заряды. Почему?

2. На электроскопе имеется небольшой положительный заряд. Если к шарику электроскопа приближать сильно наэлектризованную палочку, несущую большой отрицательный заряд, то листочки электроскопа будут сначала опадать, а потом опять расходиться. Как это можно объяснить?

Рисунки И. Чернуского

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

К статье «Отношения отрезков, площадей и объемов»

1. 11/12. Указание. Провести диагональ AC.

2. $\dfrac{(a+c)(b+c)(a+b+c)}{ab(a+b+2c)}$.

3. $\angle C=45°$. Указание. Опустить высоту BD, тогда $CM=MD=\dfrac{1}{4}AC$, $AD=BD=\dfrac{1}{2}AC=CD$.

4. $\dfrac{3a-b}{2(a+b)}\,ab\sin 2\alpha$.

5. 8:37. Указание. Рассмотрев $\triangle SBC$, находим, что $SM:MC=2:3$.

6. 7:29. Указание. Заданная плоскость пересекает грань ABC по прямой PK (K на AB), параллельной MN. Отсюда легко найти, что $BK=\dfrac{1}{4}AB$; далее воспользоваться формулой объема усеченной пирамиды.

8. 1, $\sqrt{2}/3$, $1/\sqrt{2}$. Указание. Точка S лежит внутри сферы и $SA\cdot SD=SB\cdot SE=SC\cdot SF=1$, по условию задачи находятся три соотношения для $\dfrac{SA}{SD}$, $\dfrac{SB}{SE}$ и $\dfrac{SC}{SF}$, из которых находятся и длины всех отрезков.

9. $(\alpha\gamma\rho+\delta\sigma\beta):\alpha\sigma$; $\sigma\beta:\rho$.

К статье «Задачи о воздушных шарах»

1. 13,5 mg.

2. Не менее чем на 5°.

3. $\dfrac{1-ah_1}{1-ah_2}=\dfrac{29}{25}\left(1-\dfrac{4}{29}\dfrac{T_0}{T_1}\right)$.

К статье «Московский инженерно-физический институт»

Математика

Вариант I

1. Пусть v — скорость течения реки, x — собственная скорость моторной лодки, тогда скорость плота совпадает со скоростью течения реки v. Скорость моторной лодки вверх по течению реки равна $x-v$, вниз по течению реки — $x+v$. Обозначим расстояние между пунктами A и B через S. Из условий задачи получаем систему уравнений

$$\begin{cases}(x-v)\,a+v\cdot a=S,\\ \dfrac{S}{x-v}+\dfrac{S}{x+v}=\dfrac{S}{v}.\end{cases}$$

Искомое время равно $\dfrac{S}{v}$. Первое уравнение системы преобразуется к виду $ax=S$, а второе уравнение системы может быть сведено к квадратному уравнению относительно отношения $\dfrac{x}{v}$:

$$\left(\frac{x}{v}\right)^2-2\left(\frac{x}{v}\right)-1=0,$$

откуда

$$\left(\frac{x}{v}\right)_1=1+\sqrt{2},\quad \left(\frac{x}{v}\right)_2=1-\sqrt{2}.$$

По условию задачи $x>v>0$, поэтому второе решение не удовлетворяет условиям задачи. Теперь

$$\frac{S}{v}=\frac{ax}{v}=a(1+\sqrt{2}).$$

2. Легко найти площадь основания пирамиды $S=\dfrac{1}{2}r^2\left(1+\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}\right)^2\operatorname{tg}\alpha$. Вписанный в пирамиду конус касается пирамиды по трем образующим, каждая из которых перпендикулярна к соответствующим сторонам прямоугольного треугольника и наклонена к плоскости основания под углом φ. Отсюда следует, что все грани пирамиды наклонены к плоскости основания под одним и тем же углом. Но в этом случае

$$S_{\text{бок. пов.}}=\frac{S}{\cos\varphi}=\frac{r^2}{2\cos\varphi}\cdot\left(1+\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right)^2\cdot\operatorname{tg}\alpha.$$

Легко найти высоту пирамиды: $H=r\operatorname{tg}\varphi$. Теперь $V=\dfrac{1}{3}HS=\dfrac{1}{6}r^3\left(1+\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}\right)^2\cdot\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\varphi$.

3. Исходное неравенство равносильно следующей системе неравенств:

$$\begin{cases}\sqrt{x+3}-x>1, & (1)\\ x+3\geqslant 0. & (2)\end{cases}$$

Неравенство (1) представим в виде

$$\sqrt{x+3}>x+1. \qquad (3)$$

Если $-3 \leqslant x < -1$, то неравенство (3) выполняется (правая часть неравенства отрицательна). При $x \geqslant -1$ обе части неравенства (3) положительны, возводя их в квадрат, получим

$$x^2 + x - 2 < 0.$$

С учетом ограничений ($x \geqslant -1$) последнее неравенство имеет решение $-1 \leqslant x < 1$. Окончательно получаем $-3 \leqslant x < 1$.

4. Данное уравнение равносильно следующему:

$$(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x + \sin 2x + a = 0$$

или

$$\sin^2 2x - 2\sin 2x - 2(a + 1) = 0.$$

Решая это уравнение относительно $\sin 2x$, получим

$$\sin 2x = 1 - \sqrt{3 + 2a}, \qquad (1)$$

$$\sin 2x = 1 + \sqrt{3 + 2a}. \qquad (2)$$

Уравнения (1) и (2) могут иметь действительные корни лишь при $a \geqslant -\frac{3}{2}$. Очевидно, что уравнение (2) имеет решение лишь при $a = -\frac{3}{2}$ и это решение совпадает с решением уравнения (1) при этом же значении параметра. Из условия $|\sin 2x| \leqslant 1$ для уравнения (1) получим систему неравенств относительно параметра a:

$$\begin{cases} 1 - \sqrt{3 + 2a} \geqslant -1, \\ 1 - \sqrt{3 + 2a} \leqslant 1, \end{cases}$$

которая совместна при $-\frac{3}{2} \leqslant a \leqslant \frac{1}{2}$.

Окончательно получим ответ:

$$x = \frac{1}{2} k\pi + \frac{1}{2}(-1)^k \times \arcsin\left(1 - \sqrt{2a + 3}\right),$$

где k — целое, $-\frac{3}{2} \leqslant a \leqslant \frac{1}{2}$; при других a решений нет.

Вариант 2

1. 2,4 *кг*; 4,8 *кг*.

2. $R\left[\sqrt{1 - \frac{1}{3}\cos^2\frac{\alpha}{2}} - \cos\frac{\alpha}{2}\right]$ при $\frac{\pi}{3} \leqslant \alpha \leqslant \pi$;

$R\left[\sqrt{1 - \frac{1}{3}\cos^2\frac{\alpha}{2}} + \cos\frac{\alpha}{2}\right]$ при $\pi \leqslant \alpha \leqslant \frac{5\pi}{3}$.

3. $2 < x < 5$.

4. $x_1 = 2n\pi$, $x_2 = \frac{1}{2}\pi + 2k\pi$, $n, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Вариант 3

1. 3 часа.

2. $\frac{2}{3} r^3 \cdot \sin^2\alpha \cdot \cos\frac{\alpha}{2} \cdot \sqrt{1 + 2\cos\alpha}$.

3. $x = 5$.

4. $x = k\pi$ при $0 < a \leqslant \frac{1}{3}$;

$x_1 = k\pi$,

$x_2 = \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1 - a}{2a} + n\pi$ при $\frac{1}{3} < a < 1$;

$x_1 = k\pi$,

$x_2 = \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1 - a}{2a} + n\pi$,

$x_3 = \pm\frac{1}{2}\arccos\left[-\frac{1 + a}{2a}\right] + m\pi$ при $1 \leqslant a$ ($k, n, m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$).

Физика

1. При вращении рамки с постоянной угловой скоростью в однородном магнитном поле в ней возникает переменный ток, изменяющийся со временем по гармоническому закону. В этом случае действующее значение э. д. с. индукции E связано с ее амплитудным значением $E_0 = BS\omega$ известным соотношением

$$E = \frac{E_0}{\sqrt{2}} = \frac{BS\omega}{\sqrt{2}}.$$

За время $t = NT$, где $T = \frac{2\pi}{\omega}$ — период переменного тока, в рамке выделится количество теплоты, равное

$$Q = \frac{E^2}{R} t = \pi\omega N (BS)^2 / R = 0{,}7 \text{ дж}.$$

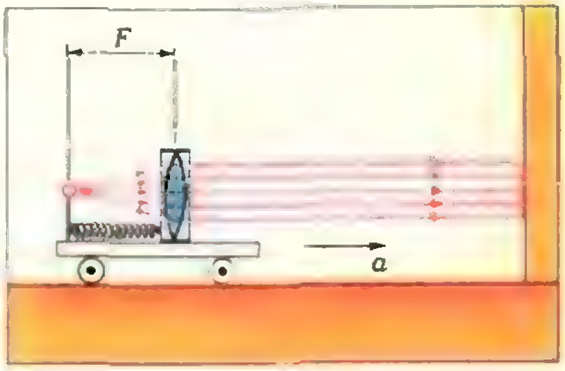


Рис. 1.

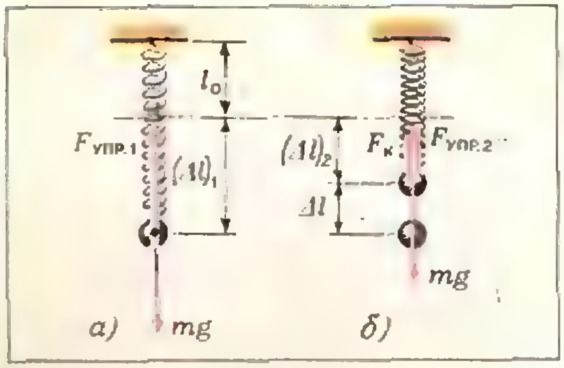


Рис. 2.

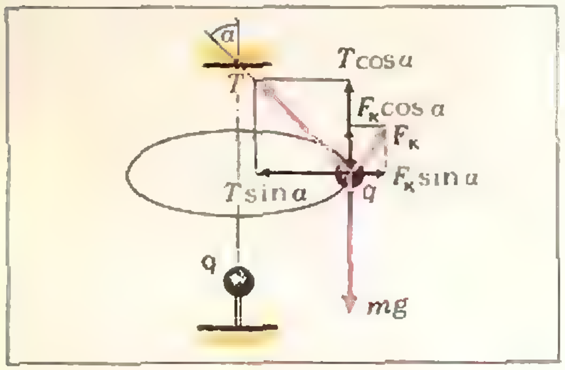


Рис. 3.

2. Чтобы освещенность центрального светлого пятна на стенке оставалась неизменной, необходимо, чтобы точечный источник света находился в фокусе собирающей линзы, то есть длина пружинки при движении тележки должна быть равна F (рис. 1). Поскольку $F < l_0$, пружинка будет сжата, и сила упругости $F_{упр} = k(l_0 - F)$, действующая на оправу со стороны сжатой пружинки, будет направлена вправо. Следовательно, ускорение оправы, а значит, и тележки, направлено к стенке, а величина его определяется из уравнения движения оправы

$$ma = k(l_0 - F).$$

Отсюда

$$a = \frac{k(l_0 - F)}{m} = 0{,}1\ м/с^2.$$

3. Работа A электростатических сил равна убыли потенциальной энергии взаимодействия электрических зарядов:

$$A = -(W_2 - W_1) = -\left(\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 \Delta l} - 0\right) = -\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 \Delta l},$$

где Δl — перемещение шарика на пружинке, равное изменению длины деформированной пружинки (рис. 2).

Для определения Δl запишем условия равновесия шарика на пружинке в начальный и конечный моменты (см. рис. 2, а и б):

$$k(\Delta l)_1 = mg,$$

$$k(\Delta l)_2 + F_к = mg$$

$\left(F_к = \dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 (\Delta l)^2}\right.$ — кулоновская сила отталкивания электрических зарядов$\left.\right)$. Отсюда

$$\Delta l = (\Delta l)_1 - (\Delta l)_2 = \sqrt[3]{\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 k}}.$$

Подставив полученное значение Δl в выражение для работы A, получим

$$A = -\sqrt[3]{k\left(\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2} = -0{,}09\ дж.$$

4. На рисунке 3 показаны силы, действующие на заряженный шарик на нити, движущийся по окружности. Это — сила тяжести mg, кулоновская сила отталкивания $F_к$ и сила T натяжения нити. Разложим силы на горизонтальные и вертикальные составляющие и запишем уравнения движения шарика по горизонтали и по вертикали:

$$T\sin\alpha - F_к \sin\alpha = m\omega^2 r, \qquad (1)$$

$$T\cos\alpha + F_к\cos\alpha - mg = 0. \qquad (2)$$

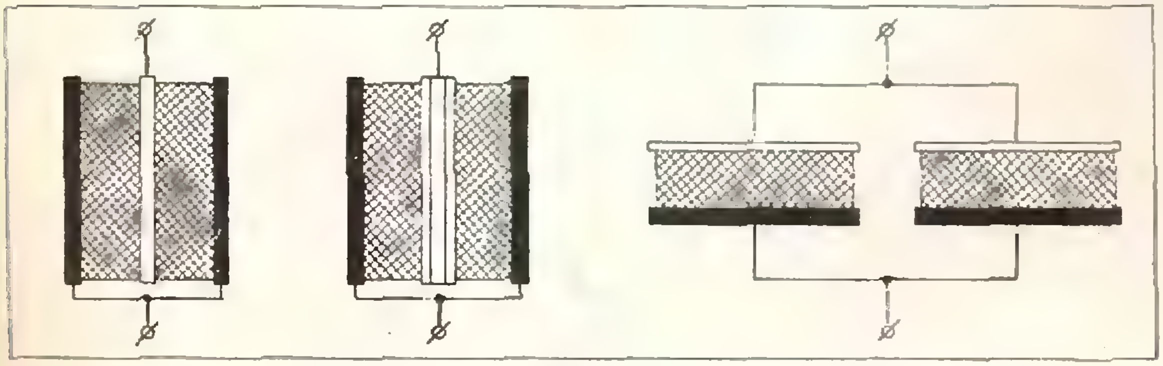


Рис. 4.

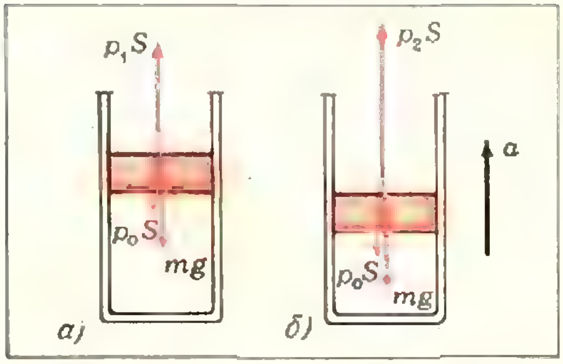


Рис. 5.

Причем (см. рис. 3)

$$F_к = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0\left(\frac{r}{\sin\alpha}\right)^2}. \qquad (3)$$

Из равенств (1) — (3) находим

$$q = \pm\frac{r}{\sin\alpha}\sqrt{2\pi\varepsilon_0 m\left(\frac{g}{\cos\alpha} - \frac{\omega^2 r}{\sin\alpha}\right)} =$$
$$= \pm 0{,}13\ мкк.$$

5. Используя формулу Томсона для периода электромагнитных колебаний в контуре $T = 2\pi\sqrt{LC}$ *и известное соотношение* $\lambda = vT$ между длиной волны λ, скоростью распространения v и периодом электромагнитной волны T, находим

$$\lambda = 2\pi v\sqrt{LC}, \qquad (1)$$

где $v = 3\cdot 10^8$ *м/с* (в вакууме), C — емкость конденсатора в контуре.

Эта емкость равна емкости параллельно соединенных двух одинаковых плоских конденсаторов, образованных поверхностями средней пластины и каждой из наружных пластин (рис. 4). Следовательно,

$$C = 2\varepsilon_0\varepsilon\frac{S}{d}. \qquad (2)$$

Подставив это выражение для емкости (2) в соотношение (1), получим уравнение, из которого определим индуктивность катушки:

$$L = \frac{d}{2\varepsilon_0\varepsilon S}\left(\frac{\lambda}{2\pi v}\right)^2 = 25\ мгн.$$

6. Поскольку в движущемся сосуде давление газа под поршнем повышается, ускорение а сосуда и поршня направлено вертикально вверх. На рисунках 5, *а* и *б* показаны силы, действующие на поршень в покоящемся и движущемся с ускорением сосуде: сила тяжести mg, сила наружного давления p_0S и силы давления газа на нижнюю поверхность поршня — p_1S *в покоящемся* и p_2S — в движущемся с ускорением в сосуде.

Запишем условие равновесия поршня в покоящемся сосуде:

$$(p_1 - p_0)\,S - mg = 0, \qquad (1)$$

уравнение движения поршня, перемещающегося вместе с сосудом с ускорением a:

$$ma = (p_2 - p_0)\,S - mg \qquad (2)$$

и закон Бойля — Мариотта для газа под поршнем:

$$p_1 Sh = p_2 S\,[h\,(1-\eta)]. \qquad (3)$$

Из соотношений (1), (2) и (3) находим наружное давление:

$$p_0 = \frac{m}{S}\left[a\left(\frac{1}{\eta} - 1\right) - g\right] = 18\ кн/м^2.$$

К задаче «Равенства из спичек»

(*см. с. 39*)

XIII − VII = VI;
VI = V + I;
XI − V = VI.

К головоломкам

(*см. с. 39*)

1. 28 × 28 = 784.
2. 19 × 19 = 361.
3. 98 × 98 = 9604.
4. 18 × 18 × 18 = 5832.
5. 17 × 17 × 17 = 4913.

Корректор *Е. В. Сидоркина*

117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.
«Квант», тел. 234-08-11. Сдано в набор 17/X—74 г.
Подписано в печать 29/XI—74 г.
Бумага 70×100$^1/_{16}$. Физ. печ. л. 5
Усл. печ. л. 6,5 Уч.-изд. л. 6,94
Тираж 363 265 экз. Т-18692
Цена 30 коп. Заказ 2108

Чеховский полиграфический комбинат
Союзполиграфпрома
при Государственном комитете Совета Министров
СССР по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли, г. Чехов Московской области

Рукописи не возвращаются

524288 ЯПОНСКИХ ГОЛОВОЛОМОК

Пять читателей, первыми приславшие ответы, будут премированы годовой подпиской на «Квант», а их фамилии будут опубликованы в журнале.

На последней странице обложки приведена одна из этих головоломок: нужно уложить все голубые фигурки на желтом поле.

Давайте разберемся, как построена эта головоломка. Как вы видите (см. рисунок на обложке), желтое поле состоит из семи правильных шестиугольников. А как устроены сами фигурки? Посмотрим, какие фигурки можно сложить, соединяя сторонами n правильных треугольников. Из одного, двух и трех треугольников складываются по одной фигурке: треугольник, ромб и трапеция (рис. 1). Из четырех треугольников складываются уже три фигурки (рис. 2). Можно, правда, сложить и четвертую, но она является зеркальным отображением третьей, и мы ее в расчет не берем. Из пяти треугольников складываются четыре фигурки (рис. 3). Из шести треугольников складываются двенадцать фигурок. Нарисуйте их сами. Из семи треугольников складываются двадцать четыре фигурки. Вот они и являются фигурками нашей головоломки (проверьте это!).

Некоторые фигурки имеют названия: чаша, крюк, медведь и т. д. Среди фигурок — 5 симметричных и 19 несимметричных. Перевернув некоторые фигурки, вы получите новую головоломку. Всего переворачиваниями можно получить 2^{19} головоломок (почему?). Можно ли уложить какие-либо из них на том же желтом поле?

Попытайтесь также сложить еще какое-нибудь интересное поле (например, ромб) из 12-ти различных фигурок, составленных из шести треугольников каждая.

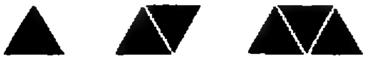


Рис. 1.

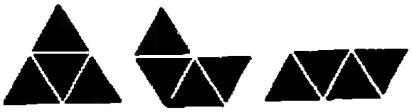


Рис. 2.

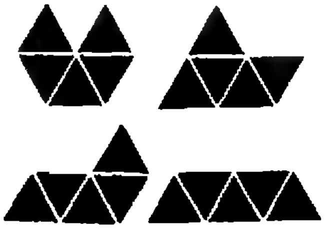
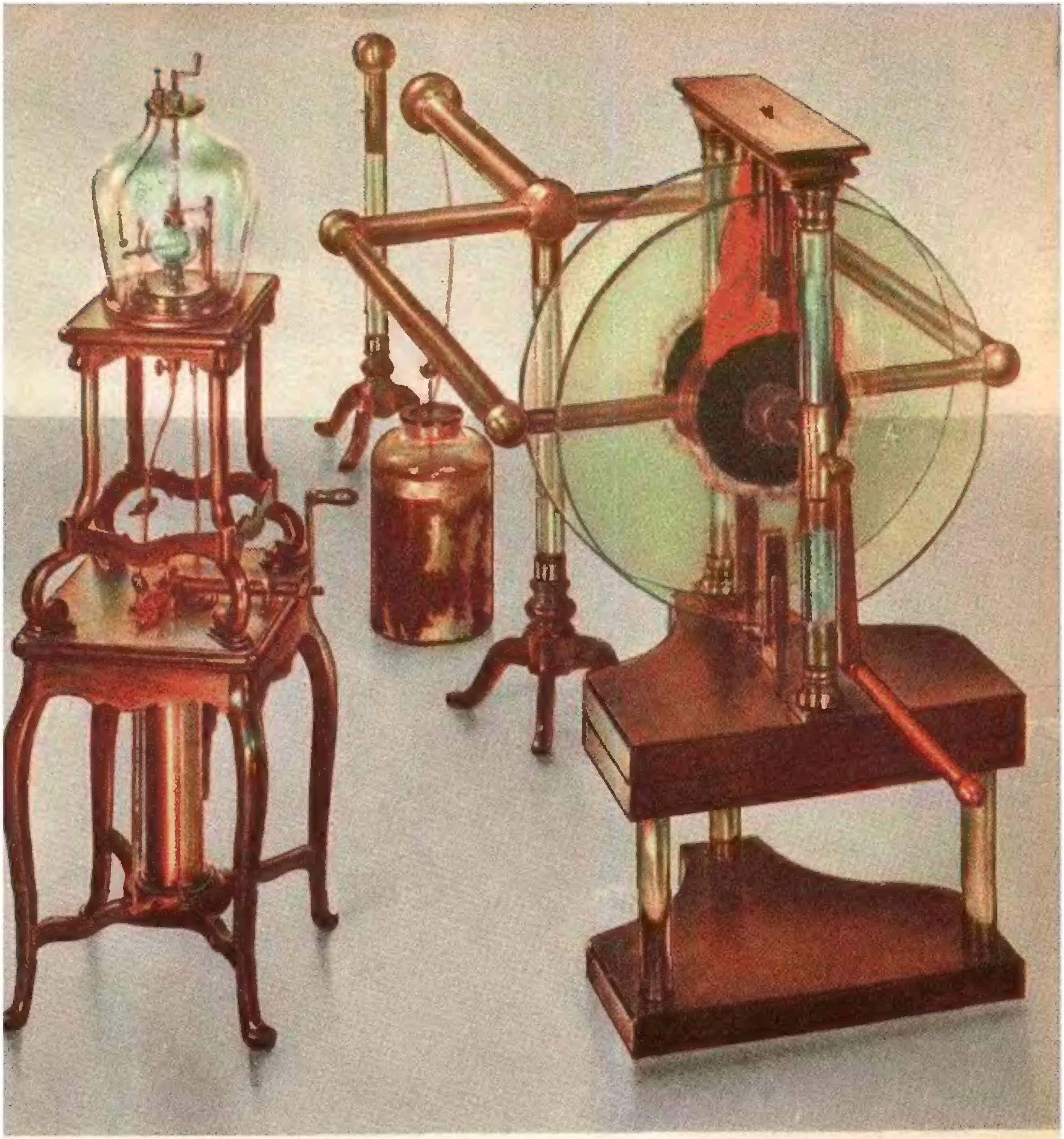


Рис. 3.



На фотографии — две электростатические машины из коллекции Государственного музея истории естествознания в Лейдене (Нидерланды).

Справа — электростатическая машина, изготовленная в 1788 году в Амстердаме Джоном Катбертсоном. Диаметр стеклянных кругов достигает 165 см. Машина соединена с лейденской банкой. Машина Катбертсона интересна тем, что это — первая электростатическая машина, которая использовалась не только для генерирования игрушечных молний. С ее помощью в 1799 году впервые был произведен электролиз воды.

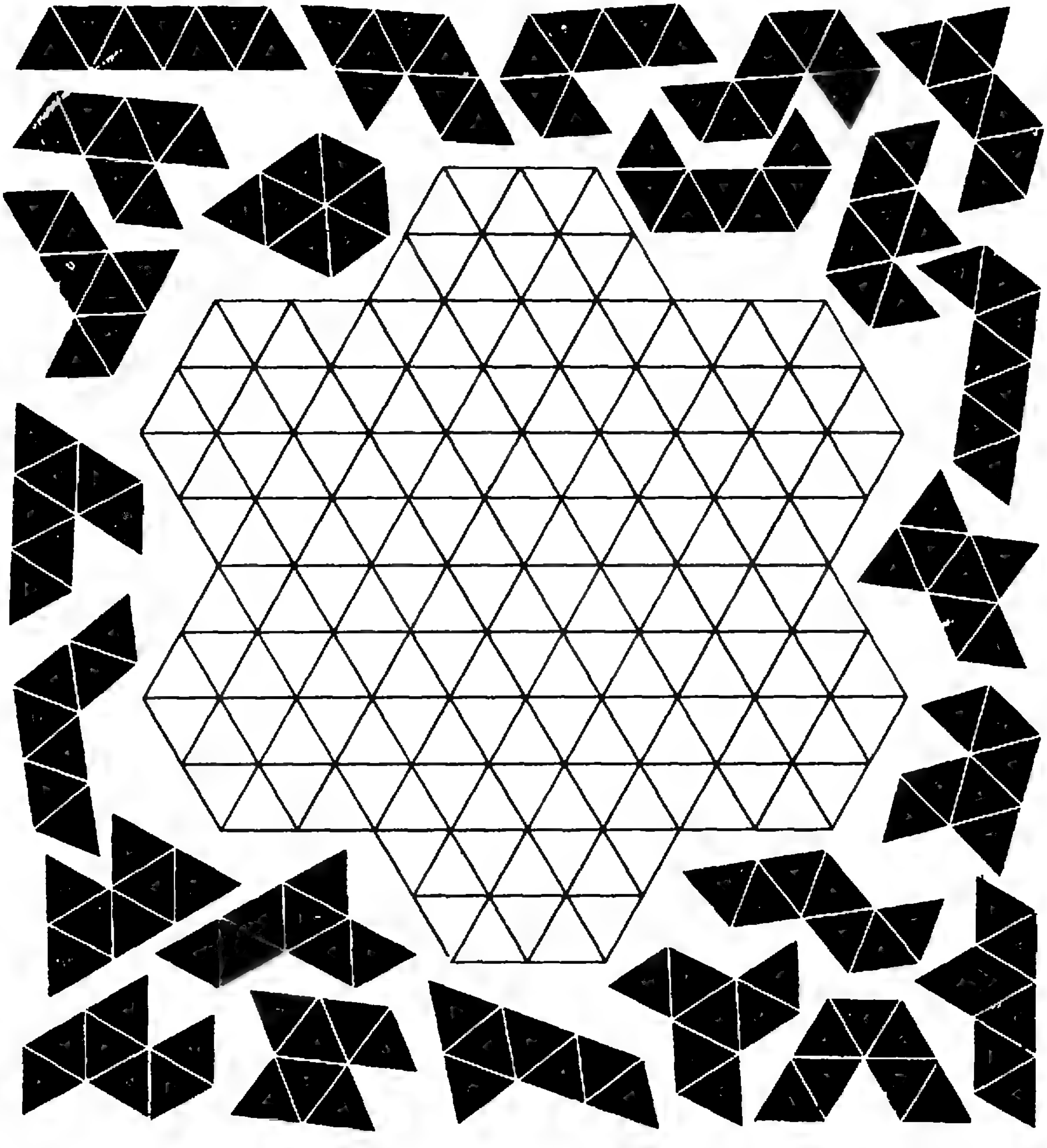
Современные демонстрационные электростатические машины мало чем отличаются от машины Катбертсона.

Слева — старинная электростатическая машина. В ней заряд накапливался на стеклянном глобусе под стеклянным колоколом. При откачивании воздуха под колоколом возникал заряд.

Работа электростатических машин основана на явлении электростатической индукции. О том, как происходит наведение зарядов при электризации через влияние, рассказывается в этом номере нашего журнала на с. 00.74

Цена 30 коп.
Индекс 70465

1



НОМЕР
2

Основан в 1970 году.

Квант

1975
2

Научно-популярный
физико-математический
журнал
Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической
литературы

Главный редактор
академик И. К. Кикоин

Первый заместитель
главного редактора
академик А. Н. Колмогоров

Редакционная коллегия:

М. И. Башмаков,
С. Т. Беляев,
В. Г. Болтянский,
Н. Б. Васильев,
Ю. Н. Ефремов,
В. Г. Зубов,
П. Л. Капица,
В. А. Кириллин,
главный художник
А. И. Климанов,
С. М. Козел,
зам. главного редактора
В. А. Лешковцев,
Л. Г. Макар-Лиманов,
А. И. Маркушевич,
Н. А. Патрикеева,
И. С. Петраков,
Н. Х. Розов,
А. П. Савин,
И. Ш. Слободецкий,
зам. главного редактора
М. Л. Смолянский,
Я. А. Смородинский,
В. А. Фабрикант,
А. Т. Цветков,
М. П. Шаскольская,
С. И. Шварцбурд,
А. И. Ширшов.

Редакция:

В. Н. Березин,
А. Н. Виленкин,
И. Н. Клумова,
художественный редактор
Т. М. Макарова,
Н. А. Минц,
Т. С. Петрова,
В. А. Тихомирова,
зав. редакцией
Л. В. Чернова

В НОМЕРЕ:

2 *А. В. Елецкий.* Скорость света и ее измерение
10 *А. Б. Хацет.* Транспортные сети и электрические цепи
18 *В. И. Арабаджи.* Дифракционная окраска насекомых

Математический кружок

20 *Э. Г. Готман.* Прямая Эйлера

Задачник «Кванта»

26 Задачи М306—М310; Ф318—Ф322
28 Решение задач М268—М272; Ф278—Ф284

Практикум абитуриента

43 *Е. Б. Ваховский, А. А. Рывкин.* Когда помогают графики
49 *В. Е. Белонучкин, В. И. Чехлов.* Московский физико-технический институт

Рецензии, библиография

52 *Н. В. Метельский.* Математики и математике
52 *К. И. Кугель.* Как это измерить?
55 *Т. С. Петрова, М. Л. Смолянский.* Новые книги

Информация

57 *И. Г. Венецкий, Ю. И. Соркин.* Пятая математическая олимпиада МЭСИ

«Квант» для младших школьников

58 Задачи
59 *М. П. Барболин.* Головоломки и графы
61 **Ответы, указания, решения**
Смесь (с. 17, 25, 42, 56)

На первой странице обложки вы видите фотографию части хвоста павлина. Яркие глазки хвостового пера могут менять свой цвет. Это объясняется тем, что окраска павлина вызвана дифракцией. О дифракционной окраске птиц и насекомых рассказывается в статье В. И. Арабаджи, опубликованной в этом номере журнала на с. 18

© Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», «Квант», 1975 год.

СКОРОСТЬ СВЕТА И ЕЕ ИЗМЕРЕНИЕ

А. В. Елецкий

Многие законы современной физики содержат в качестве параметра скорость света *c*. Эта величина входит в уравнения электромагнитного поля, через нее выражается полная энергия вещества, уровни энергии электронов в атоме и т. д. Наряду с другими постоянными величинами, такими, например, как заряд электрона и гравитационная постоянная, скорость света относится к фундаментальным физическим постоянным. Ясно, что точность физических законов определяется той точностью, с которой известны значения соответствующих постоянных, единственным способом определения которых является эксперимент.

Принцип измерения скорости света

Традиционный метод измерения скорости света, идея которого впервые была высказана еще Галилеем, основан на измерении времени, за которое световой сигнал проходит определенное расстояние. Развитие этого метода — от астрономических наблюдений Рёмера до филигранных интерферометрических измерений Майкельсона — было подробно описано в нашем журнале*). Согласно измерениям такого рода значение скорости света было принято равным 299 792,6±0,25 *км/с*. Отметим, что наибольшая относительная точность, достигнутая при измерении скорости света с помощью такого метода, получена в 50-х годах нашего столетия и составляет около одной десятитысячной доли процента, или 10^{-6}.

Напомним, что любое измерение можно характеризовать относительной и абсолютной ошибками. Абсолютная ошибка — это возможное отклонение результата измерения от точного значения измеряемой величины. Такое отклонение может быть связано с несовершенством измерительного прибора или процесса измерения и всегда должно оцениваться заранее. Относительная ошибка измерения — отношение абсолютной ошибки к самой измеряемой величине. Хотя заранее очевидно, что при точных измерениях нужно стараться уменьшать как абсолютную, так и относительную ошибку, в большинстве случаев наиболее важной характеристикой точности измерения является относительная ошибка. В самом деле, измерение, скажем, расстояния от Земли до Луны с абсолютной ошибкой ± 1 *м* — весьма точное измерение, а измерение с той же абсолютной ошибкой размера комнаты — всего лишь грубая оценка. Это стало бы ясно сразу, если бы мы указали, что в первом случае относительная ошибка составляла величину 10^{-8}, а во втором случае — 10^{-1}.

Дальнейшее повышение точности измерения скорости света интерференционными методами наталкивалось на принципиальные трудности. Расстояние, которое мы можем измерить с высокой точностью (это расстояние соизмеримо с эталоном длины —

---

*) См. статью В. Винецкого «Измерение скорости света», «Квант», 1972, № 2.

метром), свет проходит за чрезвычайно малые промежутки времени, порядка 10^{-8} *с*. При измерении таких промежутков времени возникает значительная ошибка. С другой стороны, время прохождения светом больших расстояний (скажем, свыше 10 *км*) может быть зафиксировано достаточно точно, однако при измерении самого расстояния с помощью эталона длины накапливается значительная ошибка. В таком случае для измерения больших расстояний пользуются как раз оптическим методом, но для его использования необходимо заранее знать величину скорости света. Получается замкнутый круг.

Разрешить это противоречие удалось в последние годы, когда стало практически возможным использование другого принципа измерения скорости света, основанного на том, что длина волны λ и частота ν электромагнитных волн в вакууме связаны между собой фундаментальным соотношением

$$c = \lambda\nu. \qquad (1)$$

Измерив независимо друг от друга длину волны и частоту одного и того же электромагнитного излучения, мы могли бы простым умножением этих величин получить значение скорости света. Точность такого эксперимента будет весьма высокой, если мы сможем удовлетворить одновременно двум требованиям.

Во-первых, мы должны уметь измерять длину волны и частоту электромагнитных колебаний с высокой степенью точности.

Во-вторых, частота колебаний электромагнитного излучения, с которым мы собираемся экспериментировать, должна поддерживаться возможно более постоянной.

Из соотношения (1) следует, что для электромагнитной волны относительные степени непостоянства частоты и длины волны совпадают.

В самом деле, пусть частота электромагнитной волны ν изменилась на малую величину $\delta\nu \ll \nu$. Это повлечет за собой изменение длины волны на величину $\delta\lambda$, так что произведение нового значения частоты $\nu + \delta\nu$ на новое значение длины волны $\lambda + \delta\lambda$ должно по-прежнему равняться скорости света c. Решая уравнение (1), написанное для этого случая, относительно $\delta\lambda$ получим

$$\delta\lambda = \frac{c}{\nu + \delta\nu} - \lambda = \frac{c}{\nu + \delta\nu} - \frac{c}{\nu} =$$

$$= -\frac{c\delta\nu}{\nu(\nu + \delta\nu)} = -\lambda\frac{\delta\nu}{\nu + \delta\nu}.$$

Отсюда

$$\frac{\delta\lambda}{\lambda} = -\frac{\delta\nu}{\nu + \delta\nu} \approx -\frac{\delta\nu}{\nu},$$

поскольку $\delta\nu \ll \nu$. Таким образом, относительные неточности в значениях частоты и длины волны противоположны по знаку и равны по величине.

Итак, если мы имеем источник электромагнитных колебаний постоянной частоты, то длина волны таких колебаний будет в той же степени постоянна. Это есть частный случай общего утверждения, что если две физические величины обратно пропорциональны друг другу, то их относительные неточности равны, если только коэффициент пропорциональности (в нашем случае — c) считать точно известным.

Создание электромагнитных колебаний, длина волны и частота которых остаются постоянными с высокой степенью точности в течение длительного времени, стало возможным в последние годы благодаря появлению лазеров — источников мощного монохроматического излучения. Однако, хотя частота и длина волны лазерного излучения постоянны с высокой точностью, их совместное измерение наталкивается на значительные технические трудности. Рассмотрим это подробнее.

Эталон для измерения длины

Всякое измерение сводится в конце концов к сравнению с некоторым эталоном. Существуют эталоны для измерения самых разнообразных параметров физических объектов и процессов: например, эталоны длины, времени, силы тока, массы вещества и т. д. Эталоны стараются выбирать таким образом, чтобы их значения не зависели от внешних факторов, таких как температура и давление воздуха, высота над уровнем моря и т. п.

В частности, современный эталон длины связан с длиной волны электромагнитного излучения, возникающего при переходе электрона в атоме криптона из одного возбужденного состояния в другое.

Электроны в любом атоме могут находиться в различных состояниях, отличающихся друг от друга энергией. Если для определенного атома известен полный набор таких состояний, то говорят, что известен спектр атома. Для физика атомы различных химических элементов отличаются друг от друга, главным образом, своими спектрами, так что спектры служат «портретами» атомов. Из состояния с большей энергией E_2 электроны могут самопроизвольно (спонтанно) переходить в состояние с меньшей энергией E_1. При этом энергия $E_2 - E_1$ выделяется в виде кванта электромагнитных колебаний. Частота ν этих колебаний связана с выделяющейся энергией соотношением

$$\nu = \frac{E_2 - E_1}{h}, \qquad (2)$$

где h — постоянная Планка.

Поскольку энергия состояний, в которых могут находиться электроны в атомах, крайне слабо подвержена воздействию внешних условий, частота излучаемых атомами колебаний оказывается постоянной с высокой степенью точности. А так как степени постоянства частоты и длины волны электромагнитных колебаний совпадают, длина волны излучаемого света оказывается также строго постоянной. Поэтому такой свет удобно использовать в качестве весьма точной «линейки» для измерения длины.

По определению международный эталон длины — метр — содержит 1 650 763, 73 длин волн излучения, возникающего при переходе между двумя определенными состояниями атома криптона. Это излучение испускается газоразрядной лампой, заполненной криптоном при строго определенном давлении и работающей при строго определенном токе и напряжении питания. Криптоновая лампа выбрана потому, что она относительно проста в изготовлении и имеет большой срок службы.

Измерение длины волны лазера

Измерение длины с помощью криптонового эталона основано на явлении интерференции света.

В каждой точке пространства, где распространяется световая волна, возникает электромагнитное поле, причем величины векторов напряженности электрического поля и индукции магнитного поля изменяются по гармоническому закону. Когда через некоторую точку пространства в одном направлении проходят два когерентных световых луча, то суммарный эффект будет зависеть от того, в каких фазах происходят колебания векторов напряженности электрического (или индукции магнитного) поля обоих лучей в этой точке. Если фазы колебаний совпадают, то есть векторы напряженностей направлены одинаково, то интенсивность света в этой точке максимальна. Если же, наоборот, фазы колебаний противоположны, то есть векторы напряженностей направлены противоположно друг другу, интенсивность света в точке минимальна. Таким образом, если два луча света одинаковой частоты с постоянной разностью фаз (то есть с постоянным соотношением между векторами напряженности электрического поля или индукции магнитного поля) направить на экран, то мы увидим на экране чередующиеся светлые и темные полосы — так называемую интерференционную картину.

Одна из возможных схем для измерения длины предмета, в которой используется интерферометр Майкельсона, показана на рисунке 1. Световая волна от источника 1 разделяется в полупрозрачной пластинке 2 на две волны. Одна волна отражается от нижней поверхности пластинки и идет вверх, отражается от неподвижного зеркала 3, проходит

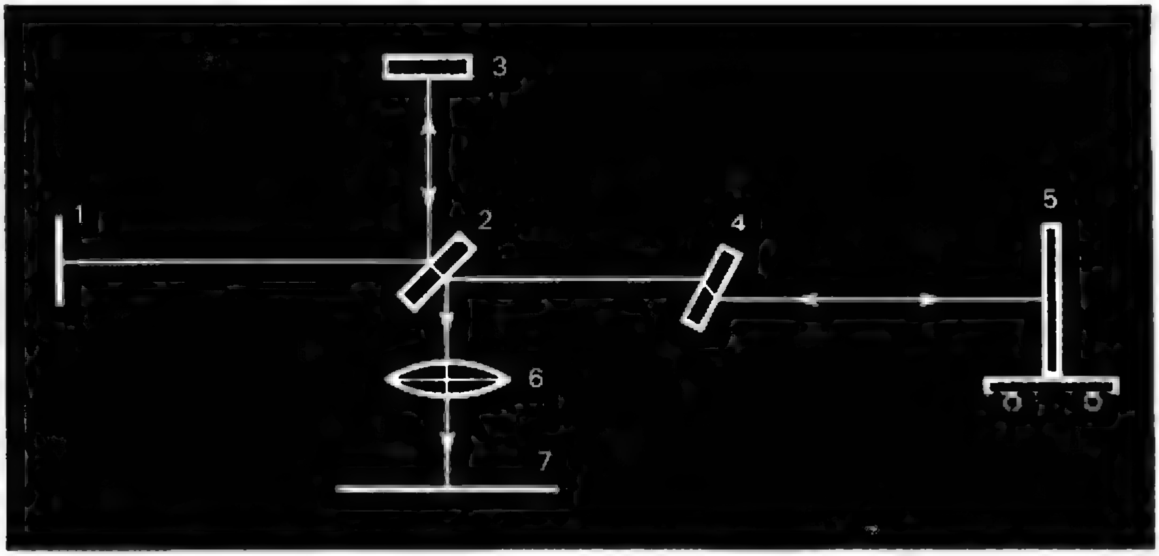


Рис. 1.

пластинку 2 и линзу 6, попадает на экран 7, расположенный в фокальной плоскости линзы. Вторая волна, пройдя пластинки 2 и 4, отражается от зеркала 5, укрепленного на тележке, возвращается к пластинке 2, отражается от ее нижней поверхности и идет к экрану. Пластинка 4 нужна для того, чтобы уравнять оптические пути обеих волн. Действительно, первая волна три раза проходит пластинку 2, а вторая волна — только один раз.

В результате интерференции двух лучей на экране возникает интерференционная картина, представляющая собой чередование темных и светлых полос. При передвижении тележки с зеркалом вдоль предмета, длину которого нужно измерить, интерференционная картина также будет как бы перемещаться по экрану. Например, при передвижении тележки на расстояние, равное половине длины волны света, используемого в опыте, все темные полосы на экране станут светлыми и наоборот (рис. 2). Поэтому каждая точка экрана по мере перемещения тележки будет попеременно темной или светлой, то есть будут возникать «вспышки» одна за одной. Причем число «вспышек» равно числу волн, которые укладываются на длине измеряемого предмета. Подсчет числа «вспышек» удобно производить в центральной точке интерференционной картины. Величина освещенности в центре интерференционной картины фиксируется фотоприемником, который соединен со счетчиком импульсов. Таким образом, процесс измерения мож-

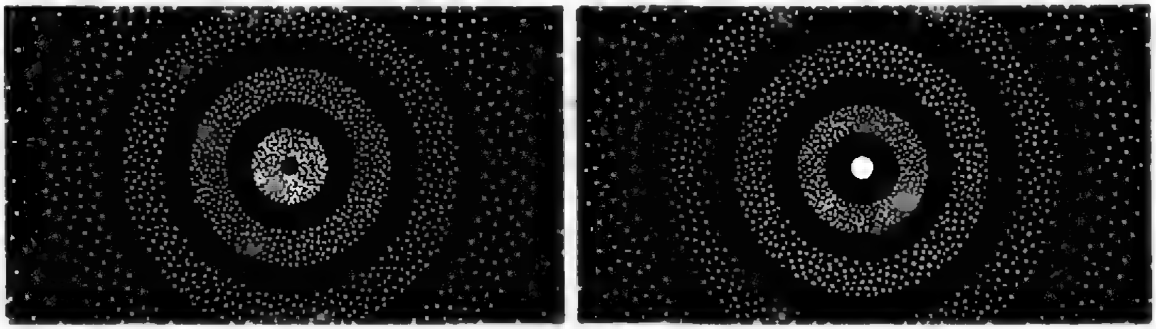


Рис. 2

но автоматизировать. Высокая чувствительность фотоприемника позволяет измерять длину объекта с точностью до одной сотой длины волны оптического излучения, что составляет около 10^{-8} *м*. То есть предметы длиной около метра можно измерять с относительной ошибкой порядка 10^{-8}.

Длину волны лазерного луча легко определить, измерив длину одного и того же предмета сначала с помощью криптонового эталона, а затем с помощью лазера и посчитав, во сколько раз отличается число «вспышек» в первом и во втором случаях.

Мы подробно рассмотрели, как измеряют длину волны лазерного излучения. Благодаря тому, что эталон длины — метр — основан на длине волны излучения атомов криптона в видимой области спектра, точность такого измерения примерно соответствует точности самого эталона длины, то есть равна 10^{-8}. Это наиболее высокая точность, какой можно достичь в настоящее время. Повысить эту точность можно будет только после введения нового, более точного эталона длины.

Цезиевый эталон частоты

Гораздо сложнее дело обстоит с измерением частоты лазерного излучения.

В качестве эталона частоты используется излучение цезиевого мазера — квантового генератора электромагнитного излучения с длиной волны, лежащей в области радиоволн. Принцип работы цезиевого мазера состоит в следующем. Атом цезия обладает магнитным моментом, то есть представляет собой мельчайший магнитик. При обычных условиях существует два сорта атомов цезия, отличающихся друг от друга величиной магнитного момента. Другими словами, магнитное поле, создаваемое атомом одного сорта, несколько больше, чем поле, создаваемое атомом другого сорта. Если такие атомы поместить в магнитное поле (например, между полюсами магнита), то сила взаимодействия магнитных моментов атомов с полем будет зависеть, во-первых, от величины внешнего магнитного поля, а во-вторых, от того, какой величиной магнитного момента обладает данный атом. Чем больше сила, тем больше и потенциальная энергия атомов цезия. Таким образом, в магнитном поле два сорта атомов цезия будут отличаться энергиями. Обозначим эти энергии, зависящие от величины внешнего магнитного поля, через E_1 и E_2 $(E_1 < E_2)$.

Подвергнем пары цезия действию электромагнитного излучения, энергия квантов которого $h\nu$ равна разности энергий $E_2 - E_1$:

$$h\nu = E_2 - E_1.$$

Тогда атомы первого сорта, энергия которых равна E_1, поглотив такой квант, увеличат свою энергию до значения E_2, то есть превратятся в атомы другого сорта. Поскольку разность энергий атомов цезия при определенном значении магнитного поля весьма слабо подвержена воздействию внешних условий, такое излучение можно использовать в качестве эталона частоты. Но для этого надо уметь отделять атомы одного сорта от атомов другого сорта. Такая сортировка возможна с помощью магнитного поля. Если пучок атомов обоих сортов пропускать через неоднородное магнитное поле, то траектории атомов разного сорта будут различными, так как различны энергии взаимодействия магнитного момента атома с полем. Отсортированный таким образом пучок атомов цезия подвергается воздействию электромагнитного поля. Если частота колебаний поля соответствует разности энергий $E_2 - E_1$, то атомы переходят в другое состояние, так что их траектория в неоднородном магнитном поле изменяется.

Значение частоты электромагнитных колебаний, при которой происходит такой переход, может быть зарегистрировано с относительной погрешностью порядка 10^{-12}. Это значение, определенное при строго фиксированной величине внешнего магнитного поля, равно 9 192 631 770,0 герц и является, по соглашению, Международным эталоном частоты.

Возникает вопрос: а как пользоваться таким эталоном частоты? Как, например, проверить по нему точность хода наших часов? Ведь маятник часового механизма делает 1—10 колебаний в секунду, а сигнал цезиевого эталона представляет собой электромагнитную волну, интенсивность которой изменяется за секунду примерно 10^{10} раз. Как с помощью цезиевого эталона частоты можно измерить частоту лазера, излучение которого происходит с частотой порядка 10^{15} *гц*?

Ясно, что прямое сравнение столь различных по масштабу частот является задачей такой же безнадежно трудной, как, например, точное измерение расстояния от Земли до Луны с помощью метровой линейки. Точное измерение возможно только при сравнении близких по масштабу величин. Поэтому для измерения с помощью цезиевого эталона частот различных колебаний необходимо прежде всего приблизить измеряемую частоту к частоте эталона. В настоящее время эта задача решается использованием техники нелинейного преобразования частоты электромагнитного излучения.

Нелинейная система

Преобразование частоты путем многократного ее умножения происходит, например, при воздействии синусоидального колебания некоторой частоты ν на нелинейный элемент. Для того чтобы понять, что такое нелинейный элемент, вспомним закон Ома, связывающий напряжение U, приложенное к проводнику с сопротивлением R, и ток I, протекающий через этот проводник: $U = IR$. Если величина R не зависит ни от тока, ни от напряжения, говорят, что проводник является линейным элементом. И наоборот, сопротивление нелинейных элементов зависит либо от приложенного напряжения, либо от протекающего через них тока. Например, обычные сопротивления представляют собой линейные элементы, а полупроводниковый диод — нелинейный элемент.

Важнейшей характеристикой любой системы, как линейной, так и нелинейной, является связь между сигналом, подаваемым на вход такой системы, и сигналом, возникающим на ее выходе. Для линейных систем возможно только изменение амплитуды сигнала при неизменной зависимости величины сигнала от времени. Зная коэффициент пропорциональности между амплитудами сигналов и характер входного сигнала, мы однозначно определим выходной сигнал (в случае линейных сопротивлений, подчиняющихся закону Ома, таким коэффициентом служит величина сопротивления R). Поскольку свойства нелинейных систем сами зависят от подаваемого на их вход сигнала, форма выходного сигнала уже не будет повторять в точности форму сигнала, подаваемого на вход. Для того чтобы охарактеризовать нелинейную систему полностью, недостаточно задать коэффициент пропорциональности, связывающий величины входного и выходного сигналов. Необходимо еще знать зависимость этого коэффициента от величины входного сигнала.

Например, если растягивать кусок упругого материала, то увеличение его длины Δl будет связано с приложенным усилием F законом Гука: $F = k\Delta l$. При малых значениях F зависимость линейная, то есть коэффициент k от F не зависит, и рассматриваемый образец является линейной системой. При увеличении приложенной силы линейность нарушается. Оказывается, при больших значениях F все материалы становятся нелинейными, то есть становится существенной зависимость $k(F)$.

Среди нелинейных элементов большое место занимают нелинейные колебательные системы. Типичным примером колебательной системы с нелинейными свойствами является морская поверхность. Пока амплитуда колебаний (в данном случае — это высота волн) невелика, форма волн — синусоида. При достижении достаточно большой амплитуды колебаний волны становятся нелинейными, то есть их форма определяется их амплитудой — возникают «барашки». При дальнейшем увеличении амплитуды волны и вовсе теряют сходство с синусоидой.

Число примеров нелинейных колебаний систем, существующих в природе и в технике, может быть продолжено.

Общим свойством всех нелинейных элементов является их способность искажать подаваемый на их вход сигнал. В частности, если входной сигнал является синусоидальным с частотой ν, на выходе он таковым уже не является. При подаче на вход такого преобразователя колебаний некоторой частоты ν_1 на выходе возникают колебания не только частоты ν_1, но и гармоники, то есть колебания частот $2\nu_1$, $3\nu_1$ и т. д. Поэтому такие элементы называют нелинейными преобразователями частоты.

Рассмотрим в качестве примера нелинейного преобразователя частоты полупроводниковый диод, вольтамперная характеристика которого может быть аппроксимирована параболой:

$$i = a + bu + cu^2,$$

где a, b и c — некоторые константы. Пусть напряжение u, подаваемое на диод, меняется по закону

$$u = U_0 \cos \omega t = U_0 \cos 2\pi\nu t.$$

Тогда

$$i = a + bU_0 \cos 2\pi\nu t + cU_0^2 \cos^2 2\pi\nu t =$$

$$= a + bU_0 \cos 2\pi\nu t + \frac{cU_0^2}{2}(1 + \cos 4\pi\nu t) =$$

$$= \left(a + \frac{cU_0^2}{2}\right) + bU_0 \cos 2\pi\nu t +$$

$$+ \frac{cU_0^2}{2} \cos 4\pi\nu t.$$

Таким образом, ток через рассматриваемый преобразователь не является гармоническим, а представляет собой сумму трех компонент: постоянной составляющей, колебаний с основной частотой ν и колебаний с удвоенной частотой 2ν.

Если зависимость i (u) является более сложной и поэтому она должна быть представлена бо́льшим числом слагаемых:

$$i = a + bu + cu^2 + du^3 + \ldots + lu^k,$$

то выходной сигнал будет содержать гораздо больше высших гармоник (2ν, $3\nu, \ldots$, $k\nu$).

Еще более сложная картина получается на выходе, если на вход нелинейной системы поступает сигнал более сложный, чем синусоидальный. Особый интерес представляет случай, когда входной сигнал является суммой двух синусоидальных сигналов с частотами ν_1 и ν_2. Оказывается, что на выходе в этом случае возникают не только гармоники каждой из частот, но и так называемые комбинационные частоты: $\nu_1 + \nu_2$, $\nu_1 - \nu_2$, $2\nu_1 + \nu_2$ и т. д. (это можно показать, проведя рассуждения, аналогичные вышеприведенным). В общем виде комбинационные частоты можно представить так: $n\nu_1 \pm m\nu_2$, где n и m — любые целые числа.

Измерение частоты излучения лазера

Теперь мы можем вернуться к конкретной задаче — как измерить частоту лазерного излучения. Но сначала познакомимся с общим принципом измерения частот, близких к эталонным. Исследуемые колебания вместе с эталонными подаются на нелинейный преобразователь. Как мы уже говорили, на выходе возникают различные комбинационные частоты, среди которых есть частота $\nu_1 - \nu_2$, называемая частотой биений. При условии, что частоты ν_1 и ν_2 близки друг другу, частота биений оказывается очень малой и ее можно измерить обычными методами (например, с помощью осциллографа). При этом, хотя относительная ошибка измерения частоты колебаний с помощью осциллографа довольно большая ($\approx 10^{-4}$), абсолютная ошибка измерения оказывается порядка 1 — — 10 *гц*. А поскольку эталонные частоты имеют величину примерно 10^{10} *гц*, то относительная ошибка измерения таких высоких частот будет 10^{-9} — 10^{-10}.

Для измерения частот, сильно отличающихся от эталонной, кроме цезиевого эталона, являющегося первичным эталоном частоты, необходимо иметь набор вторичных эталонов.

Значения частот вторичных эталонов изменяются плавно, что позволяет добиться большой близости частот и получить как можно меньшую частоту биений. Точность вторичных эталонов не хуже, чем точность первичного эталона, так как они постоянно проверяются с помощью цезиевого эталона.

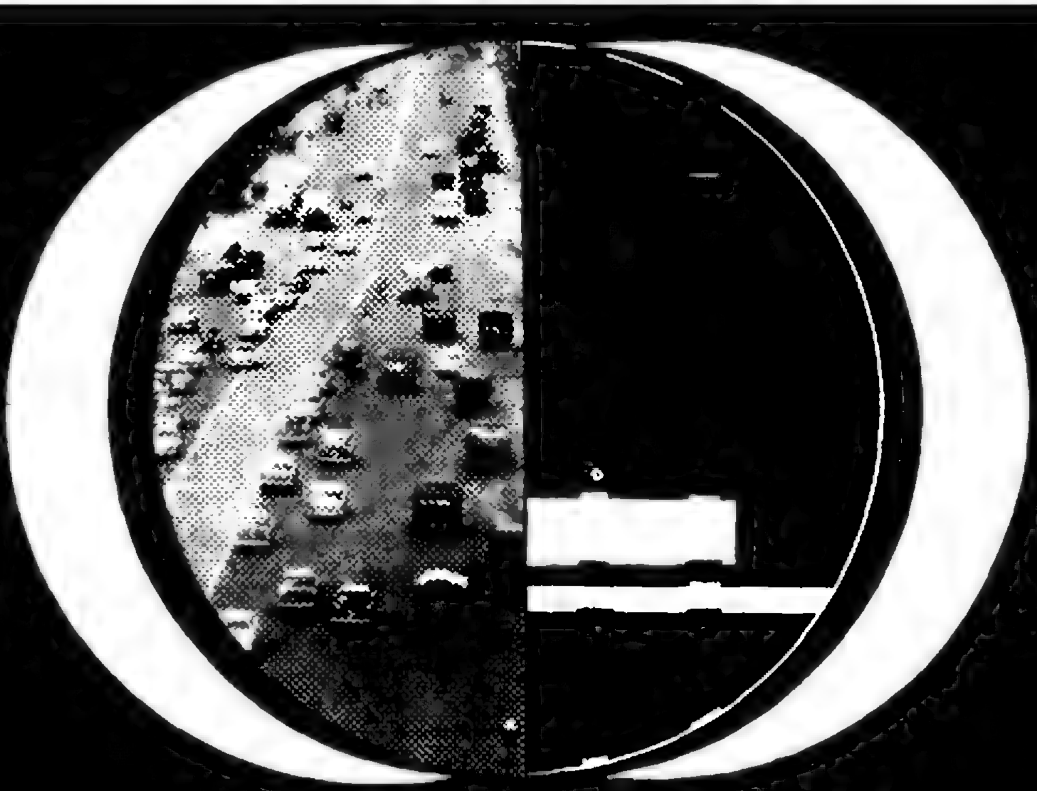
Итак, если сравниваемые частоты имеют различный масштаб, меньшую из частот путем многократного умножения повышают до значения, близкого к большей частоте. При этом, если исследуемое колебание происходит с частотой, меньшей эталонной, умножают его частоту. Если же исследуемое колебание более высокочастотное, как в случае излучения лазера, умножение надо производить для эталона частоты.

Вот, например, как была измерена частота лазера на парах синильной кислоты HCN (длина волны $3{,}4 \times 10^{-2}$ *см*, частота 890 758 *Мгц*). Это излучение с помощью нелинейного преобразователя смешивалось с двенадцатой гармоникой сигнала, испускаемого генератором сверхвысокочастотных колебаний (клистроном). На выходе нелинейного преобразователя возникали колебания разностной частоты, равной 30 *кгц*. Частота клистрона находится в той же области спектра, что и частота цезиевого эталона, поэтому ее можно измерить непосредственно. А зная частоту клистрона и разность частот (частоту биений), легко определить частоту лазерного излучения.

После того как была измерена частота излучения лазера на парах синильной кислоты, стало возможным измерение частоты более коротковолнового излучения. Так, была измерена частота излучения лазера на парах тяжелой воды D_2O (длина волны $8{,}4 \cdot 10^{-3}$ *см*, частота 3 557 143 *Мгц*) которая близка к четвертой гармонике излучения предыдущего лазера (890 758 *Мгц* × 4 = 3 563 032 *Мгц*). Затем были измерены частоты лазера на углекислом газе (длина волны 10^{-1} *см*, частота 28 306 251 *Мгц*).

Недавно удалось измерить частоту гелий-неонового лазера с длиной волны 3,39 *мкм*. Она оказалась равной $\nu = (88\,376\,181\,627 \pm 50) \cdot 10^3$ *гц*. Точные измерения длины волны λ того же излучения, выполненные с помощью криптонового эталона длины интерферометрическим методом, дали результат $\lambda = (3{,}392231376 \pm 0{,}000000012)$ *мкм*. Пользуясь уравнением (1), на основании этих результатов удалось получить значение скорости света с небывалой точностью: $c = (299\,792\,456{,}2 \pm 1{,}1)$ *м/с*. Относительная ошибка такого результата составляет величину $3{,}5 \cdot 10^{-9}$. Такая точность в сотни раз выше, чем максимальная точность измерения скорости света прямым методом, основы которого были заложены еще Галилеем.

Таким образом, развитие лазерной техники привело к уточнению значения одной из основных фундаментальных постоянных — скорости света — более чем в сто раз.



ТРАНСПОРТНЫЕ СЕТИ И ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ

А. Б. Хацет

1. Решение должно быть оптимальным

В населенный пункт B необходимо организовать бесперебойную доставку грузов из пункта A. В пункте A имеется достаточное, практически неограниченное количество автомашин различного тоннажа, но количество грузов, отправляемых из A в B в единицу времени, ограничено из-за дорожных условий.

Пункты A и B связаны сетью дорог, схема которой приведена на рисунке 1. Номером 1 на этой схеме обозначен пункт отправления A, номером 5 — пункт назначения B, номерами 2, 3, 4 — промежуточные пункты — перекрестки дорог. Направление движения указано стрелками. Каждый участок пути может пропустить за единицу времени не более определенного числа тонн грузов (обусловливаемого шириной участка пути в его наиболее узком месте, характером покрытий, состоянием мостов и др.). Назовем это число *пропускной способностью* и будем считать его известным для каждого из участков пути, соединяющих какие-либо два пункта на нашей схеме.

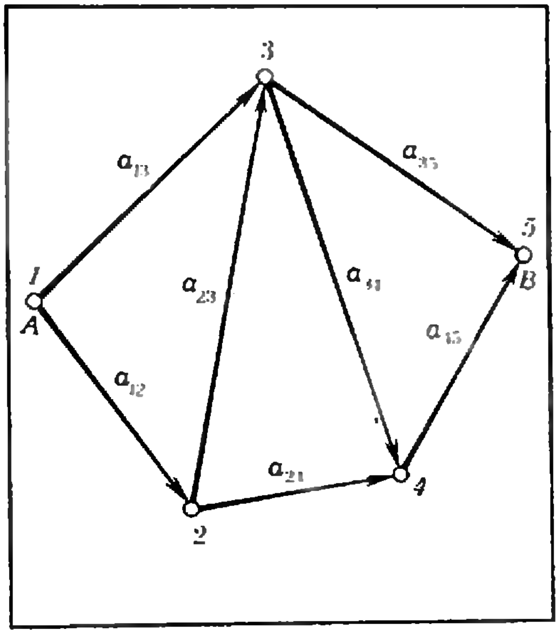


Рис. 1.

Пропускную способность участка, ведущего из пункта i в пункт j (участка $i-j$), обозначим через a_{ij} (T/*час*).

Допустим, что мы стремимся отправлять в каждую единицу времени из A в B грузов как можно больше. Не следует, однако, думать, что для этого нужно отправлять ежечасно a_{12} тонн по участку $1-2$ и a_{13} тонн по участку $1-3$: ведь может оказаться, что из-за недостаточной пропускной способности других участков пути в каких-то промежуточных пунктах образуются «пробки», в результате чего движение нарушится или прекратится совсем. Например, если $a_{12} > a_{23} + a_{24}$, то «пробка» возникнет на перекрестке *2*. Значит, для наилучшей организации транспортировки грузов из A в B *) нам нужно решить такую задачу: определить, сколько тонн грузов нужно ежечасно провозить по каждому участку дорожной сети, связывающей пункты A и B, чтобы при этом не превысить пропускной способности ни одного из участков сети, не создать ни одной «пробки» в промежуточных пунктах и чтобы количество грузов, ежечасно доставляемых в B, было наибольшим.

Искомое количество грузов, провозимых по участку $i-j$ ежечасно (объем перевозок), обозначим через x_{ij} (T/*час*).

Итак, задача поставлена. Но как ее решить?

2. Листая старые номера «Кванта»

Просматривая комплект журнала «Квант» за 1970 год, в разделе «Сети и потоки» статьи М. И. Башмакова «Паросочетания и транспортные сети» находим нашу задачу, только в несколько более «ученой» одежде.

Оказывается, схемы, составленные из точек и стрелок (как на рисунке 1), называются ориентированными графами, причем точки — вершинами, а стрелки — дугами графа. Каждая дуга имеет определенное направление (отсюда и название — ориентированный граф), поэтому одна из соединяемых ею вершин — начальная, другая — конечная; говорят также, что дуга выходит из начальной вершины и входит в конечную. Вершина, являющаяся для всех связанных с нею дуг начальной (конечной), называется входом (выходом) графа (на рисунке 1 — вершины *1* и *5* соответственно). Ориентированный граф с одним входом и одним выходом — это и есть транспортная сеть (именно таков граф на рисунке 1). Вершины транспортной сети, не являющиеся входом или выходом, называются промежуточными.

Остановим на минуту этот поток терминов и переведем дух. Конечно, замена слов «сеть дорог» — «транспортная сеть», «пункт» — «вершина», «участок пути» — «дуга» нас к решению не приблизила. Зато выяснилось, что мы не первые заинтересовались подобной проблемой. Проявите еще немного терпения — и вы придете к широко известной в математике формулировке нашей задачи.

Искомую величину объема перевозок x_{ij} называют потоком по дуге *i—j*, а сумму потоков по всем дугам, выходящим из входа сети (в нашем случае $x_{12}+x_{13}$), — потоком по сети. Теперь, наконец, нашей задаче можно придать «парадную форму».

---

*) Такую организацию снабжения называют оптимальной.

Задача о максимальном потоке. *Дана транспортная сеть, для каждой дуги которой указана пропускная способность. Требуется определить потоки по дугам сети, не превосходящие соответствующих пропускных способностей, так, чтобы для любой промежуточной вершины сумма потоков по входящим дугам была равна сумме потоков по выходящим дугам («условие непрерывности потока») и чтобы поток по сети был наибольшим из возможных.*

Итак, наша задача — частный случай задачи о максимальном потоке (условие непрерывности потока — это знакомое нам условие отсутствия транспортных «пробок»). Пользуясь введенными обозначениями, ее можно сформулировать так:

Найти такие величины x_{ij} потоков по дугам, при которых достигает максимума величина потока по сети

$$X=x_{12}+x_{13} \tag{1}$$

при следующих условиях:

а) *ограниченность пропускных способностей дуг*

$$x_{12}\leqslant a_{12},\quad x_{13}\leqslant a_{13},\quad x_{23}\leqslant a_{23},$$
$$x_{24}\leqslant a_{24},\quad x_{34}\leqslant a_{34},\quad x_{35}\leqslant a_{35}, \tag{2}$$
$$x_{45}\leqslant a_{45},$$

б) *непрерывность потока в промежуточных вершинах*

$$x_{12}-x_{23}-x_{24}=0,$$
$$x_{13}+x_{23}-x_{34}-x_{35}=0,$$
$$x_{24}+x_{34}-x_{45}=0. \tag{3}$$

При установившемся потоке количество грузов, вывозимых из входа *1*, должно быть равно количеству грузов, поступающих за то же время на выход *5* (иначе нарушилось бы условие непрерывности потока):

$$X=x_{12}+x_{13}=x_{35}+x_{45}. \tag{4}$$

Раз мы нашли в статье М. И. Башмакова формулировку нашей задачи, естественно там же поискать и решение. И действительно — углубившись в чтение, находим изложение алгоритма Форда — Фолкерсона, с помощью которого можно определить все значения x_{ij} (предполагая, правда, что это целые числа). Надо только запастись терпением; чтобы разобраться в алгоритме и суметь применить его, придется изрядно потрудиться. Не удивительно, если у читателей, недолюбливающих вычисления, возникнет в этом месте вопрос: а нельзя ли как-нибудь иначе?

3. О пользе аналогий

Посмотрите внимательно на уравнения (3). Чем-то они нам очень знакомы... Ба, да ведь если транспортную сеть считать электрической цепью, а объемы перевозок x_{ij} — величинами токов в соответствующих ветвях цепи, то уравнения (3) выражают просто 1-й закон Кирхгофа для промежуточных узлов цепи: *алгебраическая сумма токов в узле равна нулю* (то есть сумма токов, втекающих в узел, равна сумме токов, вытекающих из узла)!

Правда, эта аналогия не полная, поскольку закон Кирхгофа обычно формулируется для замкнутой цепи и относится к любому ее узлу; у нас же цепь не замкнута, и условия типа (3) неверны для крайних узлов *1* и *5*. Однако можно так видоизменить задачу о потоке, что отмеченное расхождение устранится. С этой целью введем в транспортную сеть дополнительную дугу из выхода во вход сети (на рисунке 2 это красная дуга).

Пропускную способность новой дуги ограничивать не будем, а поток по ней примем равным X, то есть потоку по сети. По полученной обобщенной сети поток будет совершать уже замкнутый путь от входа к выходу по заданной транспортной сети, а затем — от выхода на вход по дополнительной дуге.

Тогда нашу задачу можно переформулировать так: *определить такие объемы перевозок x_{ij}, при которых*

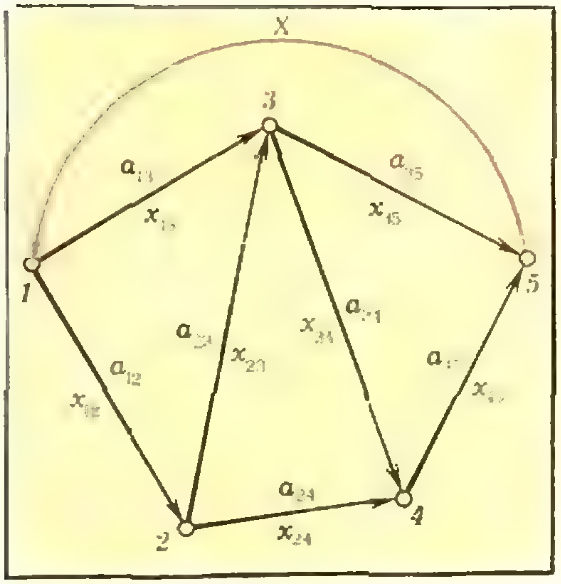


Рис. 2.

достигает максимума величина X (поток по сети) при ограничениях (2) *и условиях* (3) *и* (4) *непрерывности потока во всех узлах:*

$$
\begin{aligned}
X - x_{12} - x_{13} &= 0,\\
x_{12} - x_{23} - x_{24} &= 0,\\
x_{13} + x_{23} - x_{34} - x_{35} &= 0, \qquad (5)\\
x_{24} + x_{34} - x_{45} &= 0,\\
x_{35} + x_{45} - X &= 0.
\end{aligned}
$$

Получилась полная аналогия с законом Кирхгофа, и поэтому возникает вопрос: а нельзя ли построить *электрическую модель* транспортной сети, в которой искомым потокам по дугам соответствовали бы токи в ветвях, определяемые *непосредственным измерением без каких-либо вычислений*? Мы покажем, что такую модель построить можно.

Естественно, что дугам сети в этой модели должны соответствовать ветви электрической цепи, а вершинам — узлы цепи.

Замечание. Мы будем пользоваться следующими обозначениями: —⊖—^{a} источник тока указанного направления, a — сила тока в ветви; —|^{U}— — источник напряжения, U — величина напряжения в ветви; —▶|— — диод, пропускающий ток в направлении слева направо.

Для прохождения тока по цепи необходимо наличие в ней некоторой электродвижущей силы. Поэтому включим в дополнительную ветвь цепи источник единичного напряжения батарею, создающую в ветви *5—1* напряжение $U = 1$ (положительный контакт батареи соединим с узлом *1*). Чтобы модель соответствовала задаче, нужно обеспечить прохождение по каждой из основных ветвей цепи (соответствующих дугам исходной транспортной сети) тока лишь заданного направления, не превышающего определенной величины (равной пропускной способности дуги сети). С этой целью дугу $i - j$ заменим в модели ветвью $i - j$ электрической цепи с параллельно включенными диодом (пропускающим ток в нужном направлении) и источником тока, сила которого численно равна пропускной способности a_{ij} этой дуги.

Все указанные элементы цепи считаются идеальными: предполагается, что источник тока обеспечивает постоянную силу тока в ветви (независимо от напряжения на ее концах); источник напряжения поддерживает постоянное напряжение в ветви (независимо от силы проходящего по ней тока); диод пропускает ток лишь в одном направлении и при этом не оказывает сопротивления (т. е. при прохождении в этом направлении тока через диод не происходит падения потенциала). Кроме того, все проводники в цепи также считаются идеальными, их сопротивления полагаются равными нулю.

Понятно, что элементов, идеальных в этом смысле, в действительности не существует. Однако в пределах ограниченной точности модели сделанные нами предположения допустимы, тем более, что нас здесь интересуют *принципиальные возможности* модели, а не ее техническая реализация.

Итак, мы заменили дугу $i - j$ ветвью электрической цепи, схема которой изображена на рисунке 3.

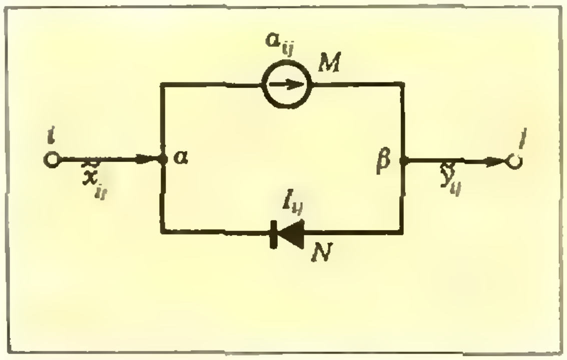


Рис. 3.

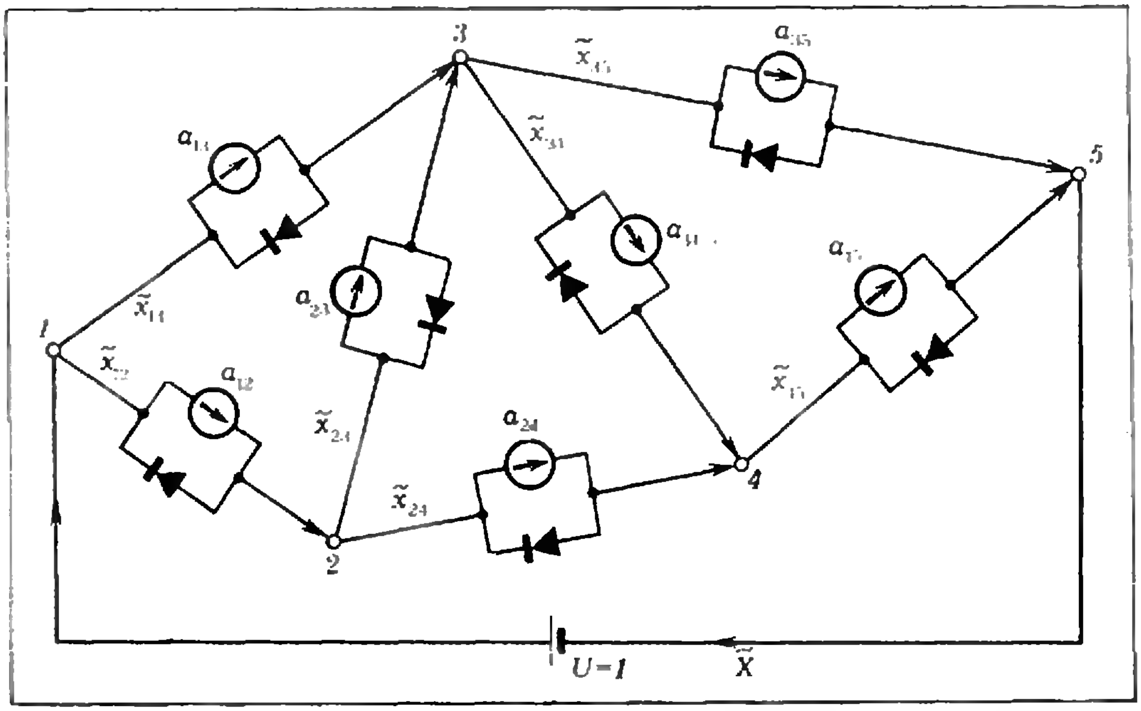


Рис. 4.

При этом в схеме ветви появились узлы α и β, которых в транспортной сети не было. Направление и величина тока в ветви $\alpha - M - \beta$, содержащей источник тока, вполне определяются этим источником; направление тока в ветви $\alpha - N - \beta$ определяется диодом; величину тока в ней обозначим I_{ij}. Токи в ветвях $i-\alpha$ и $\beta - j$ обозначим через $\tilde{x}_{ij}$ и $\tilde{y}_{ij}$ соответственно, направления этих токов указаны на схеме.

Применение закона Кирхгофа дает:

1) в узле α: $\tilde{x}_{ij} + I_{ij} = a_{ij}$ или $I_{ij} = a_{ij} - \tilde{x}_{ij}$ по свойству диода $I_{ij} \geqslant 0$, следовательно,

$$\tilde{x}_{ij} \leqslant a_{ij}. \tag{6}$$

2) в узле β: $a_{ij} = \tilde{y}_{ij} + I_{ij}$, то есть

$$\tilde{y}_{ij} = \tilde{x}_{ij}. \tag{7}$$

Значит, по основной ветви $i - j$ цепи идет ток заданного направления (от узла i к узлу j), величина которого $\tilde{x}_{ij}$ не превосходит пропускной способности a_{ij} соответствующей дуги транспортной сети.

Введем теперь в рассмотрение потенциалы узлов цепи, обозначая через p_i потенциал i-го узла. Разность потенциалов (напряжение) между узлами i и j будем обозначать u_{ij}: $u_{ij} = p_i - p_j$. В силу сделанного предположения на ветвях $i - \alpha$ и $\beta - j$ нет падения потенциала, поэтому $u_{ij} = u_{\alpha\beta}$.

По свойству идеального диода, если ток $I_{ij} > 0$, то разность потенциалов $u_{\alpha\beta} = u_{ij} = 0$. При $I_{ij} = 0$ u_{ij} может принимать любое, но неотрицательное значение, так как по цепи ток не может идти из j-го узла в i-й. Учитывая, что $I_{ij} = a_{ij} - \tilde{x}_{ij}$, можно написать

$$u_{ij}(a_{ij} - \tilde{x}_{ij}) = 0; \quad u_{ij} \geqslant 0. \tag{8}$$

Это соотношение понадобится нам в дальнейшем.

Теперь мы уже можем построить модель всей транспортной сети. Ее схема представлена на рисунке 4. Ток и напряжение в дополнительной ветви обозначены через $\tilde{X}$ и U соответственно; по правилам построения модели $U = 1$.

Мы утверждаем, что токи $\tilde{x}_{ij}$, устанавливающиеся в основных ветвях электрической модели транспортной сети, численно равны объемам перевозок по соответствующим дугам и дают решение задачи о максимальном потоке для этой сети. При этом ток $\tilde{X}$ в дополнительной ветви модели численно равен максимальному потоку по сети.

Если нам удастся это доказать, то построенная модель полностью решает нашу задачу: достаточно, приведя модель в действие, измерить амперметром токи x_{ij} в ветвях!

4. Итак — за работу

Чтобы убедиться, что численные значения токов $\tilde{x}_{ij}$ в ветвях модели являются объемами перевозок, дающими решение задачи о максимальном потоке, нужно показать, что при $x_{ij} = \tilde{x}_{ij}$ выполняются условия (2) и (3) и что величина потока X в сети принимает наибольшее из возможных значений.

Но первую часть этого утверждения мы уже доказали. В самом деле, написав неравенства (6) для всех ветвей модели

$$\tilde{x}_{12} \leqslant a_{12},\ \tilde{x}_{13} \leqslant a_{13},\ \tilde{x}_{23} \leqslant a_{23},\quad \tilde{x}_{24} \leqslant a_{24},\quad \tilde{x}_{34} \leqslant a_{34},\ \tilde{x}_{35} \leqslant a_{35},\quad \tilde{x}_{45} \leqslant a_{45}, \tag{9}$$

получим, что для токов $\tilde{x}_{ij}$ условия (2) выполнены, а применив 1-й закон Кирхгофа ко всем основным узлам модели, получим для токов $\tilde{x}_{ij}$ пять соотношений

$$\begin{aligned} \tilde{X} - \tilde{x}_{12} - \tilde{x}_{13} &= 0,\\ \tilde{x}_{12} - \tilde{x}_{23} - \tilde{x}_{24} &= 0,\\ \tilde{x}_{13} + \tilde{x}_{23} - \tilde{x}_{34} - \tilde{x}_{35} &= 0,\\ \tilde{x}_{24} + \tilde{x}_{34} - \tilde{x}_{45} &= 0,\\ \tilde{x}_{35} + \tilde{x}_{45} - \tilde{X} &= 0, \end{aligned} \tag{10}$$

три средних из которых свидетельствуют о выполнении условия (3).

Значит, осталось только доказать, что величина $\tilde{X}$ в электрической цепи есть наибольшее из возможных значений потока X, совместимых с условиями (2) и (3). Доказательство этого факта состоит из двух частей.

1. Покажем сначала, что для любых значений переменных x_{ij}, удовлетворяющих условия (2) и (3), выполняется неравенство

$$X = x_{12} + x_{13} \leqslant \sum_{i,j} a_{ij}u_{ij}, \tag{11}$$

где u_{ij} — численное значение напряжения в ветви $i - j$, а сумма берется по всем ветвям электрической цепи *), то есть покажем, что при любых допустимых объемах перевозок по дугам транспортной сети поток X по сети не превышает числа $\sum\limits_{i,j} a_{ij}u_{ij}$.

В силу неравенств (2) и неотрицательности u_{ij} (см. (8)) имеем $x_{ij}u_{ij} \leqslant a_{ij}u_{ij}$; следовательно,

$$\sum_{i,j} x_{ij}u_{ij} \leqslant \sum_{i,j} a_{ij}u_{ij}. \tag{12}$$

Вспомним теперь, что $u_{ij} = p_i - p_j$, где p_i, p_j — потенциалы соответствующих узлов. Поэтому

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} x_{ij}u_{ij} &= \sum_{i,j} x_{ij}(p_i - p_j) = x_{12}(p_1 - p_2) +\\ &+ x_{13}(p_1 - p_3) + x_{23}(p_2 - p_3) +\\ &+ x_{24}(p_2 - p_4) + x_{34}(p_3 - p_4) +\\ &+ x_{35}(p_3 - p_5) + x_{45}(p_4 - p_5) =\\ &= p_1(x_{12} + x_{13}) + p_2(-x_{12} +\\ &+ x_{23} + x_{24}) + p_3(-x_{13} - x_{23} +\\ &+ x_{34} + x_{35}) + p_4(-x_{24} - x_{34} +\\ &+ x_{45}) + p_5(-x_{35} - x_{45}). \end{aligned}$$

Выражения в скобках при p_2, p_3 и p_4 равны нулю (см. (3)); при p_1 и p_5 равны X и $-X$ (см. (4)), $p_1 - p_5 = U = 1$; поэтому

$$\sum_{i,j} x_{ij}u_{ij} = p_1X - p_5X = (p_1 - p_5)X = X. \tag{13}$$

Учитывая (12), получаем нужное неравенство

$$\tilde{X} \leqslant \sum_{i,j} a_{ij}u_{ij}.$$

2. Теперь покажем, что при значениях $x_{ij} = \tilde{x}_{ij}$, то есть для объемов перевозок, численно равных токам в ветвях построенной электрической модели, имеет место равенство

$$\tilde{X} = \sum_{i,j} a_{ij}u_{ij}. \tag{14}$$

---

*) Символ $\sum\limits_{ij}$ обозначает сумму членов рассматриваемого вида, соответствующих всем возможным для данной задачи наборам значений индексов i, j. В нашем случае

$$\sum_{ij} a_{ij}u_{ij} = a_{12}u_{12} + a_{13}u_{13} + a_{23}u_{23} + a_{24}u_{24} + a_{34}u_{34} + a_{35}u_{35} + a_{45}u_{45}.$$

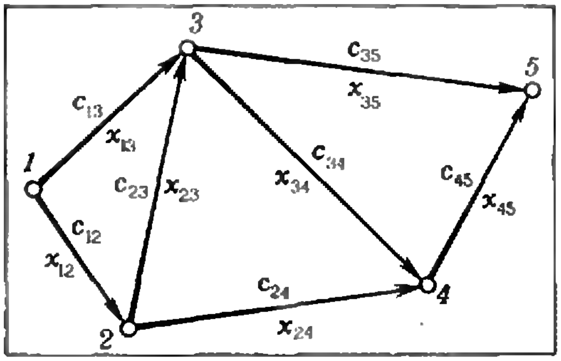

3
5
1
2
4
c_{13}
x_{13}
c_{35}
x_{35}
c_{23}
x_{23}
c_{34}
x_{34}
c_{45}
x_{45}
c_{12}
x_{12}
c_{24}
x_{24}

Рис. 5.

Это и будет означать, что $\tilde{X}$ — наибольшее из возможных значений X.

Для доказательства равенства (14) воспользуемся соотношениями (8), описывающими свойства идеального диода:

$u_{ij}(a_{ij} - \tilde{x}_{ij}) = 0$ или $a_{ij}u_{ij} = \tilde{x}_{ij}u_{ij}$.

Отсюда непосредственно следует, что

$$\sum_{i,j} a_{ij}u_{ij} = \sum_{i,j} \tilde{x}_{ij}u_{ij}. \qquad (15)$$

Поскольку для токов $\tilde{x}_{ij}$, $\tilde{X}$ выполнены те же соотношения (1), (4), что и для x_{ij} и X, то

$$\sum_{i,j} \tilde{x}_{ij}u_{ij} = \tilde{X}. \qquad (16)$$

Из (15) и (16) следует равенство (14). Это завершает доказательство того, что токи, установившиеся в ветвях построенной электрической модели транспортной сети, дают решение задачи о максимальном потоке.

Заметим, что *форма* транспортной сети, фигурировавшей в нашей задаче, для доказательства не существенна. Оно остается в силе для произвольной транспортной сети.

5. Попробуйте сами

Из тех же (идеализированных!) элементов — источников тока, источников напряжения и диодов — можно построить электрические модели для решения и других оптимизационных задач, связанных с транспортными сетями. Рассмотрим здесь одну такую задачу, имеющую большое значение в экономике.

Задача о минимизации транспортных затрат. *Пусть дана транспортная сеть и известно, что стоимость перевозки единицы груза по дуге i — j равна c_{ij}* (см. рис. 5). *Требуется определить объемы перевозок x_{ij} по ду-*

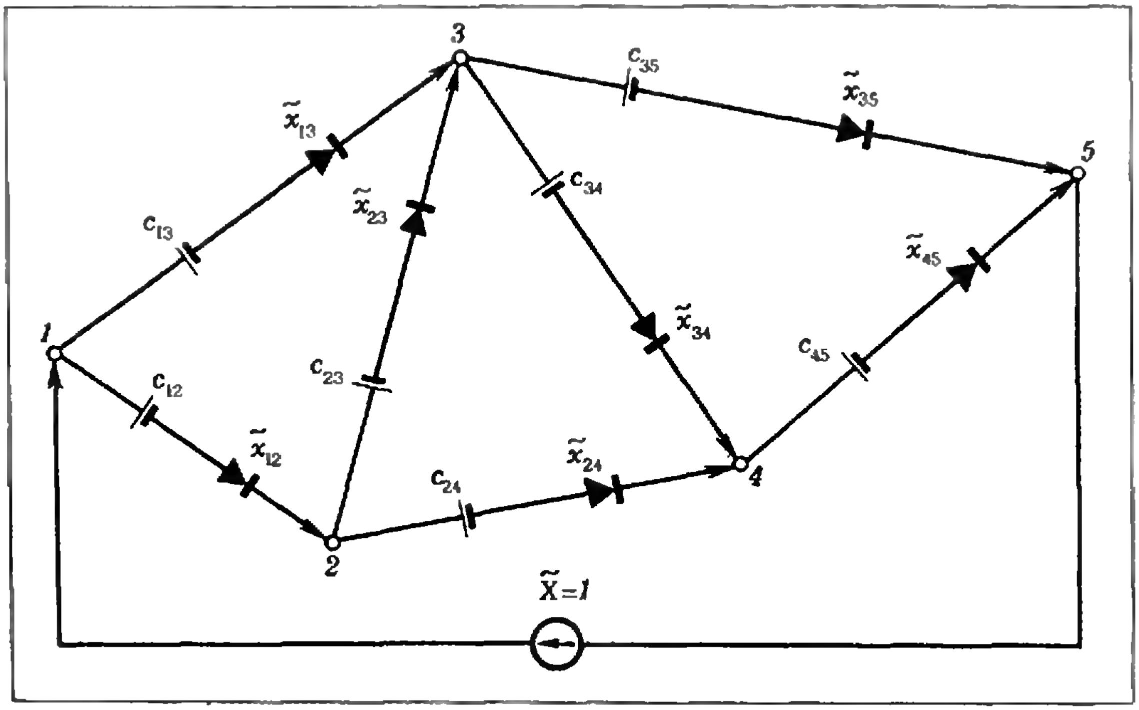

3
5
1
2
4
c_{35}
$\tilde{x}_{35}$
$\tilde{x}_{13}$
c_{13}
$\tilde{x}_{23}$
c_{34}
$\tilde{x}_{34}$
$\tilde{x}_{45}$
c_{45}
c_{12}
$\tilde{x}_{12}$
c_{23}
c_{24}
$\tilde{x}_{24}$
$\tilde{X}=1$

Рис. 6.

гам сети, при которых из входа сети в ее выход будет перевезена 1 единица груза, и суммарная стоимость перевозок будет минимальна.

Перевозка x_{ij} единиц груза по дуге $i - j$ стоит $c_{ij}x_{ij}$.

Поэтому общие затраты на перевозку равны

$$S = \sum_{i,j} c_{ij}\, x_{ij}. \tag{17}$$

Нужно найти такие значения величин x_{ij}, при которых S принимает наименьшее из возможных значений и которые удовлетворяют условиям:

а) непрерывности потока в промежуточных узлах (см. (3));

б) неотрицательности объемов перевозок: $x_{ij} \geqslant 0$;

в) равенства единице суммарного потока по сети:

$$X = x_{12} + x_{13} = x_{35} + x_{45} = 1. \tag{18}$$

Для построения электрической модели транспортной сети этой задачи нужно заменить каждую дугу $i - j$ ветвью с последовательно включенными диодом и источником напряжения, величина которого численно равна c_{ij}, а и дополнительную ветвь из выхода на вход сети включить единичный источник тока. Соответствующая схема представлена на рисунке 6.

Можно доказать…

Но нам уже пора поставить точку. Читатели, заинтересовавшиеся этими вопросами, могут попробовать свои силы, решая следующие

Упражнения

1. Докажите, что токи $\tilde{x}_{ij}$, которые устанавливаются в ветвях электрической цепи, изображенной на рисунке 6, дают решение задачи минимизации транспортных затрат.

2. Докажите, что каждый ненулевой ток по ветви этой цепи обязательно равен 1, т. е. что в действительности ток не разветвляется в узлах, а идет от входа к выходу по определенному пути («путь минимальных затрат»).

3. Используя задачу о минимизации транспортных затрат, покажите, как с помощью той же модели (рис. 6) можно определить кратчайший путь по дугам транспортной сети, ведущий от входа к выходу.

На сборе в пятом-б

— Сегодня я покажу вам фокус, — объявила пионервожатая Лена. — Согласны?

— Согласны! — послышались голоса пятиклассников.

— А какой фокус? — спросил Сережа. — Я тоже знаю фокус с иголкой…

— Я покажу арифметический фокус, — сказала Лена — Пусть каждый из вас задумает какую-нибудь цифру. Только мне не говорите, — объявила Лена. Теперь умножьте это число на 5. К произведению прибавьте 4 и удвойте полученную сумму. Готово?

— Теперь прибавьте еще 99, — сказала Лена, — и у каждого из вас получится трехзначное число. Оставьте в этом числе только последнюю цифру, а первые две зачеркните.

— Как это: зачеркнуть? — спросил Юра.

— Например, у тебя получилось число 364, — сказала Лена. — Если зачеркнуть первые две цифры, то останется только 4.

— К тому, что осталось, продолжала Лена, — прибавьте 28, а потом разделите на 5.

Соня, сидевшая на последней парте, быстро сосчитала и рассмеялась.

— Почему ты смеешься? — спросила Лена. — Иди сюда. — И она тихонько сказала Соне на ухо:

— У тебя получилось 7.

— Верно, — обрадовалась Соня. — А как ты узнала?

— А у меня сколько получилось? — нетерпеливо спросил Сережа.

Лена подошла к нему и тихонько сказала:

— У тебя получилось 7.

Потом Лена подошла ко всем по очереди и каждому сказала:

— У тебя получилось 7.

* * *

Как Лена могла узнать, что у каждого получилось семь?

ДИФРАКЦИОННАЯ ОКРАСКА НАСЕКОМЫХ

В. И. Арабаджи

Дифракционная (структурная) окраска птиц, бабочек и жуков весьма распространена в природе. Большое разнообразие в оттенках дифракционных цветов свойственно павлинам, фазанам, черным аистам, колибри, бабочкам тропической зоны и многим видам жуков (среди них рогачи, долгоносики, листоеды и др.). Дифракционную окраску животных изучали не только биологи, но и физики, например Релей, Вуд, Майкельсон.

Внешняя поверхность оперения у многих птиц и верхний покров тела бабочек и жуков характеризуются регулярным повторением элементов структуры с периодом от одного до нескольких микрон. У некоторых животных подобные структуры могут покрывать тело в несколько слоев, образуя многоэтажную (объемную) дифракционную решетку.

Наряду с дифракционной животные могут иметь и чисто интерференционную окраску, образующуюся на тонких и прозрачных внешних покровах (клинообразных по сечению вдоль основной оси симметрии) с толщиной оптически деятельного слоя от десятых долей микрона до нескольких микрон.

На рисунках 1 и 2 вы видите снимки крыла бабочки-переливницы и спинки жука — азиатского листоеда (выбраны участки с дифракционной окраской). Снимки 1, 2, 3 получены с помощью микроскопа со стократным увеличением. Для выявления элементов структуры использовалось боковое освещение. На снимках четко видно повторение элементов структуры.

Цвет поверхностного покрова может изменяться в зависимости от того, под каким углом падает свет на поверхность решетки, как ориентированы лучи света по отношению к элементам структуры, под каким углом рассматривается поверхность.

Очевидно, что окраска поверхности связана с отражением лучей. Рассмотрим количественно дифракцию в отраженном свете. Пусть лучи света падают на решетку под углом θ_0 и отражаются от нее под углом θ (рис. 4). Разность хода лучей *1* и *2* равна

$$\Delta = \Delta_2 - \Delta_1 = d\sin\theta_0 - d\sin\theta, \quad (1)$$

или

$$\Delta = 2d\cos\frac{\theta_0+\theta}{2}\sin\frac{\theta_0-\theta}{2}. \quad (2)$$

Поскольку для дифракционных максимумов $\Delta = k\lambda$ $(k = 1, 2, \ldots)$, то

$$k\lambda = 2d\cos\frac{\theta_0+\theta}{2}\sin\frac{\theta_0-\theta}{2}. \quad (3)$$

Наибольшая энергия локализована в первом дифракционном максимуме ($k = 1$). Для этого максимума, полагая, что θ близко к θ_0, из выражения (3) получим

$$\lambda = (\theta_0 - \theta)\, d\cos\theta_0 \quad (4)$$

Пусть $\theta_0 = 65°$ (в рассматриваемом случае дифракция в отраженном свете наблюдается при наклонном падении лучей), а $\theta_0 - \theta = 3°$ (примерно 0,05 *рад*). Тогда, например, для $d = 2\cdot10^{-3}$ *см* длина волны ди-

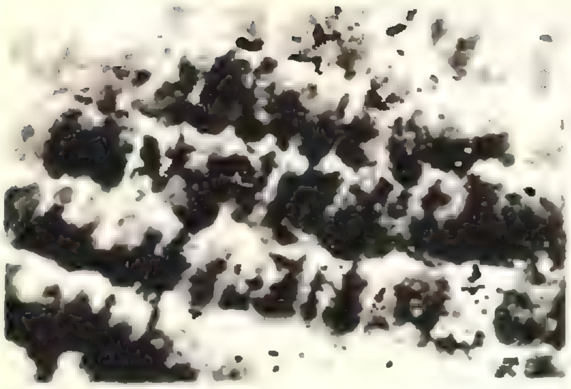


Рис. 1.

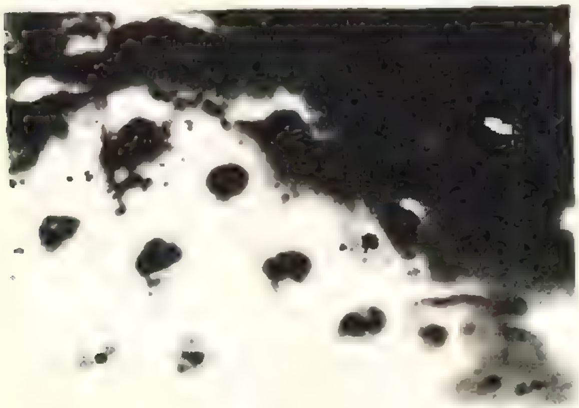


Рис. 2

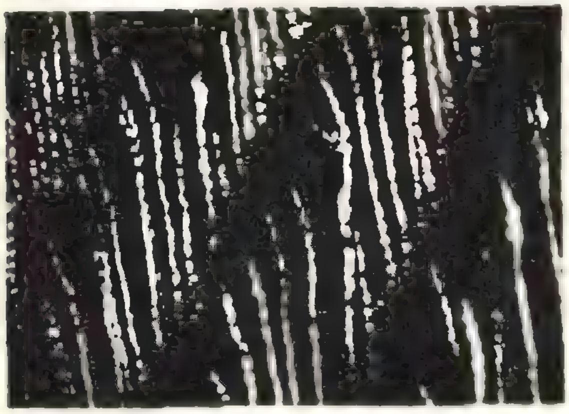


Рис. 3. Структура центральных глазков хвостового оперения павлина. Цвет глазков меняется в зависимости от того, как падает на них свет, под каким углом мы на них смотрим. (На фотографии, помещенной на первой странице обложки, эти глазки синие.)

фрагированного света из уравнения (4) равна $\lambda \approx 0{,}4 \cdot 10^{-4}$ *см.*

Полученная величина λ соответствует синей области спектра. Чаще всего дифракционная окраска в природе наблюдается в зеленом, синем

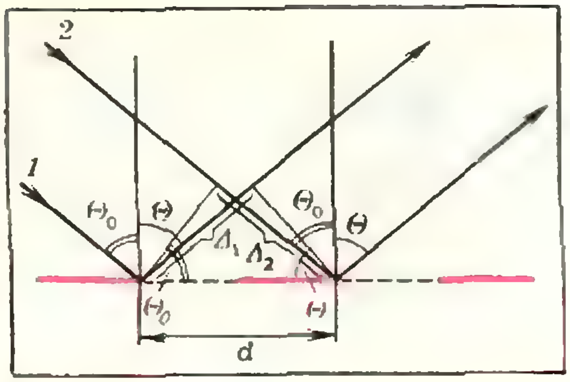


Рис. 4.

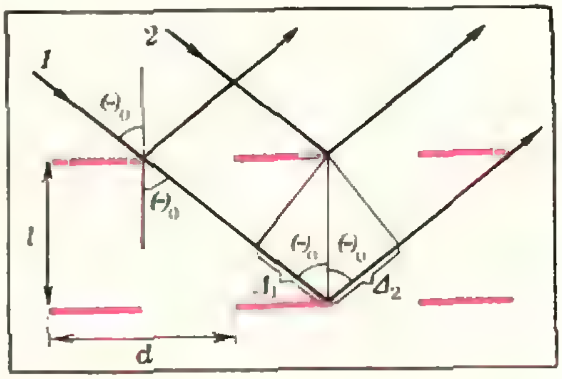


Рис. 5.

или голубом свете. Из формулы (4) видно, что длина волны λ зависит от угла падения света θ_0. Действительно, если освещать поверхность под разными углами, окраска может изменяться.

В случае многослойной дифракционной решетки условие образования дифракционных максимумов описывается уравнением

$$k\lambda = 2l \cos \theta_0, \tag{5}$$

где l — расстояние между соседними слоями решетки. Это уравнение получается путем определения разности хода $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2$ между лучами *1* и *2* (рис. 5) и замены Δ для дифракционных максимумов через $k\lambda$.

Полагая $k = 1$, из выражения (5) получим

$$\cos \theta_0 = \frac{\lambda}{2l}. \tag{6}$$

Отсюда следует, что дифракция на многослойной структуре возможна при $2l > \lambda$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
КРУЖОК

Прямая Эйлера

Э. Г. Готман

Свойства треугольника были хорошо изучены еще древними греками.

В знаменитых «Началах» Евклида доказывается, что центром окружности, описанной около треугольника, является точка пересечения серединных перпендикуляров к его сторонам.

Архимед, определяя положение центра тяжести однородной треугольной пластинки, установил, что он лежит на каждой из трех медиан. Точку пересечения медиан треугольника называют *центром тяжести* или *центроидом* треугольника.

Позднее было доказано, что три высоты треугольника также пересекаются в одной точке, которая называется его *ортоцентром*.

Закономерность в расположении этих трех замечательных точек треугольника — центра O описанной окружности, центроида G и ортоцентра H — впервые обнаружил знаменитый математик Леонард Эйлер (1707—1783). Рассмотрим сначала один частный случай: прямоугольный треугольник ABC (рис. 1). Середина O гипотенузы AB является центром описанной около него окружности. Центроид G делит медиану CO в отношении $2:1$, считая от вершины C. Катеты AC и BC являются высотами треугольника, поэтому вершина C прямого угла совпадает с ортоцентром H треугольника. Таким образом, точки O, G, H лежат на одной прямой, причем $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$. Пользуясь методом координат, Эйлер доказал, что такая же связь существует между тремя указанными точками любого треугольника. Мы докажем этот факт с помощью векторов, причем от читателя требуется знакомство лишь с простейшими операциями: сложением векторов и умножением вектора на число.

Деление отрезка в данном отношении

Пусть A, B и O — данные точки плоскости, и известно, что точка G делит отрезок AB в отношении k: $\frac{\overrightarrow{AG}}{\overrightarrow{GB}} = k$ (рис. 2). Выразим вектор $\overrightarrow{OG}$ через векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$. Для этого подставим в равенство $\overrightarrow{AG} = k\times\overrightarrow{GB}$ выражения всех векторов через $\overrightarrow{OG}$, $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$: $\overrightarrow{OG}-\overrightarrow{OA} = k(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OG})$. Решая это уравнение относительно $\overrightarrow{OG}$, получим

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OB}}{1+k}. \qquad (1)$$

Например, если G — середина отрезка $\overrightarrow{AB}$, то $k = 1$ и $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$

Теорема о пересечении медиан треугольника в одной точке

Здесь мы попутно получим одно векторное равенство, которое понадобится нам в дальнейшем.

Теорема 1. *Медианы треугольника ABC пересекаются в одной точке G и делятся ею в отношении $2:1$, считая от вершины, причем*

$$3\overrightarrow{PG} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}, \qquad (2)$$

где P — любая точка плоскости или пространства.

Доказательство. Возьмем на медиане CD треугольника ABC точку G, определяемую соотношением $|CG| : |GD| = 2 : 1$ (рис. 3). Согласно формуле (1),

$$\overrightarrow{PG} = \frac{\overrightarrow{PC} + 2\overrightarrow{PD}}{3},$$

$$\overrightarrow{PD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}),$$

откуда

$$\overrightarrow{PG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}).$$

Вычисляя вектор $\overrightarrow{PG}$ с концом в точке G', делящей любую из двух других медиан треугольника в отношении $2:1$ (считая от вершины), мы получим справа то же самое выражение:

$$\overrightarrow{PG'} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}),$$

поэтому $\overrightarrow{PG'} = \overrightarrow{PG}$, и точка G' совпадает с точкой G. Следовательно, все три медианы треугольника пересекаются в одной точке G, определяемой соотношением (2).

Теорема о высотах произвольного треугольника

Теорема 2. *Высоты треугольника ABC пересекаются в одной точке H, причем*

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}, \qquad (3)$$

где O — центр окружности, описанной около треугольника.

Доказательство. Пусть ABC — треугольник, отличный от прямоугольного (рис. 4). Найдем сумму векторов $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$. Для этого

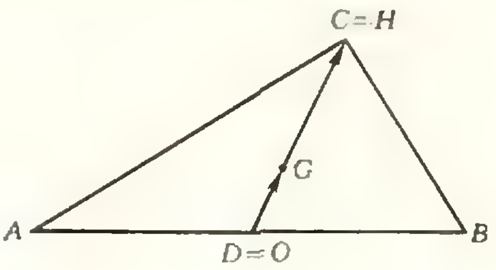


Рис. 1.

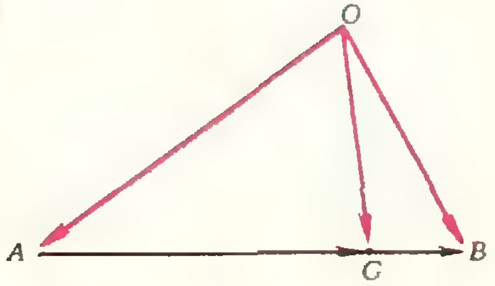


Рис. 2.

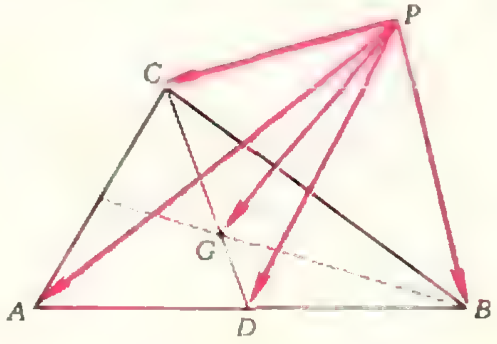


Рис. 3.

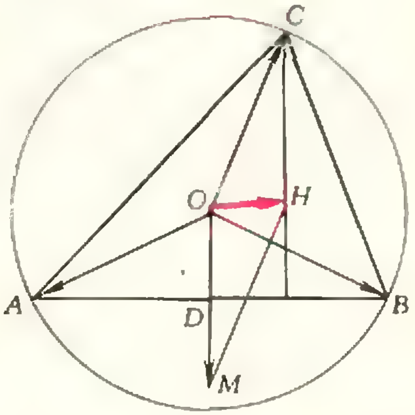


Рис. 4.

построим точку M, симметричную O относительно стороны AB, тогда $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$. Затем построим точку H, для которой

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC},$$

и докажем, что точка H и есть ортоцентр треугольника ABC.

Действительно, по построению прямые CH и OM параллельны, OM — серединный перпендикуляр к отрезку AB, следовательно, прямая CH также перпендикулярна к прямой AB, и точка H лежит на высоте треугольника ABC, проведенной из вершины C.

Если повторить построение, начиная с векторов $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OC}$, то получится та же точка H, но те же рассуждения показывают, что теперь точка H лежит на высоте треугольника, проведенной из вершины B. Аналогично получим, что точка H лежит на высоте, проведенной из вершины A. Следовательно, высоты треугольника ABC пересекаются в точке H, определяемой соотношением (3).

Легко проверить, что теорема 2 справедлива и для прямоугольного треугольника.

Прямая Эйлера

Из доказанных теорем 1 и 2 вытекает интересующее нас свойство замечательных точек треугольника.

Теорема 3. *Центр O описанной окружности, центроид G и ортоцентр H любого треугольника лежат на одной прямой, причем точка G лежит между точками O и H и* $|\overrightarrow{OG}| : |\overrightarrow{GH}| = 1 : 2$.

Доказательство. По теореме 1

$$3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}.$$

Сравнивая это равенство с равенством (3), получим

$$\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}.$$

Следовательно, векторы $\overrightarrow{OH}$ и $\overrightarrow{OG}$, имеющие общее начало O, расположены на одной прямой и $|\overrightarrow{OG}| : |\overrightarrow{GH}| = 1 : 2$.

Прямая, на которой лежат точки O, G и H, называется *прямой Эйлера*.

* * *

В стереометрии простейший многогранник — тетраэдр (треугольная пирамида) играет ту же роль, что и треугольник в планиметрии. Свойства треугольника и тетраэдра во многом схожи. Попробуем распространить свойство замечательных точек треугольника на тетраэдр.

Сфера, описанная около тетраэдра

Известно, что около всякого тетраэдра можно описать сферу, ее центр O лежит на перпендикулярах к граням тетраэдра, восставленных в центрах окружностей, описанных около граней.

Медианы тетраэдра

Отрезок, соединяющий вершину тетраэдра с центроидом противоположной грани, называется *медианой* тетраэдра. Свойства медиан тетраэдра аналогичны свойствам медиан треугольника.

Теорема 4. *Четыре медианы тетраэдра $ABCD$ пересекаются в одной точке G, которая делит каждую из них в отношении* 3 : 1, *считая от вершины тетраэдра, причем*

$$4\overrightarrow{PG} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD}, \qquad (4)$$

где P — любая точка пространства.

Доказательство. Возьмем на медиане DG_1 тетраэдра $ABCD$ точку G, определяемую соотношением $|DG| : |GG_1| = 3 : 1$ (рис. 5). Согласно формуле (1),

$$\overrightarrow{PG} = \frac{\overrightarrow{PD} + 3\overrightarrow{PG_1}}{4}.$$

Учитывая, что центроид G_1 треугольника $\overrightarrow{ABC}$ удовлетворяет соотношению $3\overrightarrow{PG_1} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}$, получим

$$\vec{PG} = \frac{1}{4}(\vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PC} + \vec{PD}).$$

Вычисляя вектор $\vec{PG'}$ с концом в точке G', делящей любую из трех других медиан тетраэдра в отношении $3:1$ (считая от вершины), получим то же самое выражение. А это означает, что все четыре медианы тетраэдра пересекаются в одной точке G, удовлетворяющей соотношению (4). Точка G называется *центром тяжести* (или *центроидом*) тетраэдра.

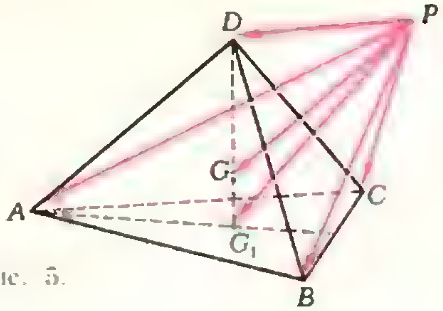


Рис. 5.

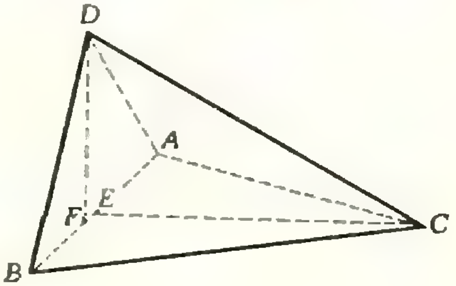


Рис. 6.

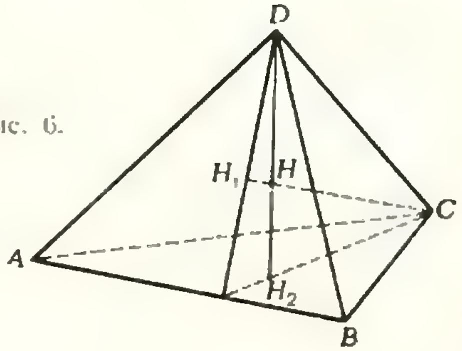


Рис. 7.

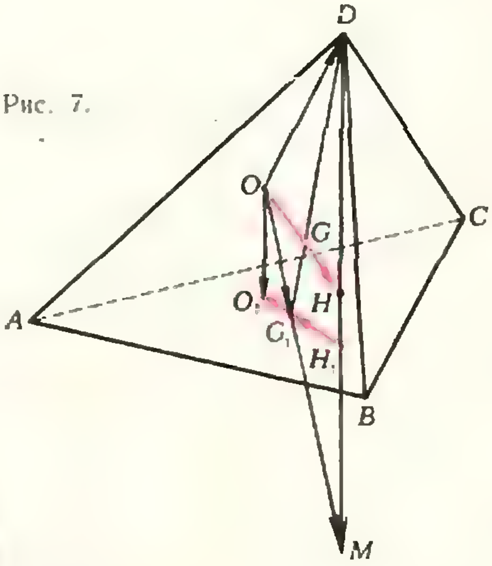


Рис. 8.

Высоты тетраэдра

Высоты треугольника всегда пересекаются в одной точке. По аналогии можно предположить, что высоты любого тетраэдра также пересекаются в одной точке. Однако это не так.

Для примера рассмотрим тетраэдр $ABCD$ с прямым двугранным углом при ребре AB, в котором $|AC| = |BC|$, но $|AD| \neq |BD|$ (рис. 6). Высоты CE и DF тетраэдра лежат соответственно в гранях ABC и ABD, но точка E — середина AB, а F — нет. Если бы длины ребер DA и DB были равны, то основания E и F высот совпадали бы, но две другие высоты тетраэдра не могут проходить через точку E.

Таким образом, даже две высоты тетраэдра могут не иметь общей точки.

Тем не менее существуют и тетраэдры, все четыре высоты которых *пересекаются в одной точке*. Таким будет, например, тетраэдр $ABCD$ с прямыми плоскими углами при вершине D. Ребра DA, DB и DC являются *его высотами*, а *вершина* D — *ортоцентром* (точкой пересечения всех четырех высот).

Попробуем найти все тетраэдры, у которых высоты пересекаются в одной точке.

Пусть высоты тетраэдра $ABCD$, проведенные из вершин C и D, пересекаются в точке H (рис. 7). Тогда $CH_1 \perp AB$ и $DH_2 \perp AB$, то есть прямая AB перпендикулярна к двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости CDH, следовательно, $AB \perp CD$. Аналогично доказывается, что если две другие высоты тетраэдра $ABCD$ проходят через ту же точку H, то $AC \perp BD$ и $AD \perp BC$. Итак, если все высоты тетраэдра пересекаются в одной точке, то противоположные ребра тетраэдра взаимно перпендикулярны. Такой тетраэдр называется *ортоцентрическим*.

Теорема 5. *Четыре высоты ортоцентрического тетраэдра $ABCD$ пересекаются в одной точке H, причем, если O — центр сферы, описанной около тетраэдра, то*

$$\overrightarrow{OH} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}). \quad (5)$$

Доказательство. Пусть $ABCD$ — ортоцентрический тетраэдр, DG_1 — его медиана, DH_1 — его высота (рис. 8). Тогда G_1 — центроид, а H_1 — ортоцентр треугольника ABC (докажите это самостоятельно — именно здесь используется перпендикулярность противоположных ребер тетраэдра), причем точки O_1 (центр окружности, описанной около треугольника ABC), G_1 и H_1 лежат на одной прямой. Заметим, что центр O сферы, описанной около тетраэдра $ABCD$, лежит на перпендикуляре к плоскости треугольника ABC, восставленном в точке O_1.

Будем доказывать теорему тем же способом, что и теорему 2 для треугольника: строить разными способами точку H, удовлетворяющую соотношению (5).

Вначале сложим векторы $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}.$$

По теореме 1 $\overrightarrow{OG_1} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$, поэтому $\overrightarrow{OM} = 3\overrightarrow{OG_1}$ или $\overrightarrow{G_1M} = 2\overrightarrow{OG_1}$. Точки O_1, G_1, H_1 лежат на прямой Эйлера треугольника ABC, причем $\overrightarrow{H_1G_1} = 2\overrightarrow{G_1O_1}$. Следовательно,

$$\overrightarrow{H_1M} = \overrightarrow{H_1G_1} + \overrightarrow{G_1M} = 2(\overrightarrow{G_1O_1} + \overrightarrow{OG_1}) = 2(\overrightarrow{OG_1} + \overrightarrow{G_1O_1}) = 2\overrightarrow{OO_1}.$$

Отсюда вытекает, что прямые H_1M и OO_1 параллельны, а так как прямая OO_1 перпендикулярна к плоскости ABC, то и прямая H_1M перпендикулярна к этой плоскости. Следовательно, точка M лежит на прямой DH_1 (если точки O и O_1 совпадают, то точки M и H_1 тоже совпадают).

Пусть теперь $\overrightarrow{OH} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OD}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$. Из левого равенства следует, что точка H является серединой отрезка DM, то есть точка H лежит на высоте DH_1 тетраэдра.

Аналогично строится точка N: $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$ и та же точка H: $\overrightarrow{OH} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OC})$ и доказывается, что точка H лежит на высоте тетраэдра, проведенной из вершины C, и т. д.

Следовательно, высоты ортоцентрического тетраэдра пересекаются в одной точке H, определяемой соотношением (5).

Прямая Эйлера тетраэдра

Теорема 6. *Центр O описанной сферы, центроид G и ортоцентр H ортоцентрического тетраэдра $ABCD$ лежат на одной прямой, причем точки O и H симметричны относительно точки G.*

Доказательство. По формулам (4) и (5)

$$\overrightarrow{OH} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}),$$

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}),$$

откуда $\overrightarrow{OH} = 2\overrightarrow{OG}$. Полученное равенство означает, что точки O, G, H лежат на одной прямой, причем точки O и H симметричны относительно точки G.

Прямую, на которой лежат точки O, G, H, можно назвать *прямой Эйлера ортоцентрического тетраэдра.*

Упражнения

Решите с помощью скалярного произведения векторов задачи 1—4.

1. а) Докажите, что если O — центр окружности, описанной около треугольника ABC, и $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$, то H — точка пересечения высот треугольника.

б) Докажите, что если O — центр сферы, описанной около ортоцентрического тетраэдра $ABCD$, и $\overrightarrow{OH}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})$, то H — точка пересечения четырех высот тетраэдра.

2. Докажите, что если A, B, C, и D — четыре произвольные точки пространства, то

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BD}=0.$$

Пользуясь этим равенством, докажите, что

а) три высоты треугольника пересекаются в одной точке;

б) если противоположные ребра AB и CD, AD и BC тетраэдра $ABCD$ перпендикулярны, то ребра CA и BD также перпендикулярны.

3. Докажите, что если A, B, C, D — четыре произвольные точки пространства, то

$$|AB|^2+|CD|^2-|AD|^2-|BC|^2=2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}.$$

Пользуясь этим равенством, докажите, что

а) сумма квадратов диагоналей трапеции равна сумме квадратов ее боковых сторон, сложенной с удвоенным произведением оснований;

б) диагонали четырехугольника перпендикулярны тогда и только тогда, когда суммы квадратов противоположных сторон равны;

в) для того чтобы тетраэдр был ортоцентрическим, необходимо и достаточно, чтобы суммы квадратов его противоположных ребер были равны.

4. Докажите, что все плоские углы при одной вершине ортоцентрического тетраэдра либо одновременно острые, либо прямые, либо тупые и хотя бы одна его грань является остроугольным треугольником.

5. а) Докажите, что точки, симметричные ортоцентру H треугольника ABC относительно середин его сторон, а также точки, симметричные ортоцентру H относительно прямых BC, CA и AB, лежат на окружности, описанной около этого треугольника.

б) Пусть H — ортоцентр тетраэдра $ABCD$, G_1 и H_1 — соответственно центроид и ортоцентр грани ABC, а G_2 и H_2 — такие точки, что $\overrightarrow{HG_2}=3\overrightarrow{HG_1}$ и $\overrightarrow{HH_2}=3\overrightarrow{HH_1}$. Докажите, что точки G_2 и H_2 лежат на сфере, описанной около этого тетраэдра.

6. а) Докажите, что середины трех сторон, основания трех высот треугольника и середины отрезков, соединяющих ортоцентр с тремя вершинами, лежат на одной окружности, а центр этой окружности (называемой *окружностью десяти точек*) лежит на прямой Эйлера.

б) Докажите, что центроиды четырех граней, основания четырех высот ортоцентрического тетраэрда и точки, которые делят каждый из отрезков, соединяющих ортоцентр с вершинами, в отношении 1:2 (считая от ортоцентра), лежат на одной сфере, а центр этой сферы (называемой *сферой двенадцати точек*) расположен на прямой Эйлера.

7. Докажите, что

а) если основание одной из высот тетраэдра есть ортоцентр соответствующей грани, то тетраэдр является ортоцентрическим;

б) основание любой из высот ортоцентрического тетраэдра есть ортоцентр соответствующей грани (эти свойства использованы при доказательстве теоремы 5).

Где ошибка

— Прямая теорема равносильна теореме, противоположной обратной, — сказал ученик Крестиков. — Если $\overline{A}\Rightarrow\overline{B}$ — прямая теорема, то вместе с ней верна или неверна теорема $\overline{B}\Rightarrow\overline{A}$.

— А что такое $\overline{B}$ и $\overline{A}$? — спросил ученик Нуликов.

— Так обозначаются отрицания утверждений B и A.

— А откуда ты знаешь, что они равносильны?

— Могу доказать.

— Давай.

— Пожалуйста. Пусть теорема $A\Rightarrow B$ верна, а теорема $\overline{B}\Rightarrow\overline{A}$ неверна. Тогда верна теорема $\overline{B}\Rightarrow A$. Из этой верной теоремы и верной прямой теоремы следует, что $\overline{B}\Rightarrow B$. Ты же понимаешь, что так не бывает! Значит, на самом деле, теорема $\overline{B}\Rightarrow\overline{A}$ верна.

— Понятно, — сказал Нуликов.

Они встретились на другой день.

— Я доказал, что из прямой теоремы следует обратная, — сказал Нуликов.

— Этого не может быть! Бывает, что прямая теорема верна, а обратная нет.

— А я тебе докажу!

— Ха! Попробуй!

— Пусть теорема $A\Rightarrow B$ верна. Нам надо доказать, что теорема $B\Rightarrow A$ тоже верна. Предположим, что она неверна. Тогда верна теорема $B\Rightarrow\overline{A}$, ты сам говорил это в прошлый раз. Но ей равносильна теорема $A\Rightarrow\overline{B}$, а значит, она тоже верна. Получилось, что верны две такие теоремы: $A\Rightarrow B$ и $A\Rightarrow\overline{B}$, а это чепуха. Значит на самом деле теорема $B\Rightarrow A$ верна.

—Ничего не понимаю,— пробормотал Крестиков.

— Я рассуждал так же как ты, — сказал Нуликов.

А теперь ответьте

1. Верно ли доказательство Крестикова?
2. Верно ли доказательство Нуликова?
3. Верно ли последнее заявление Нуликова?

В. И. Рыжик

задачник Кванта

Решения задач из этого номера можно посылать не позднее 1 апреля 1975 г. по адресу: 117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15, издательство «Наука», журнал «Квант». После адреса на конверте напишите, решения каких задач вы посылаете, например: «Задачник «Кванта», М306, М307» или «...Ф318». Решения задач по каждому из предметов (математике и физике), а также новые задачи просьба присылать в отдельных конвертах. Задачи из разных номеров журнала присылайте также в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки ваших решений). Условия оригинальных задач, предлагаемых для публикации, присылайте в двух экземплярах вместе с вашими решениями этих задач (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»). После формулировки задачи мы обычно указываем, кто предложил нам эту задачу. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Наиболее трудные задачи отмечены звездочкой.

Задачи

М306 — М310; Ф318 — Ф322

М306. Из шахматной доски (8×8) удалена одна угловая клетка (1×1) (рис. 1). На какое наименьшее число равновеликих треугольников (одинаковых по площади) можно разрезать оставшуюся часть доски?

В. П. Федотов

М307. Плоскость разбита на одинаковые шестиугольные комнаты (рис. 2). В некоторых стенах проделаны двери так, что для любой вершины, в которой сходятся три стены (стороны шестиугольников), двери имеются ровно в двух стенах. Докажите, что любой замкнутый путь по такому лабиринту проходит через четное число дверей.

В. П. Голубятников

М308. Если при любом x

$$a_1\cos x+a_2\cos 2x+\ldots+a_n\cos nx\geqslant -1,$$

то для чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ выполнено неравенство

$$a_1+a_2+\ldots+a_n\leqslant n.$$

Докажите это утверждение а) для $n=2$; б) для $n=3$; в) для любого натурального n.

Ю. И. Ионин

М309. а) При каких n многочлен $x^{2n}+x+1$ делится на x^2+x+1?

б) При каких n число

$$1\underbrace{0\ldots0}_{n}1\underbrace{0\ldots0}_{n}1$$

делится на 37?

В. Г. Шлейфер

М310*. Докажите, что среди n-значных чисел найдется более 8^n таких, в десятичной записи которых никакая группа цифр (в частности никакая цифра) не встречается два раза подряд.

Г. А. Гуревич

Ф318. При каком C_1 емкость системы конденсаторов, показанной на рисунке 3, равна: *а)* C; *б)* kC ($k\neq 1$); *в)* C_1?

Б. Б. Буховцев

Ф319. На расстоянии $2F$ от собирающей линзы $Л_1$ с фокусным рас-

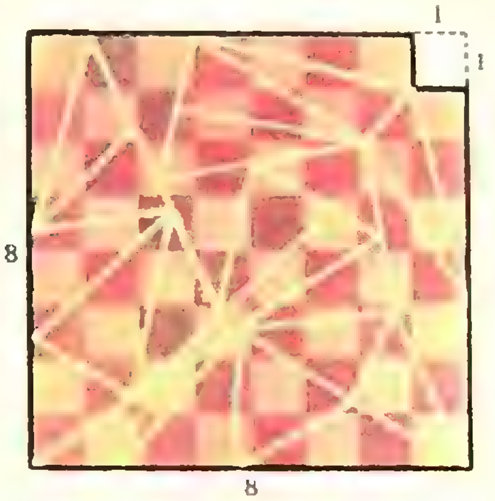


Рис. 1.

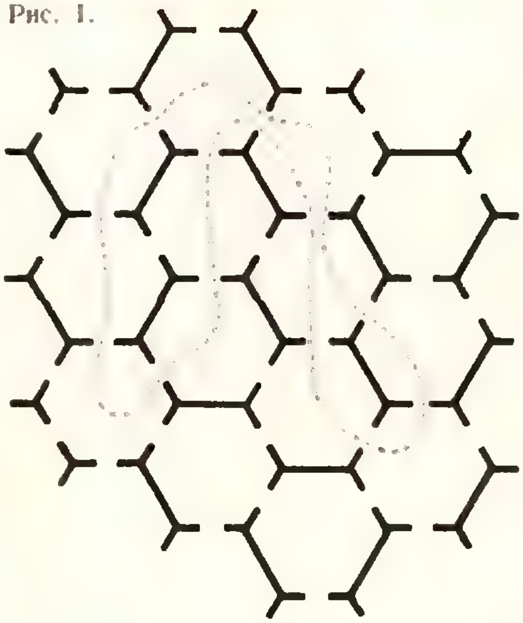


Рис. 2.

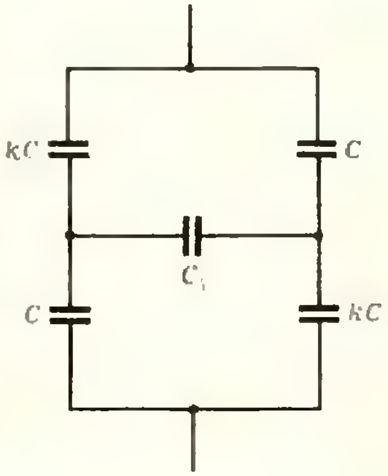


Рис. 3.

стоянием F находится светящийся предмет. Освещенность четкого изображения предмета на экране при этом равна E_0. Между экраном и линзой $Л_1$ поместили рассеивающую линзу $Л_2$ с фокусным расстоянием $-2F$. Для получения четкого изображения предмета пришлось экран передвинуть на расстояние, равное F. Определить освещенность изображения предмета во втором случае.

В. Е. Белонучкин

Ф320. В откачанном сосуде емкостью $V = 1$ *л* находится 1 *г* гидрида урана UH_3. При нагреве до температуры $t = 400^\circ$ С гидрид полностью разлагается на уран (атомный вес $A = 238$) и водород. Найти давление водорода в сосуде при этой температуре.

Ф321. На горизонтальную мембрану насыпан мелкий песок. Мембрана совершает колебания с частотой $\nu = 500$ *гц* в вертикальной плоскости. Какова амплитуда колебаний мембраны, если песчинки подскакивают на высоту $h = 3$ *мм* по отношению к положению равновесия мембраны?

Ф322. Две звезды вращаются вокруг общего центра масс с постоянными по абсолютной величине скоростями v_1 и v_2 с периодом T. Найти массы звезд и расстояние между ними.

Б. А. Луговцов

Решения задач

М268—М272; Ф278—Ф284

М268. *В углу шахматной доски стоит фигура. Первый игрок может ходить ею два раза подряд как обычным конем (на два поля в одном направлении, на одно — в перпендикулярном), а второй — один раз как конем с удлиненным ходом (на три поля в одном направлении и на одно — в перпендикулярном). Так они ходят по очереди. Первый стремится к тому, чтобы поставить фигуру в противоположный угол, а второй — ему помешать. Кто из них выигрывает (размеры доски — $n \times n$, где $n \geqslant 4$)?*

Пусть вначале конь находится в левом нижнем углу доски. Понятно, что первый игрок первым же ходом может вынести коня из угла доски и поставить его на диагональ (см. рисунок 1 — синий крестик — это результат хода первого игрока). Докажем, что первый игрок может каждым своим ходом возвращаться на диагональ, причем все выше и выше.

Пусть первый игрок поставил коня на какую-то клетку диагонали доски (рис. 2). Клетки, в которые второй игрок может сместить коня с диагонали, помечены на рисунке 2 черными и красными крестиками. Из клеток, помеченных красными крестиками, первый игрок может вернуть коня на диагональ доски, сдвинув его при этом вверх ровно на одну клетку (в направлении нужного угла). Из клеток же, помеченных черными крестиками, первый игрок также может вернуться на диагональ, но уже не в следующую клетку, а через одну. Однако ясно, что ставить коня в клетки, помеченные черными крестиками, в конце игры второй игрок не сможет: доска ограничена, и когда до верхнего угла останется одно или два поля, верхняя и правая границы доски «отрежут» от получающейся конфигурации черные крестики — клетки (см. рис. 3); второй игрок будет вынужден начать ставить коня в клетки, помеченные красными крестиками. Понятно, что в таком случае первый игрок достигнет цели.

И. Н. Клумова

◆

М269. *Обозначим через $T_k(n)$ сумму произведений по k чисел от 1 до n. Например, $T_2(4) = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 4 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 4 = 35$.*

а) Найдите общую формулу для $T_2(n)$ и $T_3(n)$.

б) Докажите, что $T_k(n)$ выражается многочленом от n степени $2k$ (для каждого натурального $k \geqslant 2$).

в) Укажите метод нахождения многочленов $T_k(n)$ ($k = 2, 3, 4, \ldots$) и примените его для отыскания многочленов $T_4(n)$ и $T_5(n)$.

Мы докажем, что $T_2(n)$, $T_3(n)$, $T_4(n)$ и $T_5(n)$ соответственно равны

$$\frac{(n+1)\,n\,(n-1)(3n+2)}{24}, \quad \frac{(n+1)^2 n^2 (n-1)(n-2)}{48},$$

$$\frac{(n+1)\,n\,(n-1)(n-2)(n-3)(15n^3+15n^2-10n-8)}{5760}$$

и

$$\frac{(n+1)^2 n^2 (n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(3n^2-n-6)}{11520}$$

(попробуйте непосредственно доказать, что эти числа — целые при любом целом n), а также, что при любом k числа $T_k(n)$ являются значениями многочлена T_k степени $2k$ $\left(\text{со старшим коэффициентом } \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2k-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots (2k)}\right)$, для которого числа $-1, 0, 1, \ldots, (k-1)$ служат корнями.

Заметим кстати, что $T_1(n)$ — сумма произведений чисел от 1 до n «по одному» — равна

$$\Sigma i = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

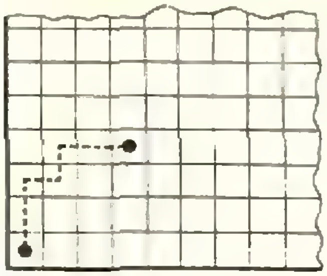


Рис. 1.

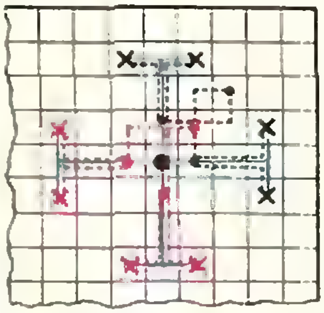


Рис. 2.

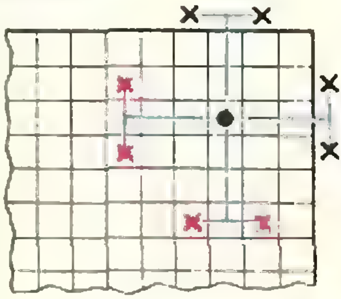


Рис. 3.

Первый способ. Можно найти формулы для $T_k(n)$, воспользовавшись известными формулами для сумм степеней натуральных чисел:

$$\Sigma i^2 = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

$$\Sigma i^3 = 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \text{ и т. д.}$$

(см., например, статьи В. С. Абрамовича в «Кванте» № 5, 1973 и № 6, 1974). Например, из равенства

$$(\Sigma i)^2 = \Sigma i^2 + 2 \sum_{i<j} ij$$

следует, что $T_2(n)$ равно

$$\sum_{i<j} ij = \frac{n(n+1)}{2}\left(\frac{n^2+n}{4} - \frac{2n+1}{6}\right) =$$

$$= \frac{n(n+1)(n-1)(3n+2)}{24}$$

(проверьте, что $T_2(2) = 2$, $T_2(3) = 11$, $T_2(4) = 35$, $T_2(5) = 85$).

Из равенства

$$(\Sigma i)^3 = \Sigma i^3 + 3 \sum_{i \neq j} ij^2 + 6 \sum_{i<j<k} ijk,$$

$$(\Sigma i)(\Sigma j^2) = \Sigma i^3 + \sum_{i \neq j} ij^2$$

следует

$$T_3(n) = \sum_{i<j<k} ijk =$$

$$= \frac{1}{6}\left((\Sigma i)^3 - 3(\Sigma i)(\Sigma j^2) + 2\Sigma i^3\right) = \frac{n^2(n+1)^2}{6} \times$$

$$\times \left(\frac{n(n+1)}{8} - \frac{2n+1}{4} + \frac{1}{2}\right) = \frac{n^2(n+1)^2(n-1)(n-2)}{48}.$$

Ниже мы покажем, как можно найти $T_k(n)$, не пользуясь формулами для сумм степеней.

Рекуррентная формула. Если все слагаемые суммы $T_k(n)$ разбить на две группы: в одну включить те произведения, в которые входит n, в другую — остальные, то получится такая основная формула:

$$T_k(n) - T_k(n-1) = nT_{k-1}(n-1) \qquad (1)$$

Она вместе с очевидным равенством

$$T_k(k) = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k = k! \qquad (2)$$

позволяет последовательно определить все числа $T_k(n)$ при $n \geq k$, если $T_{k-1}(n)$ уже известны. (Заметим, что если T_k и T_{k-1} — многочлены, то формула *(1) должна выполняться при всех* n, а не только при целых n, больших k; пользуясь этим, легко убедиться, что $T_k(n)$ должно равняться 0 при целых n от (-1) до $(k-1)$, и найти значения $T_k(n)$ при целых n, указанные в таблице 1.) Из формулы (1) можно было бы вывести, что $T_k(n)$ — многочлен степени $2k$, если справа стоит многочлен $nT_{k-1}(n-1)$ степени $2k-1$ от n (см. статьи В. С. Абрамовича, упомянутые выше, или статью В. Н. Вагутена в «Кванте» № 2, 1972); однако мы не будем доказывать это отдельно, а сразу получим формулы для многочленов $T_k(n)$.

Таблица 1

$m \backslash k$	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	6	3	1	0	0	$\boxed{1}$	3	6	10	15	21	28	36	45
2	25	7	1	0	0	0	$\boxed{2}$	11	35	85	175	322	546	870
3	90	15	1	0	0	0	0	$\boxed{6}$	50	225	735	1960	4536	9450
4	361	31	1	0	0	0	0	0	$\boxed{24}$	274	1624	6769	22449	63273
5	966	63	1	0	0	0	0	0	0	$\boxed{120}$	1764	13132	67284	269325

В этой таблице приведены числа $T_k(n)$ (в красную рамку заключены числа $T_k(k) = k!$

Второй способ. Положим

$$C_x^m = \frac{x(x-1)\ldots(x-m+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot m} \tag{3а}$$

Мы будем рассматривать C_x^m как многочлен степени m от x. Легко проверить, что при всех x

$$C_{x+1}^m = C_x^m + C_x^{m-1}, \quad (x-m)C_x^m = (m+1)C_x^{m+1} \tag{3б}$$

Заметим, что

$$T_1(n) = \frac{(n+1)n}{2} = C_{n+1}^2 . \tag{4а}$$

Предположим, что при некоторых b_0^{k-1}, b_1^{k-1} . . .

$$T_{k-1}(n) = \Sigma b_m^{k-1} \quad C_{n+1}^m \tag{4б}$$

и выберем b_m^k так, чтобы для многочленов (4б) и

$$T_k(n) = \Sigma b_m^k C_{n+1}^m \tag{5}$$

выполнялось равенство (1); поскольку, согласно (3б),

$$\begin{gathered} T_k(n) - T_k(n-1) = \Sigma b_m^k (C_{n+1}^m - C_n^m) = \\ = \Sigma b_m^k C_n^{m-1} = \Sigma b_{m+1}^k C_n^m, \; nT_{k-1}(n-1) = n\Sigma b_m^{k-1} C_n^m = \\ = \Sigma b_m^{k-1}(n-m)C_m^n + \Sigma b_m^{k-1} mC_n^m = \\ = \Sigma b_m^{k-1}(m+1)C_n^{m+1} + \Sigma b_m^{k-1} mC_n^m = \\ = \Sigma m(b_m^{k-1} + b_{m-1}^{k-1})C_n^m \end{gathered}$$

(всюду суммы берутся по всем m), то (1) будет выполняться, если положить

$$b_{m+1}^k = m(b_m^{k-1} + b_{m-1}^{k-1}). \tag{6}$$

При этом согласно (4а)

$$b_2^1 = 1; \; b_m^1 = 0, \; m \neq 2. \tag{7}$$

Составьте таблицу чисел b_m^k и докажите, что

$$b_m^k = 0, \; m \leqslant k \text{ и } m \geqslant 2k+1; \; b_{2k}^k = 1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2k-1);$$
$$b_{k+1}^k = k!. \tag{8}$$

Поэтому равенство (2) для многочлена (5) также выполнено. Отсюда следует, что $T_k(n)$ действительно задается формулой (5), в которой коэффициенты b_m^k находятся из равенств (6), (7).

Совершенно так же можно убедиться в том, что

$$T_k(n) = \Sigma d_m^n \; C_{n+m-k}^m , \tag{9}$$

где коэффициенты d_m^k определяются условиями

$$d_2^1 = 1; \; d_m^1 = 0, \; m \neq 2;$$
$$d_{m+1}^k = -(m-k+1)d_m^{k-1} + md_{m-1}^{k-1}. \tag{10}$$

Числа b_m^k

$m \backslash k$	1	2	3	4	5
1	0	0	0	0	0
2	1	0	0	0	0
3	0	2	0	0	0
4	0	3	6	0	0
5	0	0	20	24	0
6	0	0	15	130	120
7	0	0	0	210	924
8	0	0	0	105	2380
9	0	0	0	0	2520
10	0	0	0	0	945
11	0	0	0	0	0

числа d_m^k

$m \backslash k$	1	2	3	4	5
1	0	0	0	0	0
2	1	0	0	0	0
3	0	−1	0	0	0
4	0	3	1	0	0
5	0	0	−10	−1	0
6	0	0	15	25	1
7	0	0	0	−105	−56
8	0	0	0	105	490
9	0	0	0	0	−1260
10	0	0	0	0	945
11	0	0	0	0	0

Хотя формулы (10) для коэффициентов d_m^k менее удобны, чем (6) — для b_m^k, но сами числа несколько меньше, поэтому именно из формулы (9) удобно получить $T_4(n)$ и $T_5(n)$ в том виде, в котором они указаны в начале решения. Например, найдя числа d и используя соотношения (3), получим

$$T_4(n) =$$

$$= \left(\left(\left(105\,\frac{n+4}{8} - 105\right)\frac{n+3}{7} + 25\right)\frac{n+2}{6} - 1\right)C_{n+1}^5 =$$

$$= C_{n+1}^5\,(15n^3 + 15n^2 - 10n - 8)/48.$$

Совершенно аналогично преобразуется формула для $T_5(n)$.

Числа $T_k(n)$ довольно часто встречаются в различных задачах по комбинаторике и алгебре; отличающиеся от них знаком числа $(-1)^{n+k-1}\,T_k(n)$ носят специальное название: *числа Стирлинга*.

Применения этих чисел и связывающие их тождества описаны, например, в книге Дж. Риордана «Введение в комбинаторный анализ» (М., ИЛ, 1963 г.).

◆

М270. *Пусть AB и CD — две хорды окружности, а точки K и H построены так, что все четыре угла KAB, KCD, HBA и HDC — прямые. Докажите, что прямая KH проходит через центр окружности и через точку пересечения AD и BC.*

Прежде всего в условие нужно внести уточнение: хорды AB и CD должны быть непараллельны (в этом случае положение точек K и H определяется однозначно), и прямые AD и BC тоже непараллельны (обозначим их точку пересечения через E).

Вначале докажем, что прямая KH проходит через центр окружности. Пусть точка M равномерно двигается по прямой KH; обозначим через $M(t)$ ее положение в момент времени t через $M'(t)$ и $M''(t)$ — проекции точки $M(t)$ на прямые AB и CD соответственно. Начало отсчета и единицу времени выберем так, что $M(0) = K$, $M(1) = H$; тогда $M'(0) = A$, $M'(1) = B$, $M''(0) = C$, $M''(1) = D$. Ясно, что каждая из точек $M'(t)$ и $M''(t)$ равномерно двигается по своей прямой.

При t $\frac{1}{2}$ точки $M'(t)$ и $M''(t)$ попадают в середины отрезков AB и CD, следовательно, точка $M\left(\frac{1}{2}\right)$ попадает в центр окружности — точку пересечения перпендикуляров к хордам AB и CD, восставленных в их серединах.

Докажем теперь, что прямая KH проходит через точку E. При любом расположении точек A, B, C и D на окружности треугольники AEB и CED подобны (по двум углам), причем вершине A соответствует вершина C, вершине B — вершина D. Ясно, что при преобразовании подобия, переводящем ΔAEB в ΔCED, каждая точка $M'(t) \in (AB)$ переходит в точку $M''(t) \in (CD)$ (с тем же значением t). Но основание E' высоты EE' треугольника AEB при этом переходит в основание высоты EE'' треугольника CED, то есть для некоторого $t = t_0$ одновременно $M'(t_0) = E'$ и $M''(t_0) = E''$, следовательно, $M(t) = E$.

Н. Б. Васильев

◆

М271. *Можно ли расставить числа 1, 2, 3, . . ., n в таком порядке, чтобы ни для каких двух чисел их полусумма не равнялась ни одному из чисел, поставленных между ними?*

Докажем, что требуемое расположение возможно.

Если целое число b равно полусумме целых чисел a и c, то $a + c$ — четное число, так что числа a и c имеют одну и ту же четность, то есть либо оба четны, либо оба нечетны. Поэтому, если расположить числа 1, 2, . . ., n таким образом, чтобы сначала шли все четные, а затем все нечетные числа, то число b может быть равно полусумме стоящих по разные стороны от него чисел a и c лишь в том случае, если все эти три числа имеют одну и ту же четность. Таким образом, остается доказать, что требуемым образом можно расположить как четные числа от 1 до n, так и нечетные.

Но легко понять, что располагать числа $2, 4, 6, \ldots, 2k$ или же числа $1, 3, 5, \ldots, 2k-1$ можно в том же порядке, что и числа $1, 2, \ldots, k$. Действительно, если $2b = \frac{2a+2c}{2}$ или $2b-1 = \frac{(2a-1)+(2c-1)}{2}$, то $b = \frac{a+c}{2}$.

Таким образом, задача сведена к упорядочиванию требуемым образом чисел $1, 2, \ldots, k$ $\left(k = \frac{n}{2}\right.$, если n четно, и $k = \frac{n+1}{2}$, если n нечетно$\left.\right)$. Так как для $n = 1$ доказываемое утверждение справедливо, то справедливость его для любого натурального n вытекает из принципа математической индукции.

Проведенное рассуждение дает конкретный способ построения требуемого расположения чисел $1, 2, \ldots, n$. В качестве примера проведем такое построение для $n=16$.

1
2 1
4 2 3 1
8 4 6 2 7 3 5 1
16 8 12 4 14 6 10 2 15 7 11 3 13 5 9 1

◆

М272. *Даны две окружности радиусов R и r, касающиеся внешним образом. Строятся различные трапеции $ABCD$ так, чтобы каждая из окружностей касалась обеих боковых сторон и одного из оснований трапеции. Найдите наименьшую возможную длину боковой стороны AB.*

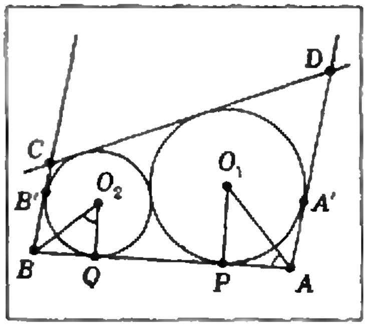


Рис. 4.

Без ограничения общности можно считать, что $R > r$ (если $R = r$, трапеция $ABCD$ становится прямоугольником со стороной AB, равной $2(R+r) = 4r$). Центр окружности радиуса R обозначим через O_1, а центр окружности радиуса r — через O_2. Кроме того, будем считать, что окружность O_1 касается основания AD, а окружность O_2 — основания BC. Пусть PQ — общая внешняя касательная к этим окружностям (точка P лежит на окружности O_1, а точка Q — на окружности O_2, см. рис. 1). Легко вычисляется, что длина отрезка PQ равна $2\sqrt{Rr}$.

Отложим на прямой PQ вне отрезка PQ отрезки PA и QB и выясним, при каком соотношении между длинами этих отрезков касательная AA' к окружности O_1 (отличная от AP) параллельна касательной BB' к окружности O_2 (отличной от BQ).

Эти касательные параллельны при условии, что сумма величин углов BAA' и ABB' равна $180°$, то есть O_2BQ и O_1AP дополняют друг друга до прямого. Последнее условие означает равенство величин углов BO_2Q и O_1AP и, следовательно, пропорциональность

$$\frac{|BQ|}{|O_2Q|} = \frac{|O_1P|}{|AP|}.$$

Полагая $x = |BQ|$, $x' = |AP|$, условие параллельности касательных AA' и BB' можно записать так: $x \cdot x' = R \cdot r$. Длина отрезка AB равна в этом случае $x + \frac{Rr}{x} + 2\sqrt{Rr}$.

Если условие параллельности выполнено, то, обозначив через D и C точки пересечения второй общей внешней касательной к окружностям O_1 и O_2 с параллельными прямыми AA' и BB', мы получим трапецию $ABCD$, удов-

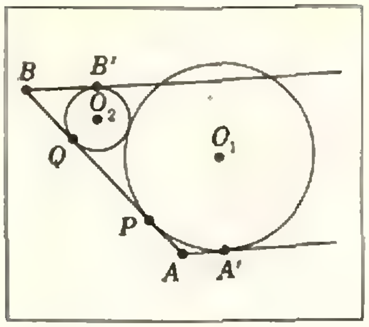


Рис. 5

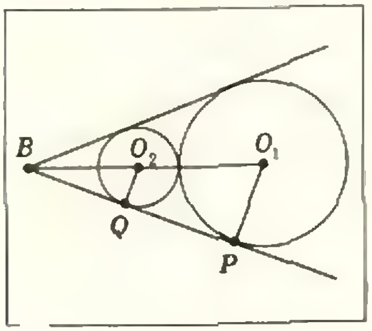


Рис. 6.

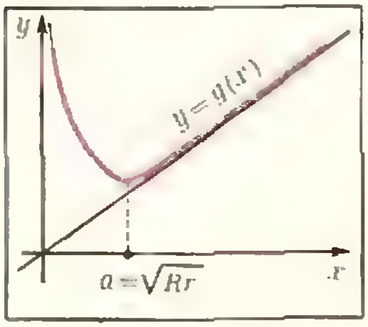


Рис. 7.

летворяющую условию задачи. Однако это утверждение, кажущееся бесспорным при взгляде на рисунок 4, нуждается в уточнении. Посмотрите на рисунок 5. Если число x слишком велико, трапецию получить не удастся. Понятно, что число x должны быть меньше длины отрезка QB на рисунке 6. Докажите, что $|QB| = \frac{2r}{R-r}\sqrt{Rr}$.

Таким образом, осталось решить следующую задачу: найти наименьшее значение функции $f(x) = x + \frac{Rr}{x} + 2\sqrt{Rr}$ на интервале $0 < x < \frac{2r}{R-r}\sqrt{Rr}$. Вместо этой функции можно взять функцию $g(x) = x + \frac{Rr}{x}$, график которой (при $x > 0$) изображен на рисунке 7. Она убывает при $0 < x \leqslant \sqrt{Rr}$ и возрастает при $x \geqslant \sqrt{Rr}$ (докажите это). Таким образом, если $\frac{2r}{R-r}\cdot\sqrt{Rr} > \sqrt{Rr}$, то наименьшее значение длины стороны AB равно $f(\sqrt{Rr}) = 4\sqrt{Rr}$. Если же $\frac{2r}{R-r}\cdot\sqrt{Rr} \leqslant \sqrt{Rr}$, то функция f наименьшего значения на интервале $]0, \frac{2r}{R-r}\sqrt{Rr}[$ не имеет.

Неравенство $\frac{2r}{R-r}\sqrt{Rr} \leqslant \sqrt{Rr}$ эквивалентно неравенству $R \geqslant 3r$. Таким образом, если $r < R < 3r$, искомый минимум равен $4\sqrt{Rr}$, если же $R \geqslant 3r$, наименьшего значения $|AB|$ не существует: длина стороны $|AB|$ может принимать любое значение, большее $f\left(\frac{2r}{R-r}\times\sqrt{Rr}\right) = \frac{(R+r)^2}{2r(R-r)}\sqrt{Rr}$, но самого этого значения не достигает.

Ю. И. Ионин.

◆

Ф278. *Спутник Земли движется по круговой орбите на высоте $h = 760$ км над поверхностью Земли. Его хотят перевести на эллиптическую орбиту с максимальным удалением от поверхности Земли $H = 40\,000$ км и минимальным расстоянием от поверхности $h = 760$ км. Насколько для этого необходимо изменить скорость спутника? Каким будет период обращения спутника по новой, эллиптической, орбите?*

Для простоты будем считать, что скорость спутника изменяется за очень короткий промежуток времени (малый по сравнению с периодом обращения спутника по круговой орбите). Минимальное расстояние от поверхности Земли до эллиптической орбиты равно радиусу первоначальной круговой орбиты, то есть обе орбиты спутника имеют общую точку (точка I на рисунке 8), в которой и произошло изменение скорости спутника. Найдем скорости v_0 и v_1 спутника в этой точке на круговой и на эллиптической орбитах, а затем и изменение скорости $\Delta v = v_1 - v_0$.

Вначале определим скорость v_0 спутника при движении по круговой орбите. Так как центростремительное ускорение $a = \frac{v_0^2}{R+h}$ (R — радиус Земли) спутнику сообщает сила тяготения $F_т = \gamma\frac{mM}{(R+h)^2}$ (M — масса Земли, m — масса спутника), то, согласно II закону Ньютона,

$$\frac{mv_0^2}{R+h} = \gamma\frac{mM}{(R+h)^2}.$$

Из этого равенства непосредственно найдем,

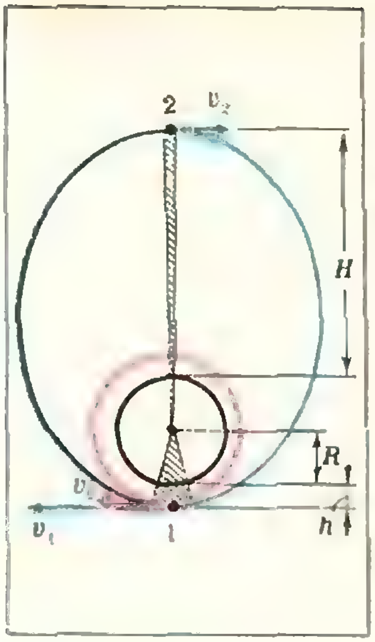


Рис. 8.

что

$$v_0=\sqrt{\gamma\frac{M}{R+h}}.$$

Для того чтобы определить скорость v_1 спутника, когда он движется по эллиптической орбите на высоте h над Землей, воспользуемся законом сохранения энергии и III законом Кеплера*). Из аналогии между гравитационным и электростатическим полями можно заключить, что в тот момент, когда спутник находится на расстоянии h от Земли, он обладает потенциальной энергией $\Pi_1=-\gamma\frac{mM}{R+h}$. Кроме того, спутник имеет кинетическую энергию $K_1=\frac{mv_1^2}{2}$. На высоте H от Земли спутник обладает потенциальной энергией $\Pi_2=-\gamma\frac{mM}{R+H}$ и кинетической энергией $K_2=\frac{mv_2^2}{2}$, где v_2 — скорость спутника на высоте H. Согласно закону сохранения энергии,

$$\frac{mv_1^2}{2}-\gamma\frac{mM}{R+h}=\frac{mv_2^2}{2}-\gamma\frac{mM}{R+H}.$$

По второму закону Кеплера площади, заметаемые радиус-вектором спутника за равные промежутки времени, равны. На рисунке 8 это площади заштрихованных фигур. Если промежуток времени Δt мал, скорости движения спутника вблизи точек *1* и *2* можно считать постоянными. Тогда вместо секторов можно рассматривать соответствующие равнобедренные треугольники. Запишем равенство их площадей:

$$\frac{1}{2}v_1\Delta t(R+h)=\frac{1}{2}v_2\Delta t\,(R+H).$$

Из последних двух равенств найдем

$$v_1=\sqrt{\frac{2\gamma M}{2R+H+h}\,\frac{R+H}{R+h}}.$$

Тогда изменение скорости спутника

$$\Delta v=v_1-v_0=\sqrt{\frac{\gamma M}{R+h}}\left(\sqrt{\frac{2\,(R+H)}{2R+H+h}}-1\right)\approx 2\frac{\text{км}}{c}.$$

Теперь определим период T обращения спутника по эллиптической орбите. Согласно III закону Кеплера, отношение квадратов периодов обращения спутника равно отношению кубов больших полуосей его орбит. Поэтому

$$\frac{T^2}{T_0^2}=\frac{(2R+h+H)^3}{8\,(R+h)^3},$$

где $T_0=\frac{2\pi\,(R+h)}{v_0}$ — период обращения спутника по круговой орбите радиуса $R+h$. Следовательно,

$$T=\pi\,(2R+H+h)\sqrt{\frac{2R+H+h}{2\gamma M}}\approx 12\text{ ч}.$$

---

*) См., например, статью Е. П. Кузнецова «Космические задачи на вступительных экзаменах», «Квант», 1974, № 11.

Ф279. *Цилиндр, изготовленный из нетеплопроводящего материала, разделен нетеплопроводящей перегородкой на две части, объемы которых V_1 и V_2. В первой части находится газ при температуре T_1 под давлением p_1. Во второй части находится такой же газ, но при температуре T_2 и под давлением p_2. Какая температура газа установится в цилиндре, если убрать перегородку?*

Так как стенки цилиндра сделаны из нетеплопроводящего материала, то, независимо от того, какой процесс происходит с газом в цилиндре при его перемешивании, из закона сохранения энергии следует

$$cm_1(T-T_1)=cm_2(T_2-T).$$

Здесь c — удельная теплоемкость газа, m_1 и m_2 — массы газа соответственно в первой и во второй частях цилиндра и T — температура, которая установится в цилиндре после того, как наступит равновесие. Из этой формулы (уравнение теплового баланса) после несложных преобразований получим

$$T=\frac{(m_1/m_2)\,T_1+T_2}{1+\dfrac{m_1}{m_2}}.$$

Отношение $\dfrac{m_1}{m_2}$ нетрудно найти, воспользовавшись уравнением газового состояния. Для газа в частях цилиндра до того, как убрали перегородку, можно записать

$$p_1V_1=\frac{m_1}{\mu}\,RT_1 \text{ и } p_2V_2=\frac{m_2}{\mu}\,RT_2.$$

Разделив первое равенство на второе, получим

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{p_1V_1T_2}{p_2V_2T_1}.$$

Тогда окончательно

$$T=\frac{T_1T_2(p_1V_1+p_2V_2)}{p_1V_1T_2+p_2V_2T_1}.$$

◆

Ф280. *Источник света находится на расстоянии 3a от линзы с фокусным расстоянием a. Во сколько раз изменится средняя освещенность пятна на экране, который находится на расстоянии 1,5a от линзы, если между линзой и источником поместить плоскопараллельную стеклянную пластинку толщины 0,5 a? Показатель преломления стекла равен n.*

Средняя освещенность E пятна на экране зависит от светового потока Φ, проходящего через линзу и попадающего на экран, и от площади Δs пятна на экране:

$$E=\frac{\Phi}{\Delta s}.$$

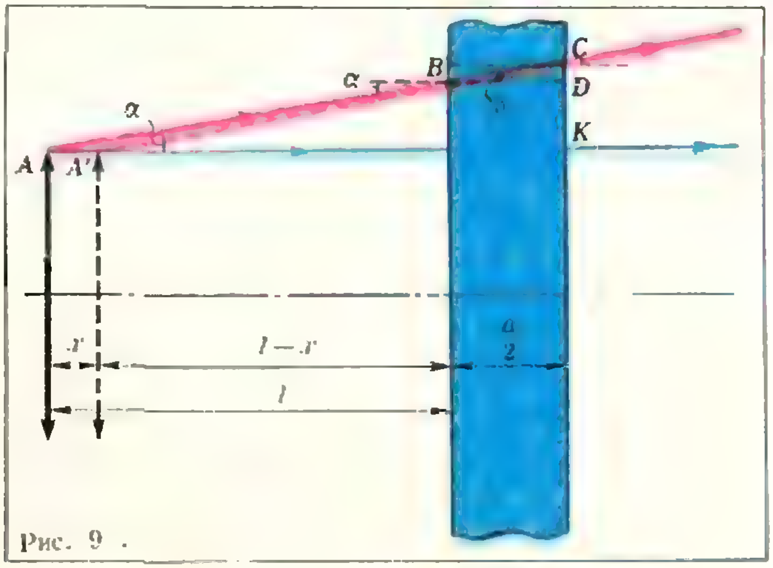


Рис. 9 .

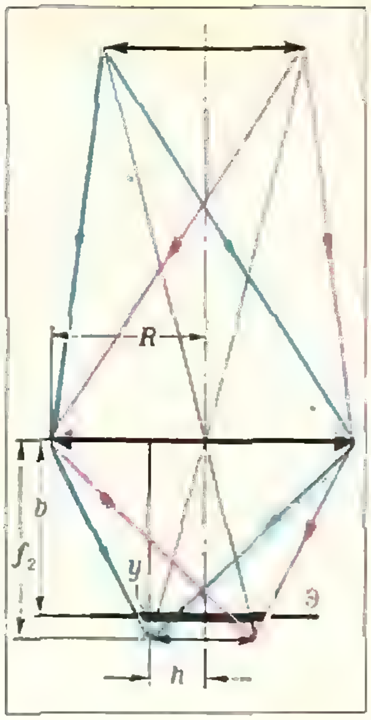


Рис. 10. Линейный размер пятна на экране отличается от линейного размера изображения на величину

$$y = (R-h)\left(1-\frac{b}{f_2}\right),$$

где R — радиус линзы, h — размер изображения $b = 1,5\,a$ — расстояние от линзы до экрана, f_2 — расстояние от линзы до изображения.

Найдем отдельно освещенности в первом и во втором случаях, а потом их отношение.

В первом случае источник находится на расстоянии $d_1 = 3a$ от линзы. Из формулы линзы $\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=\frac{1}{F}$ получим, что изображение источника находится на расстоянии $f_1 = \frac{Fd_1}{d_1-F} = \frac{3}{2}a$ от линзы, то есть как раз на экране.

Пусть площадь источника мала и равна ΔS (размеры источника, действительно, должны быть малыми по сравнению с расстоянием от него до линзы, так как пользуясь формулой линзы, мы рассматриваем только близкие к главной оптической оси лучи). Тогда можно считать, что световой поток, излучаемый с единицы площади источника в единичном телесном угле — обозначим его I, — есть величина постоянная. Таким образом, на линзу от источника падает световой поток $\Phi_1 = I\Delta S\Omega_1$, где Ω_1 — телесный угол, в котором видна линза из точек источника. Угол Ω_1 измеряется отношением $\frac{S}{d_1^2}$ (S — площадь линзы, d_1 — расстояние от линзы до источника). Этот световой поток после линзы попадает на экран. Площадь изображения Δs_1 на экране относится к площади ΔS источника как $\frac{f_1^2}{d_1^2}$, то есть

$$\frac{\Delta s_1}{\Delta S} = \frac{f_1^2}{d_1^2} = \frac{1}{4}.$$

Тогда освещенность экрана в первом случае равна

$$E_1 = \frac{\Phi_1}{\Delta s_1} = I\frac{S}{d_1^2}\frac{\Delta S}{\Delta s_1} = \frac{4}{9}\frac{IS}{a^2}.$$

После того, как между источником и линзой поместили плоскопараллельную пластинку, источником для линзы стало изображение источника, даваемое пластинкой. Найдем положение этого изображения (расстояние x на рисунке 9).

Для этого построим ход двух лучей, выходящих, например, из точки A источника. Пусть один луч перпендикулярен к пластинке, а второй луч образует с первым малый угол α. Из треугольника $A'CK$ отрезок CK равен

$$CK = A'K\operatorname{tg}\alpha = \left(l-x+\frac{a}{2}\right)\operatorname{tg}\alpha.$$

С другой стороны,

$$CK = CD + KD = \frac{a}{2}\operatorname{tg}\beta + l\operatorname{tg}\alpha.$$

Следовательно,

$$\left(l-x+\frac{a}{2}\right)\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{2}\operatorname{tg}\beta + l\operatorname{tg}\alpha.$$

Отсюда $x = \frac{a}{2}\left(1-\frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha}\right)$. Так как углы α и β малы, то $\frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{1}{n}$ и $x = \frac{a}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)$. Таким образом, изображение источника, даваемое пластинкой, находится от линзы на расстоянии $d_2 = 3a - x = \frac{a}{2}\left(5+\frac{1}{n}\right)$.

При этом размеры изображения такие же, как и источника (см. рис. 9). Световой поток Φ_2, падающий на линзу от этого нового источника, равен $\Phi_2 = I\Delta S\Omega_2 = I\Delta S\frac{S}{d_2^2}$.

Теперь из формулы линзы найдем положение изображения этого источника:

$$f_2 = \frac{Fd_2}{d_2 - F} = a\,\frac{5n+1}{3n+1}.$$

Ясно, что четкое изображение находится не на экране, а на экране видно размытое пятно. Однако, так как для стекла n лежит в пределах от 1,5 до 2, то f_2 принимает значения от 1,54 a до 1,57 a. То есть изображение находится от экрана на расстоянии примерно 0,05 a. Это расстояние мало по сравнению с расстоянием 1,5 a от экрана до линзы. Кроме того, размер предмета и диаметр линзы тоже малы (отметим еще раз, что мы рассматриваем только узкие приосевые пучки). Поэтому можно считать, что размеры четкого изображения не отличаются от размеров пятна на экране (рис. 10) и $\frac{\Delta s_2}{\Delta S} = \frac{f_2^2}{d_2^2} = \frac{4n^2}{(3n+1)^2}$.

Тогда освещенность E_2 экрана в этом случае равна

$$E_2 = \frac{\Phi_2}{\Delta s_2} = \frac{I\,S\,\Delta S}{d_2^2\,\Delta s_2} = \left(\frac{3n+1}{5n+1}\right)^2\frac{IS}{a^2},$$

и отношение освещенностей

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{9}{4}\left(\frac{3n+1}{5n+1}\right)^2.$$

◆

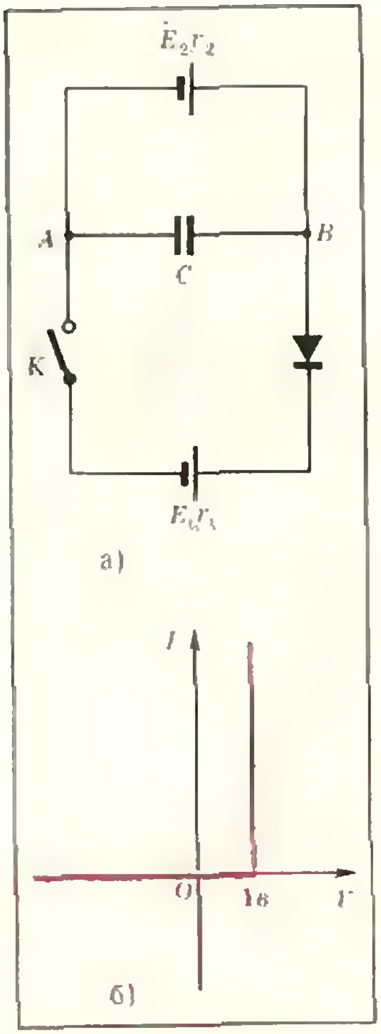


Рис. 11.

Ф281. *В схеме, изображенной на рисунке 11, а, первоначально ключ K разомкнут. Э. д. с. первой батареи $E_1 = 1$ в, а ее внутреннее сопротивление $r_1 = 0.2$ ом. Э. д. с. второй батареи $E_2 = 3$ в*), внутреннее сопротивление $r_2 = 0,4$ ом. Емкость конденсатора $C = 10$ мкф. На какую величину изменится заряд конденсатора при замыкании ключа, если диод имеет вольтамперную характеристику, показанную на рисунке 11, б?*

Вначале разность потенциалов пластин конденсатора равна E_2, а заряд конденсатора $q_1 = CE_2$. После замыкания ключа по цепи пойдет ток, и разность потенциалов пластин конденсатора (разность потенциалов точек B и A) будет равна $U_2 = E_2 - Ir_2$, где I — ток, идущий по цепи. Найдем этот ток.

Из вольтамперной характеристики диода следует, что при протекании тока через диод падение напряжения на нем всегда равно $U_Д = 1$ в. Запишем закон Ома для полной цепи:

$$E_2 - E_1 = U_Д + Ir_1 + Ir_2.$$

Отсюда

$$I = \frac{E_2 - E_1 - U_Д}{r_1 + r_2}.$$

Тогда после замыкания ключа разность потенциалов пластин конденсатора будет равна

$$U_2 = E_2 - \frac{E_2 - E_1 - U_Д}{r_1 + r_2}\,r_2,$$

---

*) В «Кванте» № 6 за 1974 год в условии задачи Ф281 была допущена опечатка.

а его заряд

$$q_2 = CU_2 = CE_2 - Cr_2 \frac{E_2 - E_1 - U_д}{r_1 + r_2}.$$

Следовательно, заряд конденсатора изменится на величину

$$\Delta q = q_2 - q_1 = -Cr_2 \frac{E_2 - E_1 - U_д}{r_1 + r_2} = -\frac{2}{3} \cdot 10^{-6} \text{ мкф}.$$

◆

Ф282. *Найти частоту «симметричных» колебаний системы, показанной на рисунке 12, а. Массы всех шаров m, коэффициенты упругости пружинок k.*

Прежде всего найдем силу, действующую на каждый шарик при его смещении из положения равновесия (рис. 12, б). Обозначим начальное расстояние шарика от центра системы (точки O) x_0, новое расстояние — x, смещение шарика от положения равновесия — Δx, начальную длину пружины — l_0, ее длину в растянутом состоянии — l, а изменение длины пружины — Δl.

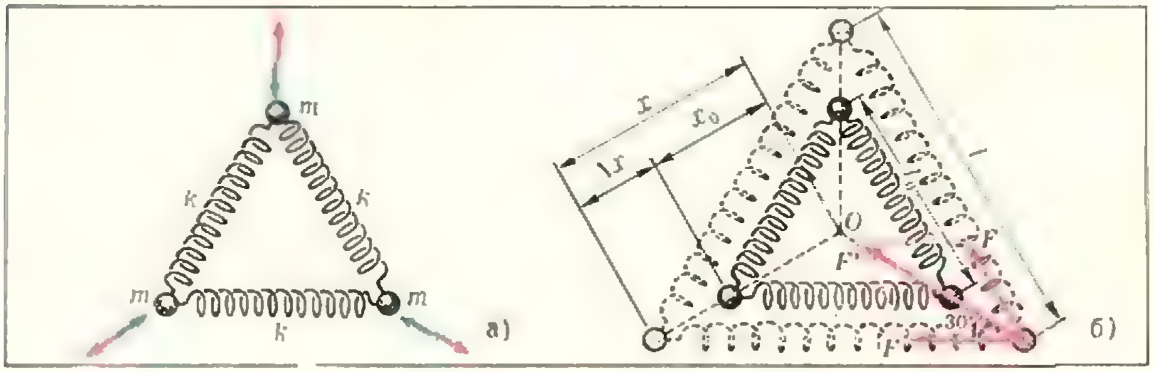


Рис. 12.

Как видно из рисунка 12, б,

$$l_0 = 2x_0 \cos 30° \text{ и } l = 2x \cos 30°.$$

Тогда каждая из пружин при смещении шариков окажется растянутой на величину

$$\Delta l = l - l_0 = 2(x - x_0)\cos 30° = \sqrt{3}\,\Delta x.$$

Следовательно, на каждый шарик со стороны пружин будут действовать две равные по абсолютной величине силы: $F = k\Delta l = \sqrt{3}\,k\Delta x$.

Равнодействующая этих сил направлена к положению равновесия шарика и равна по абсолютной величине (см. рис. 12, б) $F' = 2F \cos 30° = 3k\Delta x$, то есть пропорциональна смещению шарика от положения равновесия. Это означает, что система эквивалентна системе из трех обычных пружинных маятников, соединенных в точке O и имеющих жесткость $k' = 3k$ каждый. Поэтому частота колебаний системы будет равна

$$\omega = \sqrt{\frac{k'}{m}} = \sqrt{\frac{3k}{m}}.$$

◆

Ф283. *Заряженные шарики с одинаковой массой, расположенные на расстоянии l друг от друга, отпустили*

Шарики удаляются друг от друга под действием силы F электрического отталкивания, равной (в системе единиц СГСЭ) $F = \frac{q^2}{r^2}$, где q — заряд каждого шарика, r — расстояние *(без начальной скорости). Через t секунд расстояние между ними удвоилось. Через какое время удвоится расстояние между шариками, если их отпустить с расстояния 3l?*

между шариками. Сила F, а значит, и ускорение шариков меняются по величине по мере изменения расстояния между шариками, поэтому движение шариков не будет равноускоренным. Для решения задачи придется проявить некоторую изобретательность.

Разобьем перемещения шариков в первом и во втором случаях на одинаковое число участков таких, чтобы относительные перемещения в обоих случаях были одинаковыми. Обозначим начальное расстояние между шариками $2x_0$, а в некоторый момент времени — $2x$. Величина $k=\frac{x}{x_0}$ и есть относительное перемещение шариков.

$$\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}=3$$

Пусть k изменилось на величину $\Delta k=\frac{\Delta x}{x_0}$. Тогда перемещение каждого шарика в первом случае (когда $2x_0=l$) равно $\Delta x_1=\Delta k\frac{l}{2}$, а во втором случае (когда $2x_0=3l$) — $\Delta x_2=\Delta k\frac{3}{2}l$. Отношение перемещений шариков равно

$$\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}=3.$$

Теперь сравним средние скорости шариков. Для этого воспользуемся законом сохранения энергии. В начальный момент шарики обладают только потенциальной энергией электрического взаимодействия $\Pi_0=\frac{q^2}{2x_0}$ (в системе СГСЭ). В тот момент, когда расстояние между шариками равно $2x$, они обладают потенциальной энергией $\Pi=\frac{q^2}{2x}$ и кинетической энергией $K=2\frac{mv^2}{2}$ (m — масса шарика). По закону сохранения энергии $\frac{q^2}{2x_0}=\frac{q^2}{2x}+mv^2$. Отсюда

$$v=\sqrt{\frac{q^2}{2m}\frac{x-x_0}{xx_0}}=\sqrt{\frac{q^2}{2x_0m}\frac{k-1}{k}}.$$

$$\frac{v_{ср.1}}{v_{ср.2}}=\sqrt{3}$$

Видим, что при одном и том же относительном перемещении k скорость шарика в первом случае больше скорости шарика во втором случае в $\frac{\sqrt{q^2.ml}}{\sqrt{q^2.3ml}}=\sqrt{3}$ раз.

Ясно, что при изменении k на величину Δk средние скорости шариков будут отличаться тоже в $\sqrt{3}$ раз: $\frac{v_{ср.1}}{v_{ср.2}}=\sqrt{3}$.

Времена, за которые шарики перемещаются на Δx_1 в первом случае и на Δx_2 во втором случае, равны соответственно

$$\Delta t_1=\frac{\Delta x_1}{v_{ср.1}} \text{ и } \Delta t_2=\frac{\Delta x_2}{v_{ср.2}}.$$

Отсюда

$$\frac{\Delta t_2}{\Delta t_1}=\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}\frac{v_{ср.1}}{v_{ср.2}}=3\sqrt{3},$$

то есть при любом изменении величины k время движения в первом случае больше времени движения во втором случае в $3\sqrt{3}$ раза.

Следовательно, когда расстояния между шариками удвоятся, полное время t_2 будет больше времени t_1 тоже в $3\sqrt{3}$ раза. То есть

$$t_2 = 3\sqrt{3}\,t_1 = 3\sqrt{3}\,t.$$

$$\frac{t_2}{t_1} = 3\sqrt{3}$$

◆

Ф284. *Найти ускорение a, с которым падает круглая металлическая пластинка в однородном магнитном поле, параллельном поверхности Земли. Пластинка падает вертикально вниз и ориентирована своей плоскостью параллельно магнитному полю и перпендикулярно к поверхности Земли. Толщина пластинки d много меньше ее радиуса R, масса m, индукция магнитного поля B, ускорение свободного падения g.*

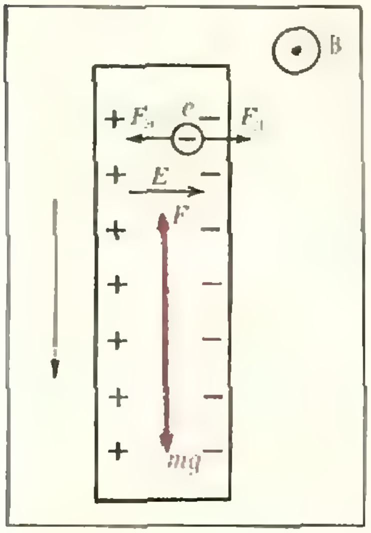


Рис. 10

Вначале рассмотрим случай, когда пластинка падает вертикально вниз с постоянной скоростью v. На электроны, падающие вместе с пластинкой, со стороны магнитного поля действует сила Лоренца (рис. 13) $F_л = evB$ (e — заряд электрона). В результате электроны будут смещаться к правой стороне пластинки. Перераспределение электронов внутри пластинки приведет к возникновению электрического поля, направленного слева направо (см. рис. 13). Смещение электронов будет происходить до тех пор, пока сила Лоренца не уравновесится силой $F_э$, действующей со стороны электрического поля: $F_л = F_э$, или $evB = eE$. Отсюда напряженность электрического поля $E = vB$.

Так как толщина пластинки много меньше ее радиуса, то электрическое поле внутри пластинки можно считать однородным (можно пренебречь краевыми эффектами). Это означает, что пластинку можно считать плоским конденсатором, между пластинами которого разность потенциалов $u = Ed = Bvd$, заряд которого равен

$$q = Cu = \frac{\varepsilon_0 S}{d} Bvd = \varepsilon_0 SBv$$

($S = \pi R^2$ — площадь пластинки).

Этот заряд зависит от скорости движения пластинки. При движении пластинки с некоторым ускорением вместе со скоростью пластинки с течением времени будут меняться и заряды на сторонах пластинки. Следовательно, при изменении скорости пластинки в ней возникает электрический ток

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \varepsilon_0 SB\frac{\Delta v}{\Delta t} = \varepsilon_0 SBa,$$

где a — ускорение пластинки. Но, как мы знаем, на проводник с током в магнитном поле действует сила. В нашем случае эта сила равна по абсолютной величине $F = BId$ и направлена вертикально вверх. Итак, кроме силы тяжести на пластинку при ее падении со стороны магнитного поля будет действовать еще сила F. Запишем уравнение движения пластинки:

$$ma = mg - BId, \text{ или } ma = mg - B^2 d\varepsilon_0 a\pi R^2.$$

Отсюда

$$a = g\frac{1}{1 + \dfrac{B^2 d\varepsilon_0 \pi R^2}{m}}.$$

И. Ш. Слободецкий

Окончание списка Начало см «Квант» № 1, 1975 г

Б Умурзаков (Киз Алма Атинской обл) 63, *Ф. Шакурова* (Казань) 56, 59; *С Шаташвили* Тбилиси) 58, 63; *Е Шефтель* (Чернигов) 58, 59; *А Шигель* (Москва) 63, 64; *Г Шмелев* (Ярославль) 56, 58, 59, 61 — 63, 65; *Н Шмырин* (Реж Свердловской обл) 63; *В Шпаковский* (Пинкс Брестской обл) 56, 62, 65; *А Шульман* (Киев) 62 — 65; *А Шушков* (Ленинград) 63; *И. Юнус* (Харьков) 56 — 59, 61 — 65; *Б Юсин* (Москва) 56 — 59, 61 — 65; *М Яникова* (Москва) 63; *Б Яцало* (с Морочно Ровенской обл) 64.

Правильные решения задач Ф267—Ф277 прислали следующие читатели (жирные цифры — последние две цифры номера задачи) *Х Абдуллин* (Алма-Ата) 72, *Н Агладзе* (Тбилиси) 73, 75, 77, *Д Азов* (Челябинск) 72, *Г Айзин* (Брест) 72, 77, *Р Акбаров* (Андижан) 68, 70—73, 75, 76, *С Актершев* (Магнитогорск) 68, 70—72, *А Александрин* (Валуйки) 67, 68, 70, *А Алексеев* (Смоленск) 72, *Я Аннамурадов* (Байрам-Али) 72, *М Аронов* (Володарск) 68, 70, 71, *Ш Атабаев* (п/о Найман Хорезмской обл) 68, *И Бабакулов* (Катта-Курган Самаркандской обл) 75, *Р Бабчанник* (п Манома-65 км Хабаровского кр) 68, *В Бакуров* (Новосибирск) 67, *С Балашов* (Москва) 75, 77, *Р Басыров* (д Н Каракитяны ТАССР) 67, 68, 70, 73, 76, *Г Бежиашвили* (Рустави) 73, 75, *В Белоусов* (Москва) 67, *Ю Бельский* (Брест) 71, 72, *З Бендукидзе* (Тбилиси) 70, *В Бенхан* (Калинин) 70, 75, *У Беджиев* (Карачаевск) 67, 68, 70—72, *М Бирман* (Саратов) 68, 70, *М Биктимиров* (Ленинск) 73, 77, *Ю Богомолов* (Казань) 68, 70, 72—74, 77, *С Бодров* (Реутов) 67, 68, 71, 72, *В Борисов* (Воронеж) 68, 73, *В Борю* (Запорожье) 68—71, 73, 75, *С Бостанова* (Карачаевск) 67, 68, 70—72, *С Бурин* (Боровск) 72, *А Вакуленко* (Москва) 68, 70, 71, *В Виноградов* (Владивосток) 68, *И Винокуров* (Москва) 68, 71, *И Виняр* (Оргеев) 68, *А Волков* (Челябинск) 72, 73, *В Волчков* (п Залегощь Орловской обл) 67, *И Воронин* (Днепропетровск) 73, *В Галунов* (Фрунзе) 68, *И Галинников* (Волгоград) 68, 71—73, 75, *В Гасилов* (Ярославль) 68, 70, *М Гедалин* (Тбилиси) 67, 75, 77, *С Герц* (Хуст) 68, 72, *Б Гоберман* (Баку) 70, *А Говяда* (Киев) 67, *И Голдонский* (Брянск) 68, 71, 73—75, 77, *Э Голод* (Пинск) 68, 71—73, *А Гончаров* (Воронеж) 73—75, *Е Горбатый* (Одесса) 68, 70, 72, 74—77, *А Гордин* (п Урень Горьковской обл) 75, 77, *С Горишний* (Таганрог) 68, 70, 73—75, *А Григорьев* (Грозный) 73, *С Григорьев* (Ессентуки) 68, 73, *С Гродский* (Корсунь-Шевченковский) 73, *В Грязев* (Кокчетав) 68, 72, *Е Губанов* (п Востряково Московской обл) 70, 72, *Е Гугель* (Днепропетровск) 68, *О Гудкова* (Одесса) 72, *М Гумимян* (Ереван) 76, *Г Демихов* (Умань) 68, 73, *У Джиманиязов* (Хазараспский р-н Хорезмской обл) 68, *Ю Докучаев* (Ленинград) 67—76, *В Дорохов* (Донецк) 67, *А Дробинин* (Евпатория) 68, 70, 71, 75—77, *Н Дубровский* (Омск) 69, 70, *В Жук* (Грозный) 70, *Е Жуков* (Волгодоновское Целиноградской обл) 68, 72, *И Заверткин* (Орск) 70, 72, 75, 76, *П Золотарев* (Ташкент) 67, 73, 75—77, *В Зосимов* (Элиста) 71, 72, 74, 75, *Ф Ибригимов* (Кривой Рог) 72, *В Иващук* (Киев) 67, 68, 70—75, 77, *Т Иванова* (Москва) 68, *А Ивлиев* (Москва) 67, 68, 70, *А Измаилов* (Баку) 68, 70—72, *А Имернишвили* (Тбилиси) 72, *Н Имранов* (Баку) 68, *И Иовик* (Магнитогорск) 68, 70, 73, 75, *А Казирова* (Ереван) 76, *А Карнаух* (Белгород) 68, 70, 72, 73—75, *А Капивец* (Карпинск) 68, *В Карпухов* (Челябинск) 73, 75, 76, *А Карякин* (Саранск) 73, *Б Кацман* (Мытищи) 67, 70, 72, 73, *Г Квиникадзе* (Тбилиси) 68, 72, *А Керенцов* (Бугульма ТАССР) 72, *Л Клименко* (Москва) 73, *А Клочко* (Жуковский) 68, 70, 71, 73, 75, 76, *Н Кобылецкий* (Баку) 71, *А Коган* (Воронеж) 75, *Я Коган* (Глазов) 68, 71—74, 77, *Р Козак* (Винница) 68, 70, 71, 73, 75, *С Колобзарова* (Вольск) 68, *А Колост* (Воронеж) 68, 70, *А Колючкин* (Симферополь) 68, 71, *С Коляда* (Киев) 68, 75, *В Комаров* (Ачинск) 72, *А Копнов* (Новочеркасск) 73, 76, 77, *С Копыловский* (п Знобь-Новгородское Сумской обл) 67, 68, 70—75, 77, *Г Корабль* (Львов) 77, *И Корешкин* (п Остер Смоленской обл) 71, *М Кроль* (Павлово) 73, 74, *А Крохин* (Харьков) 73, 75, 77, *А Кузнецов* (Калуга) 68, 72, *В Куликовский* (Москва) 68, 70—74, *В Куценко* (Камышин Волгоградской обл) 76, *И Лазурчак* (Трускавец) 68, *В Лалекин* (Гагарин Смоленской обл) 68, 70—72, *В Левитас* (Киев) 72, 77, *А Лекчинов* (Шахты) 73, 75, *Ю Листов* (Казань) 68—70, 72, *А Лопатенко* (Днепропетровск) 73, 75, 77, *С Ляпин* (Петриков) 67, 73, *С Магомедов* (с Кубра ДагАССР) 70, *И Майхрук* (с Белобожница Тернопольской обл) 70, 71, 73, 75, 77; *В Малов* (Ташкент) 77, *В Мамед-Заде* (Баку) 68, *С Матвеенко* (Москва) 68—70, 72, 73, 75, 77, *Г Мац* (Новосибирск) 76, *В Мелехов* (Кирово-Чепецкий Кировоградской обл) 68, *С Мельник* (Харьков) 68, 70—77, *А Менжилий* (ст Старомлинская Краснодарского кр) 68, *А Морозов* (Новосибирск) 75, 77, *А Морозовский* (Киев) 72, 77, *А Набатчиков* (Курск) 70, 73, *В Назаргулов* (Стерлитамак) 75, *К Николаев* (Алма-Ата) 68, *Г Оганнисян* (с В Арташат АрмССР) 75, 77, *А Оксак* (Ворошиловград) 75, *Ю Онищенко* (Люберцы) 68, 69, 71—75, 77, *С Онучин* (Пермь) 73, 75, *А Осин* (Камышин Волгоградской обл) 68, 69, 71, 73, *В Осипенко* (п Знобь-Новгородское Сумской обл) 68, 73, 75, *С Остапенко* (с Пуштулим Алтайского кр) 70; *А. Остапов* (Орджоникидзе) 72, *С Островская* (Харьков) 68, 70, 72, 73, *Е Павленко* (Армавир) 68, 73, 77, *С Пантелеймонов* (Хуст) 70, 73, *А Паро-*

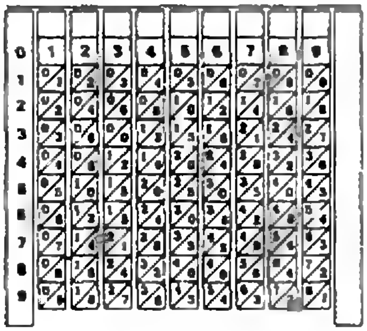
вичников (Обнинск) 68; *В. Пахомов* (Днепропетровск) 73; *Ю. Перфильев* (Саратов) 70, 72; *В. Пестунов* (Кировоград) 75; *Н. Пивторак* (с. Соколовка Винницкой обл.) 68; *А. Поблагуев* (Винница) 67, 68, 70—72, 74, 75, 77; *М. Половинник* (Мена) 67, 71, 74; *Р. Портной* (Черновицы) 68; *А. Пресман* (Москва) 75; *Б. Рахманов* (Хазараспский р-н Хорезмской обл.) 68; *С. Рашкеев* (Солнечногорск) 73—75, 77; *Б. Рева* (Таллин) 68, 70, 71, 73, 75; *В. Решетняк* (Киев) 68, 70; *В. Решетов* (Куйбышев) 67; *Э. Розенкранц* (Магнитогорск) 73, 75; *М. Розман* (Псков) 74, 75, 77; *В. Рыжиков* (Ахтубинск) 67, 70—73, 75; *И. Сапрыкин* (Фрунзе) 68; *В. Свиридов* (ВНИИСС Рамонского р-на Воронежской обл.) 67; *Р. Сергеев* (д. Перебродье Витебской обл.) 68, 70—73, 75; *Р. Сирота* (Харьков) 68, 71, 73, 75, 76; *В. Смоленков* (Ленинград) 68; *Ю. Смоленцев* (Ессентуки) 68, 70, 71; *В. Смолко* (Кишинев) 68; *А. Смык* (Красноярск) 68, 70, 75; *И. Соколов* (Москва) 73, 75, 77; *В. Солдатов* (Ногинск) 73, 75; *С. Сорокин* (Грозный) 73; *П. Субботин* (с. Городище Белгородской обл.) 72, 77; *Л. Сургуладзе* (Тбилиси) 74, 75; *В. Тарасов* (Ленинград) 76; *В. Татаренко* (Киев) 73; *В. Татарин* (Теребовля) 75, 76; *Л. Требулева* (Ташкент) 67, 68, 71, 73, 75, 76; *А. Туровский* (Псков) 73—75, 77; *М. Тяпин* (п/о Мекса Волгоградской обл.) 76; *А. Уваров* (с. Знаменка Пензенской обл.) 75; *Б. Умурзаков* (Коспеленский р-н Алма-Атинской обл) 73; *С. Утнасупов* (Элиста) 67, 68, 70, 72; *Н. Федин* (Омск) 67, 68, 70—77; *П. Фоменко* (Днепропетровск) 67, 68, 70—72; *А. Хомич* (Брест) 77; *Л. Цимринг* (Горький) 73, 76, 77; *И. Цифра* (с. Велятино Закарпатской обл.) 68; *М. Чанкаев* (аул Каменномост Карачаевского р-на) 73, 75, 77; *Ю. Черныш* (Минск) 67—69, 71—73, 75, 77; *А. Шакиров* (с. Б-Ока БашкАССР) 68, 71; *Г. Шмелев* (Ярославль) 68, 70, 73; *А. Шмулевич* (Винница) 75, 77; *Н. Шмырин* (Реж) 67, 68, 73; *Е. Юдин* (Ессентуки) 68, 73, 77; *А. Юнусов* (Кишинев) 68.

Вычислительная машина Джона Непера

Джона Непера, барона Мерчистона (1550—1617), уроженца Шотландии, изобретателя логарифмов и одного из изобретателей десятичных дробей (он ввел знак, разделяющий целую и дробную часть) по справедливости считают первым из выдающихся английских математиков.

Эти изобретения стали частицей общей человеческой культуры. И десятичными дробями, и логарифмами должен в настоящее время владеть каждый культурный человек.

Но Джон Непер позаботился также и о своих современниках, которые плохо умели умножать и делить многозначные числа. В год своей кончины он издал книгу, которая называлась «Rabdologia». В этой книге изложен остроумный способ механического умножения и деления с помощью «костяных дощечек» Непера. Вы сами сможете изготовить такие дощечки из фанеры или плотного картона (см. рис.)



Хорошо вам известная таблица умножения Пифагора записана на девяти дощечках. Каждый из квадратиков таблицы разделен диагональю на «верхний» и «нижний» треугольники. В нижнем — число единиц произведений, а верхнем — число десятков.

(Окончание см. с. 56)

ПРАКТИКУМ
АБИТУРИЕНТА

Когда помогают графики

Е. Б. Ваховский, А. А. Рывкин

Казалось бы, нет более знакомого абитуриентам материала, чем вопросы, относящиеся к исследованию квадратного трехчлена. Ни один экзаменатор не сомневается в том, что каждый поступающий в вуз без труда решит квадратное уравнение, помнит теорему Виета и справится с квадратным неравенством. И, тем не менее, практика приемных экзаменов вновь и вновь обращается к этой теме, а экзаменующиеся не всегда добиваются успеха. Их нередко подводит стремление использовать сведения, лежащие на поверхности, и с их помощью как можно быстрее перевести задачу на формальный язык. Однако такой путь решения, далеко не всегда является оптимальным.

Часто большую помощь оказывает графическое представление условий задачи. Оно дает возможность взглянуть на все условия в совокупности и отыскать наиболее простой способ решения.

Покажем это на примерах.

Задача 1. *При каких действительных значениях a корни x_1 и x_2 уравнения*

$$x^2-2x-a^2+1=0$$

лежат между корнями x'_1 и x'_2 уравнения

$$x^2-2(a+1)x+a(a-1)=0?$$

Требуется найти все такие a, что соответствующие им значения x_1, x_2, x'_1 и x'_2 удовлетворяют цепочке неравенств

$$x'_1<x_1\leqslant x_2<x'_2.$$

Начать естественно с попытки решить данные уравнения и переписать эквивалентную задаче цепочку неравенств для неизвестного параметра a.

Корни первого уравнения $x_{1,2}=1\pm a$, корни второго: $x'_{1,2}=a+1\pm\sqrt{3a+1}$.

Поскольку не ясно, какое из чисел $1-a$ или $1+a$ больше, придется рассмотреть два случая. Если $1-a\leqslant 1+a$, то задача сводится к системе: $x'_1<1-a$, $x'_2>1+a$. Если же $1+a<1-a$, то получим другую систему: $x'_1<1+a$, $x'_2>1-a$.

Итак, предстоит решить совокупность двух систем иррациональных неравенств. Проделайте это самостоятельно и сопоставьте с другим решением задачи, которое мы сейчас приведем.

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ соответственно левые части первого и второго уравнений. Графики функций $y=f(x)$ и $y=g(x)$ — параболы, обращенные ветвями вверх. Обозначим через x_1 и x_2 корни уравнения $f(x)=0$, а через x'_1 и x'_2 — корни уравнения $g(x)=0$. Для всех $x\in(x'_1, x'_2)$ будет $g(x)<0$. Если $x'_1<x_1<x_2<x'_2$, то $g(x_1)<0$ и $g(x_2)<0$. Верно и обратное: если $g(x_1)<0$ и $g(x_2)<0$, то $x'_1<x_1<x_2<x'_2$. Таким образом, задача сводится к решению системы неравенств

$$\begin{cases} g(x_1)<0, \\ g(x_2)<0. \end{cases}$$

Подставив $x_{1,2}=1\pm a$ в $g(x)$, получим систему

$$\begin{cases} (1-a)^2-2(a+1)(1-a)+ \\ \qquad\qquad +a(a-1)<0, \\ (1+a)^2-2(a+1)(1-a)+ \\ \qquad\qquad +a(a-1)<0. \end{cases}$$

Решая ее, найдем $-\frac{1}{4}<a<1$.

Следует отметить, что такое преобразование задачи целесообразно, если выражения для x_1 и x_2 достаточно просты.

Однако обращение к графикам не всегда проходит так гладко и легко, как в разобранном только что примере.

Вот еще один пример.

Задача 2 (МАИ, 1970). *При каких действительных значениях параметра m корни уравнения*

$$(1+m)\,x^2-3mx+4m=0$$

подчиняются условию $2<x<5$?

Перескажем здесь решение задачи, предложенное одним абитуриентом. График квадратного трехчлена может быть обращен ветвями вверх или ветвями вниз, в зависимости от знака коэффициента при x^2. И в том, и в другом случае значения квадратного трехчлена $f(2)$ и $f(5)$ будут одного знака, то есть $f(2)\cdot f(5)>0$. Однако корни x_1 и x_2 могут быть расположены либо оба левее 2, либо оба правее 5. И в том, и в другом случае $f(2)\cdot f(5)$ будет больше нуля, но абсцисса вершины параболы x_0 окажется вне отрезка $[2,5]$. Поэтому потребуем, чтобы она была внутри этого отрезка. Остается записать, что данное уравнение имеет действительные корни, и свести решение задачи к решению системы неравенств

$$\begin{cases} f(2)\cdot f(5)>0, \\ 2<x_0<5, \\ D\geqslant 0. \end{cases} \qquad (1)$$

Приведенные рассуждения не лишены оснований, но, к сожалению, говорят о недостаточной аккуратности. Замену первоначальной задачи системой (1) нельзя признать обоснованной. Для произвольного квадратного трехчлена $f(x)$ она просто не верна (см. рис. 1). А ведь кроме этого может случиться, что коэффициент при x^2 обратится в нуль, и тогда графиком функции будет прямая.

Чтобы получить аккуратное решение задачи, нужно найти способ, обеспечивающий исчерпание всех возможных ситуаций. С этой целью удобно начать с коэффициента при x^2. Он может быть либо отрицательным, либо равным нулю, либо положительным.

Когда $1+m=0$, то есть $m=-1$, уравнение принимает вид $3x-4=0$. Его корень $x=4/3$ не удовлетворяет условию задачи, он не лежит между 2 и 5.

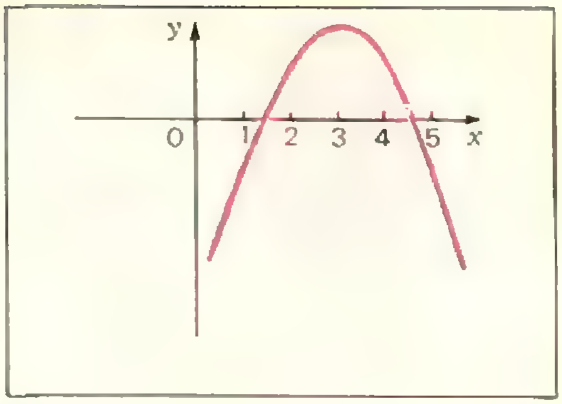


Рис. 1.

Если $1+m\neq 0$, то левая часть уравнения — квадратный трехчлен, а его график — парабола. Так как у трехчлена должны быть действительные корни, то $D\geqslant 0$, то есть $9m^2-16m\,(m+1)\geqslant 0$. Отсюда $0\geqslant m\geqslant -16/7$.

Теперь воспользуемся тем, что абсцисса вершины параболы должна лежать между ее корнями, то есть

$$2<\frac{3m}{2\,(m+1)}<5.$$

Мы уже обнаружили, что $m<0$, а потому величина $\frac{3m}{2\,(m+1)}$ будет положительной лишь при $m+1<0$. Таким образом, случай, когда ветви параболы обращены вверх, рассматривать не нужно. Решим полученное неравенство и найдем, что

$$-4<m<-\frac{10}{7}.$$

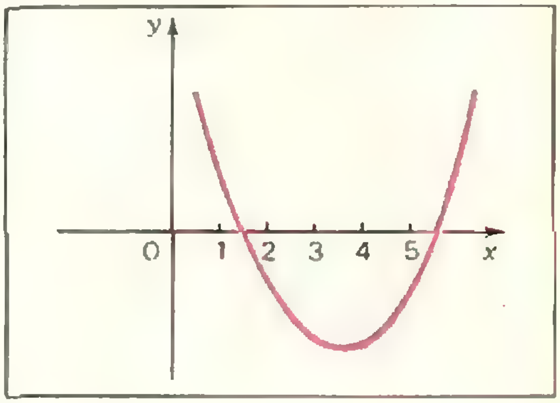


Рис. 2.

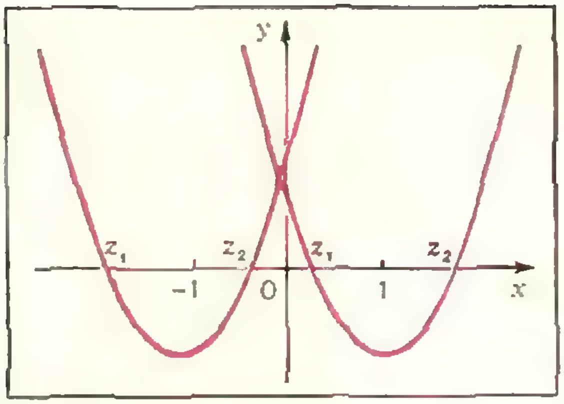


Рис. 3.

Сопоставив его с первым ограничением на m, получим $-16/7 \leqslant m < -10/7$. График нашей параболы при таких значениях m изображен на рисунке 2. Ее ветви направлены вниз, а корни будут лежать в интервале (2, 5) тогда и только тогда, когда $f(2) < 0$ и $f(5) < 0$, то есть

$$4+2m \leqslant 0, \quad 25+14m < 0.$$

Отсюда $m < -2$. Окончательно $-16/7 \leqslant m < -2$.

Задача 3 (МАИ, 1970). *При каких действительных значениях k одно из действительных решений системы*

$$\begin{cases} x+y=2(k+1), & (2)\\ xy=k^2+3k-1 & (3) \end{cases}$$

удовлетворяет условию $|x|<1$, $|y|>1$?

Наряду с системой (2), (3) естественно рассмотреть соответствующее ей квадратное уравнение

$$z^2-2(k+1)z+k^2+3k-1=0. \qquad (4)$$

Оно тесно связано с данной системой, решения которой получаются с помощью корней z_1 и z_2 уравнения (4): (z_1, z_2), (z_2, z_1).

Легко переформулировать задачу для уравнения (4): *при каких действительных k один из действительных корней уравнения (4) находится в интервале $(-1, 1)$, а другой корень расположен вне этого интервала.*

Так как у квадратного трехчлена (4) должны существовать два различных действительных корня, то $D>0$, и график левой части уравнения (4) — парабола, пересекающая ось z в двух различных точках z_1 и z_2 $(z_1 < z_2)$.

Условию задачи удовлетворяет только такое *расположение корней* квадратного трехчлена, когда один из них лежит внутри интервала $(-1, 1)$, а другой вне этого интервала (рис. 3). Если перевести это на формальный язык, то получим такие системы:

$$\begin{cases} z_1<-1, \\ -1<z_2<1; \end{cases} \quad \begin{cases} -1<z_1<1, \\ z_2>1. \end{cases} \qquad (5)$$

Чисто технические трудности, возникающие при их решении, неоправдано велики. Изучение же геометрической картины может подсказать нам менее громоздкий прием. Нетрудно заметить, что парабола расположена одним из тех способов, которые изображены на рисунке 3, тогда и только тогда, когда значения многочлена $f(z)$, стоящего в левой части (4), в точках -1 и 1 имеют разные знаки, то есть

$$f(-1)\,f(1) < 0. \qquad (6)$$

В самом деле, пусть значение k удовлетворяет условию задачи. Тогда уравнение (4) имеет два действительных корня. Если один из корней совпадает с -1 или 1, то левая часть неравенства (6) обращается в нуль. Исключим эти варианты из дальнейшего рассмотрения.

Составим теперь таблицу знаков значений $f(-1)\ f(1)$ для возможных случаев расположения z_1 и z_2 относительно интервала $(-1, 1)$ $(z_1 < z_2)$

	$z_2<-1$	$-1<z_2<1$	$z_2>1$
$z_1<-1$	$(+)(+)=+$	$(-)(+)=-$	$(-)(-)=+$
$-1<z_1<1$	—	$(+)(+)=+$	$(+)(-)=-$
$z_1>1$	—	—	$(+)(+)=+$

Поскольку исчерпаны все возможные варианты, то одновременно установлена необходимость и достаточность условия (6). Остается решить неравенство

$$(k^2+5k+2)(k^2+k-2)<0,$$

или

$$\left(k+\frac{\sqrt{17}+5}{2}\right)\left(k+\frac{\sqrt{17}-5}{2}\right)\times$$
$$\times(k+2)(k-1)<0.$$

Ответ:

$$-\frac{\sqrt{17}+5}{2}<k<-2,$$
$$\frac{\sqrt{17}-5}{2}<k<1.$$

Задача 4 (МГУ, мехмат, 1971). *Найти все значения α, при которых система неравенств*

$$\begin{cases} x^2+2x+\alpha\leqslant 0, & (7)\\ x^2-4x-6\alpha\leqslant 0 & (8)\end{cases}$$

имеет единственное решение.

Неравенства (7) и (8) могут иметь решения лишь в том случае, когда дискриминанты D_1 и D_2 их левых частей неотрицательны.

Начнем со случая $D_1=0$, то есть $\alpha=1$. Неравенство (7) принимает тогда вид $(x+1)^2\leqslant 0$ и имеет единственное решение $x=-1$. При найденных значениях x и α неравенство (8) удовлетворяется. Следовательно, $\alpha_1=1$ — одно из искомых значений α.

Пусть теперь $D_2=0$, то есть $\alpha=-\frac{2}{3}$. Единственным решением неравенства (8) при $\alpha=-\frac{2}{3}$ будет $x=2$; неравенство (7) при этих α и x не удовлетворяется.

Теперь можно предположить, что $D_1>0$ и $D_2>0$. Чтобы данная система имела единственное решение, необходимо и достаточно наличие у интервалов $[x_1, x_2]$ и $[x_1', x_2']$ решений неравенств (7) и (8) единственной общей точки. Это может произойти либо при $x_2'=x_1$, либо при $x_2=x_1'$.

График левой части (7) — парабола с абсциссой вершины $x_0=-1$, а график левой части (8) — парабола с абсциссой вершины $x_0'=2$.

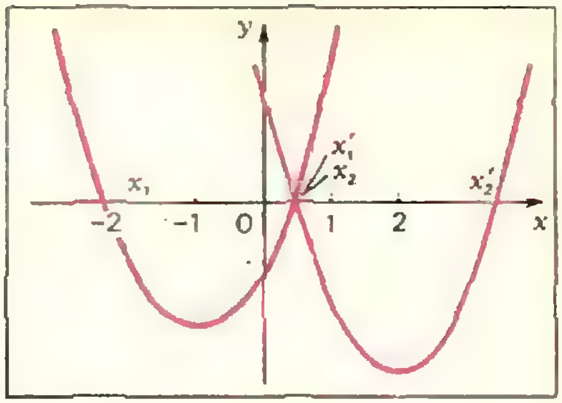


Рис. 4.

Поэтому, если α удовлетворяет условиям задачи, то параболы расположены именно так, как показано на рисунке 4. Следовательно, остается единственная возможность $x_2=x_1'$, то есть $-1+\sqrt{1-\alpha}=2-\sqrt{4+6\alpha}$. Решая это иррациональное уравнение, найдем единственный его корень $\alpha=0$ (значение $\alpha=\frac{48}{49}$, которое тоже возникает в процессе решения — посторонний корень). Итак, $\alpha=0$.

Ответ: 0; 1.

Задача 5 (НГУ, мехмат, 1968). *Для каждого действительного a среди всех точек плоскости, координаты которых x, y удовлетворяют системе неравенств*

$$\begin{cases} y-2x\geqslant 0,\\ -x^2+2ax-a^2+a+1-y\geqslant 0,\end{cases}$$

найти точки с наибольшей ординатой y.

Перепишем систему в виде

$$\begin{cases} y\geqslant f(x), & (9)\\ y\leqslant \varphi(x), & (10)\end{cases}$$

где $f(x)=2x$, а $\varphi(x)=-x^2+2ax-a^2+a+1$. График кривой $y=\varphi(x)$ — парабола, обращенная ветвями вниз, а все точки, удовлетворяющие неравенству (10), находятся не выше этой параболы. Поскольку при каждом a нас интересует решение системы, имеющее наибольшую ординату, неравенство (10) можно заменить уравнением $y=\varphi(x)$.

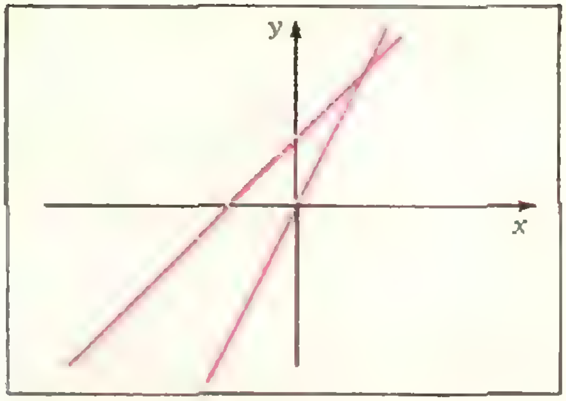


Рис. 5.

График $y = f(x)$ — прямая, проходящая через начало координат, и все точки плоскости, удовлетворяющие неравенству (9), лежат не ниже этой прямой. Таким образом, для каждого a должна быть найдена точка параболы $y = \varphi(x)$, лежащая не ниже прямой $y = 2x$ и имеющая наибольшую ординату. Возможны два случая взаимного расположения параболы и прямой: либо вершина параболы лежит не ниже прямой $y = 2x$, либо она находится под этой прямой (см. рис. 5). В первом случае решением задачи будет точка (x_0, y_0), являющаяся вершиной параболы, во втором — точка (x_1, y_1), координаты которой удовлетворяют одновременно уравнениям прямой и параболы. Уравнение параболы позволяет легко найти координаты ее вершины: $x = a$, $y = a+1$. Мы видим, что все вершины параболы $y = \varphi(x)$ при различных значениях параметра a лежат на прямой $y = x+1$, и, обратно, каждой точке (x_0, y_0) прямой $y = x+1$ соответствует парабола $y = \varphi(x)$, имеющая в ней свою вершину — достаточно взять $a = x_0$. Нанесем прямые $y = x+1$ и $y = 2x$ на один график (рис. 6). Пересечением этих двух прямых является точка (1, 2). При $a \leqslant 1$ прямая $y = x+1$ будет располагаться над прямой $y = 2x$ и решением задачи будет точка $(a, a+1)$. Если же $a > 1$, то решением является точка (x, y), удовлетворяющая системе

$$\begin{cases} y - 2x = 0, \\ -x^2 + 2ax - a^2 + a + 1 - y = 0; \end{cases}$$

отсюда

$$y = 2x \text{ и } x^2 - 2(a-1)x + a^2 - a - 1 = 0.$$

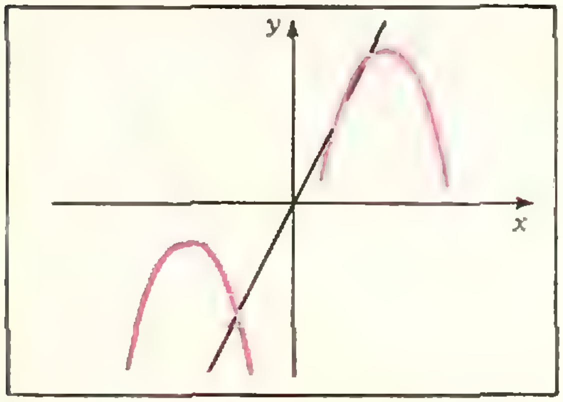


Рис. 6.

Уравнение имеет два действительных корня, когда $D = 2 - a \geqslant 0$, то есть $a \leqslant 2$. Из них условию задачи удовлетворяет больший:

$$x_2 = a - 1 + \sqrt{2 - a}.$$

Ответ: при $a \leqslant 1$, $x = a$, $y = a+1$,

при

$$1 \leqslant a \leqslant 2, \quad x = a - 1 + \sqrt{2 - a},$$

$$y = 2(a-1) + 2\sqrt{a - 1},$$

при $a > 2$ решений нет.

Однако не всегда «формальное» решение оказывается более трудоемким. Иногда оно более целесообразно, чем графическое.

Задача 6 (МАИ, 1971). *При каких действительных значениях m неравенство*

$$x^2 - 2mx + 2\,|x - m| + 2 < 0$$

имеет по крайней мере одно решение?

Преобразуем данное неравенство к виду

$$(x-m)^2 + 2\,|x-m| + 2 - m^2 < 0,$$

или

$$\begin{cases} y^2 + 2y + 2 - m^2 < 0, & (11) \\ y \geqslant 0. & (12) \end{cases}$$

где $y = |x - m|$. Система (11), (12) имеет хотя бы одно решение тогда и только тогда, когда дискриминант левой части (9) неотрицателен, а больший корень y_2 не лежит левее нуля:

$$\begin{cases} m^2 - 1 \geqslant 0, \\ -1 + \sqrt{m^2 - 1} \geqslant 0, \end{cases}$$

$$\text{то есть} \begin{cases} m^2 \geqslant 1, \\ m^2 \geqslant 2. \end{cases}$$

Ответ: $m \leqslant -\sqrt{2}$, $m \geqslant \sqrt{2}$.

Итак, мы видим, что в ряде задач удобно привлечь на помощь графическое представление квадратного трехчлена. Такой подход может оказаться полезным и для других зависимостей; он помогает обнаружить более простой и более содержательный путь решения. Однако все рассуждения относительно графиков могут стать частью решения только в том случае, когда они проведены в самом общем виде. В задачах с параметрами следует особенно внимательно отнестись к виду зависимости, поскольку при некоторых значениях параметров вид графика может существенно измениться (в примере 2 мы видели, что при $m = -1$ графиком квадратного трехчлена будет не парабола, а прямая). Использование графиков при решении задачи не является самоцелью, что наглядно подтверждается последним примером. Нужно, прежде всего, тщательно проанализировать все особенности конкретной задачи, подумать о наиболее рациональном использовании ее условий — это поможет вам найти наиболее удачное решение.

Упражнения

1. (МАИ, 1970). При каких действительных значениях a числа 1 и a заключены между числами x_1 и y_1, где (x_1, y_1) — решение системы

$$\begin{cases} x + y - 1 = 2a, \\ 2xy = a^2 - a. \end{cases}$$

2. (МАИ, 1970). Найти все действительные значения m, при которых корни уравнения

$$x^2 - 2(m-1)x + 2m + 1 = 0$$

будут разных знаков и каждый по модулю меньше четырех.

3. (МАИ, 1970). Найти все действительные значения m, при которых корни уравнения

$$(m-1)\log_3^2(x-2) - 2(m+1)\log_3(x-2) + m - 3 = 0$$

меньше трех.

4. (МГУ, мехмат, 1971). Найти все значения α, при которых решения системы

$$\begin{cases} x^2 + 6x + 7 + \alpha \leqslant 0, \\ x^2 + 4x + 7 \leqslant 4\alpha. \end{cases}$$

образуют замкнутый интервал (отрезок) длины, равной единице.

5. (МГУ, эконом, кибернетика, 1971). Найти минимальный член последовательности

$$a_n = 2n^2 - 24n + 69 - \frac{9}{(3n-22)^2 + 3} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

6. (МГУ, физфак, 1964). Найти все действительные значения m, для которых неравенство $mx^2 - 4x + 3m + 1 > 0$ удовлетворяется при всех положительных значениях x.

7. (МАИ, 1971). Найти все действительные значения a, при которых для всех положительных значений $x > -2$ удовлетворяется неравенство $\dfrac{ax - a - \frac{1}{4}}{ax - 1} < 0$.

8. (МГУ, филфак, 1968). Найти все те значения параметра a, при которых оба корня квадратного трехчлена $x^2 - ax + 2$ действительны и находятся между 0 и 3 (исключая крайние значения).

9. (МГУ, физфак, 1965). Найти все значения a, при которых корни уравнения $x^2 + x + a = 0$ больше a.

10. (МГУ, мехмат, 1966). Найти все значения a, для которых при всех x, не превосходящих по модулю единицы, справедливо неравенство $2x^2 - 4a^2x - a^2 + 1 > 0$.

Московский физико-технический институт

Подробно в Московском ордена Трудового Красного Знамени физико-техническом институте было рассказано в «Кванте» № 10 1973 года. Ниже приводятся некоторые билеты вступительных письменных экзаменов в МФТИ по математике и физике в 1974 году.

Математика

Вариант 1

1. Решить уравнение

$$\log_3(\log_2 x - 9) = 2 + \log_3(1 - 4\log_x 4).$$

2. Решить уравнение

$$\frac{\cos x}{\cos 3x} - \frac{\cos 5x}{\cos x} = 8\sin x \cdot \sin 3x.$$

3. Равнобедренная трапеция с основаниями AD и BC $(AD > BC)$ описана около окружности, которая касается стороны CD в точке M. Отрезок AM пересекает окружность в точке N. Определить отношение $\frac{AD}{BC}$, если $\frac{AN}{NM} = k$.

4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 5^{x+1}\cos y + 5^{1-x}\cdot\sin y + 2 = \\ \quad = 5^{x+1}\cdot\sin y - 5^{1-x}\cdot\cos y, \\ 5^{x+1}\sin y - 2\cdot 5^{1-x}\cdot\cos y + 4 = \\ \quad = 5^{1-x}\cdot\sin y + 2\cdot 5^{1+x}\cdot\cos y. \end{cases}$$

5. В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит прямоугольный треугольник с катетами $AB = 8$ *дм* и $BC = 6$ *дм*. Гипотенуза AC является диаметром основания прямого кругового конуса, вершина которого расположена на ребре A_1B_1. Боковая поверхность конуса пересекает ребро AB в точке M так, что $AM = 5$ *дм*. Определить объем конуса.

Вариант 2

1. Решить уравнение

$$\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[6]{x} + \sqrt{x} = 2.$$

2. Сумма членов и разность арифметической прогрессии положительны. Если увеличить разность прогрессии на 2, не меняя ее первого члена, то сумма ее членов увеличится в 3 раза. Если же разность исходной прогрессии увеличить в 4 раза, не меняя первого члена, то сумма членов прогрессии увеличится в 5 раз. Определить разность исходной прогрессии.

3. Сторона основания правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна a, точки O и O_1 являются центрами оснований ABC и $A_1B_1C_1$ соответственно. Длина ортогональной проекции отрезка AO_1 на прямую B_1O равна $\frac{5a}{6}$. Определить высоту призмы.

4. В треугольнике ABC перпендикуляр к стороне AB, проходящий через ее середину, пересекает прямую AC в точке M, а перпендикуляр к стороне AC, проходящий через ее середину, пересекает прямую AB в точке N. Известно, что $MN = BC$ и прямая MN перпендикулярна к прямой BC. Определить углы треугольника ABC.

5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x\cdot\operatorname{tg} y = \dfrac{\sin z}{\cos x\cdot\cos y} + 3, \\ \operatorname{tg} y\cdot\operatorname{tg} z = \dfrac{\sin x}{\cos y\cdot\cos z} - 5, \\ \operatorname{tg} z\cdot\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin y}{\cos z\cdot\cos x} - 3. \end{cases}$$

Вариант 3

1. Решить уравнение

$$4\sin 3x + \sin 5x - 2\sin x \cdot \cos 2x = 0.$$

2. Первая из двух окружностей проходит через центр второй и пересекает ее в точках A и B. Касательная к первой окружности, проходящая через точку A, делит вторую окружность в отношении $m:n$ $(m<n)$. В каком отношении вторая окружность делит первую?

3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2^{x-y} - 2\cdot 6^{x-y} - 6^{-2y} = 0, \\ 2^{-x-y} - 2\cdot 3^{x+y} + 3\cdot 9^{x} = 0. \end{cases}$$

4. Вдоль дороги последовательно расположены пункты A, B, C. Четыре пешехода выходят одновременно: первый и второй из A в C, третий из B в C, четвертый из C в A. Второй пешеход обогнал третьего в том же месте дороги, где встретились первый и четвертый пешеходы; первый пешеход обогнал третьего в том же месте, где встретились второй и четвертый пешеходы. Третий пешеход шел в n раз медленнее четвертого, первый и второй шли с разными скоростями. Определить отношение расстояния от A до B к расстоянию от B до C (скорости пешеходов постоянны).

5. Основанием призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ служит трапеция $ABCD$, в которой $AB \parallel CD$

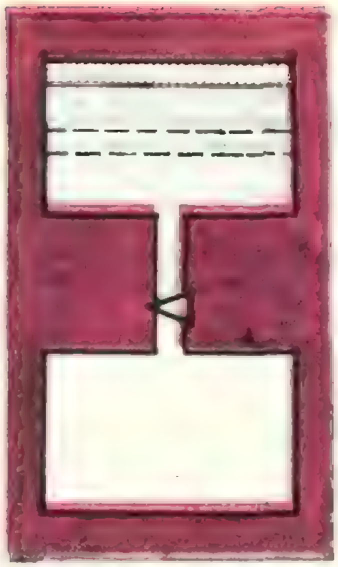


Рис. 1.

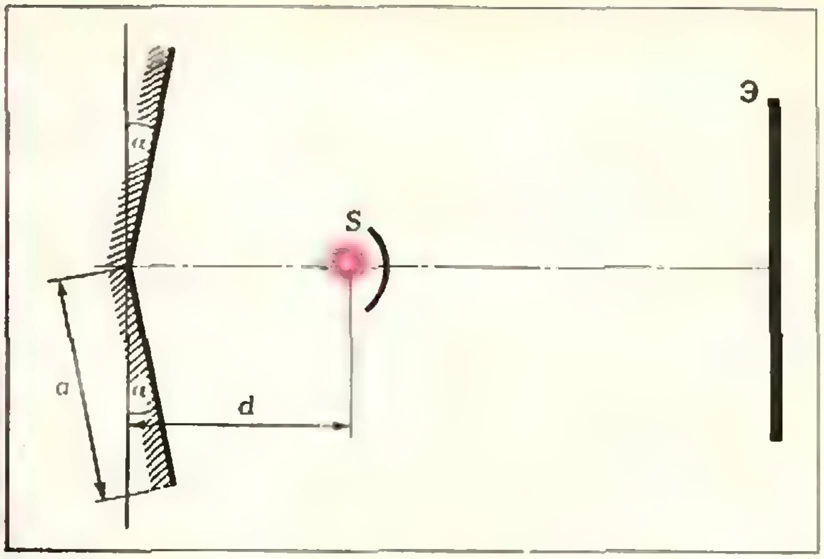


Рис. 2.

и $CD : AB = n < 1$. Диагональ AC_1 пересекает диагонали A_1C и D_1B соответственно в точках M и N, а диагональ DB_1 пересекает диагонали A_1C и D_1B соответственно в точках Q и P. Известно, что $MNPQ$ — правильный тетраэдр. Определить отношение объема тетраэдра к объему призмы.

Физика

Билет 1

1. Мешок с мукой сползает без начальной скорости с высоты H по гладкой доске, наклоненной под углом $\alpha = 60°$ к горизонту. После спуска мешок попадает на горизонтальный пол. Коэффициент трения мешка о пол $k = 0{,}7$.

Где остановится мешок?

2. Цилиндр, закрытый сверху подвижным поршнем, соединен короткой тонкой трубкой с откачанным сосудом (рис. 1). При закрытом кране под поршень вводится некоторое количество газа. Объем, занимаемый этим газом в цилиндре, равен объему нижнего сосуда. Какая часть газа останется в цилиндре после того, как кран открыли?

Температура газа в цилиндре поддерживается равной $-173°$ C, а в сосуде $+127°$ C.

3. С помощью камеры Вильсона, помещенной в магнитное поле с индукцией B, наблюдают упругое рассеяние α-частиц на ядрах дейтерия. Найти начальную энергию α-частицы, если радиусы кривизны начальных участков траекторий ядра отдачи и рассеянной α-частицы оказались одинаковыми и равными r. Обе траектории лежат в плоскости, перпендикулярной к линиям индукции магнитного поля. Заряд протона e, его масса M.

4. На рисунке 2 изображена схема опыта Френеля по наблюдению интерференции. Два одинаковых плоских зеркала образуют угол $2\alpha = 0{,}1$ *рад*. Точечный источник S находится на биссектрисе угла на расстоянии $d = 20$ *см* от линии пересечения зеркал. При каком минимальном размере зеркал a на удаленном экране Э могут наблюдаться интерференционные полосы? Прямые лучи от источника на экран не попадают.

Билет 2

1. Два тела с массами m и $3m$ движутся по взаимно перпендикулярным направлениям (рис. 3). После соударения тело массы m остановилось. Какую часть его энергии составляет выделившееся при ударе тепло?

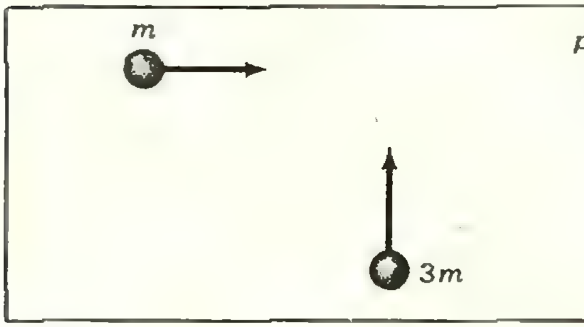


Рис. 3.

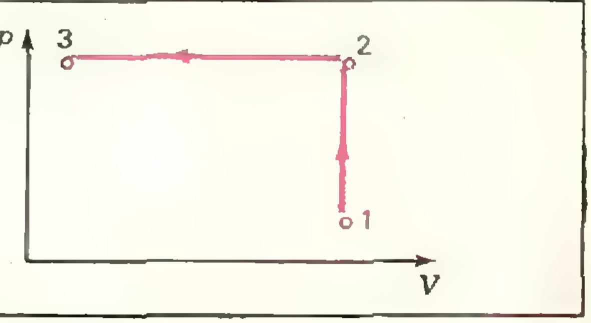


Рис. 4.

2. В настоящее время представляется возможным достижение давлений (например, с помощью специальным образом сфокусированного лазерного излучения), при которых все линейные размеры твердых тел можно уменьшить в 10 раз.

Во сколько раз у такого «сверхплотного» вещества критическая масса меньше, чем у обычного?

В критическом состоянии, когда начинается цепная реакция, число вторичных нейтронов, рождающихся в веществе, равно числу нейтронов, покидающих его через поверхность. (Вторичными называются нейтроны, возникающие при взаимодействии с делящимся веществом уже имеющихся в нем нейтронов.)

3. Плоский алюминиевый электрод освещается ультрафиолетовым светом с длиной волны $\lambda = 8{,}30 \cdot 10^{-8}$ *м*. На какое максимальное расстояние от поверхности электрода может удалиться фотоэлектрон, если вне электрода имеется задерживающее электрическое поле напряженности $E = 7{,}5$ *в/см*?

Красная граница фотоэффекта для алюминия соответствует длине волны $\lambda_0 = 33{,}2 \times 10^{-8}$ *м*. Постоянная Планка $h = 6{,}6 \times 10^{-34}$ *дж·с*, заряд электрона $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ *к*.

4. Радиус кривизны выпуклого сферического зеркала равен $R = 40$ *см*. Какую линзу следует приставить вплотную к зеркалу, чтобы получившаяся оптическая система давала прямое мнимое изображение предметов в натуральную величину?

Билет 3

1. В центр шара массы $M_1 = 300$ *г*, лежащего на краю стола, попадает горизонтально летящая пуля массы $M_2 = 10$ *г* и пробивает его насквозь. Шар падает на расстоянии $s_1 = 6$ *м* от стола, а пуля — на расстоянии $s_2 = 15$ *м*. Высота стола $H = 1$ *м*. Определить первоначальную скорость пули.

2. Электрический утюг с терморегулятором, установленным в положение «шерсть», нагревается до температуры $t_1 = 140^\circ$ C. При этом в установившемся режиме регулятор включает утюг на время $\tau = 30$ *с* через промежутки времени $T_1 = 5$ *мин*. В положении «лен» утюг включается на те же 30 *с* через более короткие промежутки времени $T_2 = 3$ *мин*. Определить температуру утюга при регуляторе, установленном в положение «лен». Температурной зависимостью сопротивления нагревателя пренебречь. Температура в комнате $t_0 = 20^\circ$ C.

3. В одной из моделей молекулярного иона водорода H_2^+ предполагается, что электрон движется по круговой орбите, лежащей в плоскости, перпендикулярной к линии, соединяющей протоны. Расстояние между протонами R, заряд электрона e, его масса m. Найти скорость, с которой движется электрон.

4. Одна из поверхностей тонкой линзы посеребрена. На расстоянии $a = 28$ *см* от линзы на ее оси находится точечный источник света. Если линза обращена к источнику посеребренной стороной, то расстояние между источником и его мнимым изображением оказывается равным 56 *см*. Если линза повернута к источнику другой стороной, то она дает параллельный пучок лучей. Определить фокусное расстояние несеребренной линзы.

Билет 4

1. С помощью линзы получено изображение Солнца. Диаметр изображения равен $d = 3$ *мм*, а расположено оно на расстоянии $L = 32$ *см* от линзы. Известно, что расстояние от Земли до Солнца равно $R = 150$ *млн. км*, а продолжительность земного года $T = 365$ *сут*. Вычислить с помощью этих данных ускорение свободного падения у поверхности Солнца.

2. Один моль идеального газа переводят из состояния 1 в состояние 3 по изохоре 1—2 и затем по изобаре 2—3 (рис. 4). На изохоре газу сообщается такое же количество тепла $Q = 3675$ *дж*, какое выделяется на изобаре. Найти конечную температуру газа, если его начальная температура $t_0 = 27^\circ$ C. Теплоемкость газа $C_V = 21$ *дж/моль·град*.

3. Два небольших проводящих шара радиуса r расположены на расстоянии R друг от друга. Шары поочередно на некоторое время заземляют. Определить потенциал шара, который был заземлен первым, если первоначально каждый шар имел заряд q.

4. Оптическая система состоит из двух линз, имеющих фокусные расстояния $F_1 = -10$ *см* и $F_2 = +10$ *см*, раздвинутых на расстояние $d = 5$ *см*. При каких положениях предмета (со стороны $Л_1$) эта система будет давать действительное изображение?

В. Е. Белонучкин, В. И. Чехлов

РЕЦЕНЗИИ, БИБЛИОГРАФИЯ

Математики о математике

Под таким названием в издательстве «Знание» в 1972 году была выпущена брошюра *), содержащая две статьи, переведенные с английского. Эти статьи образуют главу под названием «Неразумность математики» в третьем томе четырехтомной антологии «Мир математики», вышедшей в США в 1956 году и в Англии в 1960 году. Авторами статей являются известные ученые.

Первая статья называется «Потерянный и найденный парадокс»; она написана Эдвардом Каснером и Джеймсом Р. Ньюменом. Начинается она так: «Вероятно, величайший парадокс состоит в том, что в математике имеются парадоксы».

Первый тип парадоксов — это противоречия и абсурдные утверждения, являющиеся следствием неправильного рассуждения. Затем — парадоксы странные, кажущиеся невероятными, но, как показывают строгие доказательства, — истинные. «Третий и наиболее важный тип парадоксов связан с теорией множеств; такого типа парадоксы привели к пересмотру оснований математики. Логические парадоксы весьма озадачили логиков и математиков и поставили проблемы, касающиеся самого существа математики, проблемы, которые до сего дня не получили удовлетворительного решения».

В статье сначала рассматриваются примеры парадоксов второго типа. Приведем один из них. Две равные монеты лежат на столе, касаясь окружностями. Первая (пусть левая) монета, оставаясь на плоскости стола, катится по ободку второй (неподвижной) монеты. Когда точка касания монет пройдет половину окружности и окажется в диаметрально противоположной точке неподвижной монеты справа, то подвижная монета совершит не полоборота, а полный оборот (цифра на ней опять окажется в нормальном положении)!

Говоря о геометрических заблуждениях, авторы лишь упоминают об оптических иллюзиях и приводят примеры ошибок не психологического, а математического характера. Например, предлагается такой парадокс (мы даем его в сокращении): $ABCD$ — прямоугольник (см. рисунок). $CH=HB$; $HO\perp CB$; $AE=AB$; $CK=KE$; $KO\perp CE$.

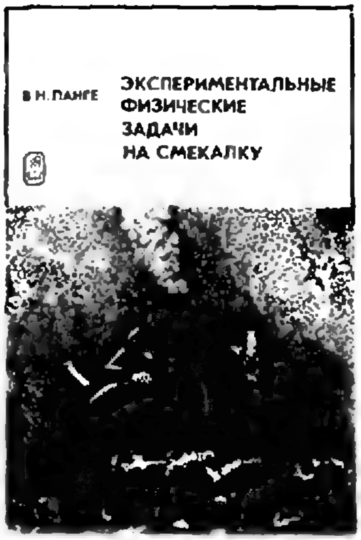
$\triangle OAE=\triangle OCD$ (по трем сторонам). Отсюда $\angle ODC=\angle OAE$. Но $\angle ODA=\angle OAD$ (углы при основании равнобедренного треугольника). Следовательно, $\angle ADC=\angle DAE$ (прямой угол равен тупому!).

---

*) Математики о математике (сборник статей). Составитель проф. В. И. Левин. Перевод с английского кандидата философских наук В. Н. Тростникова. М., «Знание», 1972. (Новое в жизни, науке, технике. Серия «Математика, кибернетика», 12.)

Как это измерить?

В последние годы выпущено довольно много задачников по физике. А если подсчитать, сколько «почему» в них содержится, то получится весьма внушительное число. Вопрос «почему» очень часто задается не только в задачниках, но и в учебной и популярной литературе. Например, замечательная книжка М. Ильина так и называется — «Сто тысяч ПОЧЕМУ». А вот вопросу «как» повезло несколько меньше — задачи, в которых предлагается указать способ измерения той или иной физической величины, встречаются относительно редко. А ведь «как» может быть не менее интересно, чем «почему». Яркую иллюстрацию этому можно найти в воспоминаниях о выдающемся физике Энрико Ферми *), где речь идет о первом испытании атомной бомбы. «Ферми встал и начал сыпать маленькие кусочки бумаги. Он подготовил про-


В. Н. ЛАНГЕ
ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ФИЗИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ НА СМЕКАЛКУ

---

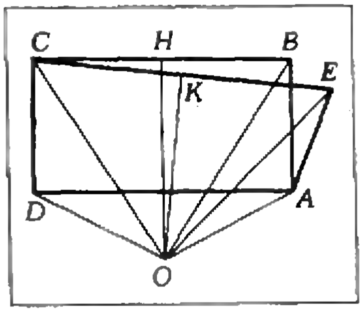
*) Э. Сегре, «Энрико Ферми — физик», М., «Мир», 1973.

Изложение этого парадокса авторы заканчивают так: «Можете ли вы найти здесь ошибку? Дадим совет: сделайте чертеж с максимальной аккуратностью».

Однако в данном парадоксе найти ошибку, содержащуюся в чертеже, можно с помощью логического исследования. Поскольку $OB = OC$ и $OE = OC$, то $OB = OE$. Точка O лежит на серединном перпендикуляре отрезка BE, а этот перпендикуляр проходит через точку A (потому что $AE = AB$). Значит, треугольники OAB и OAE расположены симметрично относительно прямой OA, а не накладываются частично. И поэтому равенство прямого и тупого углов не получается.

Рассматривая арифметические парадоксы, авторы статьи отмечают что, используя деление на нуль, можно доказать, что любое число равно любому другому. Несоблюдение алгебраического правила о том, что квадратный корень из положительного числа имеет два противоположных значения, также приводит к ошибкам и противоречиям. Читателю предлагается самостоятельно разобраться в парадоксе

$$1 = \sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1} = (\sqrt{-1})^2, \text{ т. е. } 1 = -1.$$



Приведены примеры бесконечных числовых рядов, в частности знаменитый ряд $1-1+1-1+1-1\ldots$, доставивший немало хлопот Лейбницу, а также ряд, эквивалентный натуральному логарифму числа 2: $\ln 2 = 1 - {}^1/_2 + {}^1/_3 - {}^1/_4 + {}^1/_5 - {}^1/_6 \ldots \approx 0{,}69315$.

Путем некоторых преобразований, недопустимых с точки зрения теории бесконечных рядов *), можно получить парадоксальные результаты: $(1-1)+(1-1)+(1-1)+\ldots=0$. $1-(1-1)-(1-1)-\ldots=1$. Следовательно $0=1$!

Понятие бесконечности, сыгравшее важную роль в развитии математики, породило новые проблемы и парадоксы, — в частности, в теории бесконечных множеств. Дело в том, что при работе с бесконечностью нужны свои специальные правила.

Среди логических парадоксов приведен парадокс о парикмахере, который бреет всех тех, кто не бреется сам, и в соответствии с этим правилом не может себя ни брить, ни не брить, и другие.

Авторы показывают, каким образом новый подход к вопросу о мере плоской фигуры, основанный на теории множеств, привел к неразрешимым противоречиям в связи с проблемой меры произвольной поверхности и мерой объемного тела. Немецкий математик **Хаусдорф**, а затем польские математики **Банах** и **Тарский** получили ошеломляющие выводы. Если серьезнейшему результату польских математиков придать шуточную форму, то получится примерно сле-

---

*) В «Кванте», 1974, № 9 была опубликована статья М. Л. Гервера «От перемены мест слагаемых». В ней даются предварительные сведения из теории бесконечных рядов. Прочитав эту статью, вы легко сможете объяснить причину этих парадоксов.

стой эксперимент для определения энергии взрыва: в спокойном воздухе клочки бумаги упали бы к его ногам, а когда через несколько секунд после взрыва придет фронт ударной волны, они упадут несколькими сантиметрами дальше в направлении распространения волны. По расстоянию от точки взрыва и смещению воздуха под действием ударной волны можно вычислить энергию взрыва. Эти вычисления Ферми проделал заранее, подготовив таблицу, по которой он мог сразу же определить энергию в результате такого грубого, но простого измерения... Характерно, что его ответ оказался очень близким к результату аккуратно проведенных официальных измерений. Но последний появился через несколько дней после изучения записей, а Ферми получил свой через несколько секунд».

Часто в физике, да и не только в физике, разработка простых и нестандартных методов измерения определяет успех эксперимента, помогает разобраться в природе изучаемого явления. Приходится только жалеть, что вопросу «как» не очень пока везет в литературе для школьников. И именно по этой причине следует приветствовать выпуск небольшой книги В. Н. Ланге «Экспериментальные физические задачи на смекалку» (серия «Библиотечка физико-математической школы», «Наука», М., 1974).

Во всех 116-ти задачах этой книги задается вопрос «как». Это не обычный задачник, где все распределено по разделам: механика, электричество, оптика, ведь для решения многих экспериментальных задач требуется знать больше, чем одну главу школьного учебника. Названия разделов звучат непривычно: «В домашней обстановке», «На озере», «На прогулке», «В космодующее: шар размером с Солнце можно так разрезать на отдельные части, не имеющие общих точек, и затем так сложить эти части, не сжимая и не растягивая ни одну из них, что в результате Солнце превратится в горошину и поместится в заднем кармане брюк. Горошина же в свою очередь может быть так разрезана и сложена опять, что она заполнит всю видимую Вселенную, причем не будет никаких пустот. Никакая сказка, никакая фантазия не создали бы того, что дала строгая математическая логика. Эти результаты «представляют собой постоянный вызов воображению и являются вкладом в развитие математических понятий».

Вторая статья — «Кризис интуиции» — принадлежит математику Гансу Хану; статья посвящена свойствам интуиции, ее роли в математике, ее способности порождать парадоксы. Автор рассматривает, какова роль интуиции в геометрии, и показывает, что «даже в той ветви математики, которая считается основной и первоначальной, роль интуиции постепенно сходит на нет, чтобы, наконец, окончательно исчезнуть». Например, кривую линию с древних времен понимали как геометрическую фигуру, вычерчиваемую движущейся точкой. Но итальянский математик и логик Джузеппе Пеано доказал, что такая кривая может включать в себя целые участки плоскости (движущаяся точка может, например, пройти через каждую точку квадрата). В статье приводятся примеры кривых, обладающих и не обладающих «связностью в малом», дается представление о предложенном голландским математиком Л. Брауэром способе построения карты, в которой все граничные точки будут *тройными*, об идее определения размерности точечных множеств, о кривых, состоящих целиком из точек ветвления, существование которых доказал польский математик В. Серпинский.

Автор статьи утверждает, что обычная геометрия является высшим проявлением нашей интуиции, однако эта геометрия, как и другие математические и физические понятия, представляет собой логическую структуру.

Отмечается, что ненадежность интуиции была ясно понята такими выдающимися математиками, как О. Коши, Б. Больцано, К. Вейерштрасс, Г. Кантор, Р. Дедекинд. Они считали, что каждое новое понятие в математике должно определяться логически и каждое доказательство должно использовать лишь строгую логику. Однако задача полной формализации математики и сведения ее к логике сложна и трудна, поскольку требует перестройки всей древней науки снизу доверху.

Мы рассказали здесь лишь о немногих вопросах, затрагиваемых в книге «Математики о математике». Книга очень полезна для старшеклассников, она знакомит читателя с некоторыми важнейшими идеями большой науки и, несомненно, способствует расширению кругозора юного читателя и повышению его интереса к математике.

Н. В. Метельский

се» — интересные физические задачи могут возникнуть везде.

Вот несколько задач из этой книжки.

1. Имеются две линзы: одна — собирающая, вторая — рассеивающая. Как определить, какая из них обладает большей оптической силой, не прибегая к помощи никаких приборов?

2. Вы хотите определить ширину реки в шагах Как это сделать, разумеется, приблизительно, с помощью сорванной на берегу травинки?

3. Как с помощью сильного магнита (лучше подковообразного) определить, постоянным или переменным током питается электрическая лампочка?

Тот, кто не сможет решить задачи сразу, найдет в книге не только подробные решения, но и раздел «Подсказки». Воспользовавшись им, можно не лишать себя удовольствия решить задачу самостоятельно.

Правда, в книге много искусственных задач. Не слишком ли сложно, например, определять скорость велосипеда по количеству цинка, растворенного в элементе Грене? (в задаче 91 описывается устройство этого элемента).

К сожалению, и некоторые решения также не вполне удовлетворительны. Так, скажем, в решении задачи 18 для определения высоты дома нужно воспользоваться пустой консервной банкой и секундомером. При этом учитывается конечность скорости звука, но не обращается внимание на не менее существенный фактор — сопротивление воздуха.

Но все же в целом книжка вполне интересна и нестандартна, хотя в ней довольно много простых задач. Большое число простых задач, конечно, нельзя считать недостатком книги. Она вполне доступна школьникам, только приступающим к изучению физики, и может помочь им выработать физическую интуицию.

Нет сомнения в том, что эта книга окажется полезной и школьникам, и учителям.

К. И. Кугель

Новые книги

В 1975 году мы продолжаем публикацию материалов в разделе «Новые книги». Как и в прошлые годы, в этом разделе мы будем публиковать краткие аннотации на уже вышедшие книги и на книги, которые выходят в 1975 году и представляют интерес для наших читателей. В связи с многочисленными просьбами читателей мы также будем публиковать аннотации на некоторые книги, выходящие в издательствах «Молодая гвардия», «Детская литература», «Мир» и «Знание».

В этом номере мы публикуем аннотации на книги, выходящие в I квартале 1975 года.

Заказы на книги надо своевременно оформлять через специализированные магазины или магазины «Книга-почтой».

Математика

Издательство «Наука»

1. Маркушевич А. И., *Целые функции*. Объем 5 л., тираж 30000 экз., цена 15 к., издание 2-е.

Элементарные функции, изучаемые в средней школе, являются либо целыми функциями, либо частными двух целых функций, либо обратными функциями по отношению к этим функциям.

Настоящая книга знакомит читателей с общей теорией целых функций, с их важнейшими свойствами.

Книга написана интересно и занимательно. Она интересна для учащихся старших классов, а также будет полезна учителям математики.

2. Мостеллер Ф., *Пятьдесят занимательных вероятностных задач*. Объем 6 л., тираж 100000 экз., цена 30 к., издание 2-ое.

Большинство задач, представленных в этой книге, решаются элементарным путем. Для их решения вполне достаточно знаний, полученных в средней школе, и лишь некоторые из них требуют знаний курса анализа, выходящих за рамки школьного курса математики.

Книга будет полезна учащимся старших классов, учителям математики и физики.

3. Воробьев Н. Н., *Признаки делимости*. Объем 4 л., тираж 50000 экз., цена 14 к., издание 2-е.

В книге изложены некоторые элементарные вопросы теории чисел, в частности, вопросы теории делимости. Излагая признаки делимости, автор затрагивает некоторые вопросы теории отношений и теории алгоритмов.

4. Фомин С. В., *Системы счисления*. Объем 3 л., тираж 50000 экз., цена 10 к., издание 3-е.

В этой небольшой брошюре автор подробно рассказывает о различных системах счисления. В доступной и весьма занимательной форме автор рассказывает об истории возникновения, свойствах и применениях различных систем счисления.

Книга будет очень полезна учащимся старших классов и учителям математики и физики.

5. Виленкин Н. Я., *Популярная комбинаторика*. 12 л., 100 000 экз., 40 к.

Комбинаторика — один из разделов математики, знание которого необходимо представителям самых разных специальностей. С комбинаторными задачами приходится иметь дело физикам, химикам, биологам, лингвистам, специалистам по кодам и многим другим. Комбинаторные методы лежат в основе решения многих задач теории вероятностей и ее приложений. В книге в популярной форме рассказывается об интересных комбинаторных задачах и методах их решения.

Издательство «Мир»

6. Дьюдени Г. Э., *Избранные задачи и головоломки*. Объем 25 л., тираж 100 000 экз., цена 1 руб. 49 к.

В данной книге представлено более 500 задач и головоломок известного английского ученого и популяризатора математики.

Книгу с большим удовольствием и большой пользой прочтут все читатели, любящие математику.

Физика

Издательство «Наука»

1. Баканина Л. П., Белонучкин В. Е., Козел С. М. и др., *Сборник задач по физике*. Объем 21 л., тираж 300 000 экз., цена 67 к., издание 3-е.

Этот сборник задач по элементарному курсу физики содержит задачи повышенной трудности, не выходящие, однако, за рамки программы средней школы. Все задачи снабжены решениями или подробными указаниями.

Большинство задач этого сборника были использованы при проведении вступительных экзаменов в Московский физико-технический институт.

Книга рассчитана на учащихся старших классов, учителей физики и лиц, самостоятельно готовящихся к вступительным экзаменам в вузы.

2. Демин В. Г., *Судьба Солнечной системы*. Объем 13 л., тираж 20 000 экз., цена 45 к., издание 2-е.

«Распадается ли Солнечная система?» — таков основной вопрос, рассматриваемый в этой книге.

Книга рассчитана на учащихся старших классов и учителей физики и астрономии.

3. Паули В. *Физические очерки*. (Сборник статей.) 15 л., 20 000 экз., 95 к.

В сборник вошли научно-популярные статьи одного из крупнейших физиков-теоретиков нашего века Вольфганга Паули (1900—1958). В них отразились главные этапы развития современной физики: принципы запрета и симметрии, развитие квантовой электродинамики, история нейтрино. Включены статьи о творчестве Эйнштейна, Зоммерфельда, Эренфеста, а также почти неизвестная у нас статья о замечательном естествоиспытателе XVI в. Иоганне Кеплере.

4. Франкфурт У. И., Френк А. М. *У истоков квантовой механики*. 10 л., 30 000 экз., 65 к.

В книге рассказывается о замечательном периоде в истории физики (1895—1925), богатом крупными открытиями, когда исследовательская мысль стремилась раскрыть тайны строения вещества.

Обнаружение электрона и изучение его свойств, исследование электрических разрядов в газах, учение о квантах света, создание теории относительности Эйнштейном и теории атома Бором — все это вехи на пути создания волновой и квантовой механики, освещение истории которых читатель найдет в книге.

Издательство «Молодая гвардия»

1. Ходанов М., *Как не надо себя вести*. Объем 8 л., тираж 200 000 экз., цена 44 к.

Это книга о хорошем тоне, о том, как надо и как не надо себя вести. Это книга о культуре поведения, которая связана с внутренней культурой человека.

Научно-фантастическая литература

2. Адамов А., *Злым ветром*. Объем 18 л., тираж 100 000 экз., цена 1 руб. 10 к.

Эта остросюжетная книга продолжает серию книг Адамова, ранее выпущенных в этом издательстве.

3. *Приключения, 75*. Объем 25 л., тираж 100 000 экз., цена 1 руб. 50 к.

Книга представляет собой традиционный сборник приключенческих повестей и рассказов советских авторов.

Издательство «Детская литература»

4. Войскунский Е., Лукодьянов И., *Ур, сын Шами*. Объем 25 л., тираж 100 000 экз., цена 87 к.

Фантастический роман о человеке, родившемся на другой планете и вернувшемся на Землю.

5. Свердлов А., *Схватка с оборотнем*. Объем 15 л., тираж 100 000 экз., цена 61 к.

Приключенческая повесть о работе сотрудников КГБ.

6. Стругацкий А., Стругацкий Б., *Полдень XXII века. Малыш*. Объем 30 л., тираж 100 000 экз., цена 1 руб.

Эти две повести известных советских фантастов посвящены миру будущего.

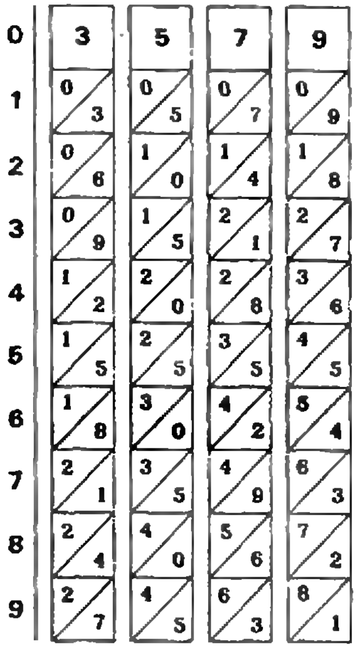
Мы приводим список книг, имеющихся в наличии. Заказы направлять по адресу: 103 050, Москва, К-50, ул. Медведева, 1, отдел «Книга-почтой» магазина № 8 Москниги.

1. Воробьев Н. Н., *Теория рядов*, «Наука», 1973, 208 стр., 38 к.
2. Градштейн И. С., *Прямая и обратная теорема* (элементы алгебры логики), «Наука», 1973, 128 стр., 24 к.
3. Кантор И. Л., Солодовников А. С., *Гиперкомплексные числа*, «Наука», 1973, 144 стр., 22 к.
4. Ламперти Д., *Вероятность*, перев. с англ., «Наука», 1973, 184 стр., 33 к.
5. Яглом А. М., Яглом И. М., *Вероятность и информация*, «Наука», 1973, 512, стр., 1 руб. 11 к.
6. Парнов Е. И., *На перекрестке бесконечностей*, «Атомиздат», 1967, 460 стр., 46 к.
7. Ромер А., *Неугомонный атом*, «Атомиздат», 1963, 128 стр., 18 к.

Т. С. Петрова,
М. Л. Смолянский

Вычислительная машина Джона Непера

Покажем (см. рис.), как выполнять на этом приборе умножение, скажем, число 3579 на 6. Положим подряд в коробке дощечки с номерами 3, 5, 7, 9 и в 6-й строке прочтем искомое число. Нам придется, правда, преодолеть небольшую сложность. Число десятков последующей дощечки входит в тот же десятичный разряд, что и число единиц предыдущей дощечки. Эти два числа при получении произведения нужно складывать.



0	3	5	7	9
1	0/3	0/5	0/7	0/9
2	0/6	1/0	1/4	1/8
3	0/9	1/5	2/1	2/7
4	1/2	2/0	2/8	3/6
5	1/5	2/5	3/5	4/5
6	1/8	3/0	4/2	5/4
7	2/1	3/5	4/9	6/3
8	2/4	4/0	5/6	7/2
9	2/7	4/5	6/3	8/1

Поэтому произведение может быть записано так: $1 \cdot 10^4 + (8 + 3) \cdot 10^3 + (0 + 4) \cdot 10^2 + (2 + 5) \times 10 + 4 = 21\,474$.

С помощью этого прибора можно также выполнять деление и извлекать квадратные корни.

В. Н. Березин

ИНФОРМАЦИЯ

Пятая математическая олимпиада МЭСИ

Олимпиада проводится в два тура: I — тур — заочный и II — очно-заочный.

К участию во втором очно-заочном туре будут допущены школьники, успешно справившиеся с задачами I тура и приславшие решения не позднее 15 марта 1975 года (по штемпелю почты). Школьники Москвы для проведения очного тура будут приглашаться в МЭСИ. Иногородние школьники участвуют во втором туре заочно. Каждый участник олимпиады, допущенный ко второму туру, будет об этом извещен. Чтобы ускорить получение ответа из института, приложите к письму конверт с вашим адресом.

Адрес МЭСИ: 119435, *Москва, Б. Саввинский пер.*, 14, *«Олимпиада-75»*.

Решение задач выполняется на русском языке в ученической тетради. Проверка всех работ, представленных на олимпиаду, будет производиться ЭВМ. Поэтому просим в конце тетради поместить ответы к задачам, заполнив следующую таблицу

Номера задач	1	2	3	4	5
Ответы					

Задачи первого тура:

1. Найти целую часть числа

$$10\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\ldots+\sqrt{1975}}}}.$$

2. Решить систему неравенств:

$$\begin{cases} \left|\,|3^x+4x-9|-8\right|\leqslant 3^x-4x-1, \\ 2^{x^2}>x+1. \end{cases}$$

3. Найти (в градусах) наименьшее положительное значение $x+y$, если

$$(1+\operatorname{tg}x)\,(1+\operatorname{tg}y)=2.$$

4. Из вершины прямого угла треугольника опущен перпендикуляр на гипотенузу. На этом перпендикуляре, как на диаметре, построена окружность. Из концов гипотенузы к этой окружности проведены касательные, касающиеся ее в точках M и N и пересекающиеся при продолжении в точке L.

Найти длины касательных MZ и NZ, если гипотенуза равна 6.

5. Шар радиуса 2,5 касается грани ABC пирамиды $ABCD$ в точке C и ребра BD в точке D. Продолжение ребра AD вторично пересекает поверхность шара в точке K так, что CK — диаметр шара.

Найти объем пирамиды, если $BD=10$, $AC=12$.

И. Г. Венецкий, Ю. И. Соркин

«Квант» для младших школьников

Задачи

1. В городе Васюки каждая семья занимала отдельный дом. В один прекрасный день каждая семья переехала в дом, ранее занимаемый другой семьей. В ознаменование этого дня горсовет решил покрасить все дома в красный, синий или желтый цвета, причем так, чтобы для каждой семьи цвета старого и нового домов не совпадали. Удастся ли горсовету это сделать?

2. Вы с приятелем спускаетесь в глубокую-глубокую шахту. У вас в руках рычажные весы, на которых уравновешен груз в 1 *кг*. У вашего приятеля — пружинные весы, на которых висит груз массой тоже 1 *кг*. Изменятся ли показания весов, когда вы спуститесь очень глубоко?

3. По кругу выписаны 1974 цифры. Если прочесть их по часовой стрелке, начиная с некоторого места, то получится число, делящееся на 27. Доказать, что если его прочесть с любого другого места, то тоже получится число, делящееся на 27.

4. Вам надо подогреть на спиртовке воду. Для этого предлагается два стакана: один из толстого стекла, другой из очень тонкого стекла. Какой стакан вы выберете?

5. Могут ли три человека, имея один двухместный мотоцикл, преодолеть расстояние 60 *км* за три часа? Скорость пешехода равна 5 *км/ч*, скорость мотоцикла (с грузом или без груза) — 50 *км/ч*.

Рисунки Э. Назарова

Головоломки и графы

М.П.Барболин

Всем известны задачи на разливание, переправы, дележи. Они прочно вошли в практику математических кружков, викторин, математических вечеров и т. д. Обычно такие задачи решаются «в уме» и требуют немалого остроумия и смекалки. Найти решение такой задачи каким-либо одним способом бывает не сложно. Гораздо сложнее указать самый короткий способ или все возможные способы решения.

Ответы на эти вопросы можно легко получить с помощью графических схем, состоящих из точек, соединенных между собой стрелками. Такие схемы называются *графами*.

Задача 1. *Два человека имеют полный кувшин молока в 8 литров, а также два пустых кувшина в 5 и в 3 литра. Как они могут разделить молоко поровну?*

Для решения задачи воспользуемся графами. Присвоим каждому кувшину номер: кувшину в 8 л — № 1, кувшину в 5 л — № 2, кувшину в 3 л — № 3. Рассмотрим возможные варианты наполнения кувшинов, получающиеся в результате одного переливания.

В начальный момент кувшин № 1 наполнен, а № 2 и № 3 — пустые. Изобразим это состояние точкой (8.0.0.) (рис. 1). Теперь из кувшина № 1 можно перелить в кувшин № 2 пять литров или в кувшин № 3 — три литра. В результате получается два новых варианта наполнения кувшинов (3.5.0.) и (5.0.3.). Их также изобразим точками, а стрелками покажем, что они получаются из исходного варианта (8.0.0.) (рис. 2). Других вариантов одним переливанием получить нельзя.

Делаем второе переливание. Чтобы не пропустить ни одной возможности, рассмотрим кувшины в порядке номеров. Берем вариант (3.5.0.) (в кувшине № 1 — 3 литра, в кувшине № 2 — 5 литров, кувшин № 3 — пуст). Из кувшина № 1 можно перелить молоко только в № 3, в результате получится новый вариант наполнения: (0.5.3.). На графе от точки (3.5.0.) ведем стрелку к точке (0.5.3.) (рис. 3). Из кувшина № 2 можно перелить молоко в № 1 или в № 3 (переливание в два кувшина считается как два последовательных переливания!), но переливание в кувшин № 1 не дает нового варианта (получающийся при этом вариант (8.0.0.) уже рассматривался), поэтому делать переливание нецелесообразно. Переливая молоко из № 2 в № 3, получаем новый вариант (3.2.3.), показываем это на графе точкой (3.2.3.) (рис. 3). Кувшин с номером три пустой, поэтому его можно не рассматривать.

Далее переходим к варианту (5.0.3.). Рассуждая аналогично предыдущему, получим еще один вариант

(5.3.0.) и соответственно достроим граф.

Теперь ясно, что процесс решения сводится к «выращиванию» графа-дерева. Продолжая рассуждения, дойдем до графа, изображенного на рисунке 4.

На нем видны две цепи, идущие из точки (8.0.0.) и заканчивающиеся искомым вариантом (4.4.0.). Они соответствуют двум различным способам искомого разливания:

I способ: (8.0.0.) → (3.5.0.) → → (3.2.3.) → (6.2.0.) → (6.0.2.) → (1.5.2.) → (1.4.3.) → (4.4.0.).

II способ: (8.0.0.) → (5.0.3.) → → (5.3.0.) → (2.3.3.) → → (2.5.1.) → (7.0.1.) → → (7.1.0.) → (4.1.3.) → → (4.4.0.)

Рис. 1

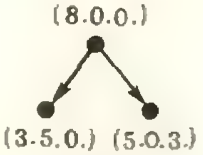


Рис. 2.

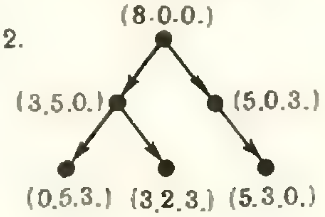

(8.0.0.)
(3.5.0.)
(5.0.3.)
(0.5.3.)
(3.2.3.)
(5.3.0.)

Рис. 3.

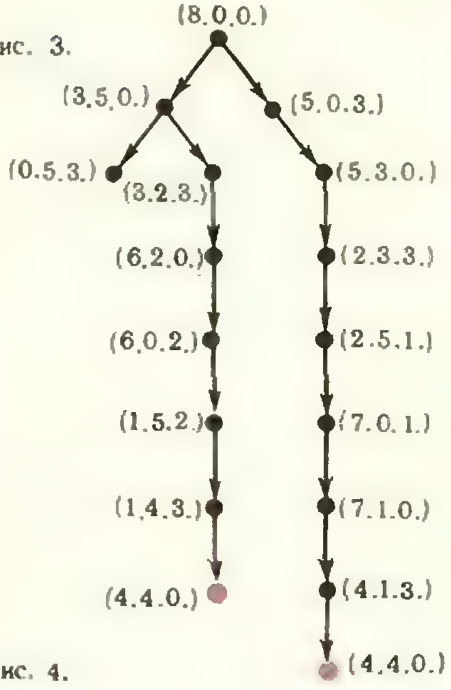

(8.0.0.)
(3.5.0.)
(5.0.3.)
(0.5.3.)
(3.2.3.)
(5.3.0.)
(6.2.0.)
(2.3.3.)
(6.0.2.)
(2.5.1.)
(1.5.2.)
(7.0.1.)
(1.4.3.)
(7.1.0.)
(4.4.0.)
(4.1.3.)
(4.4.0.)

Рис. 4.

Задача 2. *Перевозчику (П) нужно переправить через реку волка (В), козу (К) и мешок с капустой (М). Лодка так мала, что кроме перевозчика можно взять только один из объектов. Кроме того, капусту нельзя оставлять вместе с козой, а козу — вместе с волком. Как осуществить переправу?*

Пусть для определенности в начальный момент все находятся на левом берегу (Л. Б.). Изобразим исходную ситуацию точкой и обозначим ее так: (*В. К. М. П.* ‖ —) (рис. 5). В первый рейс перевозчик может взять только козу (так как ее нельзя оставить ни с волком, ни с капустой). В результате получим новую ситуацию: (*В. М.* ‖ *К. П.*). (волк и мешок на левом берегу, коза и перевозчик — на правом). Изобразим ее точкой и проведем к ней стрел-

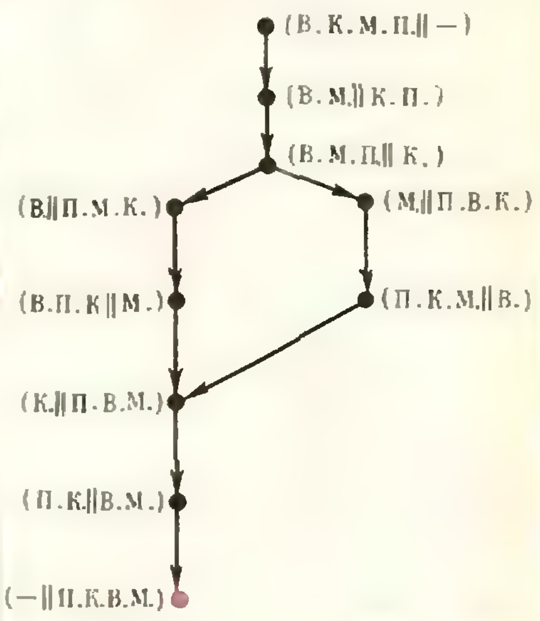

(В.К.М.П.‖ —)
(В.М.‖К.П.)
(В.М.П.‖К.)
(В‖П.М.К.)
(М.‖П.В.К.)
(В.П.К‖М.)
(П.К.М.‖В.)
(К.‖П.В.М.)
(П.К.‖В.М.)
(—‖П.К.В.М.)

Рис. 5.

ку из точки (*В. К. М. П.* ‖ —), показывающую, что она получена из ситуации (*В. К. М. П.* ‖ —) за одну перевозку. Обратно перевозчик едет один (возвращаться к исходной ситуации — везти козу обратно — *нецелесообразно). Возникающую ситуацию* (*В. М. П.* ‖ *К.*) изображаем точкой на графе. Далее перевозчик имеет две возможности: везти или волка (*В*) или мешок (*М*). Получаем две возможные ситуации: (*В.* ‖ *П. М. К.*) или (*М.* ‖ *П. В. К.*). Каждую из них изображаем точкой на графе. Рассматривая аналогично каждый из полученных вариантов, мы придем к требуемой ситуации: (— ‖ *П. К. В. М.*) (рис. 5). Две (частично совпадающие) цепи на графе соответствуют двум различным способам решения задачи.

Упражнения

1 (Задача Пуассона). Известному французскому математику Симону Пуассону (1781—1810) в юности предложили задачу. Заинтересовавшись ею, Пуассон увлекся математикой и посвятил этой науке всю свою жизнь. Вот эта задача.

Некто имеет 12 пинт вина (пинта — мера объема) и хочет подарить из этого количества половину, но у него нет сосуда в 6 пинт. У него два сосуда: один в 8, другой в 5 пинт.

Каким образом налить 6 пинт вина в сосуд на 8 пинт? Какое наименьшее число переливаний необходимо при этом сделать?

2. Имеется 4 бочки. В первую входит 24 ведра, емкость второй — 13 ведер, третьей — 11 ведер, четвертой — 5 ведер. Вначале наполнена только первая бочка. Требуется ее содержимое разлить на три равные части так, чтобы первые три бочки содержали по 8 ведер, а четвертая осталась пустой.

3 (Старинная задача). Три солдата и три разбойника должны переправиться через реку. Они нашли лодку, в которую помещается только два человека. Нельзя оставить на берегу больше разбойников, чем солдат. Как им всем шестерым переправиться через реку? Найти все возможные способы.*)

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

К статье «Арифметико-геометрическая прогрессия»

(см. «*Квант*», 1975, № 1)

1. На рисунке 1 изображены остроугольные треугольник $A_nB_nC_n$ и описанный около него треугольник $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$. Выразим угол A_{n+1} через угол A_n. Радиусы B_nO_n и C_nO_n окружности, описанной около треугольника $A_nB_nC_n$, перпендикулярны к сторонам $A_{n+1}C_{n+1}$ и $A_{n+1}B_{n+1}$ треугольника $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$ и образуют угол $B_nO_nC_n$, равный $2\angle A_n$; поэтому

$$\angle A_{n+1} = \angle B_nA_{n+1}C_n = \pi - \angle B_nO_nC_n = \pi - 2\angle A_n,$$

то есть

$$\angle A_{n+1} = -2\angle A_n + \pi.$$

Согласно формуле (2) (с. 37) находим

$$\angle A_{n+1} = (-2)^n \cdot \left(\angle A_1 - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\pi}{3}.$$

Соответственно найдем

$$\angle B_{n+1} = (-2)^n \cdot \left(\angle B_1 - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\pi}{3},$$

$$\angle C_{n+1} = (-2)^n \cdot \left(\angle C_1 - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\pi}{3}.$$

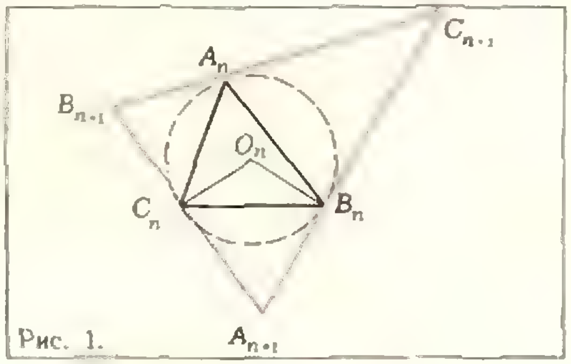


Рис. 1.

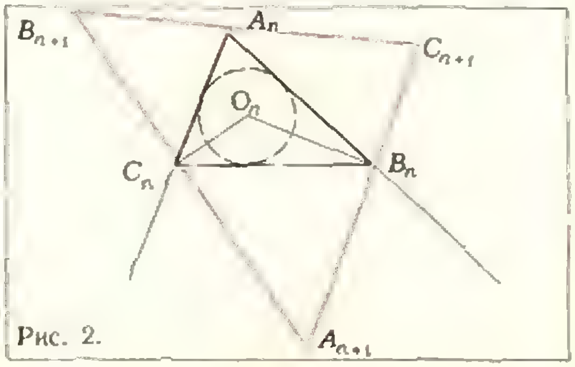


Рис. 2.

---

*) Разрешается оставлять на берегу одних разбойников или одних солдат.

2. На рисунке 2 изображены треугольники $A_nB_nC_n$ и $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$. Заметим, что $A_{n+1}C_n$ перпендикулярна к C_nO_n, $A_{n+1}B_n$ — перпендикулярна к B_nO_n (O_n — центр вписанной в треугольник $A_nB_nC_n$ окружности. $A_{n+1}C_n$ и $A_{n+1}B_n$ — биссектрисы внешних углов треугольника, C_nO_n и B_nO_n — биссектрисы соответствующих внутренних углов). Поэтому

$$\measuredangle A_{n+1} = \measuredangle B_nA_{n+1}C_n = \pi - \measuredangle B_nO_nC_n =$$
$$= \pi - (\pi - \measuredangle Q_nB_nC_n - \measuredangle O_nC_nB_n) =$$
$$= \frac{1}{2}\measuredangle B_n + \frac{1}{2}\measuredangle C_n = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\measuredangle A_n,$$

то есть

$$\measuredangle A_{n+1} = -\frac{1}{2}\measuredangle A_n + \frac{\pi}{2}.$$

Из формулы (2) получаем

$$\measuredangle A_{n+1} = \left(-\frac{1}{2}\right)^n\left(A_1 - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\pi}{3}.$$

Аналогичные выражения — для $\measuredangle B_{n+1}$ и $\measuredangle C_{n+1}$. При $m \to \infty$ величины углов треугольника $A_mB_mC_m$ стремятся к $\frac{\pi}{3}$, то есть треугольник $A_mB_mC_m$ стремится к правильному.

3. На рисунке 3 изображены окружность и вписанные в нее треугольники $A_nB_nC_n$ и $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$. Имеем

$$\measuredangle A_{n+1} = \measuredangle B_{n+1}A_{n+1}C_{n+1} =$$
$$= \measuredangle B_{n+1}A_{n+1}A_n + \measuredangle A_nA_{n+1}C_{n+1}$$
$$= \measuredangle B_{n+1}B_nA_n + \measuredangle A_nC_nC_{n+1} =$$
$$= \frac{1}{2}B_n + \frac{1}{2}C_n = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}A_n,$$

то есть

$$A_{n+1} = -\frac{1}{2}A_n + \frac{\pi}{2}.$$

Последовательность величин углов $\{\measuredangle A_n\}$ вновь образует арифметико-геометрическую прогрессию, и поэтому

$$A_{n+1} = \left(-\frac{1}{2}\right)^n\cdot\left(A_1 - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\pi}{3}.$$

Аналогично получим

$$B_{n+1} = \left(-\frac{1}{2}\right)^n\cdot\left(B_1 - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\pi}{3}$$

и

$$C_{n+1} = \left(-\frac{1}{2}\right)^n\cdot\left(C_1 - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\pi}{3}.$$

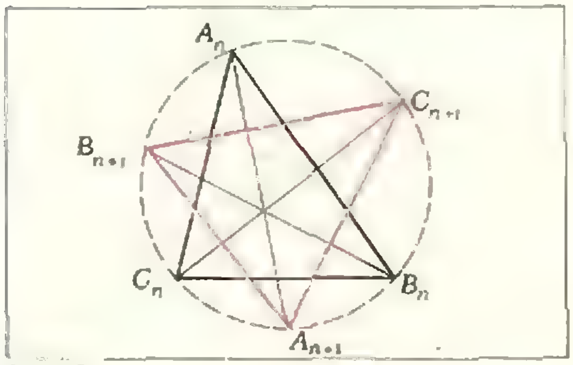


Рис. 3

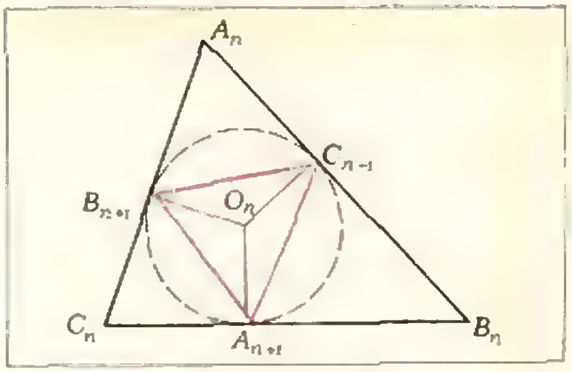


Рис. 4.

4. Имеем (см. рис. 4)

$$\measuredangle A_{n+1} = \measuredangle B_{n+1}A_{n+1}C_{n+1}$$
$$= \frac{1}{2}\measuredangle B_{n+1}Q_nC_{n+1} = \frac{1}{2}(\pi - A_n).$$

По формуле (2)

$$\measuredangle A_{n+1} = \left(-\frac{1}{2}\right)^n\cdot\left(A_1 - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\pi}{3}.$$

К статье «Транспортные сети и электрические цепи»

1. Доказательство аналогично приведенному в статье для задачи о максимальном потоке. Сперва нужно проанализировать одну ветвь $i - j$ и показать, что $p_i - p_j = c_{ij}$ при $\tilde{x}_{ij} > 0$ и $p_i - p_j \leqslant c_{ij}$ при $x_{ij} = 0$, то есть, что

$$p_i - p_j \leqslant c_{ij}$$
$$\text{и} \quad [c_{ij} - (p_i - p_j)]\,x_{ij} = 0. \qquad (1)$$

Доказательство утверждения, сформулированного в задаче, состоит из двух частей: 1) установления неравенства

$$\sum_{i,j} c_{ij}x_{ij} \geqslant p_1 - p_6 \qquad (2)$$

для любых значений x_{ij}, удовлетворяющих условиям а), б), в) (см. с. 17) задачи о минимизации транспортных затрат; 2) доказательство того, что для токов $\tilde{x}_{ij}$ в ветвях модели неравенство (2) переходит в равенство (при этом используются соотношения (1)).

2. Если хоть бы для одного x_{ij} выполнялось неравенство $0<\tilde{x}_{ij}<1$, то $\sum_{i,j} c_{ij}\tilde{x}_{ij} = \sum_{i,j}(p_i-p_j)\tilde{x}_{ij} < \sum_{i,j}(p_i-p_j) = p_1-p_5$, что противоречит равенству $\sum_{i,j} c_{ij}\tilde{x}_{ij} = p_1 - p_5$. Здесь учтено, что если по ветви $i-j$ идет ток $\tilde{x}_{ij}>0$, то $p_i-p_j>0$.

3. Достаточно принять стоимости затрат перевозки единицы груза c_{ij} равными длинам l_{ij} соответствующих дуг. Решение задачи определит минимальное значение суммы $\sum_{i,j} l_{ij}x_{ij}$, равное $\sum_{i,j} l_{ij}\tilde{x}_{ij}$. Из результата задачи 2 следует, что последняя сумма равна длине кратчайшего пути из входа к выходу сети, а сам этот путь определяется ветвями, по которым проходит ненулевой ток.

К статье «Прямая Эйлера»

Для краткости радиус-векторы $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}, \ldots$ будем обозначать через $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}, \ldots$ Согласно правилу вычитания векторов, $\overrightarrow{AB} = \vec{B} - \vec{A}$. Эта формула используется при решении задач 1—5.

1. б) Пусть за начало векторов принят центр O сферы, описанной около тетраэдра $ABCD$. Учитывая, что $(\vec{B}+\vec{C})(\vec{B}-\vec{C}) = \vec{B}^2 - \vec{C}^2 = \vec{R}^2 - \vec{R}^2 = 0$, где R — радиус сферы, найдем $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{CB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CB}$.

Так как $AD \perp BC$, то $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC} = 0$ и, следовательно, $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC} = 0$, то есть $\overrightarrow{AH} \perp BC$. Аналогично получим, что $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{CD}$. Значит, точка H лежит на высоте тетраэдра, проведенной из вершины A. Точно так же доказывается, что точка H принадлежит трем другим высотам тетраэдра.

2. Считая началом векторов любую точку O пространства, имеем

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BD}$$
$$=(\vec{B}-\vec{A})(\vec{D}-\vec{C}) + (\vec{C}-\vec{B})(\vec{D}-\vec{A}) +$$
$$+(\vec{A}-\vec{C})(\vec{D}-\vec{B}) = 0.$$

а) Пусть высоты треугольника ABC, проведенные из вершин A и B, пересекаются в точке D. Тогда $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD} = 0$. и $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BD} = 0$. Значит, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = 0$ и $\overrightarrow{CD} \perp \overrightarrow{AB}$, то есть точка D также лежит на высоте, проведенной из вершины C.

3. Приняв за начало векторов любую точку O, получим

$$|AB|^2 + |CD|^2 - |AD|^2 - |BC|^2 =$$
$$= (\vec{A}-\vec{B}) + (\vec{C}-\vec{D})^2 - (\vec{A}-\vec{D})^2 -$$
$$-(\vec{B}-\vec{C})^2 = 2(\vec{A}-\vec{C})(\vec{D}-\vec{B}) = 2\,\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}.$$

4. Примем вершину D тетраэдра $ABCD$ за начало векторов. Обозначим $B\hat{D}A = \alpha$, $C\hat{D}A = \beta$, $A\hat{D}B = \gamma$, тогда

$$\cos\alpha = \frac{\vec{B}\cdot\vec{C}}{|\vec{B}|\cdot|\vec{C}|}, \qquad \cos\beta = \frac{\vec{A}\cdot\vec{C}}{|\vec{A}|\cdot|\vec{C}|},$$

$$\cos\gamma = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{A}|\cdot|\vec{B}|}.$$

Так как $AC \perp BD$, то $\vec{A}\cdot\vec{B} - \vec{B}\cdot\vec{C} = \vec{B}(\vec{A}-\vec{C}) = \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD} = 0$, откуда $\vec{A}\cdot\vec{B} = \vec{B}\cdot\vec{C}$. Аналогично, $\vec{B}\cdot\vec{C} = \vec{C}\cdot\vec{A}$. Поэтому $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ одновременно либо положительны, либо равны нулю, либо отрицательны, то есть углы α, β, γ одновременно либо острые, либо прямые, либо тупые.

Если хотя бы при одной вершине плоские углы прямые или тупые, то все остальные плоские углы тетраэдра являются острыми, поэтому грань, противолежащая этой вершине, является остроугольным треугольником.

5. б) Выберем за начало векторов центр O сферы, описанной около ортоцентрического тетраэдра $ABCD$, и вычислим радиус-вектор точки Q_2. Из условия следует, что $|HG_1| : |G_1G_2| = 1:2$. Пользуясь формулой (1) (в статье), найдем $\vec{G}_1 = \frac{\vec{G}_2 + 2\vec{H}}{3}$, откуда $\vec{G}_2 = 3\vec{G}_1 - 2\vec{H}$. Учитывая, что $3\vec{G}_1 = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$ и $2\vec{H} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D}$, получим $\overrightarrow{OG_2} = -\overrightarrow{OD}$. Следовательно, точки G_2 и D симметричны относительно центра O сферы, описанной около тетраэдра, обе лежат на сфере и DG_2 — диаметр этой сферы.

Так как $\overrightarrow{HH_2} = 3\overrightarrow{HH_1}$, то $\overrightarrow{HH_1} : \overrightarrow{H_1H_2} = 1:2$. Из подобия треугольников HH_1G_1 и HH_2G_2 вытекает, что $H\hat{H}_2G_2 = H\hat{H}_1G_1 = 90°$, то есть диаметр DG_2 сферы виден из точки H_2 под прямым углом. Следовательно, точка H_2 также лежит на сфере.

6. б) Воспользуемся результатом предыдущей задачи при тех же обозначениях.

Гомотетия с центром гомотетии H и коэффициентом $1/3$ переводит точки G_2, H_2, D соответственно в точки G_1, H_1, D_1, где D_1 — точка, делящая отрезок HD в отношении 1:2, считая от ортоцентра H. Так как точки G_2, H_2, D принадлежат сфере, описанной около тетраэдра, то указанная гомотетия переводит эту сферу в сферу, проходящую через точки G_1, H_1, D_1 (сферу 12 точек), и ее центр O — в центр O_1 сферы 12 точек так, что $\overrightarrow{HO_1} = \frac{1}{3}\overrightarrow{HO}$.

К статье «Когда помогают графики»

1. $0 < a < 5$.

2. $-\frac{9}{10} < m < -\frac{1}{2}$.

3. $\frac{1}{3} \leqslant m \leqslant 1$.

4. $\alpha = 1$.

5. $a_6 = -3\frac{9}{19}$.

6. $m > 1$.

7. $-\frac{1}{2} \leqslant a < -\frac{1}{4}$.

8. $2\sqrt{2} \leqslant a < \frac{11}{3}$.

9. $a < -2$.

10. $-\frac{\sqrt{2}}{2} < a < \frac{\sqrt{2}}{2}$.

К задачам «Квант» для младших школьников»

(см. «Квант», 1975, № 1)

1. Пройти половину расстояния от дуба до вяза, повернуть налево под прямым углом и пройти такое же расстояние. В этой точке и закопан клад.

2. $\overline{\text{заказ}} = 59\,259$.

3. Нет, не удастся. Каждая фишка смещается на четное число мест, и поставить первую фишку на последнее место (сместив ее на 99 мест) не удастся.

4. Изменить направление движения на противоположное без взаимодействия с другими телами невозможно.

5. Нет. Конь на каждом ходу попадает на поле другого цвета, поэтому должен пройти равное число черных и белых полей, а хулиган Вася отпилил неравное число черных и белых полей.

К геометрическим задачам

(см. «Квант», 1975, № 1, с. 63)

1. Указание. Легко проверить, что точки A, B, C делят пополам дуги EF, FD, DE.

2. Разделить сторону BC точкой F в отношении $m:n$. На BC описать полуокружность и восстановить к BC в точке F перпендикуляр FG (точка G — на полуокружности). Продолжить CB и DA до пересечения в E. Провести окружность с центром E и радиусом EG, пересекающую BC в H. Через H провести HK параллельно CD.

3. Указание. Легко видеть, что H — центр окружности, вписанной в UVW. Значит, $OA \perp VW$ (так как A делит пополам $\smile VW$).

4. Провести хорду AM через H и разделить HM пополам точкой D. Через D провести хорду BC перпендикулярно к AM. Треугольник ABC — искомый.

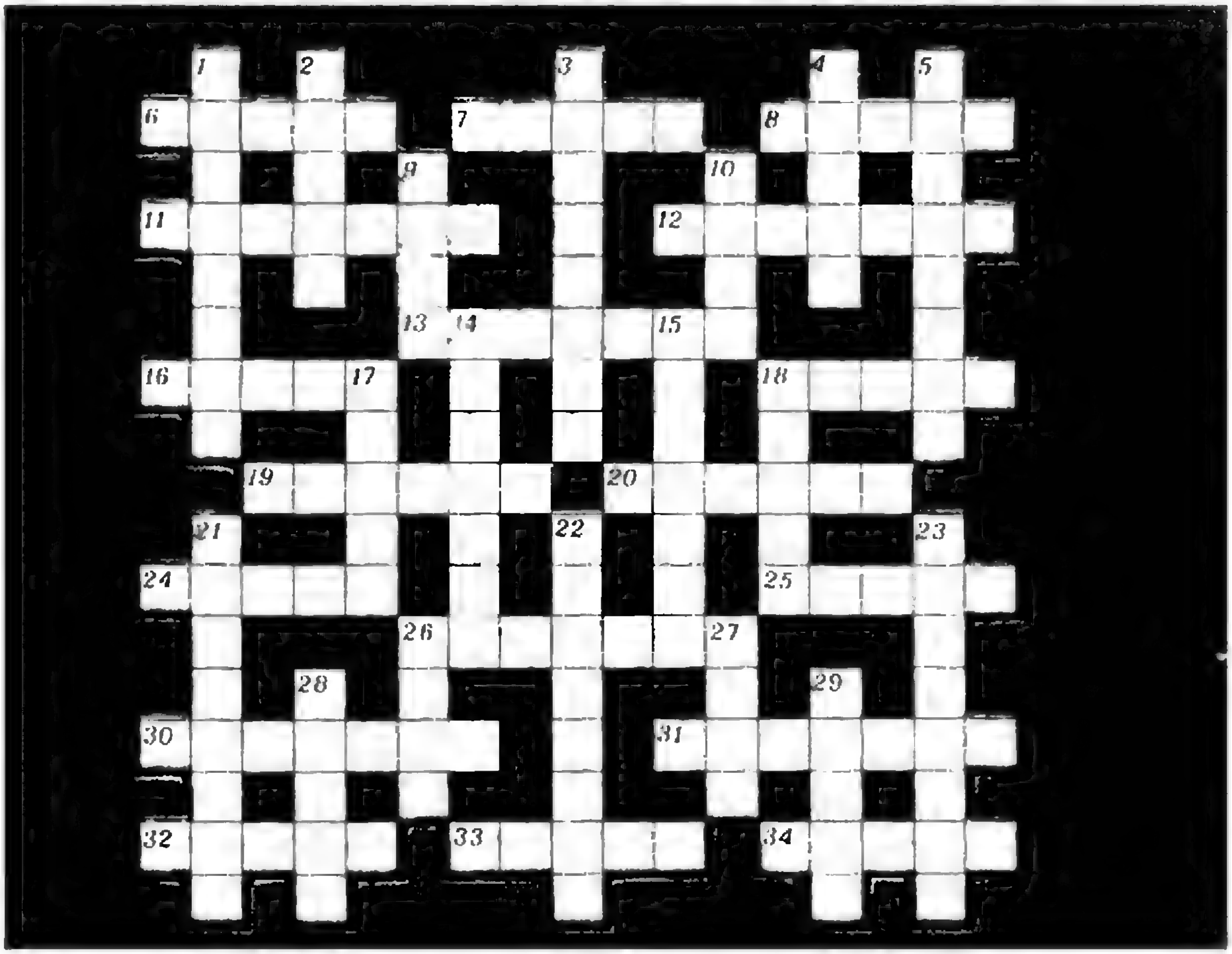
5. Провести прямую $A'X'B'$ параллельно AXB на расстоянии c от нее ($XX' \perp AB$), где c — радиус данной окружности. Соединить центр O окружности с X' и разделить OX' точкой Q так, что $OQ \cdot OX' = r^2$. Провести окружность с центром E, касающуюся $A'B'$ в X' и проходящую через Q. Окружность с центром E и радиусом $EX' \pm c$ — искомая (знак у c зависит от того, по одну сторону от AB лежат точки E и O или по разные).

Корректор *Е. Я. Строева*

117071, Москва, В-7, Ленинский проспект, 15.
«Квант», тел. 234-08-11. Сдано в набор 15/XI-74 г.
Подписано в печать 27/XII-74 г.
Бумага 70×100¹/₁₆. Физ. печ. л. 4
Усл. печ. л. 5,2 Уч.-изд. л. 5,75
Тираж 365580 экз. Т-21339
Цена 30 коп. Заказ 2328

Чеховский полиграфический комбинат
Союзполиграфпрома
при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли, г. Чехов Московской области

Рукописи не возвращаются



КРОССВОРД

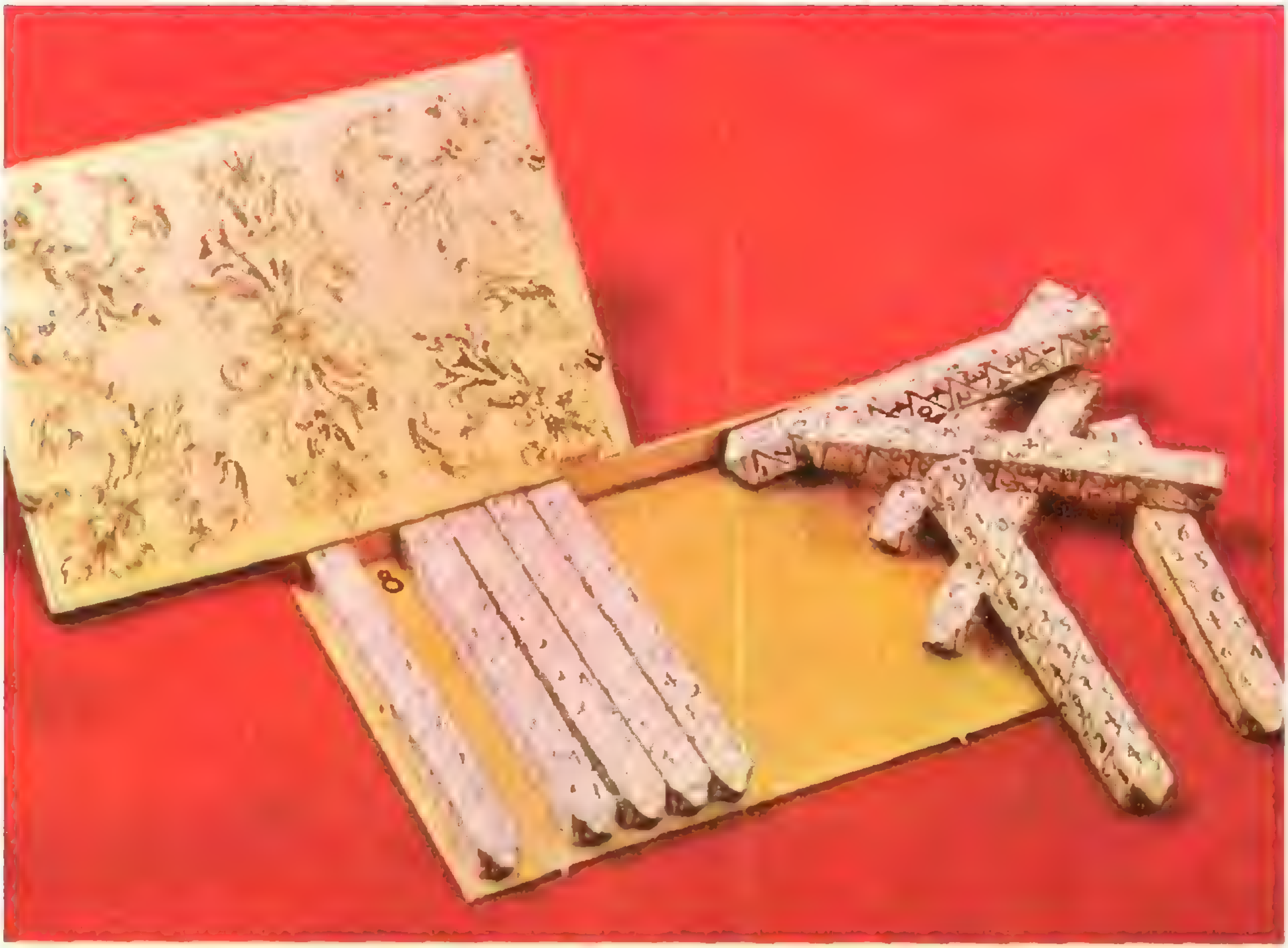
По горизонтали

6. Итальянский физик, лауреат Нобелевской премии. 7. Светотехническая единица. 8. Английский ученый, разработавший теоретические основы акустики и физики колебаний. 11. Русский физик. 12. Советский ученый, конструктор ультразвуковых дефектоскопов. 13. Основная часть двигателя внутреннего сгорания. 16. Русский физик. 18. Французский физик, установивший закон взаимодействия электрических зарядов. 19. Дополнительная шкала на измерительном инструменте. 20. Сплав, применяемый в электротехнике. 24. Изобретатель логарифмов. 25. Единица магнитной индукции. 26. Строительный материал. 30. Советский авиаконструктор. 31. Электрод полупроводникового триода. 32. Подвижная часть электрических машин. 33. Русский физик и электротехник. 34. Деталь подшипника.

По вертикали

1. Приспособление, обладающее односторонней проводимостью. 2. Единица силы тока. 3. Элементарная частица. 4. Английский ученый XVI века, родоначальник опытного естествознания. 5. Двухэлектродная электронная лампа, служащая для выпрямления переменного тока. 9. Известный немецкий физик XIX века. 10. Единица давления. 14. Количество движения. 15. Английский физик XIX века, создавший один из гальванических элементов. 17. Американский ученый — основоположник кибернетики. 18. Единица веса. 21. Советский физик, лауреат Нобелевской премии. 22. Русский инженер, усовершенствовавший электросварку. 23. Бесцветная вязкая жидкость. 26. Электрод. 27. Советский физик, лауреат Нобелевской премии. 28. Элементарная частица. 29. Термопластическая масса.

Составитель Ш. Сархатов



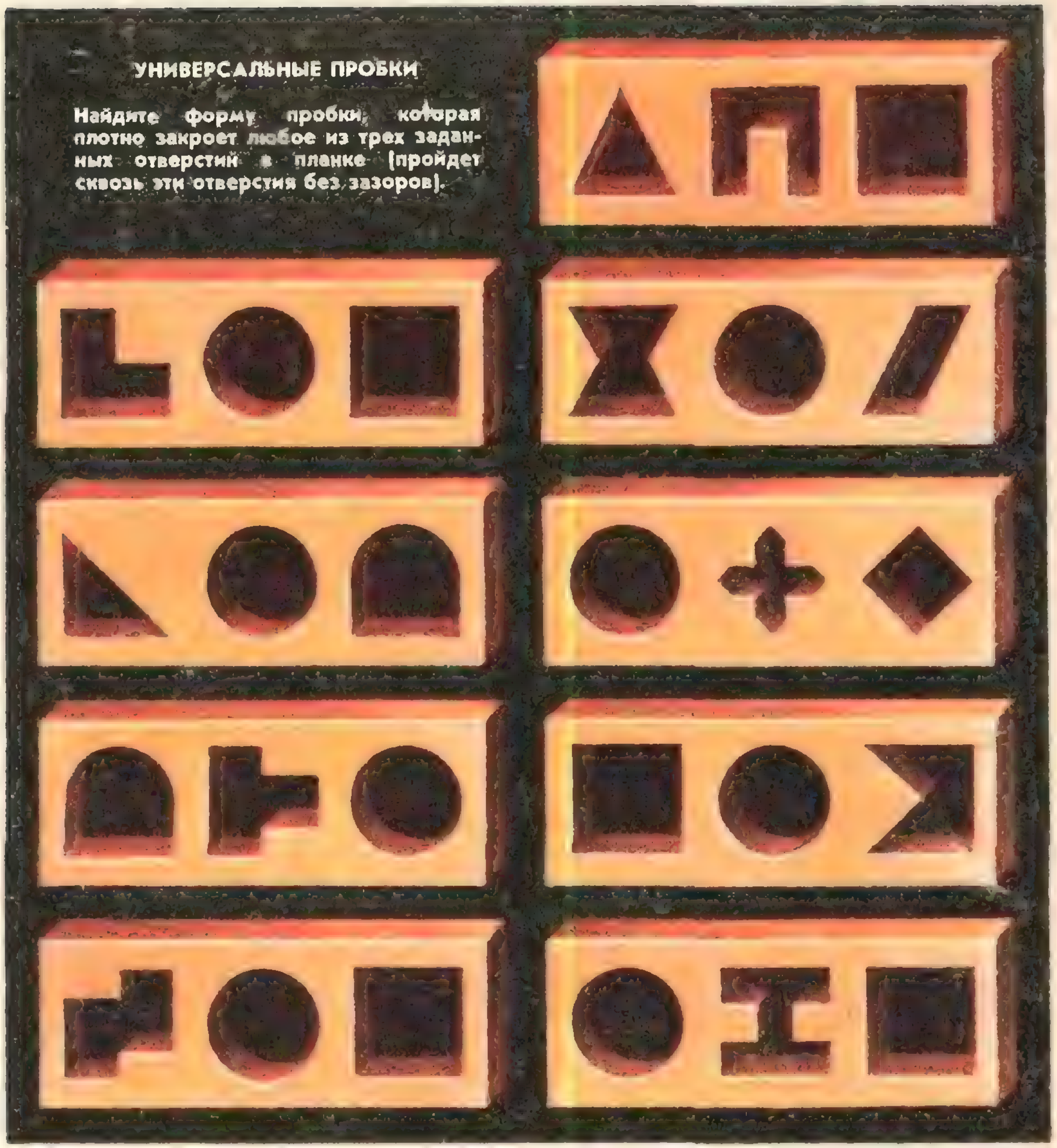
На верхней фотографии изображены «костяные дощечки Непера» в медной коробочке, изготовленные в 1617 году — в том самом году, когда они были изобретены. Это своеобразное вычислительное устройство, принцип действия которого использует очевидные свойства Пифагоровой Таблицы умножения, представляя ее в «разъемном варианте». С помощью изобретения Джона Непера, перекладывая «дощечки», можно выполнить умножение, деление целых чисел и даже извлекать квадратные корни. Умножение производится особенно просто и практически, благодаря «дощечкам», заменяется сложением. Поэтому современниками высоко оценены «костяные дощечки». На недостатки прибора, в том числе, на то обстоятельство, что составные части его легко рассмотреть, обладатели прибора обратили внимание позже.

Настоящий прибор входит в коллекцию Парижского музея Прикладных искусств.

О том, как пользоваться вычислительным устройством Непера, рассказывается в «Кванте» № 2, с. 42.

Цена 30 коп.
Индекс 70465

2



УНИВЕРСАЛЬНЫЕ ПРОБКИ

Найдите форму пробки, которая плотно закроет любое из трех заданных отверстий в планке (пройдет сквозь эти отверстия без зазоров).

НОМЕР
3

Основан в 1970 году.

Квант

1975
3

Научно-популярный
физико-математический
журнал
Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической
литературы

Главный редактор
академик И. К. Кикоин

Первый заместитель
главного редактора
академик А. Н. Колмогоров

Редакционная коллегия:

М. И. Башмаков,
С. Т. Беляев,
В. Г. Болтянский,
Н. Б. Васильев,
Ю. Н. Ефремов,
В. Г. Зубов,
П. Л. Капица,
В. А. Кириллин,
главный художник
А. И. Климанов,
С. М. Козел,
зам. главного редактора
В. А. Лешковцев,
Л. Г. Макар-Лиманов,
А. И. Маркушевич,
Н. А. Патрикеева,
И. С. Петраков,
Н. Х. Розов,
А. П. Савин,
И. Ш. Слободецкий,
зам. главного редактора
М. Л. Смолянский,
Я. А. Смородинский,
В. А. Фабрикант,
А. Т. Цветков,
М. П. Шаскольская,
С. И. Шварцбурд,
А. И. Ширшов.

Редакция:

В. Н. Березин,
А. Н. Виленкин,
И. Н. Клумова,
художественный редактор
Т. М. Макарова,
Н. А. Минц,
Т. С. Петрова,
В. А. Тихомирова,
зав. редакцией
Л. В. Чернова

В НОМЕРЕ:

2 *Н. Я. Виленкин, В. П. Лишевский.* Софья Васильевна Ковалевская
12 *И. И. Воробьев.* Электронный ветер
16 *И. Н. Бронштейн.* Гипербола
25 *И. П. Стиханов.* Масса и энергия в теории относительности
30 *Л. С. Хренов.* Средства вычислений
36 *А. Б. Мигдал.* Письмо школьникам, которые хотят стать физиками

Математический кружок

39 *З. А. Скопец.* Расстояние между центроидами двух систем точек

Задачник «Кванта»

44 Победители конкурса «Кванта»
46 Задачи М311—М315; Ф323—Ф327
48 Решения задач М273—М279; Ф285—Ф290

Практикум абитуриента

61 *В. К. Егеров, А. Г. Мордкович.* Правильная пирамида
66 *Л. К. Белопухов, М. Г. Сухарев.* Московский институт нефтехимической и газовой промышленности

69 **Спрашивайте — отвечаем**

«Квант» для младших школьников

71 Задачи
72 *А. П. Савин.* Для чего нужны проценты?

74 **Ответы, указания, решения** *(3-я стр. обложки)*

Уголок коллекционера

Смесь *(с. 24, 35, 43, 68, 70).*

На первой странице обложки вы видите семейство кривых, координаты (x, y) точек которых удовлетворяют соотношению $xy = k$ при всевозможных $k > 0$. Эти кривые называются гиперболами. Подробнее о гиперболе и ее свойствах вы можете прочесть в статье на с. 16—24.

© *Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», «Квант» № 3, 1975 год*

С. В. Ковалевская (1850—1891)

Н. Я. Виленкин
В. П. Лишевский

СОФЬЯ ВАСИЛЬЕВНА КОВАЛЕВСКАЯ

(к 125-летию со дня рождения)

Первая премия

В 1888 году Парижская академия наук присуждала премию за лучшую научную работу, посвященную движению твердого тела, имеющего одну неподвижную точку. Эту задачу называли также задачей о движении волчка — ведь все точки быстро вращающегося волчка находятся в движении, за исключением конца острия, которым волчок касается пола. Издавна волчки (или, как их еще называют, юлы) были любимыми игрушками детей. Но они привлекали к себе внимание и солидных ученых — слишком удивительны были свойства вращающихся тел. Непонятно было, почему ось быстро вращающегося волчка сама совершает медленное вращение. Удивительным казалось и стремление оси волчка сохранять свое направление при действии на волчок внешних сил, причем изменение направления оси шло в направлении, отличном от направления этой силы. Интерес к движению волчка не был пустым любопытством. Объяснения свойств этого движения ждали астрономы, интересовавшиеся такими громадными волчками, как планеты и звезды, оружейники, давно заметившие, что пули и снаряды точнее попадают в цель, если придать им не только поступательное, но и вращательное движение, техники, разрабатывавшие новые модели велосипедов, и многие другие.

До начала XVII века ученые, рассуждая о свойствах волчков, давали лишь объяснения, похожие на слова мольеровского персонажа, утверждавшего, что морфий усыпляет потому, что в нем содержится усыпительная сила. Но после работ Г. Галилея, объяснившего законы падения тел, и X. Гюйгенса, интересовавшегося движением маятника, возникла новая ветвь механики — динамика. Одной из ее задач стало объяснение таинственных свойств волчка. В конце XVII века И. Ньютон и Г. Лейбниц, создав дифференциальное и интегральное исчисления, дали в руки ученых «золотой ключ», позволявший сводить задачи динамики к решению уравнений, содержавших искомые функции и их производные, — так называемых *дифференциальных уравнений*. Сила методов нового исчисления была проверена на задачах небесной механики: с их помощью И. Ньютону удалось объяснить кеплеровские законы движения планет, а его последователям — предсказать время возвращения одной из самых ярких комет — кометы Галлея.

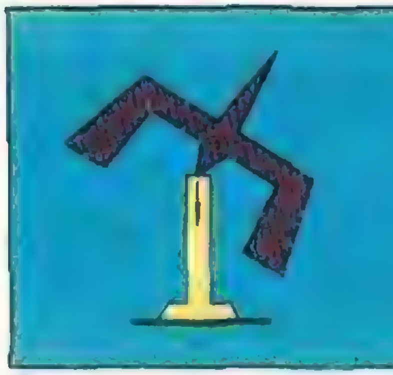


Рис. 1.

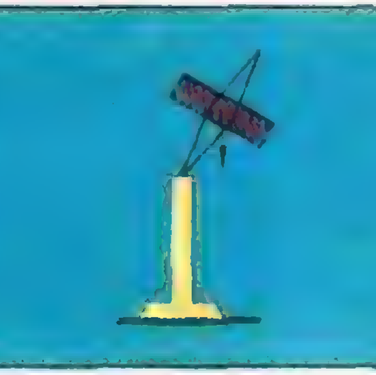


Рис. 2.

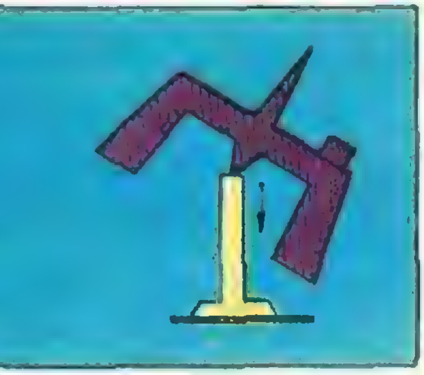


Рис. 3.

Естественно, что ученые попытались применить новые методы к изучению движения волчка. Им пришлось для этого ввести ряд новых понятий — момента инерции, игравшего в объяснении вращательных движений ту же роль, что масса тела в объяснении поступательного движения, эллипсоида инерции, который показывал изменение момента инерции при изменении оси вращения, и т. д. Так, член Петербургской академии наук, один из величайших математиков XVIII века Л. Эйлер изучил движение тела вокруг его центра тяжести (рис. 1). Это имело большое значение, так как позволило объяснить причину так называемого «предварения равноденствий», связанного с изменением оси вращения земного шара, движение вращающихся орудийных снарядов и т. д. Исследования Эйлера были дополнены французским ученым Л. Пуансо. После этого волчки стали излюбленной моделью, к которой прибегали физики, стремясь объяснить те или иные явления. Даже Дж. Максвелл, строя теорию электромагнитных явлений, прибегал к механическим моделям, большую роль в которых играли волчки, помещенные в каждую точку пространства.

Но теория Эйлера — Пуансо не могла объяснить движение волчка, которым любят играть малыши — его точка опоры находится не в центре тяжести. Волчок такого типа имеет форму тела вращения, а точка опоры находится на оси симметрии (рис. 2). Задачу о движении волчка такой формы решил Ж. Лагранж, изложивший свое решение в книге «Аналитическая механика»; книга эта прославилась не только глубиной изложения, но и тем, что в ней не было ни одного чертежа — Лагранж считал механику наукой о решении дифференциальных уравнений и к наглядным представлениям не прибегал. Решение Лагранжа развил и усовершенствовал С. Пуассон.

После Эйлера, Лагранжа, Пуансо и Пуассона многие ученые пытались найти еще хотя бы одну форму волчка, при которой решение уравнений его движения можно свести к вычислению интегралов. Но никому не удавалось продвинуться вперед ни на шаг. Это было особенно удивительно, потому что как раз в XIX веке в трудах К. Гаусса, М. В. Остроградского, К. Якоби, О. Коши, Б. Римана и многих других были созданы новые математические методы, позволившие решить самые трудные задачи математической физики. А глубже познать законы движения волчка было нужно и для практики. Хотя в те времена гироскопы не играли особой роли в технике, как сейчас, когда без гироскопических приборов не обходятся ни корабли, ни самолеты, ни ракеты, проницательные техники уже понимали, что время гироскопов не за горами, и нет ничего более практичного, чем хорошая теория.

Поэтому следует признать, что выбор Парижской академией наук темы для конкурса был удачен. Изучив присланные рукописи, жюри признало лучшей работу под девизом: «Говори, что знаешь, делай, что должен, будь, чему быть». В ней содержалось решение задачи о движении несимметричного волчка, центр тяжести которого лежит на экваториальной плоскости эллипсоида инерции, длины осей которого подчинены условию $A = B = 2C$ (рис. 3). Автор работы проявил не только большой математический талант, но и незаурядную эрудицию: в работе были использованы самые новейшие достижения математики того времени — теория функций комплексного переменного, гиперэллиптические интегралы и т. д. Выполненное исследование так понравилось членам жюри, что они решили увеличить сумму премии с 3000 франков до 5000 франков. Когда вскрыли конверт с именем автора, неожиданно оказалось, что самую лучшую работу написала единственная женщина, занимавшая в то время должность профессора математики, — Софья Васильевна Ковалевская.

Детство и юность

Долог и труден был путь Софьи Васильевны к этому триумфу, сразу поставившему ее выше всех женщин, занимавшихся до нее математикой — и гречанки Гипатии (V век нашей эры), читавшей лекции по философии и математике, и француженки Эмилии дю Шатле, переведшей в начале XVIII века на французский язык «Начала» Ньютона, и итальянки Марии Гаэтаны Аньези, в честь которой одна из кривых была названа «локон Аньези».

Софья Васильевна родилась в Москве сто двадцать пять лет назад 3 (15) января 1850 года. Ее отец — генерал В. В. Корвин-Круковский, начальник московского арсенала, вел свой род от венгерского короля Матвея Корвина. Мать, Елизавета Федоровна, происходила из ученой семьи — ее отец Ф. Ф. Шуберт был почетным членом Академии наук, а дед, академик Ф. И. Шуберт, известным астрономом и математиком.

В 1858 году Василий Васильевич Корвин-Круковский был уволен в отставку в чине генерал-лейтенанта и перебрался вместе с семьей в свое имение Палибино Невельского уезда Витебской губернии. Своим детям он дал домашнее образование. Наставниками Сони были англичанка М. Ф. Смит и домашний учитель И. И. Малевич. Но интерес к математике появился у девочки под влиянием дяди, Петра Васильевича Корвин-Круковского. «От него услышала я, например, в первый раз о квадратуре круга, об асимптотах, к которым кривая постоянно приближается, никогда их не достигая, и о многих других вещах подобного же рода» *), — вспоминала впоследствии Софья Васильевна.

Помимо бесед с дядей, было еще одно обстоятельство, довольно курьезное, пробудившее интерес Сони к математике. Вот как описала этот эпизод С. В. Ковалевская в своих воспоминаниях.

«Когда мы переезжали на житье в деревню, весь дом пришлось отделать заново и все комнаты оклеить новыми обоями. Но ... на одну из наших детских комнат обоев не хватило... Эта обиженная комната так и простояла много лет с одной стороной, оклеенной бумагой. Но, по счастливой случайности на эту предварительную оклейку пошли именно листы литографированных лекций Остроградского о дифференциальном и интегральном исчислении, приобретенные моим отцом в молодости.

---

*) Здесь и далее цитируется по книге: С. В. Ковалевская. Воспоминания и письма. М., изд. Академии наук СССР, 1961.

Листы эти, испещренные странными непонятными формулами, скоро обратили на себя мое внимание. Я помню, как я в детстве проводила целые часы перед этой таинственной стеной, пытаясь разобрать хотя бы отдельные фразы и найти тот порядок, в котором листы должны бы следовать друг за другом. От долгого, ежедневного созерцания внешний вид многих из формул так и врезался в моей памяти, да и самый текст оставил по себе глубокий след в мозгу, хотя в самый момент прочтения он и остался для меня непонятным.

Когда много лет спустя, уже пятнадцатилетней девочкой, я брала первый урок дифференциального исчисления у известного преподавателя в Петербурге, Александра Николаевича Страннолюбского, он удивился, как скоро я охватила и усвоила себе понятия о пределе и о производной, точно я наперед их знала».

Увлечение Сони математикой привело к конфликту в семье. Генералу Корвин-Круковскому совсем не хотелось, чтобы его дочь стала «синим чулком» или, того хуже, стриженой курсисткой, о которых говорили, что «они в бога не верят и живых лягушек режут». Поэтому Соне часто приходилось заниматься математикой тайно. Идя спать, она клала под подушку полученный от Малевича «Курс алгебры» Бурдона, а когда все засыпали, при свете ночника читала его почти до утра.

Помог Сониным занятиям сосед Корвин-Круковских по имению — профессор физики Н. Н. Тыртов. Однажды, заехав к соседям в гости, он услышал от Сони, что она прочитала его учебник элементарной физики и все там поняла. Тыртов ей сначала не поверил. Но, побеседовав с девочкой, настолько удивился ее способностям, что отправился к генералу и стал убеждать его в необходимости учить девочку самым серьезным образом. Тыртов даже сравнил Соню с Паскалем, который в детстве сам вывел многие теоремы евклидовой геометрии. И генерал согласился на то, чтобы Соня продолжила свои занятия математикой. Ее стал учить математик А. Н. Страннолюбский. В течение одной зимы она прошла с ним аналитическую геометрию, дифференциальное и интегральное исчисления.

Но не только Соня доставляла хлопоты почтенному генералу. Неожиданно он перехватил письмо, которое направил его старшей дочери Анне петербургский писатель и журналист Федор Михайлович Достоевский, совсем недавно вернувшийся в столицу после долгих лет каторжных работ, к которым он был приговорен за участие в революционном кружке Петрашевского. В письме высоко оценивались литературные достоинства повести, написанной Анной и посланной ею в журнал, которым руководил Достоевский. Скандал был невероятный — дочь уважаемых родителей тайком от них переписывается с незнакомым человеком, да еще вчерашним каторжником!

Анне и Соне стало ясно, что для дальнейшего развития своих способностей они должны вырваться из-под родительской опеки. Самым распространенным в то время способом эмансипации (освобождения) женщин был фиктивный брак, после которого фиктивные мужья предоставляли своим женам полную свободу. Осенью 1868 года Соня вступила в фиктивный брак с будущим выдающимся палеонтологом Владимиром Онуфриевичем Ковалевским (1842—1883) и в следующем году уехала вместе с ним и старшей сестрой Анной в Германию для продолжения образования — в России доступ женщинам в университеты был закрыт.

Молодой доктор философии

Вначале Софья Васильевна поселилась в Гейдельберге, где в местном университете слушала лекции видных естествоиспытателей Кирхгофа, Дюбуа-Реймона и Гельмгольца.

Но еще более интересными казались ей лекции профессора Кенигсбергера, ученика крупнейшего немецкого математика того времени Карла Вейерштрасса. Получать знания из вторых рук было не в характере Софьи Васильевны, и она решила учиться у самого Вейерштрасса.

Это были годы расцвета научной и педагогической деятельности Вейерштрасса. Глубокое и систематическое развитие идей, заложенных им еще в первой работе, привело к результатам важнейшего значения. Основные работы Вейерштрасса были посвящены теории эллиптических интегралов, которую создали и развивали Абель, Якоби и другие математики предшествовавшего поколения. Еще Абель заметил, что некоторые из эллиптических функций можно записать в виде отношения двух степенных рядов, суммы которых существуют при любом значении аргумента, то есть в виде

$$\frac{a_0 + a_1(x - x_0) + \ldots + a_n(x - x_0)^n + \ldots}{b_0 + b_1(x - x_0) + \ldots + b_n(x - x_0)^n + \ldots}.$$

Дальнейшее развитие этой идеи потребовало систематического и глубокого изучения степенных рядов и функций, изображаемых такими рядами.

Со степенными рядами математики встретились в XVII веке. Оказалось, что в их теории есть тайны, связанные с бесконечностью числа слагаемых, а неосторожное обращение с бесконечными суммами ведет к недоразумениям, ошибкам, парадоксальным результатам. Только после работ Коши и Абеля бесконечные степенные ряды стали надежным орудием в руках математиков.

Вейерштрасс изучал свойства эллиптических и еще более общих функций с помощью степенных рядов. При этом он исследовал свойства таких рядов не только при действительных, но и при комплексных значениях аргумента. В результате этих исследований возникла одна из замечательных глав математики — теория функций комплексного переменного, находящая сейчас важные приложения в самых разных областях человеческой деятельности: аэро- и гидродинамике, теории упругости, картографии и т. д. Подход Вейерштрасса к теории аналитических функций был характерен строгой логичностью. Вейерштрасс считал, что сущность математического познания — в абсолютной полноте его обоснования. Гениальные работы Римана, иногда заменявшего строгую логику ссылкой на наглядность, были глубоко чужды Вейерштрассу. В то же время он хорошо понимал практическое значение математических исследований и верил, что его исследования по эллиптическим функциям сыграют свою роль и в приложениях математики.

Лекции Вейерштрасса по теории аналитических и эллиптических функций привлекали толпы слушателей. Ведь только на этих лекциях можно было познакомиться с его идеями — великий математик обладал странным отвращением к типографской краске и не позволял не только печатать, но даже литографировать свои лекции — их можно было лишь переписывать от руки. Софья Васильевна решила стать студенткой Берлинского университета. Но порядки в столице Пруссии были куда реакционнее, чем в сравнительно либеральном Гейдельберге — женщин не допускали на лекции даже в качестве вольнослушательниц. Поэтому Софье Васильевне пришлось решиться на крайний шаг — обратиться прямо к Вейерштрассу с просьбой давать ей частные уроки математики.

Когда Ковалевская пришла на квартиру к Вейерштрассу, то, чтобы проверить, насколько она готова к занятиям математикой, Вейерштрасс дал ей несколько трудных задач и попросил подумать на досуге над ними. Вероятно, в глубине души он считал, что больше никогда не увидит молодую русскую, обратившуюся к нему со столь странной просьбой. Но как велико было его изумление, когда ровно через неделю она принесла ему решения всех задач. Еще более поразился Вейерштрасс безукоризненно логичному и точному обоснованию всех решений. Как и он сам, Софья Васильевна на первое место ставила логику. На этот раз знаменитый математик внимательнее посмотрел на свою посетительницу. Он увидел одухотворенное лицо, на котором живо отражалось радостное сознание преодоленных трудностей, темно-каштановые коротко остриженные волосы, большие серо-зеленые глаза, в которых читались незаурядные ум и воля.

Получив положительный отзыв о Софье Васильевне от Кенигсбергера, Вейерштрасс дал согласие заниматься с нею. Так как ей не разрешали посещать Берлинский университет, занятия пришлось проводить дома. Эта совместная работа продолжалась четыре года.

Сохранились письма Вейерштрасса к своей ученице, которые рассказывают, как шли эти занятия, как раскрывались перед юной ученицей широкие горизонты новой теории функций и ее приложений, как появились задачи для самостоятельных размышлений, и как шаг за шагом она преодолевала возникавшие трудности.

Три проблемы поставил Вейерштрасс перед Софьей Васильевной. Первая из них касалась решения уравнений в частных производных. Еще И. Ньютон заметил, что степенные ряды — могучее орудие для решения дифференциальных уравнений. Но во времена Ньютона не задумывались над вопросами: имеет ли всякий степенной ряд сумму, является ли эта сумма на самом деле решением заданного уравнения. Новый подход Коши и Вейерштрасса открывал пути к построению строгой теории, давал уверенность в том, что данное уравнение решается с помощью степенных рядов. С. В. Ковалевской удалось доказать самую общую теорему. Она доказала, что решение систем уравнений очень общего вида *аналитично*, то есть выражается через степенные ряды. Исследуя решение одного из важнейших уравнений, описывающего распространение тепла в стержне, Софья Васильевна обнаружила свойства этого решения, оказавшиеся неожиданными даже для Вейерштрасса.

Вторая проблема была тесно связана с эллиптическими интегралами, третья касалась теории колец Сатурна. В последней работе Софья Васильевна уточнила исследования знаменитого французского математика и механика Лапласа.

Все эти проблемы были успешно решены, и в 1874 году по представлению К. Вейерштрасса Геттингенский университет за работы: «К теории уравнений в частных производных», «О приведении одного класса абелевых интегралов третьего ранга к интегралам эллиптическим» и «Дополнения и замечания к исследованию Лапласа о форме кольца Сатурна» присудил заочно (без защиты) Софье Васильевне Ковалевской степень доктора философии с высшей похвалой. Такой чести удостаивались немногие.

На родине

В июле 1874 года С. В. Ковалевская вернулась в Россию. В это же время на родину приехала и ее сестра Анна вместе со своим мужем Шарлем Виктором Жакларом, который был деятельным членом I Интернационала.

Когда весной 1871 года разразились события Парижской коммуны, Жаклары приняли в них непосредственное участие. Виктор был избран в ЦК Национальной гвардии и командовал ее 17-м легионом. Он руководил вооруженными силами коммунаров в районе Монмартра. Анна вместе с приехавшей из Берлина в осажденный Париж Софьей ухаживала за ранеными.

После разгрома Парижской коммуны Виктор Жаклар оказался в тюрьме. Для спасения зятя в Париж приехал сам В. В. Корвин-Круковский, который лично знал Тьера. Старому генералу удалось несколько облегчить участь мужа своей дочери, и вскоре при помощи четы Ковалевских и жены Анны Жаклару удалось бежать из тюрьмы и перебраться в Швейцарию. Вслед за мужем уехала Анна.

Так, три года спустя, все снова собрались вместе в Палибино. В старой усадьбе царила атмосфера всеобщей любви и дружбы. Софья была бы счастлива, если бы не мысли о будущем. Как сложится ее дальнейшая судьба? Получит ли она должность преподавателя в университете? Ведь по законам Российской империи женщина могла преподавать математику только в начальных классах гимназии.

Отдохнув в Палибино, Ковалевские уехали в Петербург. Начались хлопоты о получении места преподавателя в каком-либо высшем учебном заведении. Они окончились провалом. Софье Васильевне не разрешили преподавать даже на Высших женских курсах.

Рассказывают, что во время своих скитаний по бюрократическим учреждениям Петербурга Софья Васильевна как-то попала в кабинет одного чиновника, который в ответ на ее просьбу разрешить преподавать в университете ответил отказом, грубо прибавив: «У нас всегда этим занимались мужчины. Справляются они со своими обязанностями, слава богу, хорошо, и поэтому не надо нам никаких нововведений!» На это возмущенная Софья Васильевна сказала: «Когда Пифагор открыл свою знаменитую теорему, он принес в жертву богам 100 быков. С тех пор все скоты боятся нового...»

В жизни Ковалевских происходит важное событие. Дружба и взаимное уважение, связывающие Софью Васильевну и Владимира Онуфриевича, переходят в любовь и их брак становится фактическим. В 1878 году у Ковалевских рождается дочь, которую в честь матери называют Софьей.

В это время Софья Васильевна несколько отходит от занятий математикой. Теперь она — журналистка и рачительная хозяйка. В периодической печати появляются ее научно-популярные статьи, критические заметки, театральные рецензии. В гостеприимном доме Ковалевских бывают многие видные ученые и писатели: Д. И. Менделеев, И. М. Сеченов, С. П. Боткин, А. М. Бутлеров, П. Л. Чебышев, А. Г. Столетов, И. С. Тургенев, Ф. М. Достоевский и другие.

В то время некоторая часть русского общества была охвачена «духом наживы и разных коммерческих предприятий. Это течение захватило и моего мужа и отчасти, должна покаяться в своих грехах, и меня самое», — вспоминала впоследствии Софья Васильевна. Ковалевские хотели обеспечить себя материально, чтобы потом, не думая о хлебе насущном, заниматься наукой.

Увлечение коммерцией закончилось трагически. Владимир Онуфриевич был выдающимся ученым, но никудышным коммерсантом. Его обманывали компаньоны, подрядчики, рабочие, — все, с кем он имел дело. Вскоре он окончательно запутался в долгах и, не видя выхода, покончил жизнь самоубийством.

Печальная весть застала Софью Васильевну в Париже, где она хлопотала о месте преподавателя на Высших женских курсах. Получив известие о смерти мужа, она заболела. Оправившись, она поспешила в Петербург и добилась установления непричастности Владимира Онуфриевича к темным делам его компаньонов. Научный мир скорбел о кончине доцента Московского университета, основоположника эволюционной палеонтологии, которого многие ученые-палеонтологи считали своим учителем.

Математик и литератор

В 1883 году Софья Васильевна Ковалевская получила приглашение от шведского математика Г. Миттаг-Леффлера (с которым она вместе училась у К. Вейерштрасса) занять должность приват-доцента в Стокгольмском университете. В ноябре этого же года она выехала в Швецию. Так как Софья Васильевна не знала шведского языка, ей разрешили в течение первого семестра читать лекции на немецком языке. Через несколько месяцев она уже сносно владела шведским языком и могла вести на нем преподавание.

Летом 1884 года Софья Васильевна была назначена профессором Стокгольмского университета. За 8 лет она прочла 12 различных курсов, в том числе теорию уравнений в частных производных, курс механики, теорию алгебраических, абелевых и эллиптических функций и другие.

Но не только математикой занималась в те годы Софья Васильевна. Она проявила и незаурядный литературный талант: написала ряд рассказов, повесть «Нигилистка», драму «Борьба за счастье» (совместно с сестрой Миттаг-Леффлера, оставившей интереснейшие воспоминания о Софье Васильевне). Дом Ковалевской стал одним из центров интеллектуальной жизни Стокгольма — здесь бывали известный полярный исследователь Нансен, Миттаг-Леффлеры, многие писатели, профессора.

Много сил уделяла Софья Васильевна освободительному движению. Она участвовала в социалистических конгрессах, была знакома со многими русскими политическими эмигрантами, активно боролась за равноправие женщин.

В Стокгольме Софья Васильевна завершила свой главный труд — исследование движения волчка. За это она, как уже говорилось, в 1888 году получила премию Парижской академии наук. В следующем году она получает премию в 1500 крон от Стокгольмской академии наук за новую работу, также посвященную вращению твердого тела.

Русские математики неоднократно пытались привлечь С. В. Ковалевскую к научной и педагогической работе на родине, но безуспешно. Не помогло также и прошение, поданное родственником Софьи Васильевны генералом А. И. Косичем на имя президента Академии, в котором он, в частности, приводил слова Наполеона о том, что «всякое государство должно дорожить возвращением выдающихся людей более, нежели завоеванием богатого города».

Но новые веяния проникали и в Академию наук. 4 (16) ноября 1889 года в Академии был принципиально решен вопрос «о допущении лиц женского пола к избранию в члены-корреспонденты». За это постановление голосовало 20 человек (против 6). И вот 7 (19) ноября на физико-математическом отделении по предложению академиков П. Л. Чебышева, В. Г. Имшенецкого и В. Я. Буняковского в члены-корреспонденты Российской академии была избрана доктор математики, профессор Стокгольмского университета Софья Васильевна Ковалевская. 2 (14) декабря 1889 года общее собрание Академии утвердило это решение.

Теперь Софья Васильевна пользовалась мировой славой. Математики ждали ее новых работ о движении твердого тела. Она была полна научных и литературных замыслов. Но все эти замыслы остались неосуществленными. Возвращаясь в январе 1891 года в Стокгольм из Франции, где она проводила зимние каникулы, Софья Васильевна простудилась и 29 января (10 февраля) умерла от воспаления легких.

На ее похоронах были преподаватели Стокгольмского университета, студенты, многочисленные друзья и знакомые. Прощаясь с ней, ее однофамилец М. М. Ковалевский сказал: «Софья Васильевна! Благодаря Вашим знаниям, Вашему таланту и Вашему характеру, Вы всегда были и будете славой нашей Родины. Недаром оплакивает Вас вся ученая и литературная Россия... Вам не суждено было работать в родной стране, и Швеция приняла вас. Честь этой стране, другу науки!... Но, работая по необходимости вдали от Родины, вы сохранили свою национальность, вы остались верной и преданной союзницей юной России, России мирной, справедливой и свободной, той России, которой принадлежит будущее...»

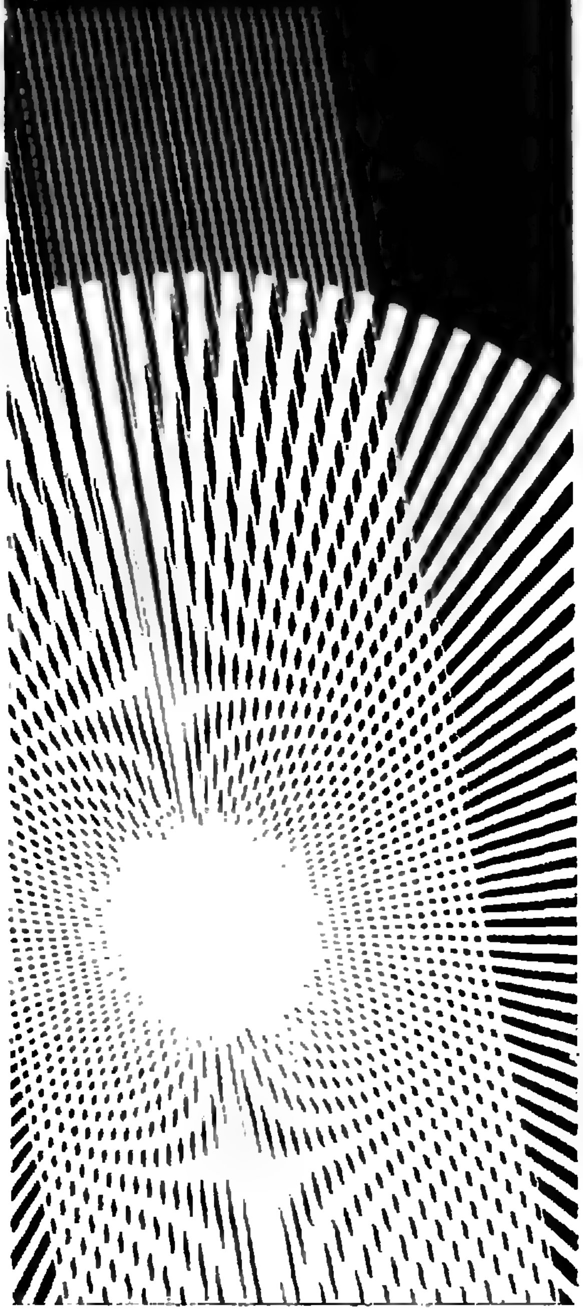
С тех пор прошло более 80 лет. Имя Софьи Васильевны Ковалевской занимает достойное место в ряду имен великих русских ученых, которыми по праву гордится наша Родина. Президент Академии наук СССР С. И. Вавилов сказал 13 января 1950 года на торжественном заседании, посвященном 100-летию со дня рождения С. В. Ковалевской: «Вклад, внесенный в науку Ковалевской за ее недолгую жизнь, необычайно полноценен и многозначителен. Ее фундаментальное исследование по вращению твердого тела послужило основой для дальнейшего развития важнейших вопросов механики в нашей стране и во всем мире. Ее тонкие исследования по теории дифференциальных уравнений и по некоторым вопросам математической физики и теоретической астрономии сохраняют свое значение и на сегодня. В истории человечества до Ковалевской не было женщины, равной ей по силе и своеобразию математического таланта... Ковалевская была не только математиком. Она проявила себя как писательница — автор романов, драматических произведений и рассказов — и как публицист. Она не замыкалась в узкую математическую специальность и глубоко понимала свой гражданский долг перед страной, перед народом...

Выдающееся значение научного творчества Ковалевской высоко оценивалось всей передовой русской интеллигенцией. Выражением этого было исключительное событие для старой дореволюционной России — избрание Ковалевской членом-корреспондентом Академии наук в 1889 году. Для этого Академии пришлось ломать устав, решать сначала принципиальный вопрос о допущении лиц женского пола к избранию в члены-корреспонденты... Великая Октябрьская социалистическая революция навсегда широко открыла двери высшего научного учреждения страны для женщин, и с каждым годом число женщин-ученых, работающих в советской Академии, возрастает. Огромные творческие научные силы русской женщины были впервые раскрыты перед всем миром С. В. Ковалевской».

С. В. Ковалевская показала всему миру возможности женщин в области математического творчества. Через два года после ее смерти прусское правительство допустило женщин к слушанию лекций на правах вольнослушательниц. В 1895 году англичанка Грэс Чизгольм получила вслед за Софьей Васильевной там же, в Геттингене, звание доктора математики. Выдающиеся работы по математике написала в XX веке Эмми Нетер, являющаяся одной из основательниц современной алгебры. В Советском Союзе известны имена академика П. Я. Полубариновой-Кочиной, профессоров О. А. Ладыженской, О. А. Олейник и многих других женщин, которым принадлежат замечательные результаты в самых различных областях математики.

ЭЛЕКТРОННЫЙ ВЕТЕР

И.И. Воробьев



С конца прошлого века ведутся эксперименты по изучению проводимости жидких металлов. В нормальных условиях жидкие металлы встречаются не часто, но многие металлы легко образуют со ртутью жидкие растворы — амальгамы. Проводимость жидких металлов интересна тем, что в электрический ток должны вносить вклад не только электроны проводимости, но и ионы. А с движением ионов связан перенос массы.

Попробуем качественно представить, что произойдет при подключении к ванночке с чистой ртутью источника напряжения. Ртуть — это смесь электронов проводимости и положительных ионов. Казалось бы, все ясно — под действием электрического поля электроны будут двигаться от «минуса» к «плюсу», а положительные ионы ртути — в противоположном направлении. Если электроны могут путешествовать по всей электрической цепи, то с ионами дело обстоит иначе. Они, подойдя к отрицательному электроду, вроде бы, должны здесь скапливаться, повысив уровень ртути в этом месте.

Ничего подобного! Эксперименты показали, что уровень чистой ртути практически всюду один и тот же, а небольшое повышение уровня, если и происходит, то у «плюса», а не у «минуса». В одних амальгамах ионы двигаются, как следует, по полю, а ионы других металлов — против поля! Это удивительно — как могут ионы двигаться не туда, куда их влекут электрические силы?

Причина «странного» поведения ионов — это не учтенная нами непрерывная бомбардировка ионов электронами. Попробуем разобраться в существе дела. Выясним, какое влияние оказывают взаимные соударения электронов и ионов на движение электронов и ионов при наличии внешнего электрического поля.

Для наглядности будем считать ион массивным упругим шаром, на который налетает пучок легких частиц — электронов (масса иона в несколько тысяч раз больше массы электрона). Пусть до столкновения пучок частиц имеет среднюю направленную скорость **u** и соответственно ненулевой импульс. После столкновения пучок рассеивается равномерно во все стороны (рис. 1) *) (так же равномерно во все стороны зеркальный шар рассеивает направленный пучок света). То есть сразу после соударения все направления движения равновероятны, а значит, суммарный импульс электронов равен нулю.

Раз импульс пучка из-за соударений с ионами меняется, то это означает, что на электроны со стороны ионов действует сила. Если **u** — средняя скорость электронов в пучке, то $m\mathbf{u}$ — средний импульс электрона. Пусть время между столкновениями электрона с ионами — τ, тогда можно считать, что именно за это время теряется средний импульс $m\mathbf{u}$ каждого электрона. Так что средняя сила, отнесенная к одному электрону, равна

$$\mathbf{f} = -\frac{m\mathbf{u}}{\tau}.$$

Потеря импульса электронами *в целом* из-за столкновений с ионами и описывается средней тормозящей силой **f**. Конечно, на *отдельный* электрон действует не обязательно такая сила, но для движения пучка в целом важна именно эта средняя сила.

Хотя кроме направленного движения со средней скоростью **u** электронам присуще и хаотическое тепловое движение, это не изменит выражения для силы торможения. Полный импульс большого числа электронов при беспорядочном тепловом движении все время равен нулю, поэтому изменение суммарного импульса связано только с потерей импульса упорядоченного движения.

При наличии внешнего электрического поля напряженности **E** «рассеянные» электроны «подхватываются» полем, которое вновь упорядочивает их движение, сообщая им некоторый направленный импульс, растрачиваемый при следующем соударении, и т. д. Таким образом, можно сказать, что устанавливается некоторая постоянная средняя скорость движения электронного пучка. Иначе говоря, сумма сил, действующих на электронный пучок, равна нулю. В расчете на один электрон получаем

$$e\mathbf{E} + \mathbf{f} = 0.$$

В самом деле, если сила eE со стороны поля вдруг превысит силу f, средняя скорость электрона будет увеличиваться, а значит, будет расти и величина силы торможения f, пропорциональная скорости, пока полная сила не обратится в нуль. Если же скорость случайно окажется большой, так что сила f превосходит силу eE, то пучок тормозится, пока опять-таки сила f по величине не сравняется

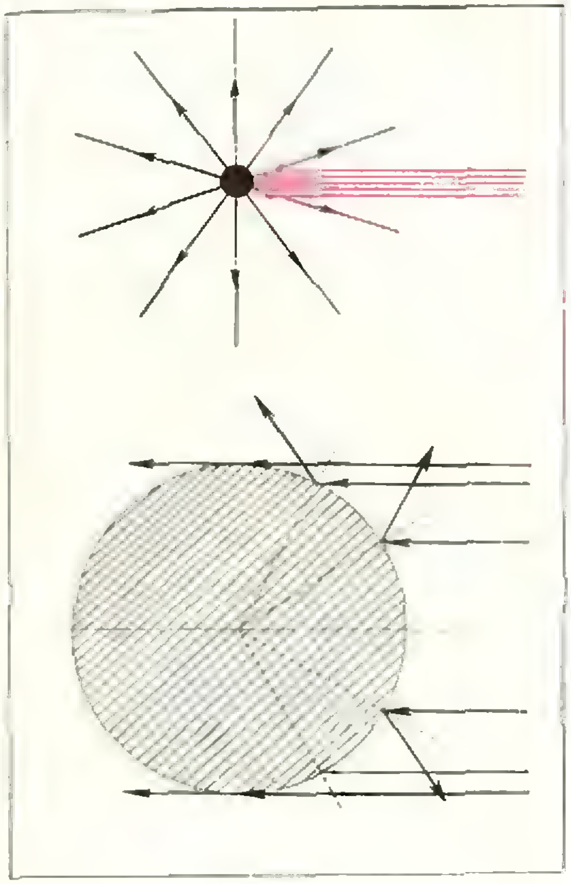


Рис. 1.

---

*) Строгое решение этой задачи приводится в курсе теоретической физики.

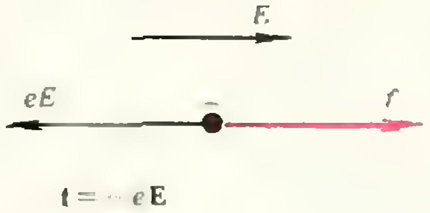


Рис. 2.

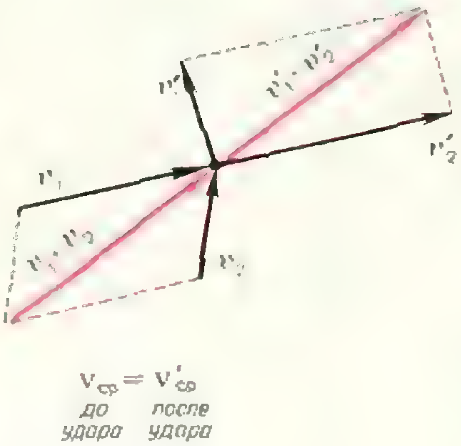


Рис. 3.

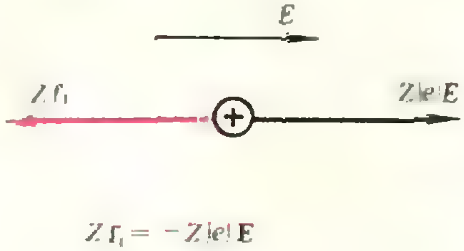


Рис. 4.

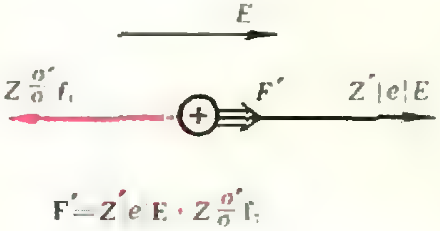


Рис. 5.

с $e\mathbf{E}$. Итак, при движении с установившейся средней скоростью, когда полная сила равна нулю, тормозящая сила со стороны ионов в расчете на один электрон равна (рис. 2)

$$\mathbf{f} = -e\mathbf{E}. \qquad (*)$$

А почему мы не учитываем соударения между электронами? Дело в том, что они не приводят к изменению средней скорости электронов. Действительно, рассмотрим столкновение двух электронов. Пусть их скорости до удара $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$, а после удара — $\mathbf{v}'_1$ и $\mathbf{v}'_2$. По закону сохранения импульса

$$m\mathbf{v}_1 + m\mathbf{v}_2 = m\mathbf{v}'_1 + m\mathbf{v}'_2,$$

откуда

$$\frac{\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2}{2} = \frac{\mathbf{v}'_1 + \mathbf{v}'_2}{2},$$

то есть средняя скорость до удара равна средней скорости после удара (рис. 3).

Какие же силы действуют на ионы? Рассмотрим чистый жидкий металл, у которого все ионы одинаковы, причем каждый атом отдал в общее пользование по Z электронов проводимости. Электрическое поле действует на каждый ион с силой $Z|e|\mathbf{E}$, где $Z|e|$ — заряд иона (заряд электрона взят по модулю, ибо ион положителен). Со стороны каждого электрона действует в среднем сила

$$\mathbf{f}_1 = -\mathbf{f}$$

(по третьему закону Ньютона). Если число ионов N, то на каждый ион со стороны одного электрона приходится сила $\frac{\mathbf{f}_1}{N}$. Тогда сила, с которой на один ион действуют все электроны (их число ZN), равна $Z\mathbf{f}_1$. Но сумма сил

$$\mathbf{F} = Z|e|\mathbf{E} + Z\mathbf{f}_1$$

равна нулю (рис. 4)! Чтобы в этом убедиться, подставим значение силы $\mathbf{f}_1$, отличающейся от $\mathbf{f}$ только знаком, из выражения (*):

$$\mathbf{F} = Z|e|\mathbf{E} + Ze\mathbf{E} = 0.$$

Итак, силы, действующие на ионы в чистом металле со стороны электрического поля, компенсируются силами, действующими со стороны «электронного ветра» (движущихся электронов). Равенство полной силы нулю означает либо покой, либо равномерное движение. Но при течении жидкости в сосуде возникает вязкое трение (в конечном счете из-за взаимодействия со стенками сосуда), оно и обеспечивает покой жидкости относительно сосуда в случае компенсации остальных сил, действующих на жидкость.

А если в металле имеется небольшая примесь «чужих» ионов? Пусть заряд чужака равен $|e|Z'$. Из-за того, что размеры примесного иона другие, изменится и число ударов электронов об него. Если площадь сечения иона примеси σ', а «своего» иона σ, то чужак подвергнется в $\frac{\sigma'}{\sigma}$ раз большему числу ударов, чем свой ион. Во столько же раз изменится и сила, действующая на примесный ион со стороны электронов. Поэтому сумма сил поля и электронного ветра для чужака равна (рис. 5)

$$\mathbf{F}' = Z'|e|\mathbf{E} + Z\frac{\sigma'}{\sigma}\mathbf{f}_1.$$

Подставив $-|e|\mathbf{E}$ вместо $\mathbf{f}_1$, получим

$$\mathbf{F}' = |e|\left(Z' - Z\frac{\sigma'}{\sigma}\right)\mathbf{E}.$$

Если $Z' > Z\frac{\sigma'}{\sigma}$, то ионы примеси будут двигаться в направлении этой силы, их скорость будет направлена по полю. Если $Z' < Z\frac{\sigma'}{\sigma}$, то ионы будут двигаться против поля.

Как же объяснить тот факт, что в чистой ртути ионы движутся по направлению электронного ветра? Мы ведь показали, что в чистом металле ионы должны быть неподвижны! Дело в том, что предполагалась полная одинаковость всех ионов, но это не совсем так. Хотя большинство ионов, действительно, находится в одном и том же «нормальном» энергетическом состоянии, некоторые ионы всегда имеют энергию, больше нормальной. Такие ионы называют «активированными». Вероятность столкновений электронов с ионами увеличивается с ростом энергии ионов. Можно сказать, что сечения активированных ионов как бы увеличились по сравнению с нормальными. Таким образом, активированные ионы можно считать чужаками с тем же зарядом, что и нормальный ион, но с бо́льшим сечением. Такие ионы увлекаются электронным ветром и сносятся к положительному полюсу источника. На этом основано разделение изотопов ртути в электрическом поле. У ионов разных изотопов заряд и сечение практически одинаковы, но активированные ионы легких изотопов сносятся электронным ветром быстрее, чем активированные ионы тяжелых изотопов, из-за их меньшей массы. Это приводит к увеличению их концентрации у «плюса», то есть, если около положительного полюса отсасывать ртуть, то она будет обогащенной легким изотопом.

Впервые «парадоксальный» перенос ионов в амальгамах ртути был обнаружен в 1907 году. Тогда же было и введено представление о взаимном трении ионов и электронов. В последующих теориях, просуществовавших до 1959 года, был сделан шаг назад: движения ионов и электронов считались независимыми. Отчасти это объяснялось неубедительностью результатов экспериментов. В 1953 году был открыт эффект разделения изотопов ртути постоянным током. После этого появился целый ряд работ по исследованию электропереноса ионов. Первые теоретические работы, где был вскрыт физический механизм действия электронного ветра, относятся к началу 1959 года.

С электронным ветром связана целая группа интересных и важных эффектов как в жидких, так и в твердых металлах и полупроводниках.

Гипербола

И. Н. Бронштейн

Что такое гипербола? На этот вопрос отвечают по-разному. Школьник ответит: «График обратной пропорциональности». Знакомый с коническими сечениями скажет: «Сечение прямого кругового конуса плоскостью, которая задевает обе его полы». А учащийся вуза или техникума даст ответ: «Множество таких точек на плоскости, что разность расстояний каждой из них до двух фиксированных точек одна и та же». В каждом определении используется какое-нибудь характеристическое свойство гиперболы, а остальные свойства могут быть выведены из определения.

В этой статье мы начнем со школьного определения гиперболы — из него сразу выявляется ее форма.

I. РАВНОСТОРОННЯЯ ГИПЕРБОЛА

График обратной пропорциональности

Читатели знакомы с определением гиперболы как графика обратной пропорциональной зависимости. Как будет видно, это — определение частного вида гиперболы — равносторонней гиперболы (происхождение такого названия выяснится позже). Именно этой кривой мы посвящаем первую часть статьи. Для краткости мы будем пока называть равностороннюю гиперболу просто гиперболой.

Две переменных x и y называются обратно пропорциональными, если их произведение постоянно:

$$xy = k. \qquad (1)$$

Будем сначала считать их положительными (от этого ограничения мы скоро избавимся); тогда и $k > 0$. Одно из них, например, x, может принять любое положительное значение, тогда другое y должно принять только одно значение $y = \frac{k}{x}$. Таким образом, равенство (1) представляет собою при каждом k определенную функцию с областью задания $x > 0$ и областью значений $y > 0$. График этой функции, изображенный на рисунке 1, называется *одной ветвью равносторонней гиперболы*, мы для краткости будем первое время называть его просто гиперболой, не только пропуская слово «равносторонняя», но и не повторяя слов «одна ветвь».

Наше определение опирается на понятие графика функции. Можно, однако, принять другую, «чисто геометрическую» формулировку: *гиперболой называется множество четвертых вершин M прямоугольников заданной площади k, у которых одна вершина O совпадает с вершиной данного прямого угла, а две — L и N — лежат на его сторонах* (см. рис. 1).

Точка O называется *центром* гиперболы — происхождение этого названия выяснится дальше.

Через каждую точку M_1 с координатами x_1 и y_1*) пройдет одна (но только одна!) гипербола — именно та, для которой постоянная k, входящая в определение гиперболы, равна x_1y_1. На рисунке 2 для красной гиперболы $x_1 = 2{,}4$, $y_1 = 3{,}5$, $k_1 = 8{,}4$. Если мысленно изобразить на общем чертеже все гиперболы (то есть, гиперболы при всевозможных k), то они заполнят всю «внутренность» угла XOY. На рисунке 2, кроме красной гиперболы, изображено еще несколько: при $k = 1, 2, 3, 4, 5$ и 16. Таким образом, гипербол — бесконечное множество, каждая из них определяется значением параметра k**).

---

*) Это обычно обозначают так: $M_1\ (x_1, y_1)$.

**) Термин *параметр* (от древне-греческого parametron — отмеривающий) — применяется в математике в различных смыслах. Чаще всего это — величина, сохраняющая постоянное значение лишь в условиях данной задачи.

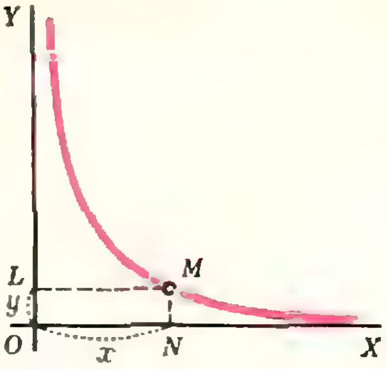


Рис. 1.

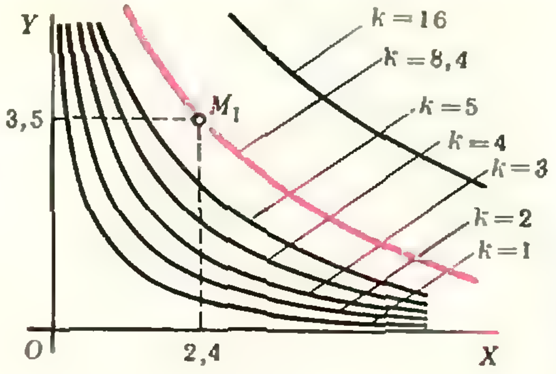


Рис. 2.

Форма гиперболы, ее вершина и асимптоты

Гиперболы с различными значениями параметра k похожи друг на друга, но они не конгруэнтны — их нельзя совместить наложением. Однако легко доказать, что все они подобны, даже подобно расположены с центром подобия O. Читателю предлагается доказать это, пользуясь рисунком 3.

Опишем форму гиперболы (точнее — одной ветви равносторонней гиперболы), то есть перечислим ее свойства, прежде всего бросающиеся в глаза.

Гипербола имеет бесконечное протяжение — она не может вся поместиться на ограниченном куске плоскости. Какое бы большое число A ни было задано, можно указать на гиперболе точку, удаленную от точки O на расстояние, большее чем A (докажите).

Гипербола симметрична относительно биссектрисы OT угла XOY (рис. 4), то есть для любой точки $M_1(x_1, y_1)$ гиперболы симметричная точка $M_2(x_2, y_2)$ также принадлежит этой гиперболе (докажите).

Точка A пересечения гиперболы с ее осью симметрии OT называется *вершиной* гиперболы. Каждая координата вершины гиперболы с параметром k равна $\sqrt{k}$. Расстояние вершины от центра гиперболы (его будем обозначать a) равно $OA = \sqrt{2k}$. Вершина — ближайшая точка гиперболы от центра (докажите).

В отличие от окружности, которая одинаково искривлена во всех своих частях, гипербола сильнее всего искривлена в окрестности своей вершины, а по мере удаления от нее в любую сторону «распрямляется». Мы не даем доказательства этого очевидного свойства гиперболы; не будем

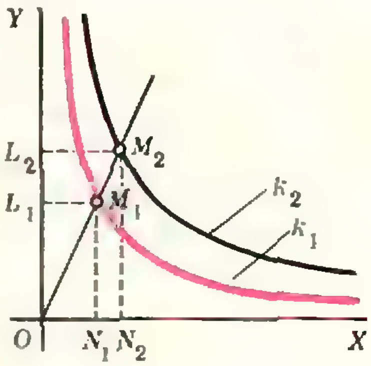


Рис. 3.

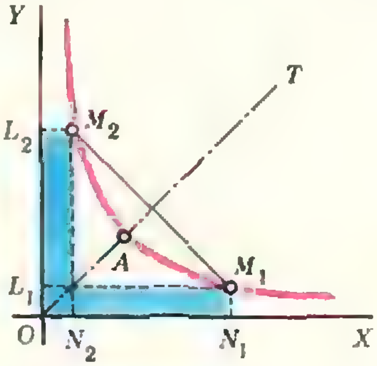


Рис. 4.

доказывать и другого важного свойства гиперболы — гладкости во всех ее точках *). Доказательства обоих свойств требуют знания основ дифференциального исчисления.

Остановимся на наиболее замечательном свойстве гиперболы, определяющем ее форму: точка, бесконечно удаляющаяся по гиперболе в одну сторону будет неограниченно приближаться к одной оси координат, а точка, бесконечно удаляющаяся в другую сторону — неограниченно приближаться к другой оси координат **). Это свойство математически формулируют так: *оси координат OX и OY* являются ее асимптотами (от греческого *asimptotos* — несовпадающий).

Докажем это свойство гиперболы. Возьмем на ней точку M_1, лежащую правее вершины A $(x_1 > \sqrt{k})$, расстояние y_1, которой до оси OX меньше ε (рис. 5). Это всегда можно сделать, взяв $x_1 > \frac{k}{\varepsilon}$. Тогда $M_1N_1 = y_1 = \frac{k}{x_1} < \varepsilon$ и для всех точек $M(x, y)$ гиперболы, лежащих правее M_1, $x > x_1$ и $y = \frac{k}{x} < y_1 < \varepsilon$, то есть ось OX является асимптотой гиперболы. Из симметрии кривой следует, что и ось OY является ее асимптотой.

Зная вершину гиперболы и ее асимптоты, можно довольно точно вычертить гиперболу от руки.

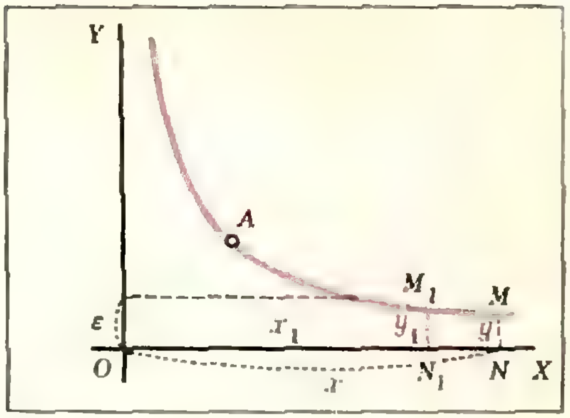


Рис. 5.

Определение равносторонней гиперболы. Сопряженные гиперболы

Изучая график обратной пропорциональности, мы считали x и y положительными. Это делалось лишь для удобства изложения. Функция, заданная равенством (1), определена не только для положительных, но и для отрицательных значений x; число k также может быть отрицательным. *График функции* (1) *мы и будем называть теперь гиперболой* (равносторонней). Он состоит из двух одинаковых частей (ветвей), расположенных при $k > 0$, в I и III четвертях плоскости, а при $k < 0$ — во II и IV четвертях.

На рисунке 6 изображены две равносторонние гиперболы — красная и синяя; их параметры имеют один и тот же модуль, но противоположные знаки. Такие равносторонние гиперболы называются *взаимно сопряженными*.

Перечислим некоторые свойства «полной» равносторонней гиперболы*) (они очевидны; читатель без труда проведет их доказательства). Гипербола имеет центр симметрии O (поэтому мы и назвали эту точку центром гиперболы), две симметричные ветви, две оси симметрии PR и ST (биссектрисы координатных углов), две вершины (A и A' для красной, B и B' — для синей гиперболы). Расстояние между вершинами гиперболы ($AA' = BB' = 2\sqrt{2k}$) называется *осью* гиперболы. Ее половину $\sqrt{2k}$ (*полу-*

---

*) Кривая называется *гладкой* или *плавной* в данной ее точке, если в этой точке существует касательная к кривой.

**) Слова «неограниченно приближаться» означают, что какое бы малое число $\varepsilon > 0$ ни задать, можно указать на гиперболе такую точку, что ее расстояние до оси координат станет меньше ε и при дальнейшем удалении будет оставаться меньше ε.

*) Слово «полная» изято нами в кавычки, чтобы подчеркнуть, что прежнее определение гиперболы было неполным: оно относилось только к одной ветви гиперболы.

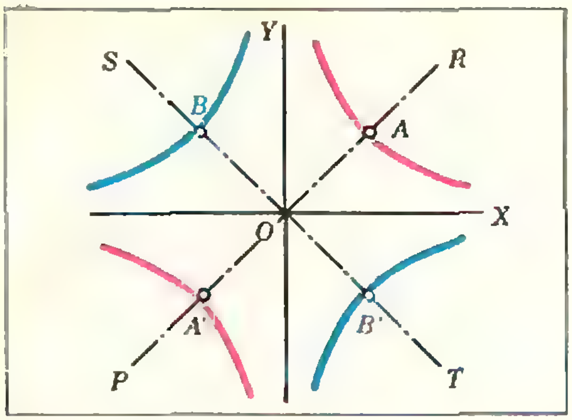


Рис. 6.

ось) обозначают a, таким образом, $k = \pm\frac{a^2}{2}$, где знак «+» для гиперболы, лежащей в I и III четвертях, а «—» — во II и IV. Обе сопряженные гиперболы имеют общие взаимно перпендикулярные асимптоты.

Уравнение равносторонней гиперболы. Гипербола и окружность

Уравнение гиперболы, определяемой как график обратной пропорциональности, это — известное нам равенство $xy = k$. Мы запишем его в несколько иной форме: вместо параметра k введем в (1) полуось a. Поскольку $k = \pm\frac{a^2}{2}$, где знак «+» для красной, «—» — для синей гиперболы, уравнения обеих гипербол примут вид

$$xy = \pm\frac{a^2}{2}. \tag{2}$$

Каждое из этих двух уравнений называется *уравнением гиперболы относительно асимптот*. Этими словами выражают, что осями координат в данном случае являются асимптоты гиперболы.

Уравнение любой линии зависит не только от ее формы и размеров, но и от того, как она расположена в плоскости координат. Возьмем теперь (рис. 7), в плоскости кроме системы координат XOY («старой»), другую систему координат $X'OY'$, получающуюся поворотом осей OX и OY на 45° против часовой стрелки. Возьмем любую точку M плоскости, на которой введены обе системы координат. Она имеет 4 координаты: старые (x, y) и новые (x', y'). Можно доказать, что старые координаты выражаются через новые следующими формулами:

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y'), \quad y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y'). \tag{3}$$

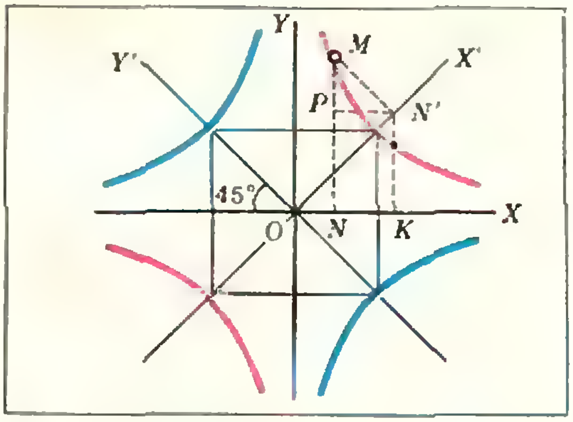


Рис. 7.

Докажите это, когда точка M лежит внутри угла $X'OY$ — в этом случае все ее 4 координаты положительны.

Формулы (3) можно доказать и для всех других возможных положений точки M.

Рассмотрим теперь сопряженные гиперболы, асимптотами которых служат прямые OX и OY (рис. 7), новые оси OX' и OY' служат осями симметрии этих гипербол). В старых координатах они имеют уравнения $xy = \pm\frac{a^2}{2}$. Если подставить в эти уравнения формулы (3), то получим уравнения этих же гипербол в новых координатах, то есть *уравнения двух сопряженных гипербол относительно осей симметрии:*

$$x'^2 - y'^2 = \pm a^2.$$

В дальнейшем мы не будем возвращаться к старым координатам и поэтому не будем ставить штрихов ни у названий осей координат, ни у самих координат точек наших гипербол; оси будем чертить, как обычно, горизонтально и вертикально (рис. 8). Уравнения двух сопряженных гипербол будут такие

$$x^2 - y^2 = a^2 \tag{4}$$

и $x^2 - y^2 = -a^2$ (или $y^2 - x^2 = a^2$).

Обе эти гиперболы «вневписаны» в квадрат $pqrs$ со стороной $2a$; общими их асимптотами являются продолжения диагоналей pr и qs этого *«фундаментального»* квадрата.

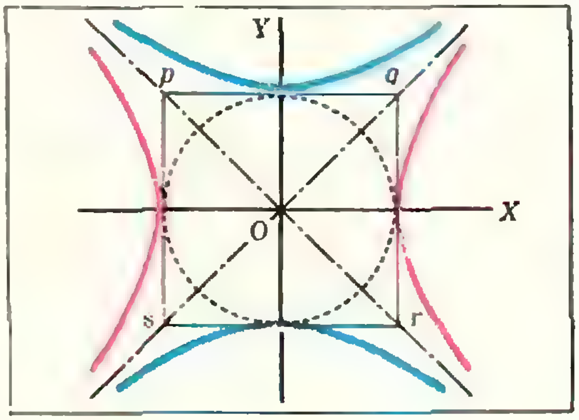


Рис. 8.

Изменяя параметр a, мы получим бесконечное множество гипербол с общими асимптотами.

Интересно, что окружность, вписанная в фундаментальный квадрат, имеет уравнение, сходное с (4):

$$x^2 + y^2 = a^2. \qquad (4а)$$

Сравнение уравнений (4) и (4а) показывает, что равносторонняя гипербола и окружность в некотором смысле родственны между собой, несмотря на то, что они совсем не похожи друг на друга.

II. ГИПЕРБОЛА ОБЩЕГО ВИДА

Определение гиперболы общего вида

Из статьи «Эллипс» читатели знают, что, если подвергнуть окружность преобразованию растяжения —сжатия (РС)*), то она перейдет в эллипс. Нас будет интересовать фигура, в которую перейдет каждая из равносторонних гипербол, изображенных на рисунке 9 штриховыми линия, в результате РС относительно оси симметрии $A'A$.

Фундаментальный квадрат $pqrs$ этих гипербол перейдет в прямоугольник $PQRS$ (на рис. 9), его диагонали pr и qs перейдут также в прямые PR и QS.

Сопряженные (красная и синяя) равносторонние гиперболы перейдут в результате РС в красную и синюю сплошные линии. Каждая из них также состоит из двух ветвей и симметрична относительно средних линий фундаментального прямоугольника $PQRS$, диагонали которого служат асимптотами этих кривых. Но эти новые линии уже не будут конгруэнтны. Мы будем называть их по-прежнему сопряженными друг другу гиперболами.

Кривую, состоящую из двух ветвей и полученную в результате РС «полной» равносторонней гиперболы относительно средней линии фундаментального квадрата, называют гиперболой общего вида или просто ***гиперболой.***

Кривая, рассматривавшаяся в первой части статьи, является ее частным случаем. Она называлась равносторонней, так как квадрат — это равносторонний прямоугольник.

Вспомним, что эллипсом называется линия, полученная в результате РС окружности. Гипербола (общего вида) — такой же родственник равносторонней гиперболы, как эллипс — родственник окружности.

Можно определить ветвь гиперболы при помощи площади аналогично тому, как мы на с. 16 определяли

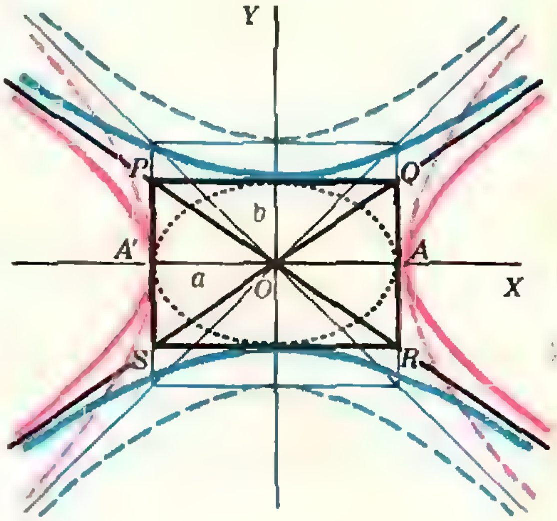


Рис. 9.

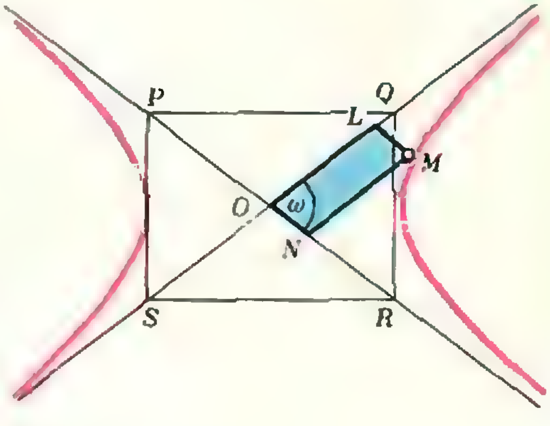


Рис. 10.

---

*) См. «Квант», 1975, № 1, с. 2

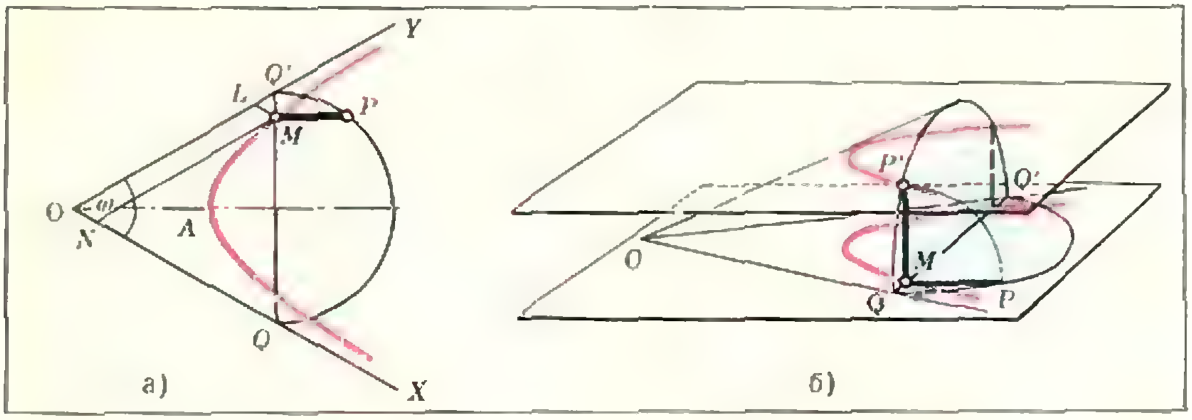


Рис. 11.

ветвь равносторонней гиперболы. А именно (рис. 10): *гиперболой (точнее — одной ее ветвью) называется множество четвертых вершин M параллелограммов заданной площади k, у которых одна вершина O совпадает с вершиной данного угла, а две — L и N — лежат на его сторонах.* Это определение равносильно предыдущему (докажите).

Каноническое уравнение гиперболы

Уравнение гиперболы общего вида, отнесенное к ее осям симметрии, зависит от того, лежат ее вершины на оси OX или на оси OY. Получить уравнения обеих гипербол (красной и синей) можно из уравнений (4) равносторонних гипербол совершенно таким же способом, как было получено уравнение эллипса из уравнений окружности *). Приводим эти уравнения:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ (красная)}, \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \text{ (синяя)}; \tag{5}$$

здесь a и b — полуоси сопряженных гипербол (см. рисунок 9).

Уравнения (5) отличаются от уравнения эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, вписанного в тот же фундаментальный прямоугольник, тем, что в левой части у обоих членов разные знаки. Замечательное сходство эллипса и гиперболы!

III. ГИПЕРБОЛА — КОНИЧЕСКОЕ СЕЧЕНИЕ

Сходство эллипса и гиперболы на этом не ограничивается. Известно, что эллипс — наклонное сечение кругового цилиндра.

Докажем, пользуясь геометрическим определением гиперболы, что каждая гипербола может быть получена как сечение некоторого кругового конуса плоскостью, параллельной его оси.

При доказательстве мы будем рассматривать только одну ветвь гиперболы — наше свойство для точек всей гиперболы следует из симметрии обеих пол.

Дана ветвь гиперболы и ее асимптоты OX и OY, пересекающиеся под углом ω (рис. 11, а). По определению, для каждой ее точки площадь параллелограмма $ONML$ одна и та же — она равна $ON \cdot OL \cdot \sin \omega$.

Обозначим произведение $ON \cdot OL$, постоянное для любой точки M гиперболы, через k: $ON \cdot OL = ML \times MN = k$. Проведем через M перпендикуляр QQ' к оси симметрии гиперболы; он пересечет асимптоты OX и OY в точках Q и Q'. Произведение отрезков MQ и MQ' — тоже постоянно для любой точки ветви гиперболы M. Действительно, $MQ = 2 \cdot MN \cdot \sin\frac{\omega}{2}$,

$MQ' = 2ML \cdot \sin\frac{\omega}{2}$,

$$MQ \cdot MQ' = 4k \cdot \sin^2\frac{\omega}{2} = (k')^2,$$

---

*) См. «Квант» № 1, с. 5. Вывести уравнение (5) из уравнения (4) предоставляем читателю.

где $k' = 2\sqrt{k}\sin\omega/2$. Отрезок длиной k', *средний пропорциональный* для отрезков MQ и MQ', один и тот же для всех M может быть получен известным построением: на отрезке QQ' как на диаметре, строим полуокружность QPQ' и проведем отрезок MP параллельно оси гиперболы, до пересечения с этой окружностью, $MP = k'$.

Повернем теперь полукруг QPQ' вокруг диаметра QQ' на 90° (рис. 11,б) Отрезок MP станет вертикально над плоскостью чертежа 11а (будем считать ее горизонтальной). Точка P станет над точкой M на расстоянии k' от нее (P'). Проделаем это с каждым полукругом, построенным указанным образом для любой точки гиперболы. В результате вся гипербола поднимается над плоскостью, в которой она лежала, на расстояние k' и останется в одной плоскости. В то же время каждая полуокружность QPQ', повернутая на 90°, будет лежать на круговом конусе, полученном вращением асимптоты OX гиперболы вокруг ее оси (докажите). Следовательно, точка M нашей гиперболы (в поднятом положении) лежит и на поверхности конуса, и в плоскости, параллельной оси этого конуса, что и требовалось доказать.

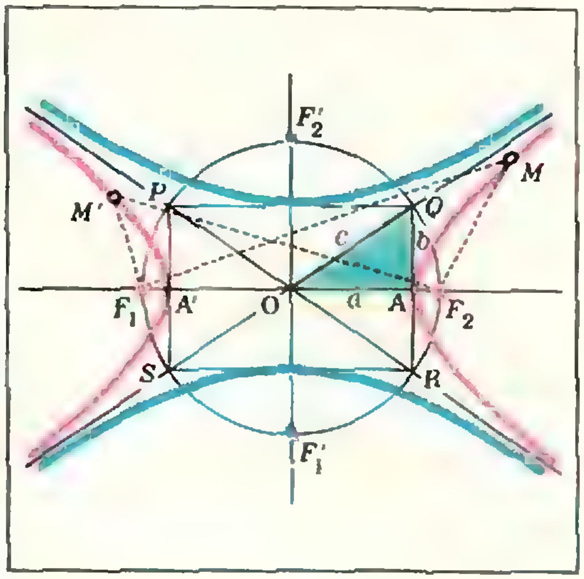


Рис. 12.

Это замечательное свойство относится не только к сечению кругового конуса плоскостью, параллельной его оси, но и к любому сечению, задевающему обе полы конуса. Этот факт, относящийся к общей теории конических сечений, мы здесь не будем доказывать *).

Фокальное свойство гиперболы

Известно, что эллипс обладает замечательным «фокальным» свойством: в его плоскости существуют такие точки F_1 и F_2 (фокусы), что сумма расстояний каждой точки M эллипса до его фокусов одна и та же — она равна длине большой оси эллипса:

$$F_1M + F_2M = 2a. \qquad (6)$$

Похожее свойство имеется и у гиперболы. В ее плоскости существуют две точки (фокусы гиперболы), что *разность расстояний каждой точки M гиперболы для этих точек одна и та же* — она равна расстоянию между вершинами гиперболы:

$$F_1M - F_2M = 2a. \qquad (7a)$$

Здесь F_1 — фокус, более удаленный от M, чем F_2 (рис. 12). Оба фокуса лежат на оси симметрии гиперболы, проходящей через ее вершины A и A'; расстояние каждого фокуса от центра гиперболы равно

$$F_1O = F_2O = c = \sqrt{a^2 + b^2},$$

где a и b — длины полуосей данной гиперболы и ее сопряженной **). Важная связь между тремя «элементами гиперболы a, b и c

$$c^2 = a^2 + b^2 \qquad (8)$$

аналогична связи $c^2 = a^2 - b^2$ для эллипса.

На рисунке 12 точка M лежит на правой ветви гиперболы; для любой точки M' на левой её ветви фор-

---

*) Об этом будет рассказано в «Кванте» № 5.

**) Доказывать фокальное свойство гиперболы мы здесь не будем. Читателю предлагается получить это доказательство самостоятельно — см. задачу М313 в этом номере журнала (с. 46).

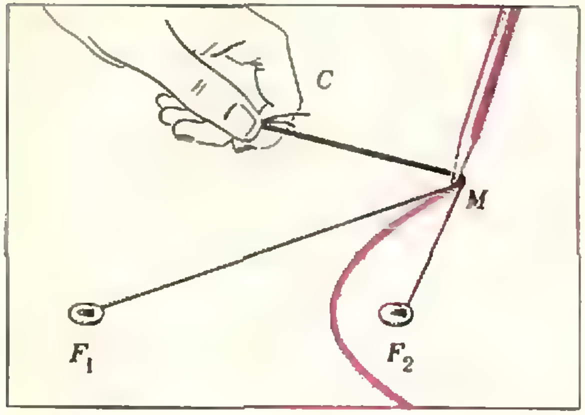


Рис. 13.

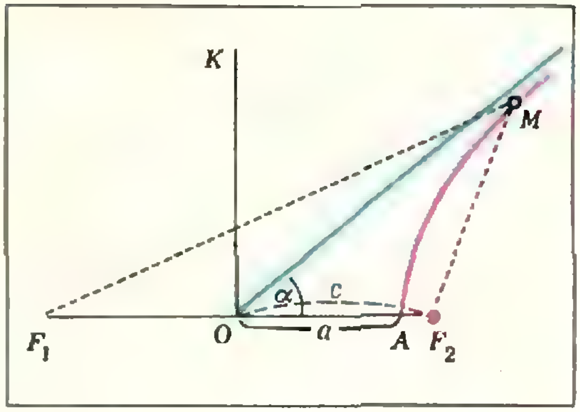


Рис. 14.

мула (7а) будет иметь вид:

$$F_2M - F_1M = 2a. \qquad (7б)$$

Для сопряженной ей гиперболы (синей) фокусами будут F_1' и F_2'. Все 4 фокуса взаимно сопряженных гипербол лежат на окружности, центр которой — в центре гиперболы, а радиус равен половине диагонали OQ прямоугольника $PQRS$, фундаментального для обеих гипербол.

Фокальное свойство часто принимается за определение гиперболы.

Вычерчивание гиперболы непрерывным движением

На фокальном свойстве основано вычерчивание гиперболы при помощи двух нитей, аналогичное известному вычерчиванию эллипса. Положим лист бумаги на чертежную доску и наколем на лист бумаги две канцелярские кнопки F_1 и F_2 (рис. 13). Возьмем две нити, разность длин которых ($2a$) меньше расстояния между кнопками ($2c$), конец каждой нити привяжем к ножкам кнопок, а оставшиеся концы свяжем узлом (точка C). Держа теперь узел в левой руке, защепим обе нити острием карандаша M и будем двигать карандаш на бумаге, так, чтобы обе нити F_1MC и F_2MC были все время в натянутом положении. Тогда острие M карандаша все время находится на одной ветви гиперболы с фокусами F_1 и F_2 и длиной оси $2a = F_1M - F_2M$ (при $CMF_1 > CMF_2$), так как

$$F_1M - F_2M = (F_1M + MC) - (F_2M + MC) = 2a.$$

Для вычерчивания второй ветви следует поменять местами кнопки с привязанными к ним нитями. Вычерченные дуги гиперболы будут тем длиннее, чем длиннее нити.

Приложение гиперболы в военном деле

Требуется определить на карте, как нужно направить орудие, чтобы поразить неподвижную звучащую цель, например, стреляющее орудие противника (рис. 14).

По обе стороны орудия O располагают симметрично относительно O два пункта F_1 и F_2, в которых фиксируется время дошедшего до них звука выстрела вражеского орудия M. Пусть этот звук слышен в пункте F_1 в момент t_1, а в пункте F_2 — в момент t_2. Если $t_1 = t_2$, то, очевидно, $F_1M = F_2M$ и орудие O следует направить по перпендикуляру OK к F_1F_2. Если же $t_1 \neq t_2$, то $|t_1 - t_2|$ есть $\frac{2a}{v}$, где v — скорость звука в воздухе, а $2a$ — разность расстояний $|F_1M - F_2M|$ от пунктов F_1 и F_2. Значит, орудие находится на одной ветви гиперболы с фокусным расстоянием $F_1F_2 = 2c$ и расстоянием между вершинами $2a = v\,|t_1 - t_2|$, именно — на той ветви, которая ближе к пункту, где звук выстрела услышен раньше. Асимптоты этой гиперболы легко построить на карте: угол между асимптотой и прямой F_1F_2 имеет косинус: $\cos\alpha = \frac{a}{c}$.

Так как далекая точка M близка к асимптоте, мы можем практически принять $\cos\measuredangle MOF_2 \approx \cos\alpha = \frac{a}{c}$ и направить орудие под углом α к F_1F_2.

* * *

Мы не объяснили названия гиперболы (по древне-гречески *hyperbole* значит «избыток», «преувеличение»*) (что здесь преувеличено?), не рассказали о других важных свойствах этой кривой, общих для всех конических сечений — эллипса, гиперболы и параболы. Эти вопросы будут освещены в «Кванте» № 5.

---

*) Напомним, что оборот речи, состоящий в чрезмерном преувеличении, называется гиперболой.

Советы начинающим репетиторам

Всякие уважающие себя папа и мама считают святым родительским долгом препоручить своих получивших среднее образование чад заботам репетиторов. Именно эти умные и обремененные знаниями люди представляются им ангелами небесными, распахивающими перед их наследниками райские вузовские врата... Потребность в репетиторах растет, и скоро их днем с огнем нельзя будет сыскать. Между тем каждый человек, независимо от образования, способен давать платные уроки. И если репетиторство еще не приняло массового характера, виной тому отсутствие соответствующих пособий. Предлагаемые советы призваны хоть в какой-то мере помочь начинающим репетиторам.

Как найти клиента

ШКОЛА
ДАЮ УРОКОВ!

Нет лучшего способа избавиться от материальных затруднений, чем заняться учениками. Правда, для создания соответствующей клиентуры следует проявить определенную изобретательность и сноровку. Большую пользу вам окажет знакомый директор школы. Попросите его получше, и он организует вам целый поток абитуриентов, от которых не будет отбоя. Не мешает также побеседовать с завучем. Расскажите этой отзывчивой женщине со сдержанной, но ясно ощутимой горечью о своем трудном материальном положении, сковывающем ваши духовные силы.

Едва ли не самым эффективным источником учеников служат объявления. Они должны привлекать внимание прохожих, и поэтому их следует выполнять на ватмане разноцветной тушью. Постарайтесь, чтобы текст был двусмысленным и интригующим. Статистика показывает, что наибольшим успехом пользуются следующие два объявления: «Опытный преподаватель вуза дает уроки по специально разработанной ускоренной программе, гарантирующей поступление», «Группа кандидатов наук готовит к конкурсным экзаменам по всем предметам во все вузы. Занятия в центре».

Разумеется, любая программа стара как мир, а поступление в институт не может гарантировать ничто на свете. Но когда дело касается детей, нет ничего проще, чем заставить родителей поверить в чудо. Конечно, упомянутая группа состоит из вас одного, а живого кандидата наук вы и в глаза не видели. Но пусть эта святая ложь не смущает вас — отношения между родителями и репетиторами строятся исключительно на доверии. Кстати говоря, если вы беретесь за подготовку в университет, то вовсе не обязаны сообщать о вашей собственной неудаче в связи с поступлением в заочный мелиоративный техникум.

(Продолжение см. на с 35)

И. П. Стаханов

МАССА И ЭНЕРГИЯ В ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

> *Один из самых приятных моментов в истории математики — это момент, когда выясняется, что два раздела математики, которые ранее рассматривались отдельно и считались независимыми, в действительности являются двумя скрытыми формами одного и того же.*
>
> У. У. Сойер. «Прелюдия к математике»

Сказанное в эпиграфе относится не только к математике, но и к физике. Если бы около ста лет назад мы обратились к физику с вопросом, не являются ли масса и энергия проявлением одного и того же свойства физических тел, то в ответ он только пожал бы плечами, что означало бы: «Какие странные мысли могут иногда приходить в голову профанам!» Из снисхождения к нашей необразованности он мог бы разъяснить нам, что масса есть мера инертности тела, а энергия определяет способность тела совершать работу. Это совершенно разные свойства, потому что телу можно сообщить энергию, не меняя его массы. При этом он мог бы сослаться на прямой опыт, напомнив, что масса холодного куска стали не меняется при его нагревании и плавлении. Действительно, даже самые точные измерения не обнаруживают никаких изменений веса при нагревании тела. Это было известно всем, и потому сто лет назад мы, по всей вероятности, не задали бы такого вопроса.

Итак, по представлениям прошлого века, масса — неотъемлемое свойство тела. У тела можно отнять всю энергию, но не массу. Можно представить себе тело покоящимся в космосе вдали от других тел. Тогда его температура близка к абсолютному нулю, а внешние поля, в том числе и поле тяготения, около него отсутствуют. Такое тело не может совершать работы *), то есть его энергия равна нулю, но его инертность останется такой же, как и на Земле.

Наконец, физик прошлого столетия добавил бы, что энергию вообще нельзя считать свойством, присущим только самому телу. Так, кинетическая энергия стола, находящегося в комнате, равна нулю в системе координат, связанной с Землей, но в системе координат, покоящейся относительно Солнца, она во много раз превышает энергию летящего снаряда (относительно Земли). Масса же определяется свойствами только самого тела.

Таков был бы ответ на поставленный вопрос до появления теории относительности. Сейчас мы знаем, что механика XIX века, которую обычно называют ньютоновской, классической или нерелятивистской механикой, применима только в том случае, когда скорость тела мала по сравнению со скоростью света. Как же обстоит дело в релятивистской механике, где такого ограничения нет?

---

*) Строго говоря, требуется еще, чтобы при этом не протекали химические реакции. Ядерных реакций физика прошлого века не знала.

Прежде чем ответить на этот вопрос, посмотрим, что можно сказать об инертной массе в нерелятивистской механике. Из школьного курса физики известно, что:

1) произведение массы на ускорение тела равно действующей на него силе;

2) произведение массы на скорость тела равно его импульсу;

3) масса тела не зависит от выбора системы координат;

4) масса изолированного тела сохраняется.

Из пункта 3 следует, что масса не должна зависеть от скорости. Действительно, скорость одного и того же тела в двух системах координат, движущихся друг относительно друга, различна. Если бы масса зависела от скорости, ее величина имела бы разные значения в этих координатных системах. В последнем пункте имеется в виду хорошо известный закон сохранения массы. Масса изолированного тела, на которое не действуют внешние силы, не может измениться в результате каких-либо внутренних процессов, происходящих в нем (например, вследствие изменения относительной скорости движения его частей, возникающего из-за их взаимодействия).

Если масса тела не зависит от скорости, она не будет меняться и при действии внешних сил, ускоряющих тело. Таким образом, использование пункта 3 позволяет сформулировать закон сохранения массы более широко, чем это предполагается в пункте 4. Два фундаментальных свойства, приведенных в пунктах 3 и 4, объясняют, почему масса в ньютоновской механике оказывается важнейшей характеристикой физического тела. Именно благодаря этим свойствам масса считалась мерой количества материи, содержащейся в теле.

В релятивистской механике есть два понятия: релятивистская масса (m) и масса покоя (m_0), которые связаны между собой следующим соотношением:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \qquad (1)$$

где v — скорость тела, c — скорость света. Импульс $\mathbf{p}$ представляется в виде произведения релятивистской массы на скорость тела

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}, \qquad (2)$$

а энергия — в виде произведения

$$E = mc^2. \qquad (3)$$

Как и в ньютоновской механике, если на тело не действуют внешние силы, то импульс $\mathbf{p}$ и энергия E, а следовательно, и релятивистская масса m этого тела остаются неизменными.

Посмотрим теперь, какую же величину следует называть массой в релятивистской механике. Если импульс тела $\mathbf{p}$ за малый промежуток времени Δt изменился на величину $\Delta\mathbf{p}$, то по законам ньютоновской механики отношение $\Delta\mathbf{p}$ к Δt равно действующей силе. Этот закон остается верным и в релятивистской механике:

$$\mathbf{F} = \frac{\Delta\mathbf{p}}{\Delta t} = \frac{\Delta(m\mathbf{v})}{\Delta t}. \qquad (4)$$

Однако согласно формуле (1) величина m зависит от скорости и изменяется за время Δt. Поэтому ее нельзя вынести из-под знака Δ, то есть $\Delta(m\mathbf{v}) \neq m\Delta\mathbf{v}$. Поэтому из закона движения, описываемого уравнением (4), нельзя сделать вывод о пропорциональности векторов силы и ускорения. Следовательно, вопрос о свойстве, содержащемся в пункте 1, отпадает.

Как видно из выражения (2), релятивистская масса обладает свойством 2 ньютоновской массы. Кроме того, из закона сохранения энергии следует, что в системе, изолированной от действия внешних сил, релятивистская масса сохраняется. Следовательно, она обладает и свойством 4 ньютоновской массы.

К сожалению, на этом аналогии кончаются, поскольку m зависит от скорости и соответственно от выбора системы координат. Таким образом, в этом отношении релятивистская масса сходна скорее с энергией, чем с ньютоновской массой: она не является характеристикой, зависящей только от исследуемого тела.

В отличие от релятивистской массы m, масса покоя m_0 определяет инертность тела, когда скорость тела v равна нулю. Отсюда следует, что m_0 не меняется при переходе к движущейся системе координат. Как и ньютоновская масса, масса покоя определяется только самим телом и не зависит от того, в какой системе координат это тело рассматривается. Однако масса покоя не равна отношению абсолютного значения импульса p к абсолютному значению скорости тела v и не является коэффициентом пропорциональности между силой и ускорением.

Но главное отличие ньютоновской массы от массы покоя релятивистской механики состоит в том, что последняя не подчиняется закону сохранения. В качестве примера можно указать процесс аннигиляции электрона и позитрона, при котором эти две частицы превращаются в γ-кванты электромагнитного поля (фотоны). В результате аннигиляции электрон и позитрон исчезают, и вместо них появляются электромагнитные волны. Импульс $\mathbf{p}$ и энергия E в такой системе сохраняются. Таким образом, должна сохраняться и полная релятивистская масса системы m. В то же время масса покоя системы меняется, поскольку вместо двух частиц (электрона и позитрона) с массой покоя, отличной от нуля, появляются γ-кванты, масса покоя которых равна нулю.

Другим примером является процесс деления ядер урана или плутония, который сопровождается образованием более легких ядер с меньшей суммарной массой покоя.

Итак, масса покоя также существенно отличается от ньютоновской массы. Строго говоря, в релятивистской механике вообще нет определенного понятия, которое можно было бы охарактеризовать свойствами, аналогичными свойствам «обычной» массы. Роль, которую играет эта величина в классической механике, распределяется между двумя величинами, каждую из которых можно, по-существу, с равным правом считать «наследником» ньютоновской массы.

Именно в таких ситуациях часто коренится причина трудности понимания новых теорий. Приписывая соответствие с объективной реальностью основным понятиям и терминам теории, мы, естественно, ожидаем от дальнейшего развития науки лишь уточнения этих понятий. В действительности же новая теория иногда очень непочтительно обходится «с реальностями» старой. По-существу, каждая новая теория заново определяет тот арсенал понятий и терминов, с помощью которых она собирается описывать реальность. Аналогия между терминами различных физических теорий часто оказывается очень неполной, и применение одинаковых названий при этом легко может ввести в заблуждение.

Сходная ситуация возникает с термином «кинетическая энергия». Нерелятивистская механика знала только два вида энергии — потенциальную и кинетическую. Кинетическая энергия обладает следующими двумя важными свойствами:

а) она обращается в нуль, когда скорость тела равна нулю;

б) если на тело не действуют внешние силы, энергия остается неизменной.

В релятивистской механике нет величины, которая обладала бы этими двумя свойствами одновременно. Энергия E, определенная равенством (3), обладает свойством б), но не обладает свойством а). При $v = 0$

она переходит в величину, называемую энергией покоя:

$$E_0 = m_0c^2. \tag{5}$$

Выделим из полной энергии величину, характеризующую механическое движение тела:

$$T = E - E_0 = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - 1\right). \tag{6}$$

Энергия T обращается в нуль при $v = 0$. Однако она не сохраняется, поскольку, как уже отмечалось выше, масса покоя (и соответственно E_0) может меняться даже в отсутствие внешних сил.

Выходит, что и свойства обычной кинетической энергии распределились в релятивистской механике между двумя различными понятиями. Какое из них следует называть кинетической энергией? Это в значительной степени дело вкуса. Принято величину T называть кинетической, а E — полной энергией тела.

До сих пор мы говорили не об объединении, а скорее о «расщеплении» понятий. Теперь пришла пора оправдать слова, сказанные в эпиграфе.

Рассмотрим вопрос о соотношении массы и энергии. Учитывая сказанное выше, необходимо уточнить, о какой массе и какой энергии идет речь. В дальнейшем, если не сделано специальной оговорки, мы под массой будем понимать релятивистскую массу m, а под энергией — полную энергию свободного тела E. Тогда из соотношения (3) следует, что они отличаются лишь множителем c^2, а этот множитель — мировая постоянная, то есть величина, которая никогда и ни при каких условиях не может измениться. В таком случае любое утверждение, относящееся к массе, автоматически относится к энергии и наоборот. Например, любое увеличение или уменьшение энергии тела, скажем, при нагревании и охлаждении или при излучении, должно приводить к соответствующему изменению его массы*). С другой стороны, любая форма энергии, в том числе электромагнитное излучение, обладает инертностью.

То, что масса и энергия измеряются различными способами (например, масса посредством взвешивания **), а энергия в калориметре), не может, конечно, считаться возражением против совпадения физического смысла этих понятий. Ведь мы постоянно встречаемся с ситуациями, когда одна и та же величина может быть измерена несколькими различными способами. Только теория может окончательно решить вопрос о том, являются ли две разные экспериментальные процедуры измерением одной и той же величины или они дают сведения о разных величинах.

Различие единиц, в которых выражаются масса и энергия, также несущественно. Так, температура тела обычно выражается в градусах, но ее часто выражают и в эргах или электронвольтах (энергетическими единицами для измерения температуры широко пользуются в термоядерных исследованиях). Различие единиц не означает различия физического смысла величин.

В теоретической физике часто используют систему единиц, в которой принимается, что $c = 1$. В этой системе скорость, конечно, оказывается отвлеченной величиной. Это означает, что любая скорость измеряется в долях скорости света, принятой за эталон. Вследствие этого скорости всех тел и сигналов, которые, как известно, никогда не превышают c, представляются неименованными дробными числами от 0 до 1, а наименования длины и времени совпадают. Действительно, только при этом условии скорость, то есть отношение расстояния ко времени, будет неименованной (безразмерной) величиной.

---

*) Из формул (3) или (5) видно, что изменение массы тела при увеличении его энергии даже на значительную величину ΔE (например, вследствие нагревания его до очень высоких температур) ничтожно мало: $\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2}$.

**) При этом используется равенство инертной и тяжелой масс, которые согласно общей теории относительности представляют собой физически одно и то же.

Несмотря на все сказанное выше, в нашем языке надолго, возможно навсегда, останутся два термина: энергия и масса. С точки зрения релятивистской механики было бы целесообразнее употреблять для обозначения величин, которые здесь имеются в виду, какое-то одно название. Однако разговорный язык формируется на основе повседневного опыта, а в нем релятивистские эффекты отсутствуют.

Полная энергия, или релятивистская масса, определяет лишь верхний предел работы, которую может совершить данное тело. В действительности в громадном большинстве случаев в работу удается обратить лишь ничтожную долю этой энергии. Это верно даже для ядерных реакций. Исключение составляет только процесс аннигиляции вещества и антивещества, при котором энергия, заключенная в веществе, освобождается полностью. Но аннигиляция пока осуществляется только с элементарными частицами.

Из выражения (5) видно, что между энергией покоя и массой покоя существует такое же соотношение, как и между E и m, то есть эти понятия совпадают. А вот различия между энергией покоя E_0 и полной энергией (или, соответственно, между массой покоя и релятивистской массой) существенны. При определенных условиях энергия покоя может переходить в другие виды энергии. Имея в виду этот процесс, иногда говорят о переходе массы в энергию. Это неудачное выражение, хотя бы потому, что остается невыясненным, о какой массе и какой энергии идет речь. Только в ньютоновской механике можно было недвусмысленно говорить о массе, не добавляя ничего к этому термину.

В заключение обратимся еще раз к формулам (1), (3) и (6). Невольно возникает вопрос: почему в чисто механических формулах такую важную роль играет скорость распространения электромагнитных волн? Дело в том, что в нашем мире существует абсолютная предельная скорость, равная c, величина которой одинакова во всех системах координат. Естественно, что этот факт не может не иметь прямого отношения к законам движения физических тел, к законам механики. Именно поэтому величина c и входит во все формулы релятивистской механики. Случайно оказалось, что возмущения в электромагнитном поле, в том числе и свет, распространяются с такой же скоростью. Предельная скорость c называется скоростью света по чисто историческим причинам: просто потому, что впервые встретились с ней именно в оптике.

Упражнения

1. Определить зависимость энергии частицы с массой покоя m_0 от ее импульса p. Какой характер имеет эта зависимость при малых и больших значениях p?

2. Определить зависимость энергии от импульса для фотона (скорость движения фотона равна скорости света).

3. Показать, что при $v \ll c$ выражение (6) для кинетической энергии переходит в классическую формулу.

4. Найти релятивистскую поправку к кинетической энергии искусственного спутника Земли массой 10 *т*, вращающегося вокруг Земли со скоростью 8 *км/с*.

Примечание. Удобно воспользоваться следующими приближенными выражениями:

при $\alpha \ll 1$

$$\sqrt{1-\alpha} \approx 1 - \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha^2}{8}.$$

$$\frac{1}{1-\alpha} \approx 1 + \alpha + \alpha^2.$$

5. Как будет меняться радиус кривизны траектории заряженной частицы в магнитном поле, когда ее скорость v приближается к скорости света?

СРЕДСТВА ВЫЧИСЛЕНИЙ

Л.С. Хренов

ЭКВМ «Искра-110»

Стремление механизировать вычисления с помощью различных средств возникло в глубокой древности. На Руси различные средства вычислений применялись уже при строительстве первых каменных храмов в Новгороде, Киеве и другие городах.

За последние десятилетия в средствах вычислений произошли большие качественные изменения, которые трудно сравнить даже с таким этапом, как появление логарифмов.

Такой качественный скачок в развитии вычислительной техники, и особенно счетных машин, был вызван развитием технического прогресса во всех отраслях народного хозяйства, что потребовало проведения в громадных объемах различных вычислений.

Теперь, в зависимости от точности исходных данных и целей проведения вычислений, пользуются различными средствами — номограммами, таблицами, приборами и счетными машинами.

Номограммы

Номограммы, представляющие графические изображения функциональной зависимости, строятся для какой-либо одной формулы или одного уравнения. Поэтому эффективность их использования при вычислениях зависит от массовости вычислительных операций по данной формуле. Номограммами пользуются для быстрого выполнения расчетов, не требующих большой точности (2—3 значащие цифры), или для контроля более точных вычислений. Основным элементом каждой номограммы является функциональная шкала, графически изображающая некоторую функцию $y = f(x)$ на линии*).

Таблицы

Таблица — это совокупность численных значений данной функции, соответствующих определенным, последовательно расположенным значениям аргумента.

В Вавилоне еще за 2 000 лет до н. э. были созданы таблицы, содержащие значения n^2, n^3, $n^2 + n^3$, $1/n$ и других функций. Повышение требований к точности вычислений привело к созданию в XV веке большого количества различных таблиц.

Быстрое развитие астрономии в XVI веке предъявляло повышенные требования к точности вычислений, что вызвало изобретение логарифмов. Логарифмы, которыми мы пользуемся теперь, были предложены независимо друг от друга шотландцем Дж. Непером (1550—1617) и швейцарцем И. Бюрги (1552—1632).

В 1703 году в России была опубликована «Таблица логарифмов на числа от 1 до 1000 и синусов, тангенсов, секансов к научению мудролюбивых тщателей».

Дальнейшее развитие науки и техники вызвало необходимость разработки и создания, особенно начиная с середины XVII века, таблиц, содержащих значения самых различных функций. А в первой половине нашего столетия всевозможных таблиц издано в несколько раз больше, чем за все предшествующие столетия.

---

*) См. для примера статью Ю. В. Матиясевич «Первое знакомство с номограммами», «Квант», 1971, № 5.

В практике вычислений широкое применение находят математические таблицы, представляющие функции, главным образом, одного аргумента: $y = f(x)$, с шагом для аргумента, позволяющим применять линейную интерполяцию.

Из таблиц, содержащих значения элементарных функций, широко используются всемирно известные таблицы Барлоу, содержащие значения функций n^2, n^3, $\sqrt{n}$; $\sqrt{10n}$, $\sqrt[3]{n}$, и $1/n$ для аргументов n от 1 до 15 000 с шагом в одну единицу.

Из логарифмических наиболее часто применяются таблицы десятичных логарифмов чисел, их сумм и разностей, а также логарифмов тригонометрических функций; они составлены с разным числом десятичных знаков в мантиссе, а наиболее употребительны — с 4—8.

При выборе для вычисления таблиц логарифмов необходимо учитывать количество верных значащих цифр логарифмируемых чисел, представляющих обычно не точные, а приближенные значения. Приближенно можно считать, что абсолютная погрешность десятичного логарифма равна половине относительной погрешности логарифмируемого числа, то есть следует пользоваться таблицами десятичных логарифмов с таким числом десятичных знаков в их мантиссах, сколько верных значащих цифр имеет логарифмируемое число, или на единицу больше.

Широкое использование различных счетных машин привело к замене логарифмических вычислений нелогарифмическими В связи с этим особое значение приобретают таблицы, содержащие натуральные значения функций.

В отличие от таблиц логарифмов, число десятичных знаков после запятой в таблицах натуральных значений, скажем, тригонометрических функций, не вполне характеризует их точность. Такие таблицы содержат значения тригонометрических функций, абсолютная погрешность которых не превосходит $0{,}5 \times 10^{-n}$, где n — число знаков после запятой. Относительная погрешность их будет резко меняться. Пользование такими таблицами приводит к потере точности результатов при вычислениях с функциями малых углов.

Так, например, если в прямоугольном треугольнике ABC допустить, что его катеты соответственно равны $AB = 0{,}45$ *м*, а $BC = 103{,}13$ *м*, то при этих данных, пользуясь пятизначными таблицами натуральных значений тригонометрических функций, получим

$$\operatorname{tg} \sphericalangle ACB = \frac{AB}{BC}; \qquad \sphericalangle ACB = \alpha = 0^\circ 15',$$

а гипотенуза

$$AC = \frac{BC}{\cos\alpha} = \frac{103{,}13}{0{,}99999} \approx 103{,}13 \text{ м};$$

с другой стороны,

$$AC = \frac{AB}{\sin\alpha} = \frac{0{,}45}{0{,}00436} \approx 103{,}21 \text{ м},$$

то есть получается разница в значении стороны AC на 0,08 *м*.

Если же пользоваться таблицами с пятью значащими цифрами, то относительная погрешность будет в пределах

$$0{,}5 \times 10^{-5} \leqslant \Delta\delta \leqslant 0{,}5 \times 10^{-4};$$

в них $\cos 0^\circ 15' = 0{,}99999$, а $\sin 0^\circ 15' = 0{,}0043633$, и

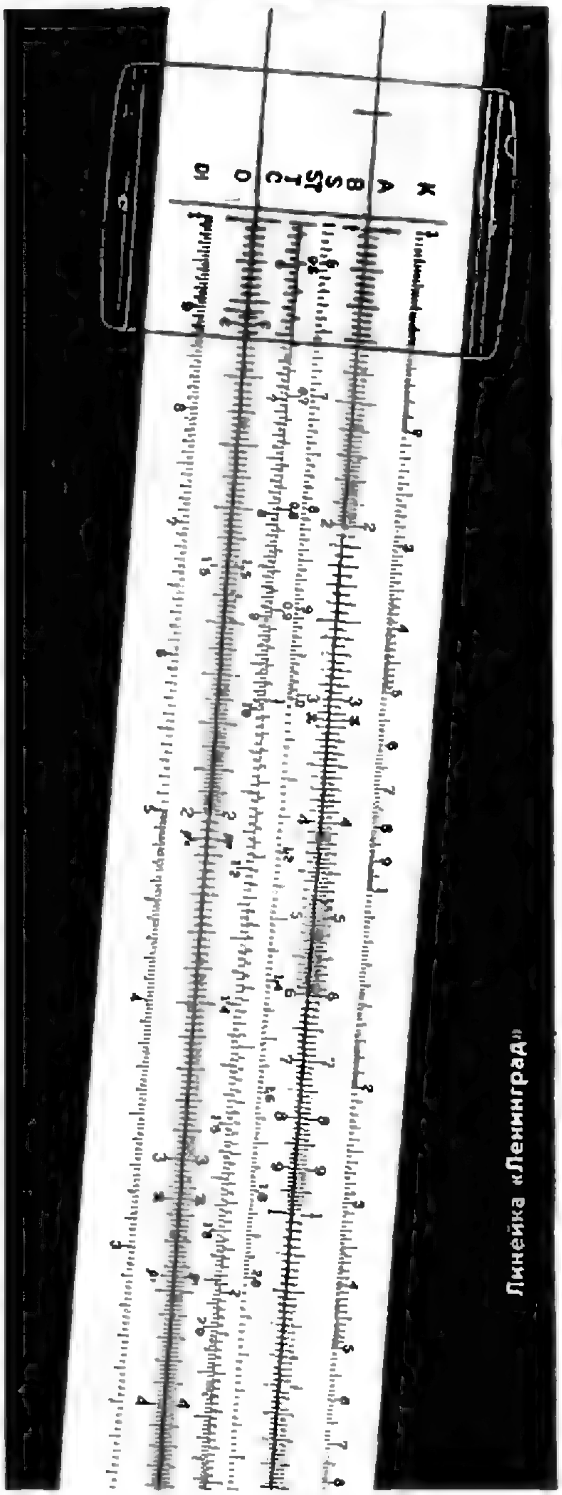
$$AC = \frac{0{,}45}{0{,}0043633} \approx 103{,}13 \text{ м},$$

то есть ошибки в вычислении стороны A не будет.

При выборе для вычислений таблиц натуральных значений тригонометрических функций следует *отдавать предпочтение таблицам*, в которых значения всех шести функций даются с *одинаковым числом значащих цифр*, а не с одинаковым числом десятичных знаков.

Первыми дошедшими до нас тригонометрическими таблицами были таблицы, составленные К. Птолемеем (II в.) Они были помещены в его знаменитом сочинении «Альмогест» — величайшем памятнике астрономии. Основой же современных таблиц тригонометрических функций являются фундаментальные таблицы, составленные Рэтиком — учеником Н. Коперника, расширенные и дополненные в 1613 году немецким ученым Б. Питиском.

ЭКВМ «Электроника-ДД»


Линейка «Ленинград»

Приборы

Из приборов, применяемых для вычислений, особое значение имеют логарифмические линейки, без которых не обходится ни один инженерный расчет. Со времени их создания*) были предложены сотни различных конструкций, как универсальных, так и специально предназначенных для расчетов в определенных областях знаний, содержащих специальные функциональные шкалы.

Наибольшее распространение имеют универсальные логарифмические линейки. Из отечественных универсальных линеек наиболее совершенной является линейка «Ленинград» с двойными логарифмическими шкалами, позволяющими при расчетах пользоваться натуральными логарифмами, показательными функциями, решать показательные и логарифмические уравнения и быстрее, чем на обычных логарифмических линейках (ГОСТ 5161—57), вычислять степени с дробными показателями. При пользовании двойными логарифмическими шкалами следует учитывать, что на них длина отрезка l от начала шкалы до штриха, соответствующего числу N, равна

$$l = m (\lg \lg N - \lg \lg e),$$

где m — модуль двойной логарифмической шкалы, а $e = 2{,}718 \ldots$ — основание натуральных логарифмов.

На лицевой стороне корпуса линейки «Ленинград» нанесено четыре шкалы: K (x^3), A (x^2), D (x) и DI ($1 : x$). При помощи этих шкал производятся те же вычисления, что и по аналогичным шкалам нормальной логарифмической линейки.

---

*) Стремление механизировать логарифмические вычисления привело к использованию для этих целей логарифмической шкалы — прямолинейного отрезка, на котором отложены логарифмы чисел и тригонометрических функций, — предложенной Э. Гюнтером примерно в 1620 году. Прототипом современной линейки является конструкция прямоугольной логарифмической линейки, предложенная англичанином Р. Биссакером в 1654 году.

На обратной стороне этой линейки нанесено шесть шкал: L ($\lg x$), LL_1, ($e^{0.01x}$), DF ($\pi \lg x$), D (x), LL_3 (e^x) и LL_2 ($e^{0,1x}$) на корпусе и четыре шкалы CF ($\pi \lg x$), $CIF =$ $= (1 : \pi x)$, CI ($1 : x$) и C (x) на движке.

Двойные логарифмические шкалы LL_3, LL_2 и LL_1 являются продолжением одна другой. При работе с этими шкалами следует учитывать, что длина соответствующего отрезка на шкале D, равная $m \lg x$ на двойной логарифмической шкале, будет

$$m \lg x = m (\lg \lg N - \lg \lg e),$$

а

$$\lg x = \lg \frac{\lg N}{\lg e},$$

откуда $\lg N = x \lg e$ или $N = e^x$.

Для определения результатов на шкалах LL_1, LL_2 и LL_3 значение степени основания находят на шкале D корпуса и, совместив с ним основной указатель визира, прочитывают под ним значение величины e^x на соответствующей шкале LL_1, LL_2 или LL_3.

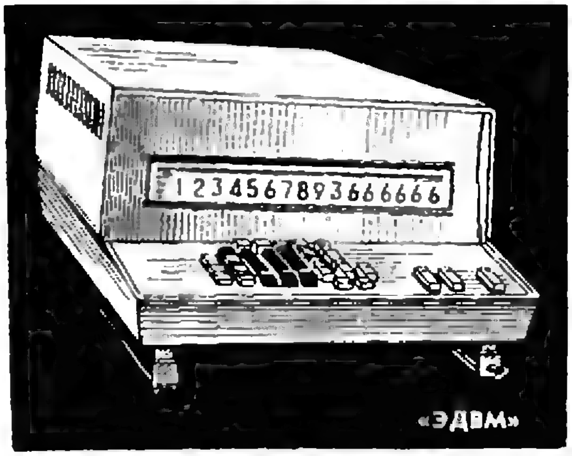
Так, например, для определения $y = e^{0,08}$ совмещают основной указатель визира со штрихом, соответствующим цифре 8 на шкале D, и под этим указателем на шкале LL_3 прочитывают ответ $y = 1,0833$. Так же поступают и при пользовании шкалами LL_1 и LL_2.

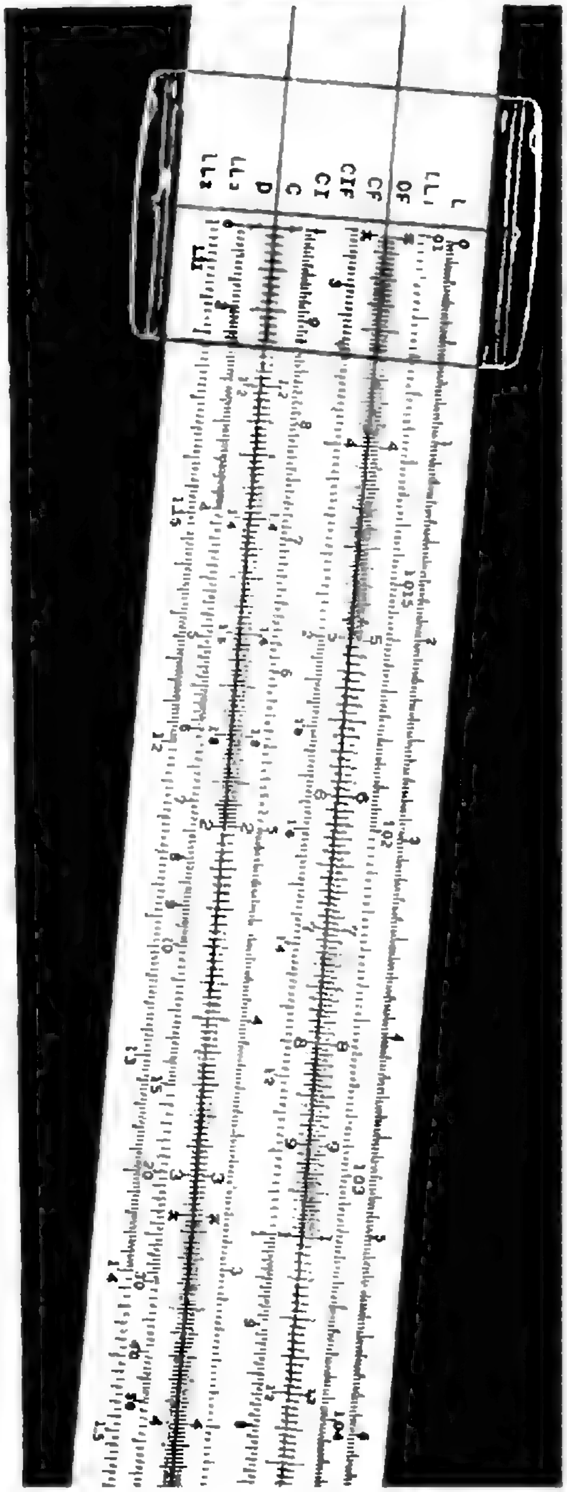
Для вычисления $y = e^x$, когда $x > 10$, поступают так. Показатель степени разбивают на несколько частей, каждая из которых должна быть меньше 10, то есть выражение $y =$ $= e^x$ представляют в виде произведения

$$y = e^{\Delta x_1} e^{\Delta x_2} \dots e^{\Delta x_n},$$

где Δx — составная часть показателя степени.

Затем для каждого члена произведения определяют значение $e^{\Delta x} =$ $= \Delta y$. Таким образом, выражение e^x при $x > 10$ можно представить в виде





произведения

$$y = \Delta y_1 \Delta y_2 \ldots \Delta y_n,$$

здесь $y_i = e^{\Delta x_i}$.

Шкала DF на корпусе и аналогичная ей шкала CF на движке представляют собой обыкновенные логарифмические шкалы, но только сдвинутые каждая на величину π. Следовательно, числу x на шкале C соответствует число πx на шкале CF.

Вторая снизу шкала CI на движке, как и шкала R на нормальной логарифмической линейке, являясь «обратной» шкалой, предназначена для вычисления значений $1/x$, то есть обратных значений чисел x, нанесенных на шкале C.

Шкала CF служит для вычисления значений величин $1/\pi x$. Например, для вычисления $q = 1/\pi x$ при $x = 2{,}6$ поступают так. На обратной стороне линейки совмещают начальные штрихи движка с начальными штрихами на корпусе и в таком положении движка устанавливают визир бегунка на штрих, соответствующий на шкале D заданному числу 2,6 и на шкале CF, пользуясь визиром, читают число 0,1224, являющееся искомым результатом, то есть $q = 0{,}1224$.

На лицевой стороне бегунка нанесены (кроме основного указателя-визира) два коротких красных штриха. Они нанесены так, что расстояния между основным визиром и каждой из крайних линеек соответствует на шкале A отношению $\pi/4 \approx 0{,}785$. С помощью этих штрихов можно быстро вычислять, например, площадь круга.

Так, для вычисления площади круга S при диаметре $d = 5$ *м* основной визир (можно любой из трех штрихов на бегунке) совмещают со штрихом 5 на основной шкале D лицевой стороны корпуса линейки, а по короткому левому (красному) штриху прочитывают на шкале квадратов A значение площади $S = 19{,}63$ *м*^{2}.

Счетные машины

Сейчас создано несколько сотен типов различных машин. Однако все многообразие их можно разделить на две группы: машины непрерывного действия и машины дискретного действия, иначе называемые «счетно-цифровыми машинами». Для машин первой категории характерна сравнительно ограниченная точность получаемых результатов, в них математические величины (входные, промежуточные и выходные) изображаются в виде конкретных физических величин, количественные характеристики которых соответствуют изображаемым имн числам (например, длина отрезка изображается напряжением, площадь — перемещением и т. п.). Самым простым примером вычислительного устройства непрерывного действия является планиметр, при помощи которого на чертежах вычисляют площади фигур *).

В машинах дискретного действия, позволяющих в принципе получать результаты с неограниченной точностью, решение задачи сводится к последовательному выполнению отдельных арифметических действий. В таких машинах все математические величины (исходные, промежуточные и окончательные) изображаются как совокупности цифр в позиционной системе счисления. Это и служит основанием называть такие устройства машинами дискретного действия. Они бывают с ручной и автоматической установкой исходных данных.

Машины с ручной установкой исходных данных делятся на *суммирующие*, предназначенные преимущественно для сложения и вычитания чисел, и на *малые вычислительные машины*; последние разделяются на *механические* (рычажные «Феликс» и клавишные «ВК-1» арифмометры), *электромеханические* (автомат «ВММ-2» и полуавтомат «ВМП-2»), *релейные* («Вильнюс», «Вятка») и *электронные*. Из них наиболее современными являются *электронные клавишные вычислительные машины* (ЭКВМ), позволяющие автоматически выполнять не только все арифметические действия, но и извлекать корни, вычислять натуральные значения тригонометрических функций и производить ряд других действий.

---

*) См. статью Л. Е. Садовский. А. Л. Садовский «Как измеряют площадь», «Квант», 1973, № 10.

Отечественной промышленностью серийно выпускаются различные ЭКВМ: «Искра», «Электроника», «Гелати», «Rasa», десятиклавишная электронная машина «ЭДВМ».

«Искра-110» позволяет производить (с учетом знака и запятой) четыре арифметических действия, а также вычисления типа $a^n + bp^n$ и другие. На ней все операции выполняются с 8-разрядными числами; положение запятой в числе устанавливается соответствующим переключением. На ЭКВМ «Электроника-ДД» можно производить не только четыре арифметических действия, но и вычисления с процентами, извлекать квадратные корни и выполнять различные комбинированные вычисления. Для получения результаты вычислений с определенным числом верных знаков после запятой служат клавиши положения запятой «0», «2», «4» и «6», расположенные на панели клавиатуры левее клавиш набора чисел. А наличие в этой машине блока памяти позволяет производить сложные вычисления и полуавтоматически (без записи промежуточных результатов и повторного набора чисел) извлекать квадратные корни по итерационной формуле

$$y_n = \left(\frac{x}{y_{n-1}} + y_{n-1}\right)/2,$$

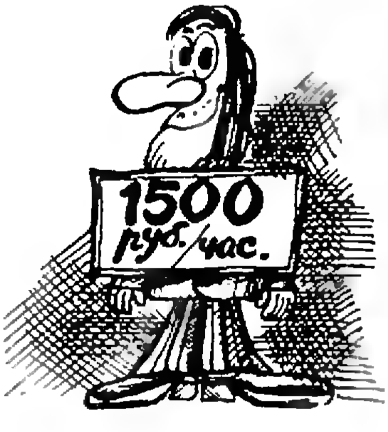
где x — подкоренное выражение, y_{n-1} — приближение корня. При этом итерации при вычислении заканчиваются при получении последовательных приближений, совпадающих в требуемом количестве разрядов.

На рисунке 5 показана электронная десятиклавишная счетная машина «ЭДВМ». На ней можно автоматически производить различные вычисления с 16-разрядными числами, а также полуавтоматически извлекать корни n-й степени, возводить числа в n-ю степень и вычислять натуральные значения тангенса и котангенса с 10 верными знаками.

В последнее время выпускается ЭКВМ «Электроника-70», позволяющая производить еще вычисление десятичных и натуральных логарифмов, показательных функций, тригонометрических и обратных тригонометрических функций.

Советы начинающим репетиторам

(см. с. 24)



Как заниматься с клиентом

Самое ответственное занятие — первое. Нужно сразу же завоевать безоговорочное доверие поступающего. Для этого запаситесь какой-нибудь монографией, предназначенной специально для аспирантов. Подберите в ней вопрос, над которым ученые безуспешно бьются в течение последних 15 лет. В результате вы отчетливо покажете абитуриенту, что без вашей помощи ему не на что рассчитывать.

В последнее время у родителей наметилась явная тенденция подыскивать репетиторов из того вуза, который данное чадо намерено осчастливить. Пойдите им навстречу. Нечаянно оброненное имя ректора создаст необходимый эффект. Более близкие отношения с ректором вы можете подчеркнуть, заметив, что это очень милый и неглупый человек.

Техника дальнейших занятий исключительно проста. Задача состоит лишь в максимальном уплотнении групп. Объединяйте по 10, 15 учеников, пределов здесь нет. Забегая вперед, отметим, что этот метод имеет и определенный материальный стимул. Если, скажем, вы одновременно обучаете не одного, а тринадцать учеников, то нетрудно подсчитать, что и доход за каждый час увеличивается в 13 раз!

(Продолжение см. на с 43)

А. Б. Мигдал

Письмо школьникам, которые хотят стать физиками

Учащиеся школы № 1 г. Лиды прислали письмо известному советскому физику-теоретику академику Аркадию Бейнусовичу Мигдалу. В письме они просили рассказать, как началось его увлечение физикой и как подготовиться к этой профессии. Мы приводим ответ А. Б. Мигдала, так как надеемся, что он заинтересует всех наших читателей.

Когда мне было 12 лет, я раздобыл книгу Доната «Физика в играх» и стал делать физические игрушки. Некоторые из них придумывал сам. Потом начал строить различные физические приборы. Сделал тепловой ограничитель тока собственной конструкции. Делал детекторные приемники (тогда никаких деталей в продаже не было).

После окончания школы я в течение года работал в школе лаборантом по физике. Тогда же опубликовал в журнале «Физика, математика, химия в средней школе» заметку «Приспособление, заменяющее машину Атвуда» (прибор для проверки 2-го закона Ньютона). Но по-настоящему стал заниматься физикой после поступления в Ленинградский государственный университет.

Как вы, наверное, знаете, физики делятся на два типа: физики-теоретики и физики-экспериментаторы. Мне уже с первого курса стало ясно, что я буду теоретиком. Физик-теоретик по характеру работы близок к математику. Его инструменты — бумага и карандаш. Пользуясь уже известными законами физики, он должен находить новые соотношения между различными величинами. Приведу два примера.

Во время блокады Ленинграда теоретики рассчитали, при какой толщине льда можно безопасно переправлять грузовики с людьми через Ладожское озеро. Это очень простая задача. Надо было только использовать найденный во многих экспериментах предел прочности льда и применить хорошо известные уравнения теории упругости.

А вот задача неизмеримо более сложная, которая потребовала пересмотра всех понятий классической механики. Великий физик-теоретик Альберт Эйнштейн, анализируя ход физических процессов в движущихся телах, пришел к заключению, что в быстро движущейся системе время течет медленнее. Позднее этот вывод блестяще подтвердился в экспериментах по изучению распада быстрых элементарных частиц (например, μ-мезонов). У движущихся частиц распад происходит медленнее, чем у покоящихся, и зависимость времени распада от скорости в точности совпадает с той, которую предсказал Эйнштейн.

В данном примере задача экспериментаторов состояла в проверке предсказаний теории. Однако чаще происходит обратное — физики-экспериментаторы находят новую закономерность, не укладывающуюся в существующие теории, и это дает толчок развитию теоретической физики.

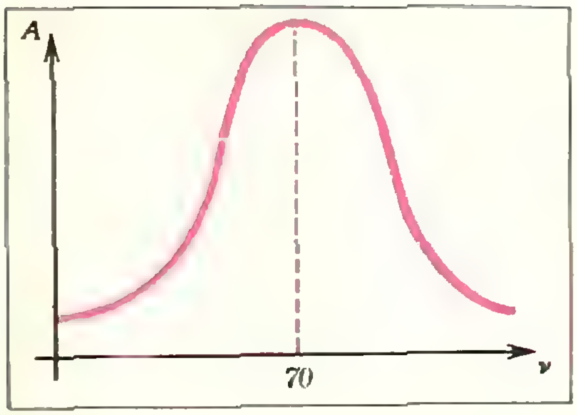


Рис. 1.

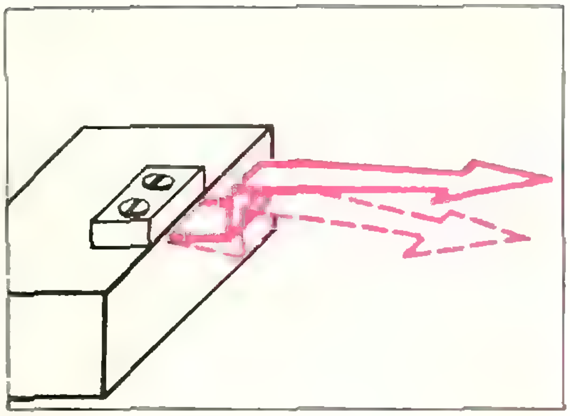


Рис. 2.

В случае теории относительности Эйнштейна, о которой только что упоминалось, таким толчком был знаменитый опыт Майкельсона, в котором измерялась разность скоростей света в направлении движения Земли и перпендикулярно к нему. Было показано, что обе скорости с колоссальной точностью совпадают. Этот результат противоречил существовавшим в то время теориям распространения света. Попытки объяснить результат опыта Майкельсона и привели Эйнштейна к созданию теории относительности. Таким образом, теоретическая и экспериментальная физика взаимно стимулируют друг друга.

Будущий физик рано или поздно должен решить, какая работа ему ближе по складу ума — теоретическая или экспериментальная? Чем раньше придет это решение, тем лучше.

Я расскажу о моей первой работе по физике. На втором курсе я попал на практику в лабораторию завода «Электроприбор» (ныне—завод «Вибратор»). Как раз в это время была забракована большая партия вольтметров из-за того, что при включении приборов в сеть переменного тока положение конца стрелки размывалось на несколько миллиметров. Я решил попытаться выяснить причину брака. Было ясно, что дело в резонансе. Нужно было выяснить, какая именно часть стрелки входит в резонанс, и что следует изменить, чтобы от этого избавиться.

Я вынул стрелку из прибора и закрепил ее на станине частотомера (прибора, измеряющего частоту переменного тока). Затем я подложил под стрелку миллиметровую бумагу и, меняя обороты генератора, дающего ток на частотомер, снял кривую зависимости амплитуды колебаний конца стрелки от частоты подводимого тока. Получилась типичная резонансная кривая с максимумом на 70 периодах в секунду (рис. 1). Но почему 70? Ведь в приборе максимальное размытие было при обычном токе, имеющем частоту 50 периодов в секунду. Я временно отложил этот вопрос и продолжал выяснять характер колебаний стрелки. Для этого я сделал точечные царапинки в различных местах стрелки и освещал каждую из них поочередно боковым светом так, что получалась движущаяся светящаяся точка. Наблюдая эти точки под увеличением (с помощью микроманипулятора), можно было определить амплитуду колебаний различных частей стрелки. Таким способом удалось доказать, что резонанс соответствует скручиванию вертикального колена стрелки (рис. 2), то есть что длинная часть стрелки поворачивается как целое вокруг оси, проходящей через вертикальное колено.

По жесткости материала и распределению массы по стрелке можно было рассчитать частоту колебаний. Рассчитанная частота оказалась близкой к наблюдаемой, то есть составляла около 70 периодов в секунду. Так было доказано, что характер колебаний установлен правильно. После этого надо было выяснить, в чем причина снижения резонансной частоты при помещении стрелки в прибор.

На станине частотомера стрелка была закреплена жестко, тогда как в приборе она скреплена с рамкой, по которой течет ток и которая сама может колебаться. Чтобы найти частоту стрелки при таком нежестком закреплении, нужно было решить задачу о двух связанных колебательных системах. Расчет показал, что частота стрелки, скрепленной с подвижной рамкой, действительно должна понизиться с 70 до 50 периодов в секунду. Таким образом, причина брака была установлена. Осталось только рассчитать, как следует изменить толщину вертикальной части стрелки, чтобы уйти от резонанса.

После этого была изготовлена серия в 1000 приборов с измененной стрелкой. Оказалось, что стрелка стоит как вкопанная, не происходит никаких вибраций. Только в двух приборах из 1000 положение конца стрелки по-прежнему размывалось, но когда эти приборы вскрыли, то оказалось, что туда по ошибке поставили старые стрелки. После этого мне предложили работать в заводской лаборатории параллельно с занятиями в университете. Я согласился и за это время научился самостоятельно ставить и решать прикладные теоретические задачи. Это очень помогло мне в дальнейшем.

Как и большинству физиков-теоретиков, мне приходилось работать в различных областях физики. Атомная физика, космические лучи, теория металлов, атомное ядро, квантовая теория поля, астрофизика — все эти разделы физики кажутся мне интересными. Сейчас наиболее принципиальные вопросы решаются в теории элементарных частиц и в квантовой теории поля, но и в других областях физики есть много интересных нерешенных задач.

Чтобы ближе познакомиться с различными областями физики, а главное — почувствовать их взаимосвязь, очень полезно внимательно прочитать замечательные «Фейнмановские лекции по физике», которые написаны известным американским физиком Ричардом Фейнманом.

Старайтесь читать активно, пытаясь решать поставленные в книге задачи до того, как прочтете решение.

Для того чтобы заниматься наукой, надо не только много знать и уметь, но и воспитать в себе определенные качества характера. Вот несколько советов.

Не старайтесь с самого начала все понимать до конца. Понимание приходит постепенно, в результате упорного труда, по мере привыкания к новым понятиям. Настоящее, глубокое понимание обязательно приводит к новым результатам, но приходит оно только после того, как хорошенько поработаешь в данной области.

Если придет в голову какая-нибудь идея, надо не только стараться ее подтвердить, но в еще большей степени стараться ее опровергнуть. Только так можно научиться добросовестно и объективно думать.

Главной движущей силой должен быть интерес к делу, а не стремление к эффектным результатам. Я знаю много примеров, когда талантливые люди теряли способность добросовестно работать из-за стремления сделать «мировое открытие».

Задача научного работника — упорное и добросовестное исследование интересующего его явления, когда каждый малый шаг приносит радость. Открытие приходит только как побочный продукт такого исследования.

От идеи, даже самой хорошей, до достоверной научной истины — тяжелый и трудный путь, идущий через сомнения и догадки, через провалы и взлеты подобно восхождению на непокоренную вершину, с которой открываются новые горизонты.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

Расстояние между центроидами двух систем точек

З. А. Скопец

Рассмотрим систему из n точек A_1, A_2, ..., A_n, произвольно расположенных в пространстве. Допускается, чтобы отдельные (или даже все) точки этой системы совпадали. Порядок точек безразличен.

Центроидом системы точек $A_1, \ldots, A_n$ *называется такая точка* O, *для которой выполняется векторное равенство*

$$\vec{OA}_1+\vec{OA}_2+\ldots+\vec{OA}_n=\sum_{i=1}^{n}\vec{OA}_i=\vec{0}. \quad (1)$$

Из этого определения непосредственно не вытекает *существование* центроида. Поэтому докажем, что каждая система точек имеет центроид и притом единственный.

Выберем в пространстве систему точек $A_1, A_2, \ldots, A_n$, зададим произвольно точку M, которую примем за начало векторов, и еще некоторую точку O (рис. 1). Тогда можно написать

$$\vec{OA}_1=\vec{MA}_1-\vec{MO},$$
$$\vec{OA}_2=\vec{MA}_2-\vec{MO},$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\vec{OA}_n=\vec{MA}_n-\vec{MO}.$$

Предположим, что точка O — центроид данной системы точек. Просуммировав почленно эти равенства, получим с учетом (1)

$$\vec{0}=\vec{MA}_1+\vec{MA}_2+\ldots+\vec{MA}_n-n\cdot\vec{MO}.$$

Отсюда находим

$$\vec{MO}=\frac{1}{n}(\vec{MA}_1+\vec{MA}_2+\ldots+\vec{MA}_n)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\vec{MA}_i. \quad (2)$$

Проведя вычисления в обратном порядке, мы легко убедимся, что точка O, определяемая равенством (2), удовлетворяет соотношению (1), то есть является центроидом. Таким образом, *существование* центроида доказано. Остается доказать *единственность*. В самом деле, возьмем точку O', отличную от O. Тогда

$$\vec{O'A}_1=\vec{O'O}+\vec{OA}_1, \ldots, \vec{O'A}_n=\vec{O'O}+\vec{OA}_n.$$

Складывая эти равенства и учитывая (1), получаем

$$\vec{O'A}_1+\ldots+\vec{O'A}_n=n\cdot\vec{OO'};$$

так как точка O' отлична от O, то $\vec{O'O}\neq\vec{0}$ и $n\cdot\vec{O'O}\neq\vec{0}$, то есть

$$\vec{O'A}_1+\ldots+\vec{O'A}_n\neq\vec{0}.$$

Таким образом, никакая отличная от O точка O' центроидом системы точек $A_1, \ldots, A_n$ не является. Этим завершено доказательство существования и единственности центроида системы n точек. Кроме того, указан метод построения центроида (см. (2)).

Докажем теперь следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть* O_1 *— центроид системы точек* $A_1, \ldots, A_m$ *и* O_2 *— центроид системы точек*

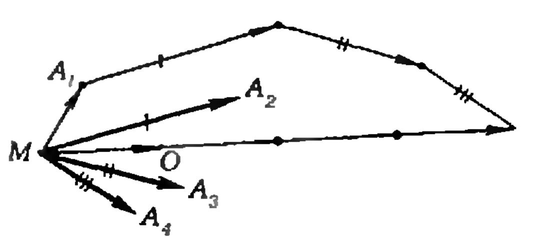


Рис. 1.

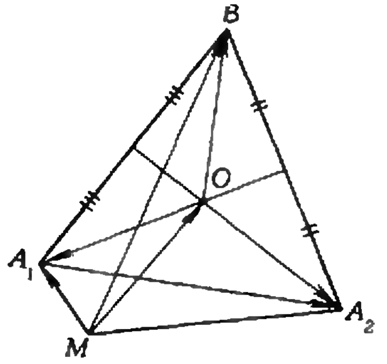


Рис. 2.

$B_1, \dots, B_n$. *Тогда центроид O системы всех $m+n$ точек $A_1, \dots, A_m$, $B_1, \dots, B_n$ лежит на отрезке O_1O_2 и удовлетворяет условию $|O_1O| : |OO_2| = n : m$.*

Доказательство. Для точки O, лежащей на отрезке O_1O_2 и удовлетворяющей условию $|O_1O| : |OO_2| = n : m$, имеем

$$m\overrightarrow{OO_1} + n\overrightarrow{OO_2} = \vec{0}. \qquad (3)$$

Убедимся, что точка O — центроид системы всех $m+n$ точек. В самом деле, так как O_1 — центроид системы точек $A_1, \dots, A_m$, то согласно (2) имеем

$$\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \dots + \overrightarrow{OA_m} - m\cdot\overrightarrow{OO_1} = \vec{0}. \qquad (4)$$

Аналогично, из того, что O_2 — центроид системы точек $B_1, \dots, B_n$, получаем

$$\overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OB_2} + \dots + \overrightarrow{OB_m} - n\cdot\overrightarrow{OO_2} = \vec{0}. \qquad (5)$$

Складывая почленно соотношения (3), (4), (5), получаем

$$\overrightarrow{OA_1} + \dots + \overrightarrow{OA_m} + \overrightarrow{OB_1} + \dots + \overrightarrow{OB_n} = \vec{0},$$

а это и означает, что O — центроид системы точек $A_1, \dots, A_m$, B_1, $B_2, \dots, B_n$.

Следствие. Пусть $A_1, \dots, A_m$ — некоторая система точек и k — натуральное число, меньшее m. Выберем из $A_1, \dots, A_m$ какие-либо k точек, и пусть O' — их центроид, а O'' — центроид оставшихся $m-k$ точек. Тогда все получающиеся таким образом отрезки $O'O''$ *) проходят через одну точку O (центроид системы точек $A_1, \dots, A_m$) и делятся в этой точке в отношении $(m-k) : k$.

Из доказанной теоремы и этого следствия можно получить ряд выводов. Прежде всего из теоремы 1 при $m = n = 1$ находим, что *центроид двух точек A, B совпадает с серединой соединяющего их отрезка.* Далее, при $m = 2$, $n = 1$ получаем из теоремы 1, что центроид O трех точек A_1, A_2, B лежит на отрезке, соединяющем середину D отрезка A_1A_2 с точкой B, причем $|DO| : |OB| = 1 : 2$. Отсюда следует, в частности, *если точки A_1, A_2, B не лежат на одной прямой, то центроид этой системы точек совпадает с точкой пересечения медиан треугольника A_1A_2B* (см. рис. 2; эту точку называют центром тяжести треугольника).

Для случая четырех точек получаем (при $m = 3$, $n = 1$) следующее. *Предположим, что никакие три из четырех точек A, B, C, D не лежат на одной прямой, и соединим каждую из этих точек с центром тяжести треугольника, имеющего вершины в трех других точках; тогда эти четы-*

---

*) Их будет столько, сколькими способами можно выбрать k точек из m, то есть C_m^k.

ре отрезка пересекаются в одной точке O и делятся в ней в отношении 3 : 1. Через эту же точку O проходят еще три отрезка, получающиеся, если середины отрезков с концами в двух точках соединить с серединами отрезков с концами в двух других точках.

Заметим, что эти утверждения справедливы для четырех точек не только на плоскости, но и в пространстве. Из них, в частности, следует, что две средние линии четырехугольника и отрезок, соединяющий середины диагоналей, пересекаются в одной точке O, которая служит общей серединой всех трех отрезков. А для точек в пространстве можно дать еще такую формулировку: отрезки, соединяющие вершины тетраэдра с центрами тяжести противолежащих граней, пересекаются в одной точке O (называемой центром тяжести тетраэдра) и делятся в ней в отношении 3 : 1, считая от вершины; через эту же точку O проходят три отрезка, соединяющие середины противоположных ребер, причем O служит общей серединой этих трех отрезков.

Отметим еще случай пяти точек.

Пусть A, B, C, D, E — такие пять точек, никакие четыре из которых не лежат в одной плоскости. Соединив каждую точку с центром тяжести тетраэдра, имеющего вершины в четырех оставшихся точках, получим пять отрезков, пересекающихся в одной точке O; через эту же точку будут проходить еще десять отрезков, каждый из которых соединяет середину отрезка с концами в двух точках с центром тяжести треугольника, имеющего вершины в трех оставшихся точках.

Формула Лагранжа

Пусть O — центроид системы точек $A_1, \ldots, A_m$ и M — произвольная точка. Тогда, как мы видели выше, справедливо соотношение (2). Беря скалярный квадрат*), получаем

$$|\overrightarrow{MO}|^2 = \frac{1}{m^2}(\overrightarrow{MA}_1 + \ldots + \overrightarrow{MA}_m)^2 =$$

$$= \frac{1}{m^2}\Big[|\overrightarrow{MA}_1|^2 + \ldots + |\overrightarrow{MA}_m|^2 + 2\sum_{i<j} \overrightarrow{MA}_i \cdot \overrightarrow{MA}_j\Big]. \qquad (6)$$

Но

$$2\,\overrightarrow{MA}_i \cdot \overrightarrow{MA}_j = |\overrightarrow{MA}_i|^2 + |\overrightarrow{MA}_j|^2 - (\overrightarrow{MA}_j - \overrightarrow{MA}_i)^2 = |\overrightarrow{MA}_i|^2 + |\overrightarrow{MA}_j|^2 - |\overrightarrow{A_iA}_j|^2.$$

Складывая эти соотношения для всех пар i, j, где $i < j$, получаем

$$2\sum_{i<j} \overrightarrow{MA}_i \cdot \overrightarrow{MA}_j = (m-1)(|\overrightarrow{MA}_1|^2 + \ldots + |\overrightarrow{MA}_m|^2) - \sum_{i<j} |\overrightarrow{A_iA}_j|^2. \qquad (6')$$

Подставляя (6′) в соотношение (6), находим (после упрощений):

$$|\overrightarrow{MO}|^2 = \frac{1}{m}(|\overrightarrow{MA}_1|^2 + \ldots + |\overrightarrow{MA}_m|^2) - \frac{1}{m^2}\sum_{i<j} |\overrightarrow{A_iA}_j|^2. \qquad (7)$$

Соотношение (7) представляет собой известную *формулу Лагранжа*, выражающую квадрат расстояния от точки M до центроида O системы точек $A_1, \ldots, A_m$ через квадраты расстояний от точки M до точек A_i и квадраты расстояний $|A_iA_j|$.

Расстояние между центроидами

Пусть, наконец, даны две системы точек $A_1, \ldots, A_m$ и $B_1, \ldots, B_n$. Вычислим расстояние d между центроидами O_1 и O_2 этих систем, полагая известными все взаимные расстояния между точками первой системы, все взаимные расстояния меж-

---

*) *Скалярное произведение* вектора $\vec{a}$, на вектор $\vec{b}$ обозначается через $\vec{a}\cdot\vec{b}$; равно $|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\alpha$, где $|\vec{a}|$ — длина вектора, а α — угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$; поэтому *скалярный квадрат* $\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2 = |\vec{a}|^2$.

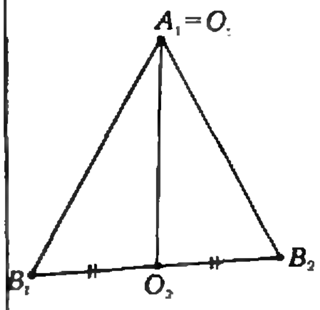


Рис. 3.

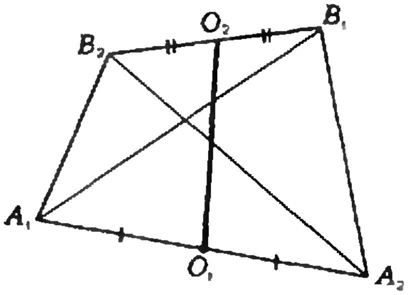


Рис. 4.

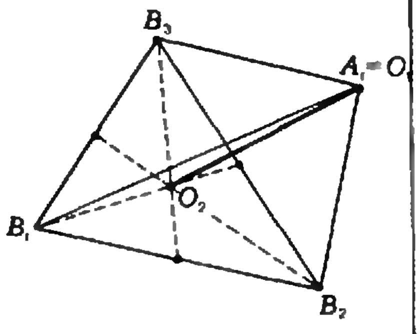


Рис. 5.

ду точками второй системы и взаимные расстояния каждой точки одной системы до каждой точки другой.

Введем обозначения:

$$|A_iA_j| = a_{ij},\ |B_sB_t| = b_{st},$$
$$|A_pB_q| = c_{pq}.$$

Как выяснено выше (см. (7)),

$$d^2 = |O_1O_2|^2 + \frac{1}{n}|O_1B_1|^2 + \ldots$$
$$\ldots + |O_1B_n|^2) - \frac{1}{n^2}\sum_{s<t} b_{st}^2, \quad (8)$$

$$|O_1B_k|^2 = \frac{1}{m}(|A_1B_k|^2 + \ldots$$
$$\ldots + |A_mB_k|^2) - \frac{1}{m^2}\sum_{i<j} a_{ij}^2, \quad (8')$$

(где k — любое из чисел 1, 2, ..., n). Подставляя соотношения (8′) в формулу (8), получаем окончательно (после очевидных упрощений):

$$d^2 = |O_1O_2|^2 = \frac{1}{mn}\sum_{p,q} c_{pq}^2 -$$
$$- \frac{1}{m^2}\sum_{i<j} a_{ij}^2 - \frac{1}{n^2}\sum_{s<t} b_{st}^2. \quad (9)$$

По этой формуле и вычисляется и самом общем случае расстояние между центроидами двух систем точек.

Примеры

1. Пусть дан треугольник $A_1B_1B_2$. Центроид O_1 системы, состоящей из одной точки A_1, совпадает с A_1, центроид O_2 системы точек B_1, B_2 совпадает с серединой $[B_1B_2]$ (рис. 3). В этом случае $[O_1O_2]$ есть медиана треугольника $A_1B_1B_2$. Имеем

$$d^2 = \frac{1}{2}(|A_1B_1|^2 + |A_1B_2|^2) -$$
$$- \frac{1}{4}|B_1B_2|^2.$$

2. Пусть дан четырехугольник $A_1A_2B_1B_2$. Центроид O_1 системы точек A_1, A_2 совпадает с серединой отрезка A_1A_2, центроид O_2 системы точек B_1, B_2 совпадает с серединой отрезка B_1B_2 (рис. 4).

Воспользуемся формулой (9):

$$d^2 = \frac{1}{4}(|A_1B_1|^2 + |A_1B_2|^2 +$$
$$+ |A_2B_1|^2 + |A_2B_2|^2 - |A_1A_2|^2 -$$
$$- |B_1B_2|^2). \quad (10)$$

Эта формула, выражающая квадрат расстояния между серединами противоположных сторон четырехугольника через квадраты его сторон и диагоналей, известна как *формула Эйлера*. Здесь вид четырехугольника произвольный: он может быть выпуклым, самопересекающимся, неплоским.

Если центроиды отрезков A_1A_2 и B_1B_2 совпадают, то четырехугольник есть параллелограмм, и мы получаем известную зависимость между сторонами и диагоналями параллелограмма. Отметим, что (поскольку $d^2 \geqslant 0$) из формулы (10) следует, что

$$|A_1B_1|^2 + |A_1B_2|^2 + |A_2B_1|^2 +$$
$$+ |A_2B_2|^2 \geqslant |A_1A_2|^2 + |B_1B_2|^2,$$

то есть сумма квадратов всех сторон

четырехугольника всегда *не меньше* суммы квадратов его диагоналей. Равенство имеет место лишь при $d = 0$, то есть в том *и только в том* случае, если $A_1A_2B_1B_2$ — параллелограмм.

3. Найдем расстояние от точки A_1 до центроида системы точек B_1, B_2, B_3 (рис. 5). В этом случае имеем (по формуле (7))

$$d^2 = \frac{1}{3}(|A_1B_1|^2 + |A_1B_2|^2 + |A_1B_3|^2) - \frac{1}{9}(|B_1B_2|^2 + |B_2B_3|^2 + |B_1B_3|^2).$$

Это соотношение, выражающее расстояние от вершины A_1 тетраэдра $A_1B_1B_2B_3$ до центроида противолежащей грани $B_1B_2B_3$ через квадраты ребер тетраэдра, известно как *формула Лейбница*. В частности, все четыре точки могут принадлежать одной плоскости или даже одной прямой.

Упражнения

1. Докажите, что сумма квадратов расстояний любой точки окружности, описанной около правильного многоугольника, до вершин этого многоугольника, постоянна.

2. Докажите, что сумма квадратов всех сторон и всех диагоналей правильного n-угольника равна n^2R^2, где R — радиус описанной около многоугольника окружности.

3. Два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$ имеют общий центроид. Докажите, что сумма $|AA_1|^2 + |AB_1|^2 + |AC_1|^2 + |BA_1|^2 + |BB_1|^2 + |BC_1|^2 + |CA_1|^2 + |CB_1|^2 + |CC_1|^2$ не зависит от взаимного расположения данных треугольников в пространстве.

4. Дан треугольник ABC и окружность ω. Докажите, что каковы бы ни были две диаметрально противоположные точки P и Q окружности ω, сумма $|PA|^2 + |PB|^2 + |PC|^2 + |QA|^2 + |QB|^2 + |QC|^2$ сохраняет постоянное значение.

5. На окружности даны n точек. Через центроид каждых $n-2$ точек проводится прямая, перпендикулярная к прямой, проходящей через две остальные точки. Докажите, что C_n^2 построенных прямых пересекаются в одной точке (*ортоцентре* данной системы точек).

Сформулируйте и решите аналогичную задачу для случая, когда данные n точек принадлежат одной сфере.

Советы начинающим репетиторам

(см. с. 35)

Но одновременно заботьтесь о репутации бессеребренника. Никогда нелишне несколько раз подчеркнуть, что вами движет не корысть, а исключительно желание сеять разумное, доброе и, по возможности, вечное. Нет большей радости для вашей души, чем чувство, что вы умножили общество еще на несколько достойных членов.

Раздав вопросы, уйдите в другую комнату и займитесь своим делом. Более сильные ученики сначала справятся со своим заданием, а затем помогут отстающим. Это разовьет в них чувство коллективизма, столь необходимое в вузе.

К середине занятия разгорится живая дискуссия на спортивные темы. Ни в коем случае не мешайте ребятам. Пусть они, покидая вас, с нетерпением ждут следующей встречи, во время которой можно будет продолжить увлекательную беседу.

В конце урока не забудьте раздать домашнее задание, заранее переписанное из старых, давно забытых учебников и оформленное в виде новых экзаменационных билетов. Попросите учеников хранить содержимое билетов в тайне. Это производит сильное впечатление.

За качество занятий не беспокойтесь. Усвойте главное — юноши и девушки пришли к вам исключительно ради своих отцов и матерей, а данный предмет волнует их меньше всего. Единственное, о чем следует позаботиться, — чтобы еще до наступления экзаменов все расчеты с родителями были закончены.

В заключение этого важного пункта еще два полезных совета. Поскольку вам совершенно безразлично, какой именно предмет использовать для материальной поддержки, рекомендуем остановиться на математике.

(Продолжение см. на с. 68)

ПОБЕДИТЕЛИ КОНКУРСА «КВАНТА»

В соответствии с решением Оргкомитета Всесоюзной олимпиады школьники, регулярно присылавшие особенно оригинальные и полные решения задач «Задачника «Кванта», получают право участвовать в областных турах Всесоюзной олимпиады наравне с победителями районных и городских олимпиад.

За прошлый, 1974 год, редакция получила более семи тысяч писем с решениями задач. Редколлегия журнала «Квант» совместно с членами Оргкомитета отобрала авторов правильных и наиболее интересных решений.

Ниже публикуется список школьников, — победителей конкурса «Кванта», — которые получили право участвовать в областных олимпиадах 1975 года.

Математика

Д. АЗОВ — Челябинск, с. ш. 24, 10 кл.
В. БАСМАНОВ — Воронеж, с. ш. 58, 10 кл.
М. БИРМАН — Саратов, с. ш. 19, 10 кл.
А. БЛОХ — Харьков, с. ш. 27, 10 кл.
Ю. ВИННИЦКИЙ — Ташкент, с. ш. 103, 10 кл.
В. ВИТЮКОВ — Орел, с. ш. 24, 10 кл.
С. ГОРИШНИЙ — Таганрог, с. ш. 34, 10 кл.
С. ГРОДСКИЙ — Корсунь-Шевченковский, с. ш. 4, 10 кл.
В. ГУСЕЙНОВ — Нахичевань, с. ш. 3, 9 кл.
А. ДИДЕНКО — Краснодар, с. ш. 28, 8 кл.
В. ЕРПЫЛЕВ — Ашхабад, с. ш. 22, 10 кл
А. ЗАРГАРЯН — Тбилиси, ФМШ, 10 кл.
М. ИМЕРЛИШВИЛИ — Тбилиси, ФМШ, 9 кл.
В. КАРАЧИК — Ташкент, с. ш. 17, 10 кл.
В. КЛОЧКОВ — Челябинск, с. ш. 24, 10 кл.
В. КОБЫЛЕЦКИЙ — Баку, с. ш. 134, 10 кл.
С. КОРШУНОВ — Монино, с. ш. 1, 10 кл.
Т. КУЛИЕВ — Баку, с. ш. 27, 10 кл.
А. ЛЕЙДЕРМАН — Могилев-Подольский, с. ш. 5, 9 кл.
С. ЛИФИЦ — Харьков, с. ш. 27, 9 кл.
М. ЛЮБИЧ — Харьков, с. ш. 27, 10 кл.
С. МЕЛЬНИК — Харьков, с. ш. 27, 10 кл.
Л. МИХЛИН — Курск, с. ш. 6, 10 кл.
И. МОРОЗОВ — Горький, с. ш. 184, 9 кл.
О. ОКУНЕВ — Казань, с. ш. 122, 9 кл.
С. ПОСЛАВСКИЙ — Харьков, с. ш. 116, 9 кл.
Ю. ПОШЕХОНОВ — Энгельс, с. ш. 13 г. Саратова, 9 кл.

В. РОМАНОВ — Димитровград, с. ш. 25, 10 кл.
Л. РУБИНШТЕЙН — Калининград, с. ш. 32, 10 кл.
В. СВИРИДОВ — ВНИИСС Воронежской обл., с. ш. 32, 10 кл.
С. ТРЕГУБ — Ташкент, с. ш. 103, 9 кл.
А. ЧЕРЕБАТОВ — Омск, с. ш. 80, 10 кл.
М. ЩЕРБИНА — Харьков, с. ш. 27, 9 кл.
Г. ШМЕЛЕВ — Ярославль, с. ш. 20, 10 кл.
И. ЮНУС — Харьков, с. ш. 27, 9 кл.
Б. ЯЦАЛО — с. Морочно Ровенской обл., Зареченская с. ш., 9 кл.

Физика

Г. АЙЗИН — Брест, с. ш. 1, 9 кл.
А. АЛЕКСАНДРИН — с. Валуйки Брестской обл., с. ш. 2, 9 кл.
Р. БАСЫРОВ — д. Н. Каракитяны ТАССР, Дрожжановская с. ш., 9 кл.
Ю. БОГОМОЛОВ — Казань, с. ш. 90, 10 кл.
В. БОРЮ — Запорожье, с. ш. 28, 10 кл.
И. ГАЛИННИКОВ — Волгоград, с. ш. 8, 10 кл.
И. ГОЛДОВСКИЙ — Брянск, с. ш. 14, 10 кл.
С. ГОРИШНИЙ — Таганрог, с. ш. 34, 10 кл.
А. ДРОБИНИН — Евпатория, с. ш. 2, 10 кл.
А. КАРНАУХ — Белгород, с. ш. 3, 10 кл.
Б. КАЦМАН — Мытищи, с. ш. 17, 10 кл.
Я. КОГАН — Глазов, с. ш. 14, 10 кл.
А. КЛОЧКО — Жуковский, с. ш. 7, 10 кл.
С. КОПЫЛОВСКИЙ — п. Знобь-Новгородское Сумской обл., с. ш., 9 кл.
С. КОРШУНОВ — Монино, с. ш. 1, 10 кл.
И. МАЙХРУК — с. Белобожница Тернопольской обл., с. ш., 10 кл.
С. МЕЛЬНИК — Харьков, с. ш. 27, 10 кл.
Ю. ОНИЩЕНКО — Люберцы, с. ш. 9, 10 кл.
А. ПОБЛАГУЕВ — Винница, с. ш. 17, 10 кл.
С. РАШКЕЕВ — Солнечногорск, с. ш. 7, 10 кл.
Б. РЕВА — Таллин, с. ш. 15, 10 кл.
М. РОЗМАН — Псков, с. ш. 8, 10 кл.
В. РЫЖИКОВ — Ахтубинск Астраханской обл., с. ш. 1, 10 кл.
П. ФОМЕНКО — Днепропетровск, с. ш. 23, 10 кл.
Л. ЦИМРИНГ — Горький, с. ш. 40, 10 кл.
Ю. ЧЕРНЫШ — Минск, с. ш. 59, 10 кл.
О. ЩЕРБАКОВ — Лида Гродненской обл., с. ш. 1, 10 кл.

задачник кванта

Решения задач из этого номера можно посылать не позднее 1 мая 1975 г. по адресу: 117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15, издательство «Наука», журнал «Квант». После адреса на конверте напишите, решения каких задач вы посылаете, например: «Задачник «Кванта», М311, М312» или «... Ф323». Решения задач по каждому из предметов (математике и физике), а также новые задачи просьба присылать в отдельных конвертах. Задачи из разных номеров журнала присылайте также в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки ваших решений). Условия оригинальных задач, предлагаемых для публикации, присылайте в двух экземплярах вместе с вашими решениями этих задач (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «... новая задача по математике»). После формулировки задачи мы обычно указываем, кто предложил нам эту задачу. Разумеется, не все задачи публикуются впервые. Наиболее трудные задачи отмечены звездочкой.

Задачи

М311—М315; Ф323—Ф327

М311. Из одной бактерии получилось 1000 следующим образом: вначале бактерия разделилась на две, затем одна из двух получившихся бактерий разделилась на две, затем одна из трех получившихся бактерий разделилась на две и так далее. Докажите, что в некоторый момент существовала такая бактерия, число потомков которой среди 1000 бактерий, получившихся в конце, заключено между 334 и 667.

Д. Ю. Григорьев

М312. В параллелограмм P_1 вписан параллелограмм P_2, в который в свою очередь вписан параллелограмм P_3, причем стороны P_3 параллельны сторонам P_1. Докажите, что хотя бы одна сторона параллелограмма P_3 по длине не меньше половины параллельной ей стороны P_1.

А. А. Григорян

М313. Дан угол с вершиной O. Рассмотрим множество четвертых вершин M параллелограммов $ONML$, вершины N и L которых лежат на сторонах данного угла, а площадь равна постоянной величине k. (Это множество называется *гиперболой.*) Докажите что на биссектрисе этого угла и на ее продолжении найдутся такие точки F_1 и F_2 (где $|F_1O| = |OF_2|$) для которых разность расстояний $|F_1M - F_2M|$ не зависит от точки M.

И. Н. Бронштейн

М314. Среди всех 9-значных чисел, в десятичной записи которых нет цифры 0, найти такое, для которого разность между самим числом и произведением его цифр:

а) наименьшая;

б) наибольшая.

Каков будет ответ для n-значных чисел при любом n?

А. Г. Лейдерман

М315. На каждом ребре выпуклого многогранника поставлена стрелка так, что в каждую вершину многогранника входит и из каждой выходит хотя бы одна стрелка. Докажи-

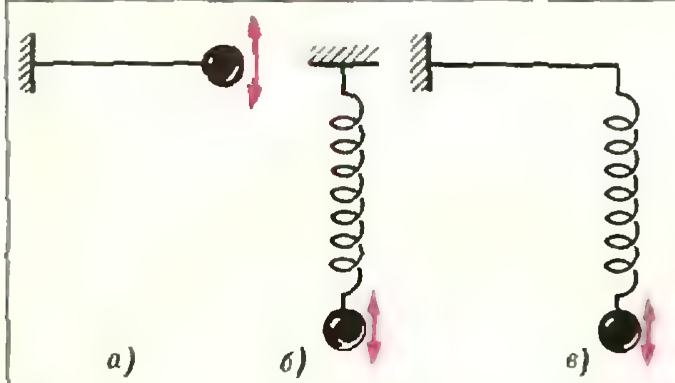


Рис. 1.

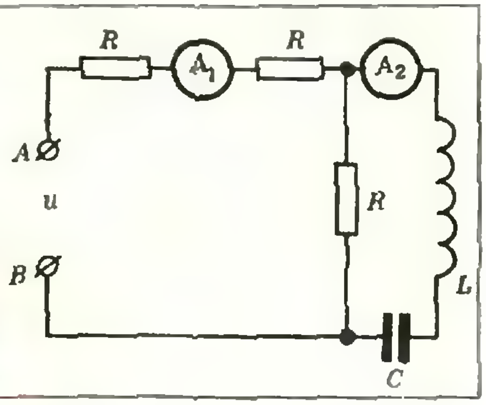


Рис. 2.

те, что существуют по крайней мере две грани многогранника, каждую из которых можно обойти по периметру, двигаясь в соответствии с направлениями стрелок на ее сторонах.

А. М. Зубков

Ф323. П-образная капиллярная трубка с длиной колен $l = 10$ *см* и диаметрами $d_1 = 0{,}1$ *мм* и $d_2 = 0{,}2$ *мм* опускается вертикально открытыми концами в воду и погружается настолько, чтобы уровень воды в более узком колене был вровень с уровнем воды в сосуде. Найти положение уровня воды в широком колене. Объемом горизонтальной трубки пренебречь. Атмосферное давление нормальное. Коэффициент поверхностного натяжения воды $\sigma = 70$ *дн/см*.

Б. Б. Буховцев

Ф324. Из собирающей линзы с фокусным расстоянием $f = 50$ *см* и диаметром $d = 5$ *см* вырезана полоса шириной $h = 5$ *мм*, а оставшиеся части сдвинуты вплотную. На расстоянии $l = 75$ *см* от линзы расположен точечный источник света S. На каком максимальном расстоянии от линзы можно наблюдать интерференционную картину?

Л. П. Баканина

Ф325. Частота малых гармонических колебаний тяжелого шара на легкой закрепленной в стене спице (рис. 1, *а*) равна ν_1, а частота колебаний этого шара на прикрепленной к потолку пружине (рис. 1, *б*) равна ν_2. Какой будет частота колебаний шара на той же пружине, прикрепленной к спице (рис. 1, *в*)?

И. Ш. Слободецкий

Ф326. Закрытый крышкой сосуд доверху наполнен жидкостью, в которой имеются два пузырька. Как изменится давление в жидкости, если пузырьки сольются? Начальное давление в жидкости p_0, коэффициент поверхностного натяжения σ, радиус каждого пузырька r_0. Считать процесс изотермическим.

Р. Л. Энфиаджян

Ф327. Определить показания электродинамического амперметра A_1 и магнитоэлектрического амперметра A_2 (рис. 2), пренебрегая их внутренними сопротивлениями, если известно, что на клеммы $A - B$ подается напряжение $u = u_1 + u_2 \sin \omega t$,

причем $\omega = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$.

Емкостями между клеммами приборов пренебречь; колебания стрелок приборов незаметны.

В. А. Погожев

Решения задач

М273—М279; Ф285—Ф290

М273. *На отрезке* $0 \leqslant x \leqslant 1$ *задана функция* f. *Известно, что эта функция неотрицательна и* $f(1) = 1$. *Кроме того, для любых двух чисел* x_1 *и* x_2 *таких, что* $x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 0$ *и* $x_1 + x_2 \leqslant 1$, *выполнено неравенство*

$$f(x_1 + x_2) \geqslant f(x_1) + f(x_2).$$

а) *Докажите, что какова бы ни была функция* f, *удовлетворяющая перечисленным условиям, для всех* x *будет выполнено неравенство* $f(x) \leqslant 2x$.

б) *Верно ли, что для всех* x $f(x) \leqslant 1{,}9x$?

а) Функция, удовлетворяющая условию задачи, монотонно возрастает. В самом деле, если $x_2 \geqslant x_1$ и $x_2 \leqslant 1$, то $f(x_2) \geqslant f(x_1) + f(x_2 - x_1)$ и $f(x_2 - x_1) \geqslant 0$; следовательно, $f(x_2) \geqslant f(x_1)$. Поэтому если $\frac{1}{2} < x \leqslant 1$, поскольку $f(1) = 1$, имеем

$$f(x) \leqslant 1 \leqslant 2x.$$

Пусть теперь $0 < x \leqslant \frac{1}{2}$. Возьмем такое натуральное n, чтобы $\frac{1}{2} < nx \leqslant 1$ (понятно, что это всегда можно сделать). Легко доказать (по индукции), что если $x \geqslant 0$ и $nx \leqslant 1$, то $f(nx) \geqslant nf(x)$. Для $\frac{1}{2} < nx \leqslant 1$ уже доказано, что $f(nx) \leqslant 2 \cdot nx$.

Поэтому $nf(x) \leqslant f(nx) \leqslant 2 \cdot nx$, откуда $f(x) \leqslant 2x$ и для $0 < x \leqslant \frac{1}{2}$.

Осталось только выяснить, что будет в нуле. Возьмем $0 < x_1 \leqslant 1$; тогда

$$f(x_1) = f(0 + x_1) \geqslant f(0) + f(x_1).$$

Но по определению $f(0) \geqslant 0$, значит, $f(0) = 0$.

б) Ответ: нет, не верно.

Приведем пример. Зададим функцию следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \frac{1}{2} < x \leqslant 1, \\ 0, & 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Если $1 \geqslant x_1 \geqslant x_2 \geqslant 0$ и $x_1 + x_2 \leqslant 1$, то $x_2 \leqslant \frac{1}{2}$ и $f(x_2) = 0$.

Следовательно, $f(x_1 + x_2) \geqslant f(x_1) + f(x_2)$ и рассматриваемая функция удовлетворяет требованиям задачи.

В то же время

$$f\left(\frac{51}{100}\right) = 1 > 1{,}9 \cdot \frac{51}{100}.$$

◆

М274. *Найдите наименьшее число вида*

а) $|11^k - 5^l|$;

б) $|36^k - 5^l|$;

в) $|53^k - 37^l|$,

где k и l — натуральные числа.

а) Если $11^k > 5^l$, то число $|11^k - 5^l|$ оканчивается на 6; если $11^k < 5^l$, то на 4.

Легко видеть, что $|11^k - 5^l| = 4$ при $l = 3$, $k = 2$, то есть 4 — наименьшее число вида $|11^k - 5^l|$.

б) Если $36^k > 5^l$, то число $|36^k - 5^l|$ оканчивается на 1; если же $36^k < 5^l$, то на 9.

При $k = 1$, $l = 2$ имеем $|36^k - 5^l| = 11$.

Докажем, что 11 — наименьшее число такого вида. Для этого нужно показать, что $|36^k - 5^l|$ не может равняться ни 1, ни 9.

1) Если $36^k-5^l=1$, то $(6^k-1)(6^k+1)=5^l$. Но число 6^k+1 не может быть степенью 5, так как оканчивается на 7 (при $k>0$).

2) Если $5^l-36^k=9$, то тогда $5^l=9+36^k$, чего также не может быть, так как правая часть при $k>0$ делится на 9, а левая — нет. Значит, 11 — наименьшее число вида $|36^k-5^l|$.

в) Число $N=|53^k-37^l|$ может оканчиваться любой четной цифрой. Кроме того, поскольку $|53^k-37^l|=|(52+1)^k-(36+1)^l|=|(4\cdot13+1)^k-(4\cdot9+1)^l|$, то N делится на 4. При $k=l=1$ $N=53-37=16$. Докажем, что 16 — наименьшее число вида $|53^k-37^l|$. Для этого достаточно показать, что N не может равняться 4, 8 и 12 (N, очевидно, не равно 0, так как 53 и 37 взаимно просты).

Имеем

$$N=|53^k-37^l|=|(54-1)^k-(36+1)^l|=|(6\cdot9-1)^k-(4\cdot9+1)^l|.$$

Поэтому при делении N на 9 в остатке могут получаться только 0,2 и −2 (то есть 7). Но ни 4, ни 8, ни 12 этих остатков при делении на 9 не дают.

И. Н. Клумова

◆

M275. *а) На плоскости даны n векторов, длина каждого из которых равна 1. Сумма всех n векторов равна нулевому вектору. Докажите, что векторы можно занумеровать так, чтобы при всех k=1, 2, . . . , n выполнялось следующее условие: сумма первых k векторов имеет длину не более 3.*

б) Докажите аналогичное утверждение для n векторов с суммой 0, длина каждого из которых не превосходит 1.

в) Можно ли заменить число 3 в задаче а) меньшим? Постарайтесь улучшить оценку также в задаче б).

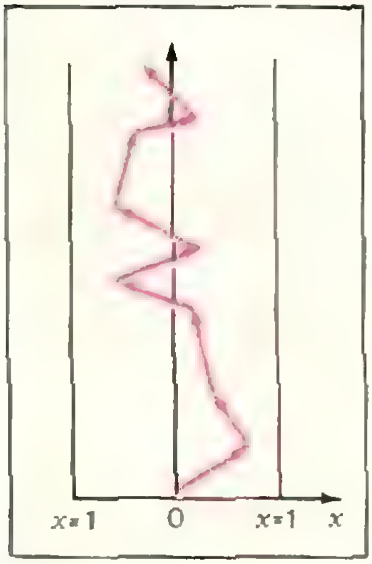


Рис. 1.

Рассмотрим вначале «одномерную» задачу.

Лемма 1. Пусть дано n чисел, таких, что каждое по модулю не превосходит 1, а сумма всех равна 0. Тогда их можно занумеровать так, чтобы при любом $i\leqslant n$ сумма первых i из них была по модулю не больше 1.

Укажем один из способов нумерации (проверьте, что он приводит к цели). Разобьем данные числа на положительные: $a_1, \ldots, a_k$ и неположительные: $b_1, \ldots, b_{n-k}$. Положим $c_1=a_1$, $c_2=b_1$. Если $c_1+c_2<0$, положим $c_3=a_2$; если $c_1+c_2\geqslant0$, положим $c_3=b_2$. И вообще, если $c_1, \ldots, c_l$ уже выбраны, то при $c_1+\ldots+c_l<0$ примем за c_{l+1} очередное положительное число, а при $c_1+\ldots+c_l\geqslant0$ — очередное неположительное число.

Опираясь на лемму 1, решим задачу M275 б). Приложим все данные векторы к некоторой точке O и выберем прямоугольную систему координат Oxy так, чтобы сумма $\mathbf{s}$ всех векторов, смотрящих вверх (в полуплоскость $y>0$), была направлена в точности по оси y. (Вопрос, как построить такую систему координат, мы обсудим позже.) Остальные векторы (смотрящие вниз) дадут тогда в сумме $-\mathbf{s}$.

Сначала займемся векторами, смотрящими вверх. Их составляющие по оси x обозначим через $p_1, \ldots, p_k$. Так как составляющая s по оси x равна 0, то $p_1+\ldots+p_k=0$. По модулю каждое из чисел $p_1, \ldots, p_k$ не превосходит 1. По лемме 1 занумеруем числа $p_1, \ldots p_k$ так, чтобы при всяком $i\leqslant k$ сумма первых i из них была по модулю не больше 1. Тем самым мы занумеруем векторы, смотрящие вверх, так, что при всяком $i\leqslant k$ сумма первых i из них будет лежать в полосе $|x|\leqslant1$ (рис. 1). Составляющие этих векторов по оси y (в выбранном порядке) обозначим через $a_1, \ldots, a_k$.

Так же занумеруем векторы, смотрящие вниз, и их составляющие по оси y назовем $b_1, \ldots, b_{n-k}$.

Теперь перейдем к сквозной нумерации всех данных векторов. Каждое из чисел $a_1, \ldots, a_k$ заключено между 0 и 1, каждое из чисел $b_1, \ldots, b_{n-k}$ — между 0 и −1, а сумма всех их равна 0. Не меняя относительного порядка чисел $a_1, \ldots, a_k$ и относительного порядка чисел $b_1, \ldots, b_{n-k}$, выпишем их по лемме 1 в виде набора $c_1, \ldots, c_n$ так, чтобы при любом $i\leqslant n$ выполнялось неравенство $|c_1+\ldots+c_i|\leqslant1$. Таким образом, мы занумеруем все данные векторы так, что при всяком $i\leqslant n$ сумма первых i из них будет расположена в полосе $|y| \leqslant 1$. При этом (благодаря предварительной нумерации чисел $a_1, \ldots, a_k$ и $b_1, \ldots, b_{n-k}$) всякая такая сумма лежит и в полосе $|x| \leqslant 2$.

Итак, мы доказали, что n данных векторов можно обозначить через $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ так, что при всяком $i \leqslant n$ сумма $\mathbf{v}_1 + \ldots + \mathbf{v}_i$ лежит в прямоугольнике $|x| \leqslant 2$, $|y| \leqslant 1$, и, значит, $|\mathbf{v}_1 + \ldots + \mathbf{v}_i| \leqslant \sqrt{5}$.

Замечание 1. Остается обосновать построение системы Oxy.

Разобьем все данные векторы на два класса, сумму векторов первого класса обозначим через $\mathbf{s}$ (тогда сумма векторов второго класса будет $-\mathbf{s}$). Всевозможных разбиений на два класса всего 2^n (важно, что их конечное число). Выберем из них такое, для которого $|\mathbf{s}|$ принимает наибольшее значение, и направление именно этого вектора $\mathbf{s}$ примем за направление оси y.

(Убедитесь, что построенная система Oxy обладает нужным нам свойством.)

Замечание 2. Из приведенного построения оси y видно, что ни один из данных векторов не перпендикулярен ей, следовательно, мы верно говорили о векторах, «смотрящих вниз» (вместо более осторожного «не вверх»).

Упражнение 1. Пусть в пространстве дано n векторов, таких, что каждый по модулю не превосходит 1, а сумма всех равна 0. Докажите, что их можно занумеровать так, чтобы при любом $i \leqslant n$ сумма первых i из них имела длину меньше C, где: а) $C = \sqrt{21}$, б)* $C = \sqrt{20{,}5}$.

Перейдем к задаче M275 а).

Лемма 2. Пусть каждый из векторов $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_r$ имеет длину 1, длина $\mathbf{e}_0$ не больше 1, и $\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1 + \ldots + \mathbf{e}_r = 0$. Тогда среди векторов $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_r$ найдется либо один вектор $\mathbf{e}_i$, либо пара векторов $\mathbf{e}_j$ и $\mathbf{e}_k$, которые в сумме с $\mathbf{e}_0$ дают вектор $\mathbf{e}$ длины не больше 1 (либо $|\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_i| \leqslant 1$, либо $|\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_k| \leqslant 1$). Во втором случае $|\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_j| < \sqrt{2}$.

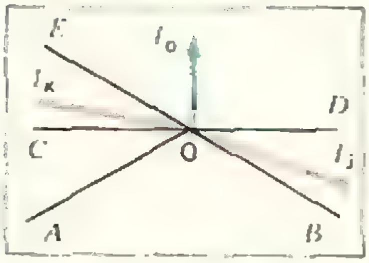


Рис. 2.

Доказательство. Начертим два луча, OA и OB, образующие с $\mathbf{e}_0$ углы в 120° (рис. 2). Если среди $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_r$ найдется вектор, лежащий внутри (или на сторонах) $\measuredangle AOB$, то его и примем за $\mathbf{e}_i$.

Пусть такого вектора среди $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_r$ нет. Проведем тогда через точку O прямую $CD \perp \mathbf{e}_0$. Среди векторов $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_r$ обязательно окажется вектор, лежащий внутри $\measuredangle AOC$ или внутри $\measuredangle BOD$ (иначе не выполняется условие $\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1 + \ldots + \mathbf{e}_r = 0$). Пусть для определенности хотя бы один из векторов $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_r$ лежит внутри $\measuredangle BOD$. Ближайший к OB из таких векторов назовем $\mathbf{e}_j$, а луч, направленный противоположно ему, обозначим через OE. Хотя бы один из векторов $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_r$ лежит внутри $\measuredangle AOE$ (иначе опять не выполняется условие $\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1 + \ldots + \mathbf{e}_r = 0$). Ближайший к OA из этих векторов назовем $\mathbf{e}_k$. Угол между $\mathbf{e}_j$ и $\mathbf{e}_k$ меньше 180°, но больше $\measuredangle AOB = 120^\circ$. Значит, сумма $\mathbf{e}_j + \mathbf{e}_k$ образует и с $\mathbf{e}_j$ и с $\mathbf{e}_k$ угол, больший 60°. Значит, вектор $\mathbf{e}_j + \mathbf{e}_k$ лежит внутри $\measuredangle AOB$, и следовательно, $|\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_k| \leqslant 1$. При этом $|\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_j| < \sqrt{2}$.

Из леммы 2 сразу следует, что в задаче M275 а) векторы можно занумеровать так, чтобы при всяком $k \leqslant n$ сумма первых k векторов имела длину меньше $\sqrt{2}$ (доказательство — индукцией по n).

Усложняя доказательство, можно еще улучшить оценку в задаче M275 а), а именно — заменить $\sqrt{2}$ на $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Упражнение 2. Получите в задаче M275 а) оценку $\frac{\sqrt{5}}{2}$. Докажите, что улучшить эту оценку уже нельзя, то есть покажите, что для любого положительного $C < \frac{\sqrt{5}}{2}$ можно указать на плоскости n единичных векторов с суммой 0, таких, что, как бы их ни обозначать через $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$, при некотором k окажется справедливым неравенство $|\mathbf{v}_1 + \ldots + \mathbf{v}_k| > C$.

Было бы интересно получить неулучшаемую оценку и в задаче М275 б) (автору она неизвестна). Впрочем, для цели, ради которой предлагалась задача М275, точная оценка как раз не нужна. Упомянутая цель — доказательство комплексной теоремы Римана (см. «Квант», 1973, № 9, «От перемены мест слагаемых», упражнения 22 и 23).

Упражнение 3. Опираясь на М275 б), выполните упражнение 22 из статьи «От перемены мест слагаемых».

М. Л. Гервер

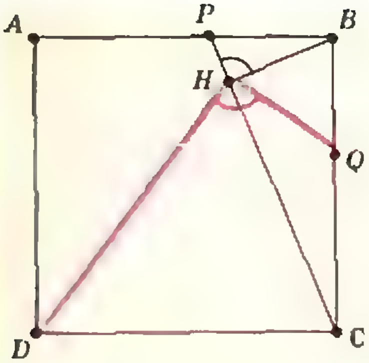


Рис. 3.

◆

М276. *Дан квадрат $ABCD$. Точки P и Q лежат соответственно на сторонах AB и BC, причем $|BP| = |BQ|$. Пусть H — основание перпендикуляра, опущенного из точки B на отрезок PC. Докажите, что угол DHQ — прямой.*

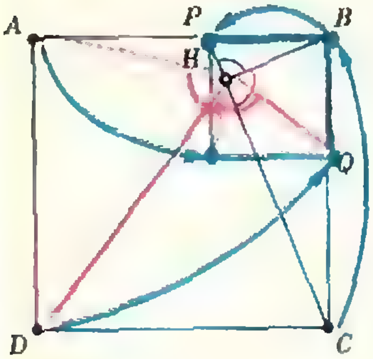


Рис. 4.

Рассмотрим подобное преобразование плоскости, переводящее треугольник BHC в треугольник PHB; это — *центрально-подобный поворот на угол 90° с центром в точке H и коэффициентом подобия* $k = \frac{|BH|}{|HC|} = \frac{|PH|}{|HB|}$ (рис. 4). При этом подобном преобразовании три вершины B, C, D квадрата $ABCD$ должны перейти, разумеется, в три вершины квадрата: B — в P, C — в B, следовательно, D — в Q (ведь $|PB| \perp |BQ|$ и $|PB| = |BQ|$ по условию). Отсюда следует, что Q получается из D подобным преобразованием, состоящим из гомотетии с коэффициентом k и поворота на 90° вокруг точки H. Следовательно, $\widehat{DHQ} = 90°$ (одновременно мы доказали, что $\frac{|QH|}{|HD|} = \frac{|BH|}{|HC|}$).

Читатели и участники Всесоюзной олимпиады прошлого года, на которой была предложена эта задача, указали много различных решений, не использующих «геометрических преобразований». Например, $\triangle BHQ \backsim \triangle CHD$, поскольку $\frac{|HB|}{|HC|} = \frac{|PB|}{|BC|} = \frac{|BQ|}{|CD|}$ и $\sphericalangle HBQ \cong \sphericalangle HCD$ (стороны этих углов перпендикулярны); отсюда $\sphericalangle BHQ \cong \sphericalangle CHD$, следовательно, $\widehat{QHD} = \widehat{BHC} = 90°$.

Н. Б. Васильев

◆

М277. *Задано несколько красных и несколько синих точек. Некоторые из них соединены отрезками. Назовем точку «особой», если более половины из соединенных с ней точек имеют цвет, отличный от ее цвета. Если есть хотя бы одна особая точка, то выбирается любая особая точка и перекрашивается в другой цвет. Докажите, что через конечное число шагов не останется ни одной особой точки.*

Назовем отрезок «особым», если его концы имеют разный цвет. Заметим, что точка является «особой», если более половины выходящих из нее отрезков — «особые». Поэтому при перекрашивании любой «особой» точки общее число «особых» отрезков уменьшается. Поскольку всего «особых» отрезков не меньше нуля, а при каждом шаге их число уменьшается по крайней мере на единицу, мы через конечное число шагов получим систему, в которой ни одну из точек перекрасить нельзя и, следовательно, нет особых точек.

И. Н. Клумова

◆

М278. *а) Каждая из сторон выпуклого шестиугольника имеет длину больше 1. Всегда ли в нем найдется*

Ответ. а) Не всегда; б) всегда.

а) Возьмем правильный треугольник со стороной 2 (на рис. 5 он — пунктирный). Из середин его сторон восставим во внешнюю сторону перпендикуляры, отложим на них *диагональ длины больше 2?*

б) В выпуклом шестиугольнике ABCDEF длины диагоналей AD, BE и CF больше 2. Всегда ли у него найдется сторона длины больше 1?

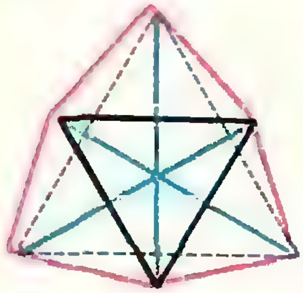


Рис. 5.

M279. *На n карточках, выложенных по окружности, записаны числа, каждое из которых равно +1 или —1. За какое наименьшее число вопросов можно наверняка определить произведение всех n чисел, если за один вопрос разрешается узнать:*

а) произведение чисел на любых трех карточках?

б) произведение чисел на любых трех карточках, лежащих подряд? (n — натуральное число, больше 3.)

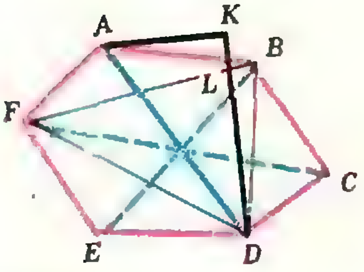


Рис. 6.

отрезки длины 0,1 и соединим полученные точки с вершинами треугольника. Покажем, что стороны так построенного выпуклого шестиугольника (изображенного на рис. 5 красным цветом) больше 1, но что все его диагонали не больше 2.

Действительно, стороны такого шестиугольника равны $\sqrt{1^2+(0,1)^2}>1$. Пунктирные его диагонали равны 2, синие — $\sqrt{3}+0,1<2$, а черные заведомо меньше $1+0,1+0,1=1,2$.

б) Соединим вершины F, B и D нашего шестиугольника. В треугольнике FBD один из углов не меньше 60° — пусть, например, это угол FDB. Диагональ AD делит этот угол на два, один из которых, пусть $\widehat{ADB}$, не меньше 30°. Построим треугольник AKD такой, что $\widehat{KAD}=60°$, $\widehat{ADK}=30°$, и точки A и B лежат по разные стороны от KD (рис. 6). Обозначим через L точку пересечения отрезка AB с отрезком DK или его продолжением. Тогда

$$|AB|\geqslant|AL|\geqslant|AK|=\frac{1}{2}|AD|>1.$$

Н. Х. Агаханов

◆

Обозначим записанные на карточках числа через a_1, a_2, . . . , a_n, а искомое число вопросов через p.

а) Прежде всего заметим, что каждое из данных чисел должно войти хотя бы в одно из произведений, значения которых мы выясняем, задавая наши вопросы, ибо в противном случае, изменив знак у числа, записанного на неиспользованной карточке, мы изменим знак произведения всех чисел, сохранив при этом прежними ответы на все заданные вопросы. (Это и показывает, что на основании полученных ответов нельзя определить произведение всех чисел.) Поскольку одним вопросом мы узнаем произведение трех чисел, то $p\geqslant\frac{n}{3}$.

Если $n=3k$, то k вопросов достаточно. Выяснив, чему равны k произведений $a_1a_2a_3$, $a_4a_5a_6$, $a_7a_8a_9$, . . . , $a_{3k-2}a_{3k-1}a_{3k}$, и перемножив полученные результаты, мы найдем произведение всех чисел.

Если $n=3k+1$, то $p\geqslant k+1$. Покажем, что при $k>1$ за $(k+1)$ вопросов можно узнать произведение всех чисел.

Выясним, чему равны $(k+1)$ произведений $a_1a_2a_3$, $a_1a_4a_5$, $a_1a_6a_7$, $a_8a_9a_{10}$, $a_{11}a_{12}a_{13}$, . . . , $a_{3k-1}a_{3k}a_{3k+1}$. В этих произведениях все числа, кроме a_1, участвуют по одному разу, а число a_1 — три раза. Так как $a_1^3=a_1$, то произведение полученных результатов равно произведению всех написанных на карточках чисел.

Оставшийся не рассмотренным случай $n=4$ мы разберем ниже. В этом случае задача а) не отличается от задачи б).

Если $n=3k+2$, то снова $p\geqslant k+1$. В этом случае произведение всех написанных на карточках чисел можно найти, перемножив произведения $a_1a_2a_3$, $a_1a_2a_4$, $a_1a_2a_5$, $a_6a_7a_8$, $a_9a_{10}a_{11}$, . . . , $a_{3k}a_{3k+1}a_{3k+2}$, и задав при этом $k+2$ вопроса (в произведениях участвуют $3k$ сомножителей по одному разу, а сомножители a_1 и a_2 — по три раза, то есть $3k+6$ сомножителей). Покажем, что $k+1$ вопросов недостаточно.

В $k+1$ произведений входят $3k+3=n+1$ сомножителей; но так как каждое из n написанных на карточках чисел должно выйти хотя бы в одно из этих произведений, то одно число (назовем его a) входит в два произведения: abc и ade, а каждое из остальных чисел входит ровно в одно произведение. Но, заменив числа a, b и d, мы не изменим ни одного из полученных ответов, изменив при этом произведение всех написанных на карточках чисел; значит, на основании полученных $k+1$ ответов нельзя определить это произведение.

Итак, ответ в задаче а) таков:
если $n=3k$, то $p=k$,
если $n=3k+1$, то $p=k+1$ (кроме случая $n=4$),
если $n=3k+2$, то $p=k+2$.

б) Если $n=3k$, то, как и в задаче а), $p=k$. Пусть n не делится на 3.

Заметим, что в условиях задачи б) задавать вопросы можно о значениях лишь таких n произведений:

$$a_1a_2a_3,\ a_2a_3a_4,\ \ldots,\ a_{n-2}a_{n-1}a_n,\ a_{n-1}a_na_1,\ a_na_1a_2. \qquad (*)$$

Задав все n вопросов, мы узнаем куб произведения $a_1a_2\ldots a_n$, а значит, и само произведение — ведь оно равно 1 или -1. Покажем, что $n-1$ вопросов для нахождения произведения $a_1a_2\ldots a_n$ недостаточно.

Задав $n-1$ вопросов, мы будем знать все произведения (*), кроме одного. Так как мы могли начать нумерацию карточек с любой из них, то можно считать, что не задавался вопрос о значении произведения $a_1a_2a_3$.

Пусть $n=3k+1$. Заменив на противоположные числа a_2 и a_3, a_5 и a_6, a_8 и a_9, ..., a_{3k-1} и a_{3k}, а также число a_1, мы изменим знак всего произведения $a_1a_2\ldots a_n$ (так как заменяются $2k+1$ чисел). Но поскольку в каждом из произведений (*), кроме произведения $a_1a_2a_3$, о котором мы ничего не спрашиваем, меняются два сомножителя, то мы об этой перемене знака всего произведения ничего не узнаем, задав $n-1$ вопросов.

Пусть $n=3k+2$. Снова, заменив на противоположные числа a_4 и a_5, a_7 и a_8, a_{10} и a_{11}, ..., a_{3k+1} и a_{3k+2} и a_2, мы изменим знак всего произведения $a_1a_2\ldots a_n$ (так как опять заменяется нечетное количество чисел) и снова об этой перемене мы не узнаем, поскольку опять во всех произведениях (*), кроме произведения $a_1a_2a_3$, меняется по два сомножителя.

Итак, ответ к задаче б) таков:
если n не делится на 3, то $p=n$;
если n делится на 3, то $p=\frac{n}{3}$.

Теперь мы видим, что в задаче а) при $n=4$ $p=4$.

Ю. И. Ионин

◆

Ф285. *В неотапливаемом помещении работает холодильник с терморегулятором. В момент подключения холодильника к сети температура на улице, в помещении и в холодильнике была одна и та же. Считая температуру на улице постоянной, изобразите приближенно на графиках, как менялась температура в помещении после подключения холодильника. Рассмотрите три случая:*
1) холодильник пустой;
2) заполнен продуктами;
3) дверца холодильника открыта.
Все три графика зависимости температуры от времени начертить на одном рисунке.

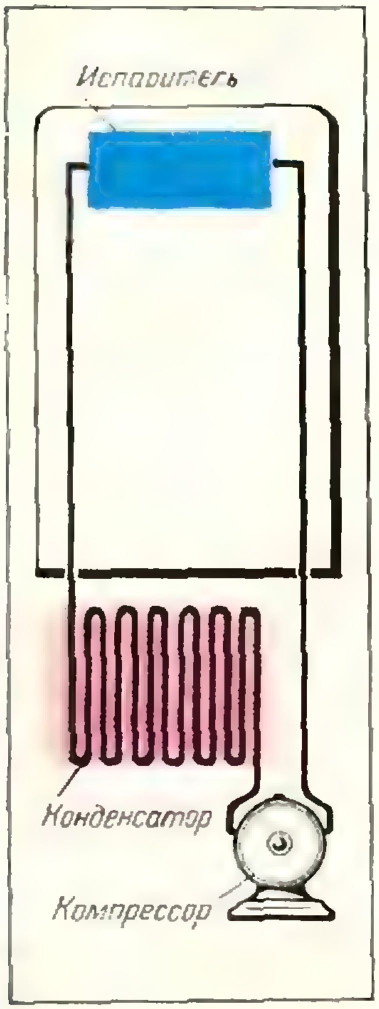


Рис. 7.

Холодильная машина работает по принципу, обратному принципу работы тепловой машины: над рабочим телом — газом-агентом — совершается определенная работа, а тепло передается от холодного тела к горячему телу. При этом горячему телу передается не только тепло, которое отбирается от холодного, но и тепло, эквивалентное произведенной работе. В домашнем холодильнике (см. рис. 7) сжиженный газ-агент, испаряясь, забирает тепло у стенок испарительной камеры. Затем этот газ снова сжижается в конденсаторе, передавая тепло окружающему воздуху.

Если дверца холодильника открыта, то тепло отбирается испарителем от окружающего воздуха и передается конденсатором тому же воздуху в комнате. Воздух получает также тепло, эквивалентное совершенной работе, и тепло, выделяющееся в подводящих проводах и в обмотке электродвигателя компрессора. Поэтому при открытой дверце холодильника температура в комнате будет непрерывно повышаться до тех пор, пока количество тепла, поступающего в комнату, не станет равным количеству тепла, которое уходит из комнаты на улицу. Терморегулятор при этом работать не будет. График изменения температуры в комнате показан на рисунке 8 черной линией.

Теперь рассмотрим закрытый холодильник. Вначале температура внутри холодильника (в холодильной камере) будет понижаться, а в комнате повышаться, причем несколько

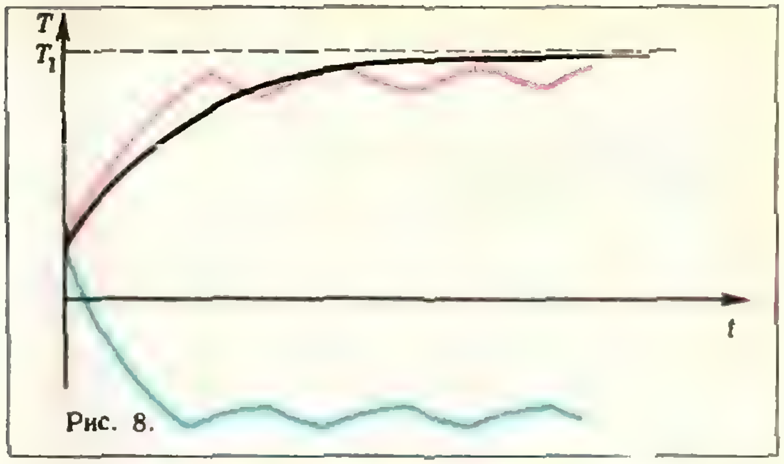


Рис. 8.

более быстро, чем в случае открытого холодильника, так как теперь тепло отбирается не от воздуха в комнате, а от воздуха, который находится в ограниченном объеме шкафа, и отдается воздуху в комнате. Температура в комнате при этом может стать как выше T_1, так и ниже. Это зависит от интенсивности теплообмена между комнатой и улицей и от той температуры внутри холодильника, при которой срабатывает терморегулятор (т. е. от времени работы холодильника до его выключения). Когда температура в холодильнике достигнет заданной, терморегулятор отключит холодильник от сети, и температура внутри холодильника будет постепенно повышаться за счет теплообмена через стенки холодильника. Затем холодильник опять включится, температура в камере будет понижаться и т. д. График зависимости температуры внутри холодильника от времени — синяя *линия на рисунке 8.*

В соответствии с колебаниями температуры в холодильной камере меняется и температура в комнате. Но так как в момент отключения холодильника от сети температура конденсатора выше температуры в комнате, то температура в комнате еще некоторое время повышается, несмотря на то, что холодильник не работает. Затем температура в комнате уменьшается, пока холодильник вновь не включится, и т. д. Если терморегулятор хороший, то есть он включает холодильник уже при небольшом повышении температуры внутри шкафа, то холодильник работает почти непрерывно. Так как при этом из холодильника в комнату передается сравнительно небольшое количество тепла, поступающего через стенки холодильника, то холодильник совершает небольшую работу. Температура в комнате начнет уменьшаться, стремясь к некоторой постоянной температуре (ниже T_1). Если терморегулятор плохой, то холодильник будет отключаться на большое время, если теплообмен его с комнатой плохой, и на сравнительно небольшое время, если этот теплообмен хороший. Этим определяются колебания температуры и то среднее значение, к которому стремится температура в комнате. Одна из кривых зависимости температуры в комнате от времени показана на рисунке 8 красной линией.

Когда холодильник наполнен продуктами, увеличивается как время, в течение которого холодильник включен, так и время, в течение которого он выключен. В соответствии с этим меняется и период колебаний температуры в комнате.

◆

Рассмотрим один из витков пружины, например, виток ABC (рис. 9). При деформации пружины половины этого витка поворачиваются, отклоняясь от горизонтальной пло-

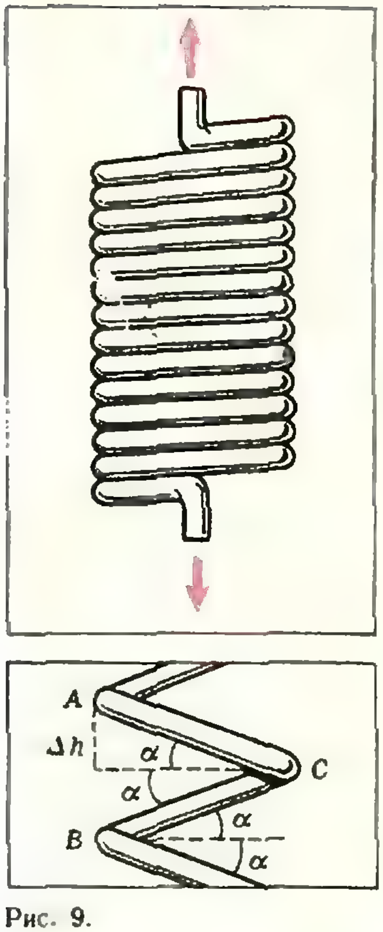


Рис. 9.

Ф286. *При исследовании упругих свойств стальной проволоки длиной l установи-*

ли, что если один конец ее закрепить, а другой повернуть на угол φ вокруг оси, то возникает момент упругих сил $M = k\varphi$. После этого из проволоки навили пружину радиуса R с шагом много меньше R. Рассчитать коэффициент упругости пружины (считать, что упругие свойства стали после навивки пружины полностью восстанавливаются).

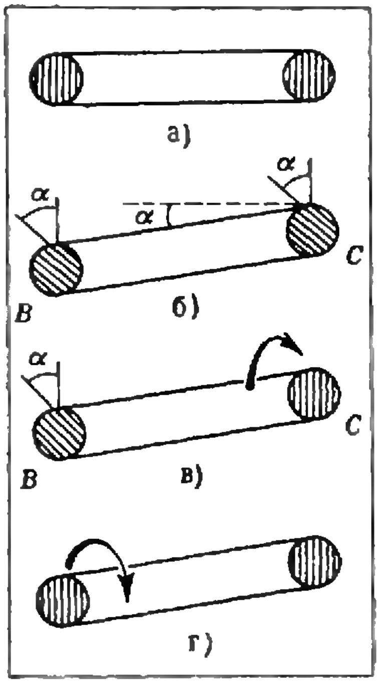


Рис. 10.

скости на одинаковые углы α. Если деформация пружины мала, то мал и этот угол α. В сечении B на проволоку со стороны нижней части пружины действует сила F и момент силы F, равный $M=FR$, где R—радиус витков пружины. Напряжения, уравновешивающие силу F, в R/r раз меньше напряжений, уравновешивающих момент M (докажите это; r — радиус сечения проволоки), и ими можно пренебречь. Это означает, что рассматривая деформацию пружины, мы можем считать, что она связана с чистым закручиванием проволоки вокруг ее оси. Найдем, как связано растяжение пружины с углом φ, на который закручивается проволока. Ясно, что сечение C при растяжении пружины не поворачивается. Ведь при растяжении пружины верхняя AC и нижняя CB части витка поворачиваются на одинаковые углы в разные стороны. Очевидно, что не поворачиваются и сечения A и B. (Они только слегка отклоняются в плоскости, перпендикулярной к рисунку, в соответствии с изменением наклона витка.)

Простой наклон половины витка BC на угол α вызовет поворот сечений B и C на угол α (рис. 10, *а*, *б*). Но сечения B и C должны остаться ориентированными так, как в недеформированной пружине. Повернем их последовательно на угол α. Поворот сечения C вызовет закручивание половины витка на угол α по часовой стрелке (рис. 10, *в*). На такой же угол закручивается проволока при повороте на угол α сечения B (рис. 10, *г*). Следовательно, половина витка поворачивается на угол 2α. Весь же виток закручивается на угол 4α, вся проволока — на угол $\varphi=4n\alpha$, где n — число витков пружины.

Так как длина одного витка равна $2\pi R$, а длина проволоки l, то $n=\dfrac{l}{2\pi R}$ и $\varphi=\dfrac{2l\alpha}{\pi R}$.

Очевидно, что удлинение пружины на одном витке (см. рис. 9) равно $2\Delta h=4R\sin\alpha$, или, так как угол α мал и $\sin\alpha\approx\alpha$, $2\Delta h\approx 4R\alpha$. Удлинение всей пружины (на n витках) равно $\Delta H=4nR\alpha$. Обозначим коэффициент упругости пружины через μ. Тогда $F=\mu\Delta H$. С другой стороны, $M=FR$, то есть $F=\dfrac{M}{R}$. Следовательно, $\mu\Delta H=\dfrac{M}{R}=\dfrac{k\varphi}{R}$. Отсюда

$$\mu=\frac{k\varphi}{R\Delta H}=\frac{k4n\alpha}{R4nR\alpha}=\frac{k}{R^2}.$$

Ф287. *Канал проходит по мосту над шоссе. Изменится ли давление на мост, если по каналу движется один раз пустая, а другой — нагруженная баржа?*

◆

Давление на мост определяется уровнем воды в канале. Если по каналу движется баржа, то, строго говоря, уровень воды повышается тем больше, чем более тяжелая баржа. Однако практически уровень воды во всем канале, конечно, остается прежним, так как объем воды, вытесненной баржой, очень мал по сравнению с общим объемом воды в канале.

Ф288. *Сосуд C (рис. 11) сообщается с окружающим пространством через малое отверстие. Температура газа в окружающем пространстве T, давление p. Газ настолько разрежен, что молекулы при пролете в сосуд и из сосуда на протяжении размеров отверстия не сталкиваются друг с другом. В сосуде поддерживается температура 4T. Каким будет давление в сосуде?*

◆

Давление газа в сосуде равно $p_1=n_1kT_1=4n_1kT$, где n_1 — концентрация молекул в сосуде (число молекул в единице объема) и k — постоянная Больцмана. Вне сосуда давление равно $p=n_2kT$ (n_2 — концентрация молекул в окружающем пространстве). Следовательно,

$$p_1=4p\frac{n_1}{n_2}.$$

Таким образом, для того чтобы найти давление в сосуде, достаточно определить отношение концентраций молекул газа в сосуде и в окружающем пространстве. Для нахождения этого отношения воспользуемся тем, что газ в сосуде находится в равновесии.

При равновесии число молекул газа, вылетающих из

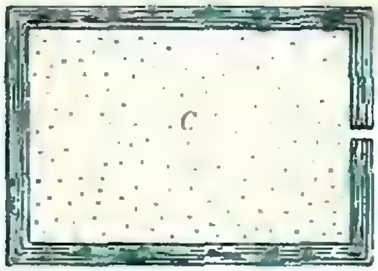


Рис. 11.

сосуда, равно числу молекул газа, влетающих в сосуд за то же время. Для простоты рассуждений будем считать, что скорости всех молекул газа при установившейся температуре одинаковы и равны средней квадратичной скорости, соответствующей этой температуре. Кроме того, будем считать, что молекулы двигаются вдоль трех взаимно перпендикулярных направлений, одно из которых перпендикулярно к плоскости сечения отверстия, причем, все направления равновероятны. Тогда по направлению к отверстию движется $^1/_6$ часть всех молекул, имеющихся в сосуде. За время Δt из сосуда вылетают те молекулы, которые находятся от отверстия на расстоянии, равном $v_1\Delta t$, где v_1 — скорость молекул в сосуде. Так как концентрация молекул в сосуде равна n_1, то за время Δt из сосуда вылетают $^1/_6\, n_1v_1\Delta t\Delta S$ молекул (ΔS — площадь отверстия). Аналогично найдем, что в сосуд извне влетает $^1/_6\, n_2v_2\Delta t\Delta S$ молекул, где v_2 — скорость молекул газа в окружающем пространстве. В условиях равновесия $n_1v_1=n_2v_2$. Отсюда найдем, что отношение концентраций молекул равно

$$\frac{n_1}{n_2}=\frac{v_2}{v_1}.$$

Но, как известно, средняя квадратичная скорость движения молекул связана с температурой газа формулой $\frac{m\overline{v^2}}{2}=\frac{3kT}{2}$ (m — масса молекулы). Следовательно,

$$v_1=\sqrt{\frac{12kT}{m}},\quad v_2=\sqrt{\frac{3kT}{m}}\quad \text{и}\quad \frac{n_1}{n_2}=\frac{1}{2}.$$

Используя это соотношение, найдем давление газа в сосуде:

$$p_1=2p.$$

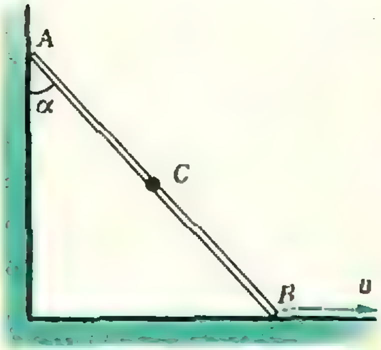


Рис. 12, *а*.

Ф289. *По сторонам прямого угла скользит жесткая палочка длины $2l$, в центре которой закреплена бусинка массы m. Скорость точки B постоянна и равна v (рис. 12, а). Определить, с какой силой действует бусинка на палочку в тот момент, когда $\alpha=45°$.*

◆

Рассмотрим бусинку. На нее действуют две силы — сила тяжести $m\mathbf{g}$ и сила $\mathbf{Q}$ реакции палочки. Согласно второму закону Ньютона

$$m\mathbf{g}+\mathbf{Q}=m\mathbf{a}.$$

Следовательно, если мы найдем ускорение бусинки, то тем самым определим силу $\mathbf{Q}$. А по третьему закону Ньютона сила $\mathbf{N}$, с которой бусинка действует на палочку, равна по абсолютной величине силе $\mathbf{Q}$.

Нарисуем несколько положений палочки (рис. 12, *б*). Из рисунка видно, что бусинка (точка C) находится все время на одном и том же расстоянии от вершины прямого угла. Это следует из того, что в прямоугольном треугольнике медиана, соединяющая вершину прямого угла с серединой гипотенузы, равна половине гипотенузы.

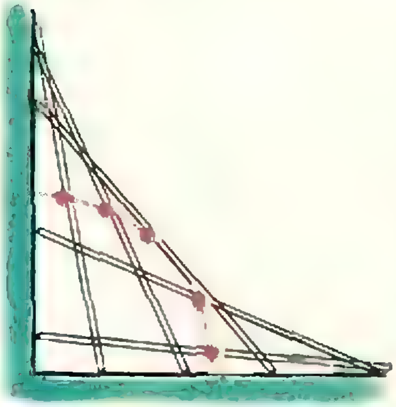


Рис. 12, *б*.

Итак, бусинка движется по окружности радиуса l, скорость v_c бусинки всегда направлена по касательной к этой окружности, а центростремительное ускорение равно $a_{\text{ц}}=\frac{v_c^2}{l}$.

В любой момент времени полная скорость бусинки складывается из горизонтальной и вертикальной составляющих. По условию задачи скорость точки B постоянна и равна v. Из соображений подобия горизонтальные скорости и всех остальных точек тоже постоянны, причем горизонтальная скорость бусинки равна $\frac{v}{2}$. Это означает, что ускорение бусинки и сила $\mathbf{Q}$ направлены по вертикали!

В тот момент, когда $\alpha=45°$, скорость v_c бусинки направлена вдоль палочки, а ее вертикальная и горизонтальная со-

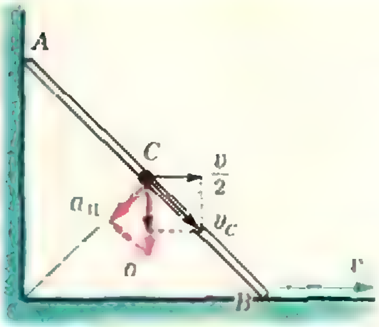


Рис. 12. *в*.

ставляющие одинаковы по величине и равны $\frac{v}{2}$ (рис. 12, *в*). Следовательно, полная скорость бусинки в этот момент равна

$\sqrt{2}\,\frac{v}{2}$. Поэтому $a_{ц}=\frac{v_c^2}{l}=\frac{v^2}{2l}$ и

$$a=\sqrt{2}a_{ц}=\frac{v^2}{\sqrt{2}\,l}.$$

Тогда из второго закона Ньютона

$$Q=mg-ma=m\left(g-\frac{v^2}{\sqrt{2}\,l}\right),$$

и

$$|\mathbf{N}|=|\mathbf{Q}|=m\left(g-\frac{v^2}{\sqrt{2}\,l}\right).$$

◆

Ф290. *Трубка, в которой находится пружинка с прикрепленным к ней шариком, может вращаться вокруг вертикальной оси, проходящей через конец трубки. Свободный конец пружинки прикреплен к трубке (рис. 13). График зависимости силы упругости пружины F от деформации представлен на рисунке 14.*

Нарисуйте примерный график зависимости смещения шарика вдоль трубки от угловой скорости при увеличении ее от нуля до такой величины, когда F = 5н. Как изменится эта зависимость при уменьшении угловой скорости? l_0 = 2 см.

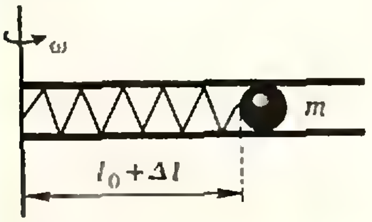


Рис. 13.

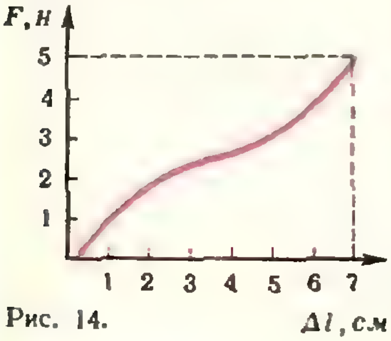


Рис. 14.

Будем считать, что угловая скорость ω вращения трубки меняется медленно, так что при каждом значении ω шарик находится в равновесном состоянии относительно трубки, а в неподвижной системе отсчета шарик движется по окружности радиуса $l_0+\Delta l$ (Δl — изменение длины пружины). Так как центростремительное ускорение $a=\omega^2(l_0+\Delta l)$ сообщается шарику силой упругости пружины, то согласно закону Ньютона

$$m\omega^2(l_0+\Delta l)=F_{\text{упр}}. \qquad (*)$$

Для того чтобы решить задачу, необходимо из уравнения (*) найти зависимость Δl от ω или, что удобнее, $l=l_0+\Delta l$ от $m\omega^2$.

Зависимость силы упругости пружины от удлинения пружины задана графически, поэтому уравнение (*) мы будем решать тоже графически. Перерисуем график, сдвинув начало координат в точку с координатой $-l_0$ (рис. 15). Теперь по оси абсцисс у нас отложена полная длина l пружины. Если из начала координат провести прямую линию, то координатами точки пересечения этой прямой с графиком будут значения $F_{\text{упр}}$ и соответствующей ей длины пружины l, а тангенс угла наклона прямой к оси абсцисс будет равен $F_{\text{упр}}/l$, то есть $m\omega^2$.

Чтобы построить график зависимости l от $m\omega^2$, проведем из начала координат пучок прямых и отметим все точки пересечения прямых с графиком. Затем, зная значения l и соответствующие им значения $m\omega^2=\operatorname{tg}\alpha$, будем отмечать их на графике зависимости l от $m\omega^2$. Из рисунка 15 видно, что при углах $\alpha<\alpha_1$, то есть при $m\omega^2<\operatorname{tg}\alpha_1$, каждая из проведенных прямых пересекается с графиком $F_{\text{упр}}(l)$ только в одной точке, и каждому значению $m\omega^2$ соответствует одно значение l. При $\alpha_1<\alpha<\alpha_2$ прямая пересекает график в трех точках (при $\alpha=\alpha_1$ и $\alpha=\alpha_2$ — в двух), то есть одному и тому же значению $m\omega^2$ соответствуют три значения l. Отметим их все на графике, оставив пока в стороне вопрос о том, что означает такая многозначность. При $\alpha>\alpha_2$, то есть при $m\omega^2>\operatorname{tg}\alpha_2$, каждая из прямых опять пересекается с графиком только в одной точке и каждому значению $m\omega^2$ соответствует одно значение l. Соединив все нанесенные точки плавной кривой, мы получим график, показанный на рисунке 16 черной линией. Рассмотрим этот график более подробно.

При $m\omega^2<\operatorname{tg}\alpha_1$ и при $m\omega^2>\operatorname{tg}\alpha_2$ каждому значению угловой скорости соответствует одно значение l. Здесь все ясно. Но при $\operatorname{tg}\alpha_1<m\omega^2<\operatorname{tg}\alpha_2$ имеется три разных значения l для каждого значения $m\omega^2$. На каком же расстоянии от оси вращения находится шарик? Прежде всего ясно, что шарик не может находиться на таком расстоянии, которое соответствует точке B_2 графика (см. рис. 15). Действительно, предположим, что из-за каких-либо случайных причин шарик слегка отклонился от этого положения равновесия, так что l увеличилось на Δx. Для того чтобы шарик вращался, находясь на расстоянии $l+\Delta x$ от оси, сила упругости должна возрасти. В нашем же случае сила упругости, как видно из рисунка, уменьшалась. Следовательно, эта сила не может сообщить шарику необходимое для его движения центростремительное ускорение, и шарик будет продолжать двигаться вдоль трубки к положению B_3. Таким образом, точка B_2 соответствует положению неустойчивого равновесия шарика. Аналогично можно показать, что точки B_1 и B_3 соответствуют положениям устойчивого равновесия шарика.

Поэтому при $\operatorname{tg}\alpha_1 < m\omega^2 < \operatorname{tg}\alpha_2$ шарик может находиться в положениях, соответствующих участкам графика A_1C_1 и A_2C_2.

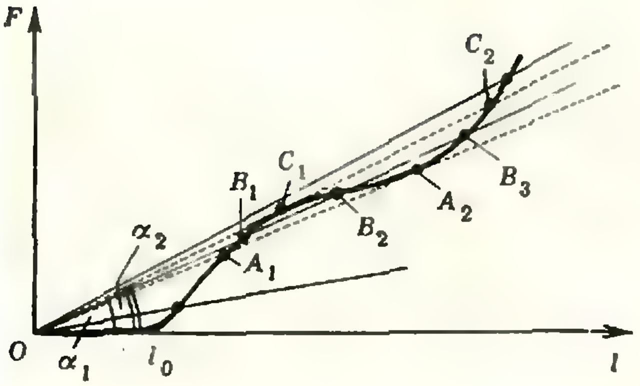


Рис. 15

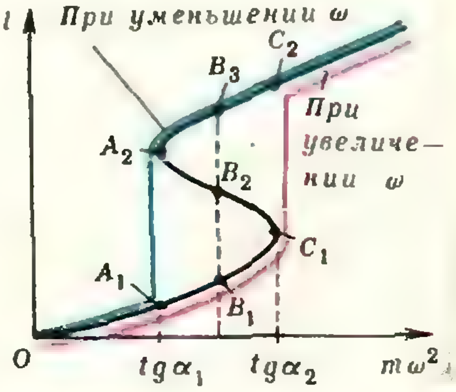


Рис. 16.

В каком же именно из своих устойчивых положений будет находиться шарик? Ответ на этот вопрос зависит от того, как изменяется угловая скорость вращения трубки. Если ω увеличивается, то шарик не может попасть в положения, соответствующие участку A_2C_2 графика, не пройдя положений, соответствующих участку A_1C_1, каждое из которых устойчивое. Следовательно, при увеличении угловой скорости l будет меняться по графику, показанному на рисунке 16 красной линией (в точке $m\omega^2 = \operatorname{tg}\alpha_2$ величина l изменяется скачком от значения, соответствующего точке C_1, до значения, соответствующего точке C_2). При уменьшении угловой скорости график зависимости l от $m\omega^2$ будет таким, как показано на рисунке синей линией. Следует иметь в виду, что если трубка вращается с угловой скоростью такой, что $\operatorname{tg}\alpha_1 < m\omega^2 < \operatorname{tg}\alpha_2$, то, сильно толкнув шарик, можно перевести его в положение, соответствующее «чужому» участку графика, по которому и будет в дальнейшем изменяться l при изменении ω.

И. Ш. Слободецкий

В этом номере мы приводим список читателей, приславших верные решения задач **М266—М275** и **Ф278—Ф292** (жирные цифры после фамилии — последние две цифры номера решенной задачи).

Математика

С. Агазарян (с. Суренаван Арм. ССР) **74**; *Д. Азов* (Челябинск) **67**; *С. Актершев* (Магнитогорск) **71, 73**; *А. Арутюнян* (Арташат Арм. ССР) **74**; *А. Баскаков* (Москва) **73**; *В. Басманов* (Воронеж) **66, 67, 69, 70, 73**; *С. Белоглазов* (ст. Кишерть Пермской обл.) **71—73**; *М. Белощевский* (Херсон) **67**; *М. Бирман* (Саратов) **68**; *А. Блох* (Харьков) **67, 69, 70, 73**; *А. Богорад* (Ленинград) **67, 69, 71, 73, 74**; *Д. Ботвич* (с. Камынино Курской обл.) **71, 72, 75а**; *А. Бузинов* (Днепропетровск) **67**; *И. Вандакуров* (Ленинград) **66, 67, 73, 74**; *Я. Верховский* (Рыбное Московской обл.) **73**; *Ю. Виницкий* (Ташкент) **68**; *В. Витюков* (Орел) **67, 68**; *Л. Воробьев* (Витебск) **72**; *А. Ворович* (Москва) **71**; *Ю. Вороновский* (Днепропетровск) **69**; *Е. Галинский* (Ташкент) **70**; *Л. Гандельсман* (Ленинград) **71, 73, 74**; *М. Гандельсман* (Ленинград) **71, 73, 74**; *В. Гишларкаев* (с. Урус-Мартан ЧИАССР) **67**; *Е. Горбатый* (Одесса) **71, 73, 74**; *С. Горишний* (Таганрог) **66, 67, 69—71, 74**; *В. Грамацкий* (Кишинев) **71—73**; *С. Гродский* (Корсунь-Шевченковский) **68, 69, 72, 74**; *С. Гуков* (Каунас) **71**; *В. Гуров* (Листвянка Рязанской обл.) **71**; *В. Гурьев* (Невский Рязанской обл.) **72**; *В. Гусейнов* (Нахичевань) **66, 67, 69, 71, 74**; *К. Данильченко* (Москва) **67, 70, 71**; *А. Диденко* (Краснодар) **67**; *М. Дьяченко* (Верхнеднепровск) **68**; *Э. Дяченко* (Андрушевка Житомирской обл.) **67, 71, 74**; *В. Ерпылев* (Ашхабад) **71, 73, 74**; *С. Ефимов* (Наманган) **72**; *М. Жабицкий* (Москва) **67**; *А. Заргарян* (Тбилиси) **74**; *Я. Захаревич* (Ташкент) **67**; *О. Захарченко* (Киев) **70**; *С. Золотарев* (Москва) **71, 74**; *В. Игнатов* (Москва) **67**; *И. Калика* (Киев) **70**; *Е. Калошин* (Москва) **67**; *А. Камалян* (Иджеван Арм. ССР) **67, 71**; *Г. Каплан* (Обнинск) **67, 69**; *П. Кирсанов* (Москва) **67**; *И. Клевчук* (с. Ставчаны Черновицкой обл.) **68**; *В. Клочков* (Челябинск) **67, 73**; *В. Кобылецкий* (Баку) **67, 68, 71, 74**; *В. Конев* (Ангарск) **67—70**; *Л. Копытковский* (Лунинец Брестской обл.) **67**; *И. Кормильченко* (Орджоникидзе) **67**; *С. Корнилов* (Калининград) **71, 74**; *С. Коршунов* (Монино Московской обл.) **67, 69, 71—73**; *Е. Кравец* (Москва) **74**; *Е. Красноперов* (Невельск Сахалинской обл.) **70**; *Т. Кулиев* (Баку) **71, 73, 74**; *Е. Ландман* (Ленинград) **71, 73**; *В. Лашин* (Гагарин) **67**; *А. Лейдерман* (Могилев-Подольский Винницкой обл.) **67, 70, 71, 74**; *Р. Леманн* (ГДР) **73**; *Д. Литвиненко* (Севастополь) **67, 69**; *М. Любич* (Харьков) **67, 69—71, 73, 74**; *Г. Люсов* (Тейково Ивановской обл.) **67**; *В. Мильман* (Минск) **71, 73, 74**; *Н. Михальцев* (Щелково Московской обл.) **70**; *Л. Михлин* (Курск) **73, 74**; *И. Морозов* (Горький) **67, 71, 73, 74, 75 а, б**; *П. Моставленский* (Алма-Ата) **71, 73, 74**; *Н. Мощук* (Новосибирск) **70, 71, 73, 74**; *А. Мучник* (Жданов) **68**; *А. Немировский* (Киев) **71**; *М. Нудельман* (Одесса) **67, 69, 71, 73, 74**; *О. Окунев* (Казань) **67, 71, 74**; *С. Охитин* (Оренбург) **71, 72**; *Е. Павленко* (Армавир) **74**; *И. Панин* (Ленинград) **67, 71—74 75а**; *Б. Певзнер* (Москва) **74**; *А. Плахов* (Москва) **71**; *А. Поблагуев* (Винница) **71, 73**; *В. Пойда* (с. Голятин Закарпатской обл.) **67, 68 70, 74**; *М. Половинник* (Мена Черниговской обл.) **67, 72**; *С. Пославский* (Харьков) **67, 71, 72**; *Н. Потапов* (Михайловка Волгоградской обл.) **68**; *Д. Поцхишвили* (Тбилиси) **73**; *В. Прасолов* (Ворошиловград) **73**; *М. Райтер* (Ленинград) **67, 69, 71, 73, 74**; *А. Рейбольд* (С. Соколовка Северо-Казахстанской обл.) **67**; *В. Романов* (Димитровград) **73**; *Л. Рубинштейн* (Калининград) **67, 71, 74**; *В. Свиридов* (п/о Рамонь Воронежской обл.) **67, 69, 71, 74**; *В. Семененко* (Ставрополь) **67, 69, 70**; *А. Семко* (Кременчуг Полтавской обл.) **67, 70**; *М. Ситников* (Москва) **71, 73**; *В. Слепой* (Фрунзе) **74**; *В. Смелянский* (Севастополь) **67, 68, 73, 74**; *Н. Сметанин* (Москва) **67**; *В. Смирнов* (Уфа) **68**; *С. Солнцев* (Киев) **67, 69, 70, 71, 73, 74**; *С. Соловьев* (Орел) **67, 68**; *М. Спиваковский* (Москва) **71, 73, 74**; *И. Старосельский* (Москва) **71**; *В. Тарасов* (Ленинград) **67, 73**; *К. Тевосян* (Абовян Арм. ССР) **72, 74, 75а**; *С. Тимошин* (Кировоград) **73**; *В. Ткачук* (Киев) **72—74**; *В. Ткачук* (Москва) **67, 69**; *А. Туровский* (Псков) **67, 69**; *И. Федяк* (Парница Ивано-Франковской обл.) **71**; *Ю. Философов* (Саратов) **71**; *И. Фомина* (Харьков) **71, 74**; *А. Хомич* (Брест) **67**; *М. Хорошин* (Ереван) **74**; *Т. Хусейнов* (Гамбулак Тадж. ССР) **70**; *И. Цукерман* (Ленинград) **73**; *А. Черебатов* (Омск) **67, 71**; *В. Черноков* (Кемерово) **71**; *В. Чурун* (Минск) **67**; *Е. Шефтель* (Чернигов) **71**; *М. Шлемов* (Тбилиси) **68**; *Г. Шмелев* (Ярославль) **73**; *Н. Шмырин* (Реж) **67**; *В. Шпаковский* (Пинск Брестской обл.) **71**; *В. Шпильрайн* (Москва) **67, 74**; *М. Щербина* (Харьков) **71, 73, 74**; *А. Эстерлис* (Тбилиси) **74**; *И. Юнус* (Харьков) **66, 67, 69, 71—74, 75а, б**; *Б. Юсин* (Москва) **67, 69, 70**; *А. Янович* (Котовск) **71**; *Б. Яцало* (с. Морочно Ровенской обл.) **67**.

Физика

Почти все читатели справились с задачами **Ф279** и **Ф287**. Правильные решения остальных задач прислали: *А. Авдеев* (Москва) **88, 90—92**; *Н. Агладзе* (Тбилиси) **78, 81, 82**; *Г. Айзин* (Брест) **78, 85, 88, 90, 92**; *Р. Акбаров* (Андижан) **78, 81, 82**; *С. Актершев* (Магнитогорск) **84**; *А. Алексеев* (ст. Выселки Краснодарского кр.) **78**; *Я. Аннамурадов* (Байрам-Али ТуркмССР) **88**; *Е. Антипов* (Кишинев) **82**; *М. Аронов* (Володарск Горьковской обл.) **82**; *И. Бабакулов* (Катта-Курган Самаркандской обл.) **78**; *О. Балабан* (п. Сосновое Ровенской обл.) **78**; *С. Балашов* (Москва) **82, 85**; *Р. Басыров* (д. Н. Каракитяны ТАССР) **82, 83, 85—88**; *В. Басманов* (Воронеж) **89**; *В. Бедняков* (Москва) **83**; *З. Бендукидзе* (Тбилиси) **82**; *В. Бессель* (Таллин) **81**; *Ю. Бляхер* (Душанбе) **83, 86, 88, 90—92**; *Ю. Богомолов* (Казань) **78, 81—83, 89—91**; *И. Борисов* (Одесса) **88, 91**; *С. Бороздин* (Новгород) **78**; *В. Борю* (Запорожье) **78, 81, 83—85, 88—92**; *А. Бушкова* (Степногорск) **78**; *Г. Витюкова* (Арысь) **85**; *С. Волков* (п. Галиный Магаданской обл.) **78**; *В. Гаврилов* (Камень-Каширский) **78**; *И. Галинников* (Волгоград) **78, 81, 83, 85, 86, 88, 90—92**; *М. Гедалин* (Тбилиси) **81, 88**; *А. Говяда* (Киев) **81**; *О. Годин* (Симферополь) **85, 88**; *А. Гончаров* (Воронеж) **78, 81, 83, 84, 86**; *И. Голдовский* (Брянск) **81, 83, 84**; *А. Голубенцев* (Саратов) **90, 92**; *А. Гордин* (п. Урень Горьковской обл.) **78**; *С. Горишний* (Таганрог) **78, 80, 81, 83, 88, 89, 92**; *Ю. Горовой* (Запорожье) **90**; *Г. Горлачев* (Белорецк) **85**; *В. Гребень* (д. Белоуша Брестской обл.) **86**; *А. Григорьев* (Волоколамск) **88, 92**; *В. Гуров* (п. Листвянка Рязанской обл.) **83, 90**; *Е. Демихов* (Усмань) **83, 88, 90**; *В. Деминенко* (Черкассы) **88, 90—92**; *А. Дмитриев* (Белорецк) **85**; *Ю. Докучаев* (Ленинград) **78, 81—83, 85, 88, 91**; *В. Дорохов* (Донецк) **82**; *А. Дробинин* (Евпатория) **78, 83, 85, 88, 91, 92**; *П. Золотарев* (Ташкент) **83**; *В. Зосимов* (Элиста) **78, 81, 84, 85**; *В. Зубов* (Кременчуг) **88, 91**; *В. Иващук* (Киев) **78, 81—86, 88—92**; *Л. Канторович* (Рига) **80, 82**; *А. Капивец* (Карпинск) **83**; *А. Карнаух* (Белгород) **81, 83—86, 89**; *В. Карнаухов* (Челябинск) **83, 85**; *Б. Кацман* (Мытищи) **83, 85**; *В. Ким* (Ташкент) **83, 85**; *А. Клочко* (Жуковский) **92**; *В. Кобрин* (Тбилиси) **91**; *Н. Кобылецкий* (Баку) **88, 92**; *Я. Коган* (Глазов) **83—85, 88, 89, 91**; *И. Коган* (Алма-Ата) **81**; *Р. Козак* (Винница) **83, 88**; *С. Козлова* (Семипалатинск) **83**; *С. Козлик* (Кривой Рог) **88**; *А. Конев* (Чебаркуль) **81, 88**; *В. Контарин* (Таллин) **78**; *С. Копыловский* (п. Знобь-Новгородское Сумской обл.) **78, 81—83, 88, 91, 92**; *С. Коршунов* (п. Монино Московской обл.) **78, 81, 82**; *С. Крекин* (Магадан) **82**; *М. Кроль* (Павловский Посад) **82, 85**; *А. Крохин* (Харьков) **78, 82, 88, 89**; *С. Кройтер* (Оргеев) **89, 92**; *В. Крутяков* (Волгоград) **85, 92**; *В. Куликовский* (Москва) **81**; *С. Лопуман* (Полтава) **91**; *С. Ляпин* (Петриков) **78**; *И. Майхрук* (с. Белобожница Тернопольской обл.) **81, 88, 91**; *А. Макаров* (Харьков) **82, 88, 92**; *В. Малышев* (п/п 75254 «А») **82**; *С. Мельник* (Харьков) **78, 82—85, 88—90**; *В. Моисеев* (Москва) **88, 92**; *С. Морозов* (Узловая) **91**; *А. Морозовский* (Киев) **83**; *А. Набатчиков* (Курск) **83**; *А. Нерозин* (Коростень) **83**; *А. Окунь* (Одесса) **83**; *Ю. Онищенко* (Люберцы) **78, 83—85, 88, 89, 91, 92**; *С. Онучин* (Пермь) **88—90, 92**; *Е. Павленко* (Армавир) **83**; *С. Пантелеймонов* (Хуст) **83, 91**; *В. Пахомов* (Днепропетровск) **78, 88, 91**; *Ю. Перфильев* (Саратов) **88**; *В. Пестунов* (Кировоград) **85**; *В. Плюснин* (Добрянка) **85**; *А. Поблагуев* (Винница) **78, 81—86**; *В. Покусов* (з/с Чандакский Кустанайской обл.) **83**; *М. Половинник* (Мена) **83, 90**; *Л. Полянский* (Челябинск) **88**; *А. Пресман* (Москва) **83**; *В. Прилепо* (Троицк) **85**; *Б. Рахманов* (Хазараспский р-н Хорезмской обл.) **85**; *С. Рашкеев* (Солнечногорск) **81—85, 88, 91, 92**; *Б. Рева* (Таллин) **81—83, 85, 86, 88**; *В. Решетняк* (Киев) **83, 85**; *Р. Ризнычук* (Львов) **82, 83**; *М. Розман* (Псков) **82, 83, 85, 86, 88—92**; *В. Ройна* (Познань, Польша) **92**; *А. Рудерман* (Ленинград) **83, 84**; *В. Рыжиков* (Ахтубинск) **81—83, 85, 86**; *В. Семененко* (Ставрополь) **78, 82, 85**; *А. Симонов* (Камешково) **85**; *Р. Сирота* (Харьков) **83, 85, 88—90**; *Я. Скир* (Минск) **83**; *Т. Скотницкий* (Варшава, Польша) **88, 89**; *Ю. Смоленцев* (Ессентуки) **83, 88, 91, 92**; *А. Смык* (Красноярск) **81**; *И. Соколов* (Москва) **78, 83, 85, 88, 90, 92**; *В. Солдатов* (Ногинск) **83**; *С. Сорокин* (Грозный) **88, 91**; *В. Спинеев* (Ворошиловград) **86**; *Л. Сургуладзе* (Тбилиси) **83, 85, 88**; *А. Суханов* (Москва) **82**; *В. Тарасов* (Ленинград) **85**; *В. Татаренко* (Киев) **78, 82, 83, 86**; *Л. Татунашвили* (Тбилиси) **88**; *А. Терехов* (Каховка) **88**; *Л. Требулева* (Ташкент) **78, 81, 82**; *А. Туровский* (Псков) **78, 81, 82**; *Б. Умурзаков* (Каскеленский р-н Алма-Атинской обл.) **83**; *Н. Федин* (Омск) **78, 82—86, 89, 90**; *В. Филиппов* (Балашиха) **78, 83**; *П. Фоменко* (Днепропетровск) **78, 82—85, 88, 91, 92**; *А. Хомич* (Брест) **78, 82, 88, 90—92**; *Л. Цимринг* (Горький) **78, 82, 84—86, 88—92**; *Г. Ципурский* (Сухуми) **83—87, 90**; *В. Цырюльников* (п/о Елхово-Озерное Ульяновской обл.) **78, 85**; *В. Чеканов* (Быхов) **85**; *Ю. Черныш* (Минск) **91**; *В. Чуяков* (Осиповичи) **91**; *А. Чухонцев* (п. Двуреченск Свердловской обл.) **83**; *С. Шапошников* (Артем) **85**; *Е. Шафирович* (Ногинск) **83, 85, 88**; *С. Шихарев* (ст. Раевская Краснодарского кр.) **81**; *Г. Шмелев* (Ярославль) **83, 87**; *С. Шофман* (Саратов) **82**; *О. Щербаков* (Линда) **81—86, 88—92**; *А. Юдин* (Ессентуки) **78, 83**; *А. Янович* (Котовск МолдССР) **83—85**.

Поправка

В статье «Задачи о воздушных шарах» (см. «Квант» № 1, 1975) допущена опечатка: в условиях задач №№ 1, 4 значения молекулярных масс приведены с размерностью *кг/кмоль*. Следует читать: «молекулярная масса воздуха 29», «молекулярная масса гелия 4».

ПРАКТИКУМ
АБИТУРИЕНТА

Правильная пирамида

В. К. Егерев, А. Г. Мордкович

Решению многих геометрических задач присущ характер искусственности, что дало основание немецкому философу прошлого века Артуру Шопенгауэру бросить геометрии упрек в использовании «доказательств-мышеловок». Действительно, решение геометрических задач содержит мало шаблонов и часто производит впечатление фокуса. Тем более важно знать тот небольшой арсенал «стандартных» приемов, которые все-таки используются при решении этих задач. О некоторых приемах уже шла речь на страницах нашего журнала (см. например, статью И. А. Кушнир «Метод вспомогательного элемента», «Квант», 1974, № 2). В этой статье рассказывается еще об одном таком приеме.

1. «Метод кастрюльки»

Начнем с небольшой притчи. Андрею объяснили, как сварить яйцо: «Сними с гвоздя кастрюльку, налей туда воды, положи яйцо, зажги газ, поставь кастрюльку на газовую плиту и сними через 5 минут после того, как закипит вода». Андрюша так и сделал, все хорошо получилось. Но как-то, проснувшись утром, Андрей увидел, что вода в кастрюльку уже налита и газ горит. Подумав, он погасил газ, вылил воду и повесил кастрюльку на гвоздик, а затем сделал так, как его учили.

Несмотря на кажущуюся несуразность такого поведения, метод возвращения к исходным данным задачи, которую мы умеем решать, является иногда наиболее рациональным. Назовем его «методом кастрюльки».

2. Соотношения между углами в пирамиде

На рисунке 1 изображена часть правильной n-угольной пирамиды $SABCD\ldots$, SH—высота, SK—апофема. Введем следующие обозначения:

α—угол между боковым ребром и плоскостью основания;

β—угол между боковой гранью и плоскостью основания;

γ—угол между смежными боковыми ребрами;

φ—угол между смежными боковыми гранями.

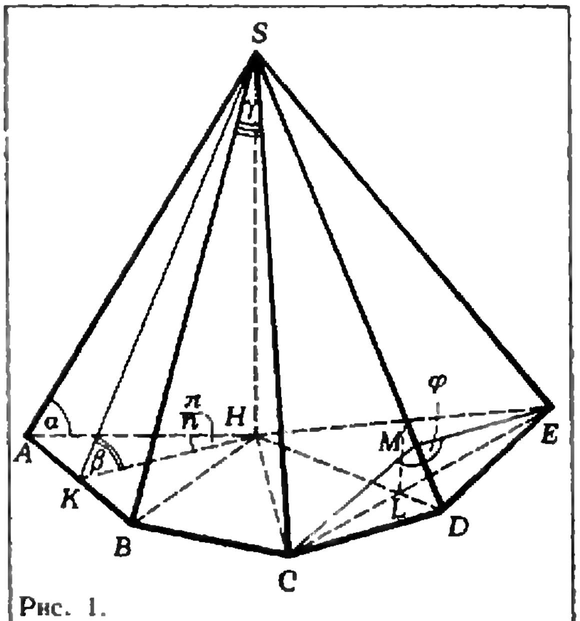


Рис. 1.

Углы	Соотношения	Область изменения углов	Связи между углами
$\alpha;\ \varphi$	$\sin\alpha = \operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}$ (1)	$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$	
$\alpha;\ \gamma$	$\cos\alpha = \sin\frac{\gamma}{2}/\sin\frac{\pi}{n}$ (2)	$0<\beta<\frac{\pi}{2}$	$\gamma<\pi-2\alpha$
$\alpha;\ \beta$	$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\beta\cdot\cos\frac{\pi}{n}$ (3)	$0<\gamma<\frac{2\pi}{n}$	$\alpha<\beta$
$\beta;\ \gamma$	$\cos\beta = \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}$ (4)	$\pi-\frac{2\pi}{n}<\varphi<\pi$	
$\beta;\ \varphi$	$\operatorname{tg}\beta = \dfrac{\sqrt{2}\cos\frac{\varphi}{2}}{\sqrt{-\cos\varphi-\cos\frac{2\pi}{n}}}$ (5)		$\varphi>\pi-2\beta$
$\gamma;\ \varphi$	$\sin\frac{\gamma}{2} = \dfrac{\sqrt{-\cos\varphi-\cos\frac{2\pi}{n}}}{\sqrt{2}\sin\frac{\varphi}{2}}$ (6)		

и

Если в правильной пирамиде известен один из этих углов, то можно найти остальные три. Шесть соотношений приведены в таблице. Докажем некоторые из них.

(1) $(\alpha;\ \varphi)$. Рассматривая треугольники LMC и LMD, получаем $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}=\frac{CL}{LM}$, $\sin\alpha=\frac{LM}{LD}$. Значит,

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\sin\alpha=\frac{CL}{LD}=\operatorname{tg}\angle CDL=$$

$$=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{n}\right)=\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}.$$

(2) $(\alpha;\ \gamma)$. Рассматривая треугольники AHS и AKS, получаем $\cos\alpha=\frac{AH}{AS}$, $\sin\frac{\gamma}{2}=\frac{AK}{AS}$. Значит,

$$\frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\alpha}=\frac{AK}{AH}=\sin\angle AHK=\sin\frac{\pi}{n}.$$

(3) $(\alpha;\ \beta)$. Рассматривая треугольники AHS и SHK, получаем $\operatorname{tg}\alpha=\frac{SH}{AH}$, $\operatorname{tg}\beta=\frac{SH}{KH}$. Значит, $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}=$

$$=\frac{KH}{AH}=\cos\angle AHK=\cos\frac{\pi}{n}.$$

Отметим некоторые следствия из этих формул.

Из (1) следует, что $\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}=\sin\alpha\times$ $\times\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{n}\right)$. Но $\sin\alpha<1$, значит, $\frac{\varphi}{2}>\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{n}$ или $\varphi>\pi-\frac{2\pi}{n}$.

Из (2) следует, что $\sin\frac{\gamma}{2}=\cos\alpha\sin\frac{\pi}{n}$. Но $\cos\alpha<1$, значит, $0<\frac{\gamma}{2}<\frac{\pi}{n}$ или $0<\gamma<\frac{2\pi}{n}$. Из этой же формулы вытекает, что

$$\frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}=\sin\frac{\pi}{n}<1,$$

то есть, $\frac{\gamma}{2}<\frac{\pi}{2}-\alpha$ или $\gamma<\pi-2\alpha$.

Из (3) следует, что $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}=\cos\frac{\pi}{n}<1$, откуда $0<\alpha<\beta$ (что вообще говоря, очевидно).

Как следствия формул (1), (2), (3) можно найти соотношения между γ и φ, β и φ, γ и β. Формулы (4) (6) докажите самостоятельно.

Рекомендуем читателю также вывести формулы (1)—(6) для правильной треугольной и четырехугольной пирамид, а затем проверить полученные результаты, подставляя в общие формулы значения $n=3$ и $n=4$. Это упражнение тем более полезно, что важно понять методику вывода, а не запоминать окончательные результаты. Умение быстро и четко выводить соотношения между углами в правильной пирамиде является ключом к решению многих задач. В основе решения этих задач как раз и лежит «метод кастрюльки», ниже на ряде задач мы покажем, как он «работает». Но прежде, чем переходить к задачам, введем ряд дополнительных обозначений для правильной пирамиды:

a — сторона основания,
h — высота пирамиды,
V — объем пирамиды,
S—площадь боковой поверхности,
$S_{\text{осн}}$—площадь основания,
R — радиус описанного шара,
r — радиус вписанного шара.

3. Вычисление объема пирамиды

Задача 1. *Найти V, зная a и α.*

Имеем $V=\frac{1}{3}S_{\text{осн}}\cdot h$, $S_{\text{осн}}=2n\times$ $\times S_{\Delta AKH}=2n\cdot\frac{1}{2}AK\cdot KH=\frac{na^2}{4}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}$,

$$h=AH\cdot\operatorname{tg}\alpha=\frac{a}{2\sin\frac{\pi}{n}}\operatorname{tg}\alpha,$$

откуда

$$V=\frac{na^3}{24\sin\frac{\pi}{n}}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}\cdot\operatorname{tg}\alpha. \qquad (7)$$

Задача 2. *Найти V, зная a и β.*

Мы уже умеем находить V, зная a и α. Применим «метод кастрюльки»: по формуле (3) перейдем от угла β к углу α («повесим кастрюльку на гвоздик»), а затем воспользуемся решением задачи 1. Тогда сразу получим ответ:

$$V=\frac{na^3}{24}\operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{n}\cdot\operatorname{tg}\beta.$$

Задача 3. *Найти V, зная a и γ.*

Воспользуемся тем же приемом, что и в предыдущей задаче. Из формулы (2) следует, что

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sqrt{\cos\gamma-\cos\frac{2\pi}{n}}}{\sqrt{2}\sin\frac{\gamma}{2}}.$$

Подставляя это выражение для $\operatorname{tg}\alpha$ в формулу (7), получим

$$V=\frac{na^3\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}\cdot\sqrt{\cos\gamma-\cos\frac{2\pi}{n}}}{24\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{\gamma}{2}}.$$

Задача 4. *Найти V, зная a и φ.*
Из формул (3) и (5) следует, что

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sqrt{2}\cos\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\pi}{n}}{\sqrt{-\cos\varphi-\cos\frac{2\pi}{n}}}.$$

Воспользовавшись формулой (7), получаем

$$V=\frac{\sqrt{2}\,na^3\operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{n}\cos\frac{\varphi}{2}}{24\sqrt{-\cos\varphi-\cos\frac{2\pi}{n}}}.$$

4. Вычисление площади боковой поверхности пирамиды

Наиболее просты случаи, когда известны a и β, a и γ. С рассмотрения этих случаев мы и начнем.

Задача 5. *Найти S, зная a и β.*

Воспользовавшись известным соотношением $S=\frac{S_{\text{осн}}}{\cos\beta}$, а также тем, что $S_{\text{осн}}=\frac{na^2}{4}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}$ (см. задачу 1), получим

$$S=\frac{na^2\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}}{4\cos\beta}. \qquad (8)$$

Задача 6. *Найти S, зная a и γ.*

«Методом кастрюльки» задача решается несложно: воспользовавшись формулами (4) и (8), получим

$$S = \frac{na^2 \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}}{4}.$$

Но, пожалуй, еще проще решить задачу непосредственно:

$$S = n\cdot S_{\Delta ASB} = n\cdot\frac{1}{2}AB\cdot SK =$$

$$= n\cdot\frac{1}{2}a\cdot\frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2} = \frac{na^2\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}}{4}.$$

Задача 7. *Найти S, зная a и α.*

Из формулы (3) следует соотношение $\cos\beta = \dfrac{\cos\frac{\pi}{n}}{\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha + \cos^2\frac{\pi}{n}}}$ (проверьте это!). Следовательно,

$$S = \frac{na^2\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha + \cos^2\frac{\pi}{n}}}{4\sin\frac{\pi}{n}}.$$

Задача 8. *Найти S, зная a и φ.*

Из формулы (5) следует, что

$$\cos\beta = \frac{\sqrt{-\cos\varphi - \cos\frac{2\pi}{n}}}{\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{n}}$$

(проверьте!). Воспользовавшись формулой (8), получим

$$S = \frac{\sqrt{2}\,na^2\cos\frac{\pi}{n}}{4\sqrt{-\cos\varphi - \cos\frac{2\pi}{n}}}.$$

5. Вычисление радиуса описанного шара

Задача 9. *Найти R, зная a и α.*

Как известно, около правильной пирамиды всегда можно описать шар, центр его O лежит в точке пересечения высоты SH пирамиды с перпендикуляром FO к боковому ребру, проведенным через середину F ребра AS (см. рис. 2). Тогда $\angle SOF = \angle SAH = \alpha$. Имеем $AS = \dfrac{AH}{\cos\alpha} = \dfrac{a}{2\sin\frac{\pi}{n}\cos\alpha}$; $R = OS = \dfrac{FS}{\sin\alpha} = \dfrac{AS}{2\sin\alpha}$;

$$R = \frac{a}{2\sin\frac{\pi}{n}\sin 2\alpha}. \qquad (9)$$

Задача 10. *Найти R, зная a и β.*

Из формулы (3) следует, что

$$\sin 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{2\operatorname{tg}\beta\cos\frac{\pi}{n}}{1+\operatorname{tg}^2\beta\cos^2\frac{\pi}{n}}.$$

Воспользовавшись формулой (9), получим

$$R = \frac{a\left(1+\operatorname{tg}^2\beta\cos^2\frac{\pi}{n}\right)}{2\sin\frac{2\pi}{n}\operatorname{tg}\beta}.$$

Задача 11. *Найти R, зная a и γ.*

Из формулы (2) следует, что

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{\cos\gamma - \cos\frac{2\pi}{n}}}{\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{n}}$$

(проверьте!), а $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha =$

$$= \frac{\sqrt{2}\sin\frac{\gamma}{2}\sqrt{\cos\gamma - \cos\frac{2\pi}{n}}}{\sin^2\frac{\pi}{n}}.$$

Значит,

$$R = \frac{a}{2\sin\frac{\pi}{n}\sin 2\alpha} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}\,a\sin\frac{\pi}{n}}{4\sin\frac{\gamma}{2}\sqrt{\cos\gamma - \cos\frac{2\pi}{n}}}$$

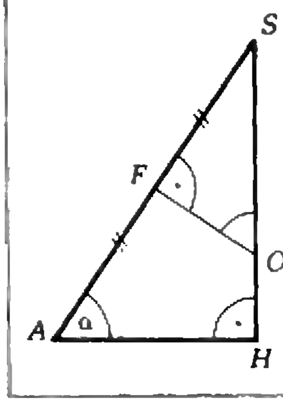


Рис. 2.

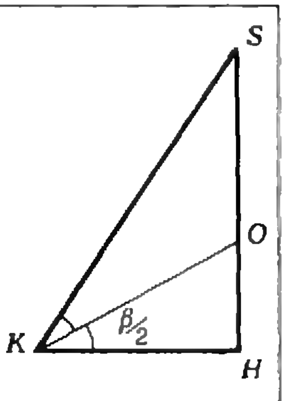


Рис. 3.

Формулу

$$R=\frac{\sqrt{2}\sin\frac{\varphi}{2}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}}{4\sqrt{-\cos\varphi-\cos\frac{2\pi}{n}}},$$

выражающую R через a и φ, докажите самостоятельно.

6. Вычисление радиуса вписанного шара

Как известно, в правильную пирамиду всегда можно вписать шар, его центр O лежит в точке пересечения высоты SH пирамиды с биссектрисой угла SKH (рис. 3). Поэтому проще всего вычисляется радиус вписанного шара в случае, когда задан угол β; с этого случая мы и начнем.

Задача 12. *Найти r, зная a и β.*

Имеем $r=OH=KH\cdot\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$;

$$r=\frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}. \qquad (10)$$

Задача 13. *Найти r, зная a и α.*

Из формулы (3) следует, что

$$\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=\frac{\sqrt{\cos^2\frac{\pi}{n}+\operatorname{tg}^2\alpha}-\cos\frac{\pi}{n}}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

Из формулы (10) теперь получаем

$$r=\frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=$$

$$=\frac{a\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}\left(\sqrt{\cos^2\frac{\pi}{n}+\operatorname{tg}^2\alpha}-\cos\frac{\pi}{n}\right)}{2\operatorname{tg}\alpha}.$$

Задача 14. *Найти r, зная a и γ.*

Из формул (4), (10) получаем

$$r=\frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}\cdot\sqrt{\frac{\sin\left(\frac{\pi}{n}-\frac{\gamma}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{n}+\frac{\gamma}{2}\right)}}.$$

Выражение r через a и φ найдите самостоятельно.

Упражнения

1. (МИФИ, 1973). Найти двугранный угол между основанием и боковой гранью правильной треугольной пирамиды, если двугранный угол между боковыми гранями этой пирамиды равен α.

2. (УДН, 1973). Двугранные углы при боковых ребрах правильной 4-угольной пирамиды равны α. Найти двугранные углы при ребрах основания.

3. (ЯПИ, 1973.) Высота правильной треугольной пирамиды равна h, а двугранный угол при боковом ребре равен 2α. Найти объем пирамиды.

4. (УГУ, 1973). Высота правильной треугольной пирамиды равна h, а расстояние от основания высоты до бокового ребра равно a. Определить двугранный угол между боковыми гранями пирамиды.

5. (МАТИ, 1973). Каждый из равных углов боковой грани правильной шестиугольной пирамиды равен φ. Расстояние от середины высоты до бокового ребра равно l. Найти высоту пирамиды.

6. (МАИ, 1973). Высота правильной 4-угольной пирамиды равна h, а плоский угол между смежными боковыми гранями равен φ. Найти площадь боковой поверхности.

7. (УДН, 1973). Сторона основания правильной 4-угольной пирамиды, описанной около шара радиуса R, равна a. Найти полную поверхность пирамиды.

8. (НГУ, мехмат, 1969). Двугранный угол при боковом ребре правильной 4-угольной пирамиды равен α, радиус вписанного шара R. Найти полную поверхность пирамиды.

9. (ЯПИ, 1973). В шар радиуса R вписана правильная 4-угольная пирамида, у которой плоский угол при вершине равен α. Найти объем пирамиды.

10. (Из писем читателей) Найти объем пирамиды $SABC$, если высота наклонена к плоскости основания под углом 30°, $\triangle ABC$—равносторонний, в него вписана окружность радиуса r, причем $SC=OC$ и $SO\perp BA$.

Г. М-ва

Московский институт нефтехимической и газовой промышленности

Наш институт известен во всех уголках страны, потому что профессии нефтяника и газовика едва ли не самые популярные в наше время. Освоение новых месторождений нефти и газа открывает широкие возможности перед выпускниками МИНХ и ГП, крупнейшего высшего учебного заведения страны по подготовке инженеров и научных работников для нефтяной, газовой, нефтехимической промышленности, строительства нефтегазопроводов.

Институт был создан в 1930 году на базе Горной академии и сейчас он имеет шесть факультетов: газонефтяной геологии, геофизики и геохимии; газонефтепромысловый; химико-технологический; механический; автоматики и вычислительной техники; инженерно-экономический. Кроме того, имеются вечерний и заочный факультеты.

Специалисты, окончившие наш институт, занимаются разведкой, проектированием и эксплуатацией нефтяных и газовых месторождений, исследованием газовых и газоконденсатных скважин и пластов, процессами переработки нефти и газа, проектируют крупнейшие нефтяные и газовые магистрали, работают в организациях, осуществляющих проектирование, пуск и наладку машин и оборудования промыслов, компрессорных станций, аппаратов химических производств, участвуют в разработке проблем нефтегазовой геологии, экономики, радиационной химии. Всего в институте можно получить около 20 различных специальностей.

В настоящее время инженер должен быть в курсе самых последних достижений научно-технической революции, понимать и использовать математические методы и экономико-математические модели. Учебные планы специальностей «Автоматизированные системы управления», «Автоматика и телемеханика» и некоторых других включают такие современные дисциплины, как математические основы кибернетики, системотехника, теория вероятностей и математическая статистика, исследование операций. Студенты, специализирующиеся по «Прикладной математике», изучают теперь линейную алгебру, функциональный анализ, теорию функций комплексного переменного, вероятностные процессы и другие глубокие разделы высшей математики.

В институте специально для студентов создан вычислительный зал. Они осваивают здесь вычислительную технику и применяют ее в курсовом и дипломном проектировании, а также в научных работах.

Выпускники института из числа наиболее одаренных студентов продолжают обучение в аспирантуре. Набор в аспирантуру проводится каждый год по целому ряду специальностей, некоторые из них связаны с технической кибернетикой и вычислительной техникой.

В институте имеется вычислительный центр, где решаются задачи научно-исследовательского характера. Электронно-вычислительные машины применяются также для контроля знаний студентов. В последние годы обработка всех результатов вступительных экзаменов и зачисление абитуриентов производятся с помощью ЭВМ.

Поступающие сдают по математике письменный и устный экзамены, по физике — устный экзамен. На химико-технологическом факультете письменного экзамена по математике нет. Познакомьтесь с образцами вариантов по математике и задач по физике, предлагавшихся на экзаменах в 1974 году.

Математика

Вариант 1

1. Два курьера одновременно выходят навстречу друг другу из пунктов A и B и через некоторое время встречаются. Если бы первый вышел на 1 час раньше, а второй на 0,5 часа позже, то они встретились бы на 18 мин раньше. Если бы первый вышел на 0,5 часа позже, а второй на 1 час раньше, то место встречи передвинулось бы на 5600 метров. Какова скорость каждого курьера?

2. Решить уравнение

$$x + \lg(1 + 2^x) = x \lg 5 + \lg 6.$$

3. Решить уравнение

$$4 \sin^4 2x + \sin^2 4x = 2.$$

4. Основанием пирамиды служит прямоугольный треугольник с острым углом α. Этот треугольник вписан в основание конуса. Вершина пирамиды совпадает с серединой одной из образующих конуса. Найти отношение объема конуса к объему пирамиды.

Вариант 2

1. Какое двузначное число меньше суммы квадратов его цифр на 11 и больше их удвоенного произведения на 5?

2. Решить неравенство

$$\log_2 \log_3 \frac{x+2}{x-2} < \log_{\frac{1}{2}} \log_{\frac{1}{3}} \frac{x-2}{x+2}.$$

3. Решить уравнение

$$\cos x - 2 \sin\left(\frac{3}{2}\pi - \frac{x}{2}\right) = 3.$$

4. Основанием прямой призмы служит равнобочная трапеция с острым углом α. Радиус вписанной в основание окружности равен R. Определить объем призмы, если ее высота равна H.

Вариант 3

1. Два пешехода вышли одновременно навстречу друг другу из пунктов A и B. Каждый идет с постоянной скоростью без остановок и, придя в свой конечный пункт, немедленно поворачивает обратно. Когда они встретились во второй раз, то оказалось, что первый прошел на 4 *км* больше, чем второй. Продолжая идти дальше, первый пешеход прибыл в A через 1 час после второй встречи, а второй пешеход в B — через 2,5 часа после этой встречи. Какова скорость каждого пешехода?

2. Решить неравенство $(0,2)^{\frac{2x-3}{x-2}} > 5.$

3. Решить уравнение

$$\cos 2x + \sin 3x + \sin 5x = 4 \cos x - 1.$$

4. Цилиндр пересечен плоскостью, параллельной оси и отсекающей от окружности основания дугу α $(\alpha < \pi)$. Диагональ сечения равна l и составляет с плоскостью основания угол β. Найти объем цилиндра.

Физика

1. Вагон массой 20 *т*, движущийся по горизонтальному пути, догоняет другой вагон массой 30 *т* и сцепляется с ним, так что дальше вагоны двигаются вместе. При этом суммарная механическая энергия вагонов изменяется на $6 \cdot 10^3$ *дж*. На какую величину скорость первого вагона превышала перед сцеплением скорость второго вагона?

2. Спутник летит по круговой орбите вокруг Земли. Какова его линейная скорость, если на той высоте, где летит спутник, сила тяжести в n раз меньше, чем на поверхности Земли?

3. Два упругих шара движутся навстречу друг другу, причем скорость одного из них (более тяжелого) в α раз превышает скорость другого. После удара более массивный шар остановился. Каково отношение масс шаров?

4. Камень брошен с земли под углом 30° к горизонту. Кинетическая энергия камня в верхней точке траектории 45 *дж*. Чему равна в этой точке потенциальная энергия камня? Сопротивлением воздуха пренебречь.

5. Трамвай массой 20 *т* проходит с одинаковой скоростью по двум участкам пути — выпуклому и вогнутому (с одинаковым радиусом 100 *м*), развивая при этом одинаковую механическую мощность 25 *квт*. На вогнутом участке давление трамвая на рельсы на $4 \cdot 10^4$ *н* больше, чем на выпуклом. Какова сила тяги двигателя трамвая?

6. Первая космическая скорость у поверхности некой сферической планеты составляет 1 *км/с*. Чему равна средняя плотность вещества этой планеты, если ее поперечник равен $3{,}75 \cdot 10^6$ *км*²?

7. В сосуде с жидкостью падает (без начальной скорости) шарик, плотность которого в 4 раза больше плотности жидкости. Другой шарик всплывает со дна этого сосуда за время, в $\sqrt{3}$ раз большее времени падения первого шарика. Во сколько раз плотность всплывающего шарика меньше плотности жидкости?

8. В поле неподвижного положительного точечного заряда 10^{-9} *к* по направлению к нему движется положительный ион массой 10^{-26} *кг* с зарядом $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ *к*. Когда скорость иона составляет 10^5 *м/с*, его кинетическая и потенциальная энергии равны. На какое минимальное расстояние ион приблизится к заряду?

9. В плоском конденсаторе с разностью потенциалов на обкладках 4 *кв* от пластин отделяются и в поле конденсатора ускоряются навстречу друг другу одновременно с пластинами заряженные частички (с зарядами 10^{-10} *к* и $-2 \cdot 10^{-9}$ *к*). Чему равна кинетическая энер-

гия положительной частички в момент соударения с другой частичкой, если у той кинетическая энергия в этот момент $6 \cdot 10^{-8}$ *дж*? Не учитывать взаимодействия частичек между собой и сопротивления движению.

10. В плоском конденсаторе толщиной 2 *см*, заряженном до 1 *кв*, от положительной пластины A по направлению поля без начальной скорости движется частица с зарядом 0,1 *нк*. Когда она прошла некоторое расстояние, полярность пластин конденсатора была резко изменена на противоположную. Когда частица все же достигла пластины B, она обладала кинетической энергией $6 \cdot 10^{-8}$ *дж*. Какое расстояние прошла частица к моменту изменения полярности пластин?

11. Электродвигатель работает от источника энергии с напряжением 120 *в*. При изменении режима работы двигателя сила тока в его обмотке увеличилась на 3 *а*, а к. п. д. двигателя уменьшился на 5%. Найти сопротивление обмотки двигателя.

12. Электрической лебедкой поднимается погруженная в воду бетонная плита объемом 0,5 $м^3$ (плотность бетона в 2,2 раза больше плотности воды). Двигатель лебедки работает при напряжении 500 *в* и имеет сопротивление обмотки 20 *ом*. Какой ток течет по обмотке двигателя, если скорость равномерного подъема плиты 0,5 *м/с*? Сопротивление движению не учитывать.

13. Какое напряжение приложено к отрезку медной проволоки диаметром 0,8 *мм*, если в ней содержится 10^{25} свободных электронов, имеющих среднюю скорость направленного движения 3,14 *мм/с*? Удельное сопротивление меди — $1{,}7 \cdot 10^{-8}$ *ом·м*.

14. В осколок тонкостенной стеклянной сферической колбы с радиусом кривизны 10 *см* налили прозрачную жидкость. С помощью полученной линзы действительное изображение предмета, помещенного над ней на расстоянии 1 *м*, получилось уменьшенным в 5 раз. Каков показатель преломления жидкости?

15. Чувствительность сетчатки глаза к желтому свету (0,6 *мкм*) составляет $3{,}3 \times 10^{-18}$ *вт*. Сколько фотонов должно ежесекундно поглощаться сетчаткой, чтобы создавалось ощущение восприятия света?

Л. К. Белопухов,
М. Г. Сухарев

Советы начинающим репетиторам

(см. с. 43)

Не страшно, что в школе одно упоминание о биноме Ньютона вызывало у вас панический ужас. Математику сейчас сдают даже на гуманитарных факультетах, и поэтому из этой царицы наук вы сможете извлечь царскую прибыль.

И второе. Для платных уроков весьма удобно на летний период снять три-четыре квартиры в разных концах города. Это во-первых, расширит географию учеников и, во-вторых, создаст определенные трудности для фининспектора, желающего нанести вам визит.

Сколько брать с клиента

Начинающие репетиторы, как правило, назначают довольно низкую плату за урок. Типичная и поучительная ошибка! В результате у родителей легко могут закрасться подозрения относительно вашей квалификации. Чем выше такса, тем охотнее они доверят вам своих чад! Показателен следующий практический пример. Репетитор N начал свою деятельность с 2 руб за час. В дальнейшем цена урока непрерывно увеличивалась: 3, 5, 10, 15, 20 руб за час. Примечательно, что и число абитуриентов неуклонно росло! Когда дело дошло до 25 руб, у N несколько пошатнулось здоровье, и он вынужден был перейти на менее оплачиваемую работу. Однако спортивный интерес сохранился до сих пор — а сколько же все-таки способны заплатить любящие родители за один час общения с их ребенком?

И все же не советуем зарываться. Это может лишить вас некоторых недостаточно платежеспособных клиентов. Не надо скалыжничать. При умеренном подходе вы сохраните основную клиентуру и сами не останетесь в накладе.

(*Окончание см. на с. 70*)

Спрашивайте — отвечаем

Мы получили письмо от читателя Л. Скороходько из города Киева. В нем он спрашивает:
«...Посоветуйте, пожалуйста, что и как надо читать по программе восьмого класса, чтобы научиться решать любые задачи? Где можно достать такие книги?..»
По нашей просьбе на вопросы Л. Скороходько отвечает член редколлегии журнала «Квант» член-корреспондент АПН СССР заслуженный учитель школы РСФСР Семен Исаакович Шварцбурд.

Все зависит от того, какие задачи иметь в виду. Теория, примеры, упражнения и задачи, дающиеся в учебных пособиях для массовой школы, направлены в основном на усвоение обязательной программы. Среди этих задач встречаются, правда, и более сложные, обязательные не для всех учащихся; считается, что такие задачи должны решать сильные ученики, интересующиеся математикой и способные к ней. Но чтобы решать даже эти сложные задачи из задачника, не нужно никаких дополнительных знаний сверх обязательной школьной программы. Так что если хотите решать любые задачи из школьного задачника, выучите как следует школьный учебник! Разумеется, я не имею в виду простое заучивание наизусть теорем и доказательств. Теоремы и доказательства не достаточно выучить — их необходимо понять.

Но если вы интересуетесь математикой, хотите заниматься ею серьезно, хотите решать «нешкольные» задачи, то школьных учебников уже мало — нужны дополнительные книги. Таких книг очень много: изданы всевозможные учебники и задачники для внеклассных и факультативных занятий, для работы классов с углубленным изучением математики, для техникумов, имеющих математические специальности. Можно было бы привести здесь поистине огромный список существующей литературы. Но будет ли это ответом на вопрос письма?

Книги по математике — очень важный источник обучения, но пользоваться ими нужно умело.

Математическую литературу нужно читать «с карандашом в руке». Задачи, встречающиеся в тексте, непременно нужно попробовать решить самостоятельно. Решение, приводящееся в книге, можно посмотреть, если задача никак не получается, или когда задача уже решена — сравнить свое решение с «книжным», проверить себя и, возможно, узнать что-нибудь новое. Только такое активное чтение принесет вам действительную пользу. Кроме того, развитию математического творчества сильно способствует общение с товарищами на внеклассных и факультативных занятиях, участие в математических кружках, олимпиадах, математических вечерах, викторинах, выступления с докладами, подготовка рефератов и многое другое. Но первостепенную роль при изучении любого предмета, особенно математики, играют упорство, трудолюбие и систематические занятия, какими бы способностями вы не обладали. Ведь в процессе работы способности развиваются, и наоборот, рано проявившиеся способности могут не развиваться и даже совсем растеряться, если не заниматься постоянно (кстати, такое случается даже с победителями олимпиад).

Несомненно, что статьи, публикуемые в «Кванте», могут оказать большую помощь при самостоятельном и углубленном изучении математики. Некоторые из статей можно использовать также для факультативных занятий. Кстати, несколько слов о факультативах по математике — ведь они, как уже отмечалось, играют немалую роль в повышении математической культуры. К настоящему времени уже имеются сложившиеся факультативные курсы по математике, для них утверждены программы, изданы пособия. Математические факультативы получили большое распространение среди школьников VII—X классов. На них учащиеся знакомятся с материалом, выходящим за рамки обязательной школьной программы, учатся решать интересные и трудные задачи. Сейчас школы переходят на новую программу по математике. Традиционный школьный курс претерпевает коренные изменения — отныне он будет включать в себя многие вопросы, которые раньше изучались только на факультативах. Школьный курс математики будет совершенствоваться и в дальнейшем; одним из источников его обновления и обогащения является тематика именно факультативных и внеклассных занятий.

Мы надеемся, что ответ Семена Исааковича будет полезен тем, кто решил заниматься математикой. Мы рекомендуем вам познакомиться с книгами из следующих серий: «Библиотека физико-математической школы», «Библиотека математического кружка», «Пособия для факультативных занятий по математике». Книги этих серий выходят довольно регулярно. Те из них, которые уже вышли, попытайтесь достать в библиотеке. О новых книгах мы обычно сообщаем заранее в нашем журнале. Много хороших задач помещает журнал «Математика в школе».

Советы начинающим репетиторам

(см. с. 68)

Скажем прямо, проблема вознаграждения репетиторов исследована еще довольно слабо. Упомянем одну из сравнительно недавних находок. Урок оценивается астрономической цифрой, но зато в случае провала клиента вся плата возвращается ему обратно. Эта вполне разумная идея требует весьма тщательного и умелого подбора кадров. Надо обладать острым чутьем, чтобы из множества охотников поживиться за ваш счет отобрать таких, которые в состоянии шутя и без всякой помощи сдать экзамен сразу в аспирантуру.

В заключение несколько слов об использовании средств, накопленных честным трудом. Разумеется, прежде всего здесь следует руководствоваться собственными вкусами и слабостями. Отметим, однако, что почти каждый подвижник, посвятивший себя в летние месяцы репетиторской деятельности, осенью приобретает легковую машину. Хорошо оборудованный летний приют также далеко не самый худший способ реализации вашего педагогического достижения.

Желаем вам больших творческих успехов в славном и благородном труде!

Е. Я. Гик

«Квант» для младших школьников

Задачи

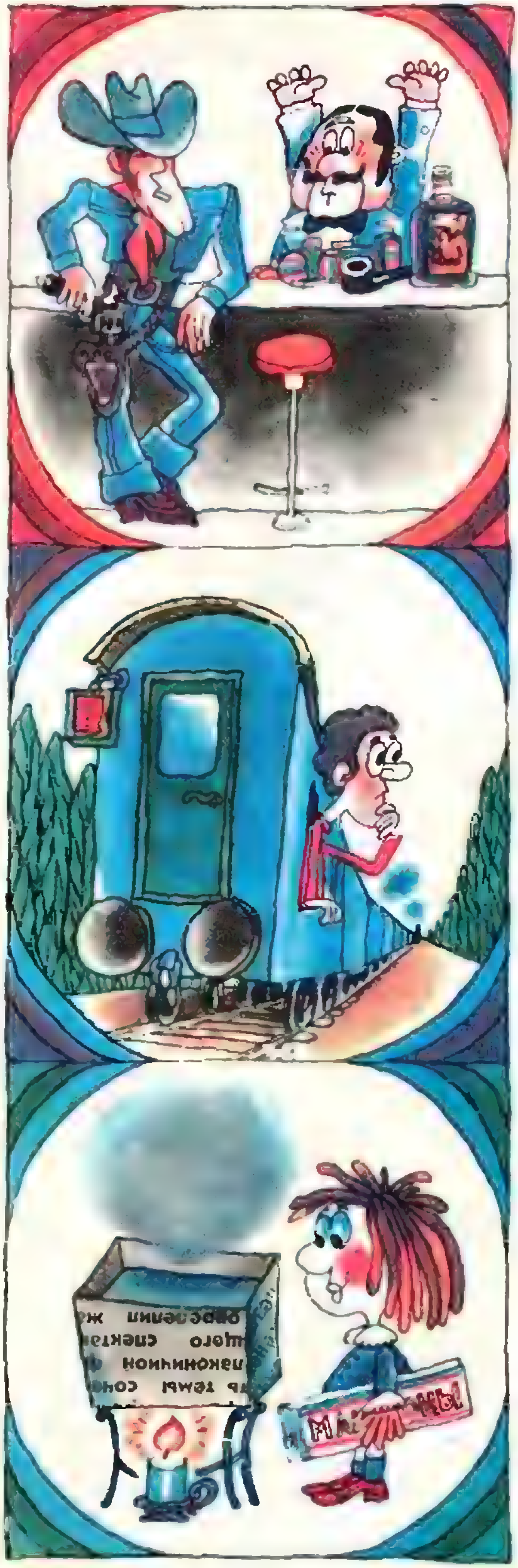
1. Ковбой Джо зашел в бар и попросил у бармена бутылку виски за 3 доллара, трубку за 6 долларов, 3 пачки табаку и 9 коробок непромокаемых спичек, цену которых он не знал. Бармен потребовал 11 долларов 80 центов (в одном долларе 100 центов), на что Джо вытащил револьвер. Бармен сосчитал снова и исправил ошибку. Как Джо догадался, что бармен пытался его обсчитать?

2. Когда мы смотрим из окна движущегося вагона, то видим, что все предметы за окном «бегут» навстречу поезду; чем дальше предмет, тем медленнее он «бежит». Почему?

3. Двое часов начали и кончили бить одновременно. Первые бьют через каждые две секунды, вторые — через каждые 3 секунды. Всего было насчитано 13 ударов (слившиеся удары воспринимались как один). Сколько времени прошло между первым и последним ударом?

4. Если сделать из бумаги коробочку, налить в нее воды и подогревать воду на пламени свечи, то можно довести воду до кипения, а бумага гореть не будет. Почему?

5. В мешке содержится 9 *кг* крупы. Как при помощи чашечных весов с гирями в 50 *г* и 200 *г* (по одной штуке) распределить всю крупу по двум пакетам: в один — 2 *кг*, в другой — 7 *кг*. При этом разрешается произвести только три взвешивания.



Рисунки Э. Назарови

Для чего нужны проценты?

А. П. Савин

Много ли соли в морской воде? Этот вопрос можно понимать по-разному. Например, сколько весит вся соль, растворенная в морях и океанах. А можно и так: сколько содержится соли в ведре морской воды? Чтобы ответить на первый вопрос, достаточно знать ответ на второй и еще узнать, сколько ведер воды содержится в морях и океанах.

Жители приморских городов и поселков смогут ответить и на второй вопрос. Для этого достаточно набрать ведро морской воды, поставить его на огонь и греть, пока вся вода не выкипит, а затем взвесить оставшуюся на дне соль. Можно ли утверждать, что у соседа получится столько же? Видимо нет. Его ведро может оказаться больше или меньше, налито оно может быть более или менее полно, в результате сосед будет выпаривать другое количество воды, а потому останется другое количество соли.

Таким образом, наша мера солености морской воды — количество граммов соли на ведро воды — оказалась неудачной. Возьмем другую меру — количество граммов соли на килограмм раствора. Для этого нужно до кипячения раствор взвесить, а потом вес полученной соли разделить на вес раствора. Пусть вес раствора 8,4 *кг*, а вес соли 21 *г*. Тогда получаем ответ:

$$\frac{21}{8,4} = \frac{5}{2}$$

грамма соли на килограмм раствора. Если опыт повторить, то опять получится почти такая же величина.

Но почему число граммов в килограмме, а не центнеров в тонне или английских фунтов в пуде? Давайте-ка будем считать число граммов в грамме! Тогда тот же ответ получится, если мы будем считать число тонн соли в тонне раствора или пудов в пуде.

Итак, поскольку в килограмме содержится 1000 граммов, то и ответ получится в 1000 раз меньший:

$$\frac{5}{2000} = \frac{1}{400}.$$

Подходящая мера получена, но запись . . . Скажите, какое число больше: $\frac{11}{1002}$ или $\frac{12}{1090}$? Сразу и не скажешь, нужно считать. Куда легче сравнивать десятичные дроби! Дробь 0,01097 меньше, чем 0,01101, потому что число единиц, десятых и сотых у них одинаково, а число тысячных у второй больше. Удобно? Конечно.

Ну, что ж, будем записывать результат не обыкновенной, а десятичной дробью. А дальше. . .

Стойте, скажет нетерпеливый читатель, зачем столько премудростей ради какой-то морской воды. Взять да и попробовать на вкус — соленая или не очень. Хорошо, отвечу я, а нужно ли точно знать содержание металла в руде, жира в молоке, химических веществ в лекарстве? . . Вот то-то. А ведь задача та же самая.

Итак, мы договорились записывать ответ в виде десятичной дроби. А с какой точностью? С помощью карандаша и бумаги мы можем делить даже до миллиардных долей, но откуда взялись сами числа? Если весы в магазине показывают 520 *г*, то на самом деле предмет может весить и 515, и 524 грамма. А двести — триста лет назад точность весов была еще меньше. Поэтому верными можно было считать лишь первые одну-две цифры, а потому и величину содержания одного вещества в другом имело смысл рассматривать с точностью до первых двух цифр: 0,27; 0,64; 0,37 и т. д., то есть 27 сотых, 64 сотых, 37 сотых.

Вот мы и пришли к процентам, потому что в переводе с латыни «процент» — сотая часть. Была придумана и специальная запись 27%, 64%, 37%. Знак %, говорят, возник из-за ошибки наборщика, у которого сломалась литера, в результате чего возник этот причудливый знак, признанный затем всем миром.

Запись отношений стала удобнее, исчезли ноль и запятая, а символ % сразу указывает, что перед нами относительная величина, а не граммы, литры, рубли или метры.

Проценты были известны индусам еще в V веке нашей эры. Это не удивительно, потому что в Индии с давних пор счет велся в десятичной системе. В Европе десятичные дроби появились на 1000 лет позже, их ввел бельгийский ученый Симон Стевин. Он же в 1584 году впервые опубликовал таблицу процентов.

Введение процентов оказалось удобным не только для оценки содержания одного вещества в другом. В процентах стали измерять изменение производства товаров, денежный доход . . . Что только не измеряют в процентах, даже двоечников в школе!

Со временем люди научились извлекать из вещества его компоненты, которые составляют тысячные доли от веса самого вещества. Тогда, чтобы не вводить нули и запятую, то есть не писать 0,6%, ввели новую величину — «промилле» — тысячную долю, которую обозначили так: ‰, и вместо 0,6% стали писать 6‰. Однако эта величина привилась только в тех областях науки и техники, где имеют дело с малыми величинами, а необходимость и появившаяся возможность считать точнее привели к тому, что счет стал вестись до десятых и сотых долей процента. Нередко можно видеть и в технической литературе, и на страницах газет записи вида 27,4%; 6,35%. Выражение величин в процентах стало для всех привычным, однако на классном собрании лучше сказать: «Сережа Федотов стал двоечником», чем «Число двоечников в нашем классе за полугодие увеличилось на 3,3%».

А теперь несколько задач на проценты.

1. Арбуз весил 20 *кг*, а сухое вещество в нем составляло 1%. Через некоторое время арбуз усох, и сухое вещество стало составлять 2%. Сколько стал весить арбуз?

2. Множимое увеличили на 10%, а множитель уменьшили на 10%. Как изменилось произведение?

3. Цену на товар уменьшили на 10%, а потом еще на 10%. Стал бы он дешевле, если его цену сразу снизили бы на 20%?

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

К статье «Масса и энергия в теории относительности»

1. Подставим выражение для m из формулы (1) в (2) *) и возведем обе части равенства в квадрат. Разрешая полученное равенство относительно v^2, находим

$$v^2=\frac{p^2}{m_0^2c^2+p^2}.$$

Подставляя это выражение снова в формулу (1) и принимая во внимание, что $E=mc^2$, получаем

$$E=c\sqrt{m_0^2c^2+p^2}.$$

Поскольку при $a\ll 1$ $\sqrt{1+a}\approx 1+\frac{a}{2}$, то при $p\ll m_0c$

$$c\sqrt{m_0^2c^2+p^2}=m_0c^2\sqrt{1+p^2/m_0^2c^2}\approx m_0c^2\left(1+\frac{p^2}{2m_0^2c^2}\right).$$

Поскольку энергия покоя $E_0=m_0c^2$, получим

$$E=E_0+\frac{p^2}{2m_0}.$$

Хотя второй член мал по сравнению с первым, отбросить его нельзя, так как именно он зависит от импульса.

При $p\gg m_0c$ имеем

$$\sqrt{m_0^2c^2+p^2}\approx p\left(1+\frac{1}{2}\frac{m_0^2c^2}{p^2}\right),$$

откуда следует, что

$$E\approx pc+\frac{1}{2}\frac{m_0^2c^3}{p}\approx pc.$$

В этом случае энергия оказывается пропорциональной величине импульса.

2. Полагая в формуле (2) $v=c$ и учитывая, что $m=E/c^2$, получаем линейную зависимость энергии от импульса

$$E=pc,$$

где p — абсолютное значение вектора **p**. Формулу (1) в этом случае лучше переписать в виде $m_0=m\sqrt{1-v^2/c^2}$. Отсюда следует, что для фотона масса покоя равна нулю. Из результата решения задачи 1 следует, что энергия пропорциональна импульсу у всех частиц, масса покоя которых равна нулю (к ним относятся кроме фотонов еще нейтрино).

3. Если учесть, что

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\approx\frac{1}{1-\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}}\approx 1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2},$$

то

$$T=m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}-1\right)\approx\frac{1}{2}m_0v^2.$$

4. Поскольку $\frac{v}{c}\ll 1$, можно использовать приведенные в условии задачи формулы приближенных вычислений. С точностью до членов v^4/c^4 включительно (это означает, что члены, включающие v^6/c^6, отбрасываются) получаем

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\approx\frac{1}{1-\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}-\frac{1}{8}\frac{v^4}{c^4}}\approx 1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}+\frac{1}{8}\frac{v^4}{c^4}+\frac{1}{4}\frac{v^4}{c^4}=1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}+\frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4},$$

$$T=m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}-1\right)\approx\frac{m_0v^2}{2}+\frac{3}{8}\frac{m_0v^4}{c^2}.$$

Первый член в правой части этого выражения равен классической кинетической энергии, второй представляет собой релятивистскую поправку. Их отношение равно $\frac{3}{4}\frac{v^2}{c^2}\approx 0{,}53\cdot 10^{-9}$ для рассматриваемого примера. Поскольку $\frac{m_0v^2}{2}\approx 32\cdot 10^{10}$ *дж*, то релятивистская поправка к энергии равна приблизительно 170 *дж*. Эта величина сама по себе не мала, но она исчезает на фоне гигантской кинетической энергии космического корабля.

---

*) Номера формул относятся к тексту статьи.

5. Заряженная частица в однородном магнитном поле движется по окружности, радиус которой R обратно пропорционален отношению заряда к массе:

$$R = \frac{mv}{eB},$$

где B — индукция магнитного поля, e — заряд частицы. Таким образом, в нерелятивистской механике этот радиус должен неограниченно возрастать пропорционально скорости v. Заряд e не зависит от скорости, но масса в релятивистской механике растет в соответствии с формулой (1). Поэтому

$$R = \frac{m_0 v}{eB\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Полагая, что $\frac{v}{c} = 1 - \delta$, где $\delta \ll 1$, получим при скоростях v, близких к c,

$$R = \frac{m_0 c}{eB} \frac{1-\delta}{\sqrt{1-(1-\delta)^2}} = \frac{m_0 c}{eB} \frac{1-\delta}{\sqrt{2\delta - \delta^2}}.$$

Отбрасывая малые поправки в числителе и знаменателе, находим

$$R \approx \frac{m_0 c}{eB} \frac{1}{\sqrt{2\delta}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{m_0 c}{eB} \frac{1}{\sqrt{1 - v/c}}.$$

Таким образом, при $v \to c$ радиус окружности, по которой движется частица, неограниченно возрастает пропорционально $\frac{1}{\sqrt{1 - v/c}}$.

К статье «Расстояние между центроидами двух систем точек»

1. Вершины правильного многоугольника $A_1A_2 \ldots A_n$ принимаем за первую систему точек, а взятую на окружности точку M — за вторую систему. Центроидом первой системы является центр O окружности, описанной около многоугольника, а центроидом второй системы — сама точка M. Применяя формулу (9) (см. с. 42), получим

$$|OM|^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |MA_i|^2 - \frac{1}{n^2}\sum_{i<j} |A_iA_j|^2,$$

где $|OM| = R$ — радиус описанной окружности. Отсюда

$$\sum_{i=1}^{n} |MA_i|^2 = nR^2 + \frac{1}{n}\sum_{i<j} |A_iA_j|^2,$$

что и требовалось доказать.

2. Вершины правильного n-угольника $A_1A_2 \ldots A_n$ принимаем за первую систему точек, а центр описанной около него окружности — за вторую систему.

Так как расстояние между центроидами равно нулю, то из формулы (9) (с. 42) имеем

$$0 = \frac{1}{n} \cdot nR^2 - \frac{1}{n^2}\sum_{i<j} |A_iA_j|^2.$$

Отсюда $\sum\limits_{i<j} |A_iA_j|^2 = n^2R^2$, что и требовалось.

3. Расстояние между центроидами данных систем точек A, B, C и A_1, B_1, C_1 равно нулю. Поэтому утверждение задачи немедленно следует из формулы (9), имеющей в данном случае вид

$$0 = \frac{1}{9}(|AA_1|^2 + |AB_1|^2 + |AC_1|^2 + \ldots + |CA_1|^2 + |CB_1|^2 + |CC_1|^2) - \frac{1}{9}(|AB|^2 + |BC|^2 + |CA|^2) - \frac{1}{9}(|A_1B_1|^2 + |B_1C_1|^2 + |C_1A_1|^2).$$

4. Принимаем точки A, B и C за первую систему, точки P и Q — за вторую. Пусть G — центроид первой системы, а M — второй.

Снова применяем формулу (9):

$$|MG|^2 = \frac{1}{6}(|PA|^2 + |PB|^2 + |PC|^2 + |QA|^2 + |QB|^2 + |QC|^2) - \frac{1}{4}|PQ|^2 - \frac{1}{9}(|AB|^2 + |BC|^2 + |CA|^2).$$

Поскольку P и Q являются концами диаметра данной окружности ω, то $|PQ|^2 = 4R^2$; точки M и G — фиксированы. Следовательно,

$$|PA|^2 + |PB|^2 + |PC|^2 + |QA|^2 + |QB|^2 + |QC|^2 = 6|MG|^2 + 6R^2 + \frac{2}{3}(|AB|^2 + |BC|^2 + |CA|^2).$$

5. Пусть A_1, A_2, ..., A_n — точки на окружности. Примем центр O окружности за начало векторов. Пусть G_{ij} — центроид пары точек A_i, A_j, а G'_{ij} — центроид остальных $n-2$ точек. Имеем:

$$\overrightarrow{OG'_{ij}} = \frac{1}{n-2}\left(\sum_{k=1}^{n}\overrightarrow{OA_k} - \overrightarrow{OA_i} - \overrightarrow{OA_j}\right)$$

(см. формулу (2), с. 39).

Прямая l_{ij}, проведенная через G'_{ij} перпендикулярно к $A_i A_j$, параллельна прямой OG_{ij}. Поэтому для любой точки L прямой l_{ij} имеем

$$\overrightarrow{OL} = \overrightarrow{OG'_{ij}} + \lambda\cdot\overrightarrow{OG_{ij}},$$

то есть

$$\overrightarrow{OL} = \frac{1}{n-2}\left(\sum_{k=1}^{n}\overrightarrow{OA_k} - \overrightarrow{OA_i} - \overrightarrow{OA_j}\right) + \lambda\,\frac{\overrightarrow{OA_i} + \overrightarrow{OA_j}}{2},$$

или

$$\overrightarrow{OL} = \frac{1}{n-2}\sum_{k=1}^{n}\overrightarrow{OA_k} + \left(\frac{\lambda}{2} - \frac{1}{n-2}\right)\left(\overrightarrow{OA_i} + \overrightarrow{OA_j}\right).$$

При $\lambda = \frac{2}{n-2}$ получаем, что

$$\overrightarrow{OL_0} = \frac{1}{n-2}\sum_{k=1}^{n}\overrightarrow{OA_k} = \frac{n}{n-2}\overrightarrow{OG},$$

где G — центроид данной системы точек. Поэтому точка L_0 принадлежит всем прямым l_{ij}, причем

$$\frac{\left|\overrightarrow{OL_0}\right|}{\left|\overrightarrow{OG}\right|} = \frac{n}{n-2}.$$

К статье «Правильная пирамида»

1. $\operatorname{arctg}\dfrac{2\cos\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{1-2\cos\alpha}}$.
2. $\operatorname{arctg}\sqrt{-\dfrac{1+\cos\alpha}{\cos\alpha}}$.
3. $\dfrac{h^3\sqrt{3}}{\cos^2\alpha}\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{6}\right)$.
4. $2\operatorname{arctg}\dfrac{h}{\sqrt{3(h^2-a^2)}}$.
5. $\dfrac{l}{\cos\varphi}$.
6. $\dfrac{4h^2\sqrt{-\cos\varphi}}{1+\cos\varphi}$.
7. $\dfrac{2a^4}{a^4-4R^2}$.
8. $4r^2\cdot\dfrac{\left(1+\sqrt{-\cos\alpha}\right)^3}{(1+\cos\alpha)\cdot\sqrt{-\cos\alpha}}$.
9. $\dfrac{32}{3}R^3\sin^2\dfrac{\alpha}{2}\cos^2\alpha$.

К статье «Московский институт нефтехимической и газовой промышленности

Математика

Вариант 1

1. 8 *км/ч*, 7 *км/ч*.
2. $x = 1$.
3. $x = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{\pi k}{4}$ $(k = 0, \pm 1, \ldots)$.
4. $\dfrac{2\pi}{\sin 2\alpha}$.

Вариант 2

1. 15; 95.
2. $x > 4$.
3. $x = 4\pi k$ $(k = 0, \pm 1, \ldots)$
4. $\dfrac{4R^2H}{\sin\alpha}$.

Вариант 3

1. 4 *км/ч*; 3,2 *км/ч*.
2. $\dfrac{5}{3} < x < 2$.
3. $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k$ $(k = 0, \pm 1, \ldots)$
4. $\dfrac{\pi}{4}l^3\dfrac{\cos^2\beta\cdot\sin\beta}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}$.

Физика

1. $\Delta v = 1$ *м/с*.
2. $v = \sqrt{\dfrac{gR}{\sqrt{n}}} = \dfrac{v_1}{\sqrt[4]{n}}$ (v_1 — первая космическая скорость у поверхности Земли).
3. $\dfrac{m_1}{m_2} = 1 + \dfrac{2}{\alpha}$.
4. $\Pi = K\,\mathrm{tg}^2\,\alpha = 15$ *дж*.
5. $F_т = \dfrac{N}{v} = N\sqrt{\dfrac{2m}{R(F_2 - F_1)}} = 2500$ *н*,

где $F_2 - F_1$ — разность сил давления трамвая на вогнутом и выпуклом участках.

6. $\rho = \dfrac{3v_1^2}{4\gamma S} = 3\cdot 10^3$ *кг/м*^{3}.

7. $\dfrac{\rho}{\rho_2} = \left[1+\left(\dfrac{l_2}{l_1}\right)^2-\dfrac{\rho}{\rho_1}\right]\left(\dfrac{l_1}{l_2}\right)^2 = 1{,}25$.

8. $r_{\min} = \dfrac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 mv^2} = 1{,}44$ *см.*

9. $K_1 - q_1\left(U - \dfrac{K_2}{q_2}\right) = 10^{-7}$ *дж*

(U — общая разность потенциалов между обкладками).

10. $x = \dfrac{d}{2}\left(1 + \dfrac{K}{qU}\right) = 1{,}6$ *см*

(K — кинетическая энергия частицы в конце пути).

11. $R = \dfrac{U\Delta\eta}{\Delta I} = 2$ *ом.*

12. При равномерном движении сила тяги равна разности силы тяжести и выталкивающей силы. Поэтому закон сохранения энергии записывается так:

$$IU - I^2R = vg(\rho_Б - \rho_В)V.$$

Решение этого уравнения дает два значения силы тока: $I_1 = 10$ *а* и $I_2 = 15$ *а*. В ответе следует приводить меньшее значение тока, поскольку при этом меньше потери на нагрев обмотки и, следовательно, больше к. п. д. двигателя.

13. $U = \dfrac{Nev\rho}{\pi r^2} = 170$ *в* (N — полное число свободных электронов).

14. $n = 1 + \dfrac{R(k+1)}{d} = 1{,}6$.

15. Из соотношения Планка следует, что $N = nhc/\lambda$, где N — мощность света, n — число фотонов в секунду, h — постоянная Планка, c — скорость света, λ — длина волны. Отсюда

$$n = \frac{N\lambda}{hc} = 10\ c^{-1}.$$

К статье «Московский физико-технический институт»

(см. «Квант», 1975, № 2)

Математика

Вариант I

1. $x = 2^{12}$.

2. $x_1 = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{\pi n}{4}$; $x_2 = \pi n$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

3. $\dfrac{AD}{BC} = 8k - 1$. Указание. Продолжить отрезок AM до пересечения с продолжением BC в точке K и воспользоваться теоремой о касательной и секущей и подобием треугольников CMK и DMA.

4. Группируя в уравнениях члены, содержащие множители 5^{1+x} и 5^{1-x}, получим систему, эквивалентную исходной:

$$\begin{cases} 5^{1+x}\cdot(\cos y - \sin y) + 5^{1-x}\times \\ \qquad \times(\sin y + \cos y) = -2 \\ 5^{1+x}\cdot(\sin y - 2\cos y) - 5^{1-x}\times \\ \qquad \times(2\cos y + \sin y) = -4. \end{cases} \qquad (1)$$

Умножая первое уравнение системы (1) на $2\cos y + \sin y$, а второе — на $\sin y + \cos y$ и складывая, получаем

$$5^{1+x}\cdot\sin y\cdot\cos y = 3\sin y + 4\cos y. \qquad (2)$$

Далее первое уравнение системы (1) умножим на $\sin y - 2\cos y$, а второе — на $\sin y - \cos y$ и сложим их. Получим

$$5^{1-x}\cdot\sin y\cdot\cos y = 3\sin y - 4\cos y. \qquad (3)$$

Система уравнений (2), (3) является следствием исходной системы.

Перемножив почленно уравнения (2) и (3), получим

$$25\sin^2 y\cdot\cos^2 y = 9\sin^2 y - 16\cos^2 y.$$

Отсюда, используя формулу $\cos^2 y = 1 - \sin^2 y$, имеем $\sin^4 y = \dfrac{16}{25}$, следовательно,

$$\sin y = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \cos y = \pm\frac{1}{\sqrt{5}} \qquad (4)$$

Подставляя из (4) поочередно значения $\sin y$ и $\cos y$ со всеми четырьмя возможными комбинациями знаков в систему (1) и учитывая, что $5^{1+x} > 0$ и $5^{1-x} > 0$, находим ответ: $x_1 = \dfrac{1}{2}$, $y_1 = \arcsin\dfrac{2}{\sqrt{5}} + 2\pi n$; $x_2 = -\dfrac{1}{2}$, $y_2 = -\arcsin\dfrac{2}{\sqrt{5}} + 2\pi n$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

5. $V = 25\sqrt{\dfrac{5}{3}}\,\pi$ ($дм^3$). Указание. Пусть O — середина AC. Опустим перпендикуляры ON на AB и NS на A_1B_1; точка S — вершина конуса. Далее, SA и SM — образующие конуса, поэтому проекция высоты SO конуса на плоскость AA_1B_1B попадает в биссектрису угла ASM (докажите!), отсюда находим SN и SO.

Вариант 2

1. $x = 4$.

2. $d = \frac{4}{3}$.

3. $h = a\sqrt{\frac{2}{3}}$.

4. $\sphericalangle A = \pi/3$, $\sphericalangle B = 7\pi/12$, $\sphericalangle C = \pi/12$ (или $\sphericalangle B = \pi/12$, $\sphericalangle C = 7\pi/12$). Указание. $\triangle AMN = \triangle ABC$.

5. Запишем систему в виде

$$\begin{cases} \dfrac{\sin z}{\cos x \cdot \cos y} = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y - 3, \\ \dfrac{\sin x}{\cos y \cdot \cos z} = \operatorname{tg} y \cdot \operatorname{tg} z + 5, \\ \dfrac{\sin y}{\cos z \cdot \cos x} = \operatorname{tg} z \cdot \operatorname{tg} x + 3. \end{cases} \qquad (1)$$

Перемножим попарно уравнения и воспользуемся формулой $\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \operatorname{tg}^2\alpha$, в результате получим

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} z = 5 \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y - 3 \operatorname{tg} y \cdot \operatorname{tg} z - 15, \\ \operatorname{tg} y \cdot \operatorname{tg} z = 3 \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y - 3 \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} z - 9, \\ \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y = 5 \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} z + 3 \operatorname{tg} y \cdot \operatorname{tg} z + 15. \end{cases}$$

Получилась система трех уравнений для неизвестных $X = \operatorname{tg} y \operatorname{tg} z$, $Y = \operatorname{tg} x \operatorname{tg} z$, $Z = \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y$. Она легко решается, затем находятся $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{tg} y$ и $\operatorname{tg} z$. Подстановкой полученных значений проверяем ответ: $x_1 = \frac{\pi}{6} + k\pi$, $y_1 = \frac{\pi}{3} + l\pi$, $z_1 = -\frac{\pi}{3} + (2n - l - k)\pi$, $x_2 = -\frac{\pi}{6} + k\pi$, $y_2 = -\frac{\pi}{3} + l\pi$, $z_2 = \frac{\pi}{3} + (2n - l - k + 1)\pi$ (k, l, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$).

Вариант 3

1. $\pi n/3$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$).

2. $\frac{n - m}{2m}$.

3. $x = -0{,}5$, $y = 0{,}5$.

4. $1 : (n - 1)$.

Физика

Билет 1

1. При переходе с наклонной плоскости на горизонтальный пол вертикальная составляющая скорости мешка обращается в нуль. Следовательно, за время удара, происходящего при этом переходе, со стороны пола в вертикальном направлении на мешок действует импульс силы, численно равный вертикальной составляющей количества движения мешка, то есть $mv_в$. Но тогда за это же время в горизонтальном направлении должен подействовать импульс силы трения, равный $mv_в k$. Он вызовет изменение горизонтальной скорости

$$\Delta v_г = kv_в = 0{,}7v_в.$$

С другой стороны, непосредственно перед ударом

$$v_г = v_в \operatorname{ctg} 60^\circ = \frac{v_в}{\sqrt{3}} = 0{,}58v_в.$$

Следовательно, получаем, что изменение горизонтальной составляющей скорости больше самой этой составляющей. Этого, конечно, быть не может (силы трения не могут заставить мешок двигаться назад). Значит, мешок сразу после попадания на горизонтальный пол остановится.

2. В цилиндре останется $^3/_4$ газа.

3. $E = \frac{3e^2B^2r^2}{4M}$ (напомним, что заряд и масса ядра дейтерия e и $2M$, а α-частицы — соответственно $2e$ и $4M$).

4. $a = 2$ *см*. Указание. Для получения интерференционной картины необходимо, чтобы на один и тот же участок экрана попадали световые лучи, пришедшие от источника света по различным путям. В нашем случае это означает, что участки экрана, освещаемые изображениями, полученными с помощью верхнего и нижнего зеркал, должны перекрываться. Для достаточно удаленного экрана это требование сводится к условию, что лучи от краев зеркал должны идти параллельно оси системы (на рисунке — горизонтально).

Билет 2

1. $Q = \frac{2}{3}E_1$.

2. Число вторичных нейтронов, рождающихся в единице объема в единицу времени, пропорционально плотности нейтронов n и плотности ядер делящегося вещества N. Для всего объема имеем

$$\frac{\Delta n_{втор}}{\Delta t} \sim nNR^3.$$

Потери нейтронов пропорциональны площади поверхности тела и плотности нейтронов:

$$\frac{\Delta n_{пот}}{\Delta t} \sim nR^2.$$

Для критического состояния получаем $NR_{кр} = \text{const}$, то есть $\rho R_{кр} = \text{const}$. Плотность ρ в рассматриваемом случае при увеличении давления возрастет в 10^3 раз, следовательно, критический радиус уменьшится в 10^3 раз, а критический объем — в 10^9 раз. Отсюда ясно, что критическая масса уменьшится в 10^6 раз.

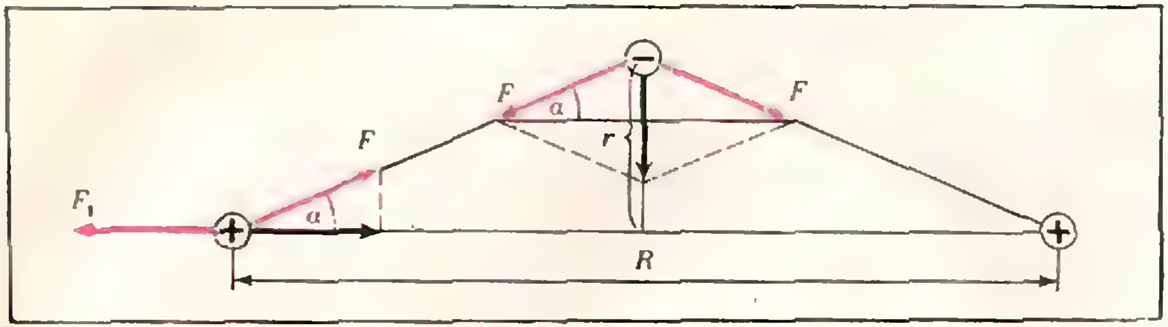


Рис. 1.

3. Энергия фотона $\frac{hc}{\lambda}$ расходуется на совершение работы выхода A, определяемой из красной границы $\left(A=\frac{hc}{\lambda_0}\right)$, и на работу против задерживающего поля, равную eEl, где l — искомое расстояние. Расчет дает $l = 1{,}25$ *см*.

4. Прямое мнимое изображение в натуральную величину дает плоское зеркало, то есть система с оптической силой, равной нулю. Следовательно, надо выбрать такую линзу, которая вместе с заркалом составит оптическую систему с нулевой оптической силой. При этом необходимо учесть, что линза работает дважды — лучи преломляются в ней перед отражением от зеркала и после отражения от него. Получаем, что надо взять собирающую линзу с фокусным расстоянием 40 *см*.

Билет 3

1. $v = 435$ *м/с*.

2. Во втором случае то же количество тепла, что и в первом случае, рассеивается за более короткое время. Скорость теплоотвода пропорциональна разности температур утюга и окружающего воздуха. Следовательно, время охлаждения утюга обратно пропорционально этой разности температур. Запишем это условие:

$$\frac{t_2-t_0}{t_1-t_0}=\frac{T_1}{T_2}.$$

Отсюда получаем, что $t_2 = 220°$ С.

Заметим, что при наличии терморегулятора утюг охлаждается весьма незначительно, обычно на несколько градусов, после чего нагреватель вновь включается. Поэтому, действительно, без заметной погрешности можно считать температуру утюга постоянной.

3. Запишем условие движения электрона по окружности (рис. 1):

$$\frac{mv^2}{r}=2F\sin\alpha.$$

Здесь $r=\frac{R\,\mathrm{tg}\,\alpha}{2}$, $F=\frac{e^2}{\left(\frac{R}{2\cos\alpha}\right)^2}$ (в системе единиц СГСЭ).

Для определения угла α рассмотрим условие равновесия одного из протонов. Вдоль оси иона на протон действуют две силы: сила отталкивания $F_1 = e^2/R^2$ со стороны другого протона и составляющая $F\cos\alpha$ силы протяжения к электрону. Из равенства этих сил получаем, что $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$. Тогда окончательно

$$v^2=\frac{4e^2}{mR}\sin^2\alpha\cos\alpha=$$

$$=\frac{4e^2}{mR}(1-\cos^2\alpha)\cos\alpha,$$

откуда

$$v\approx 1{,}23\frac{e}{\sqrt{mR}}.$$

4. Из условия задачи нетрудно понять, что посеребренная сторона линзы — плоская. Во втором случае источник света оказывается в фокусе новой «линзы», оптическая сила которой вдвое больше исходной (плоское зеркало, которым является посеребренная сторона линзы, имеет нулевую оптическую силу). Следовательно, у исходной линзы (несеребренной) было вдвое большее фокусное расстояние, а именно 56 *см*.

Билет 4

1. $g_C=\frac{16\pi^2RL^2}{T^2d^2}\approx 270$ *м/с²*.

2. $t=t_0+\Delta t=t_0+\frac{Q}{C_V}-\frac{Q}{C_V+R}\approx$ ≈ 76 °С.

3. Потенциал каждого шара согласно принципу суперпозиции равен сумме потенциалов полей, создаваемых его собственным зарядом и зарядом другого шара. После заземления первого шара его потенциал равен нулю, то есть

$$\frac{q_1}{r}+\frac{q}{R}=0,$$

откуда

$$q_1=-\frac{qr}{R}.$$

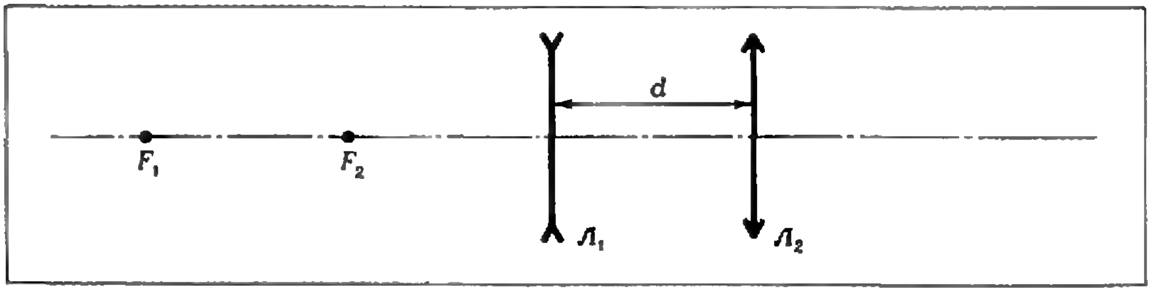


Рис. 2.

Аналогично для второго шара после его заземления имеем

$$\frac{q_1}{R}+\frac{q_2}{r}=0,$$

то есть

$$q_2=-q_1\frac{r}{R}=+q\frac{r^2}{R^2}.$$

Теперь определим конечный потенциал первого шара:

$$\varphi_1=\frac{q_1}{r}+\frac{q_2}{R}=-\frac{q}{R}\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right).$$

Так как $r \ll R$, то $\varphi_1 \approx -\frac{q}{R}$.

4. Линза $Л_2$ (рис. 2) дает действительное изображение, если предмет расположен левее фокуса F_2. В нашем случае предметом для второй линзы служит изображение, полученное с помощью первой линзы. Точка F_2 находится от линзы $Л_1$ на половине ее фокусного расстояния. Для того чтобы первое изображение получилось левее F_2, предмет должен находится левее F_1 (это непосредственно следует из формулы линзы), то есть на расстоянии $a > 10$ *см* от линзы $Л_1$.

К статье «Для чего нужны проценты»

1. 10 *кг*.

2. Уменьшилось на 1%.

3. Да, на 1% от первоначальной стоимости.

К задачам «Квант» для младших школьников»

(см. «Квант», 1975, № 2)

1. Удастся. Указание. Пусть k семей переезжают «по кругу». Если k четно, то этой группе хватит 2 цветов (цвета чередуются), а если k нечетно, то один раз потребуется третий цвет.

2. Равновесие рычажных весов не нарушится. Показания пружинных весов изменятся.

3. Указание. Числа можно записать в виде $a\cdot10^k+b$, $b\cdot10^{1974-k}+a$. Домножить второе число на 10^k (взаимно простое с 27) и рассмотреть разность между полученным числом и первым исходным.

4. Следует взять тонкий стакан.

5. Могут.

К кроссворду

(см. «Квант», 1975, № 2)

По горизонтали: 6. Ферми. 7. Свеча. 8. Рэлей. 11. Лебедев. 12. Соколов. 13. Цилиндр. 16. Попов. 18. Кулон. 19. Нониус. 20. Нихром. 24. Непер. 25. Тесла. 26. Асфальт. 30. Антонов. 31. Эмиттер. 32. Ротор. 33. Якоби. 34. Ролик.

По вертикали: 1. Детектор. 2. Ампер. 3. Нейтрино. 4. Бэкон. 5. Кенотрон. 9. Герц. 10. Торр. 14. Импульс. 15. Даниэль. 17. Винер. 18. Карат. 21. Черенков. 22. Славянов. 23. Глицерин. 26. Анод. 27. Тамм. 28. Фотон. 29. Этрол.

Корректор *Л. С. Сомова*

117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.
«Квант», тел. 234-08-11. Сдано в набор 17/XII-74 г.
Подписано в печать 30/I-75 г.
Бумага 70×108¹/₁₆. Физ. печ. л. 5
Усл. печ. л. 6,50 Уч.-изд. л. 7,45 Т 03255
Тираж 367 215 экз. Цена 30 коп. Заказ 2601

Чеховский полиграфический комбинат
Союзполиграфпрома
при Государственном комитете Совета Министров
СССР по делам издательств, полиграфии и книжной
торговли г. Чехов Московской области

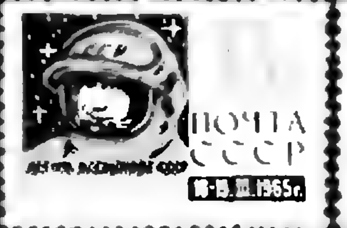
Рукописи не возвращаются

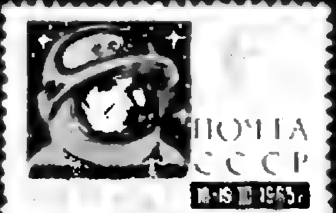
Подвигу — десять лет

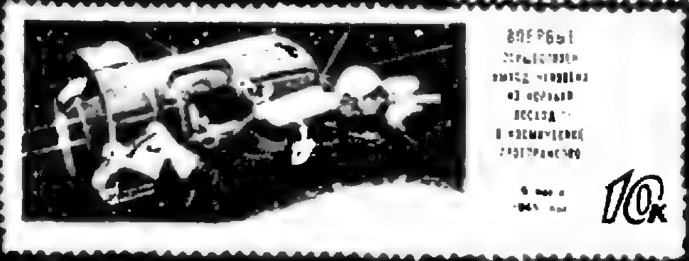
18 марта 1965 года в 10 часов по московскому времени был дан старт космическому кораблю «Восход-2». На борту корабля находились космонавты Павел Иванович Беляев и Алексей Архипович Леонов. В 11 часов 30 минут на втором витке полета Алексей Леонов в специальном скафандре с автономной системой жизнеобеспечения совершил выход в космическое пространство. Удалившись от корабля на расстояние около 5 метров, он выполнил комплекс намеченных исследований и благополучно возвратился на корабль. Так человек впервые оказался в открытом космическом пространстве.

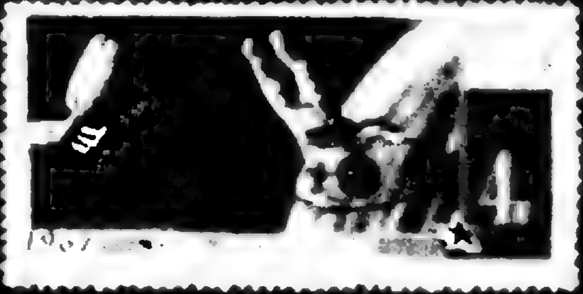
Подвигу Алексея Леонова посвящено большое количество почтовых марок. Мы приводим здесь советские марки 1965 года (3 марки, на которых изображены Леонов и Беляев в скафандрах и Леонов рядом с космическим кораблем, а также почтовый блок), марки 1967 и 1968 годов, посвященные дню космонавтики, и марку 1972 года из серии «15 лет космической эры».

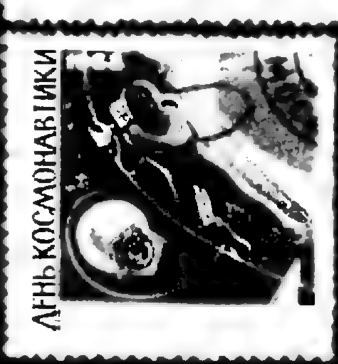
В. Рудин


ПОЧТА
СССР
18-19.III.1965г.

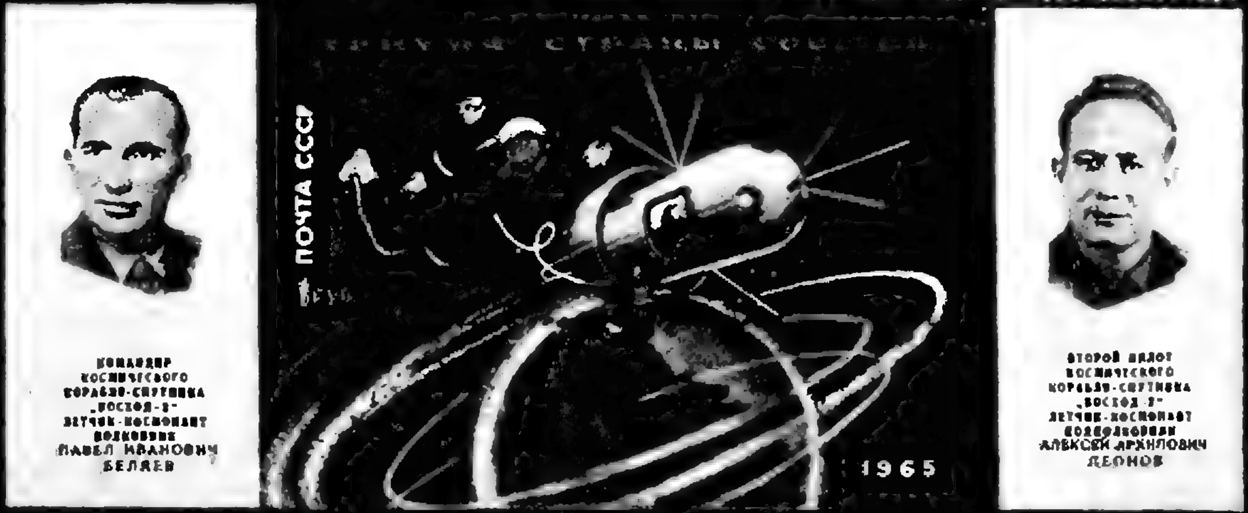

ПОЧТА
СССР
18-19.III.1965г.


ВПЕРВЫЕ
10к




ДЕНЬ КОСМОНАВТИКИ

15 ЛЕТ КОСМ
6

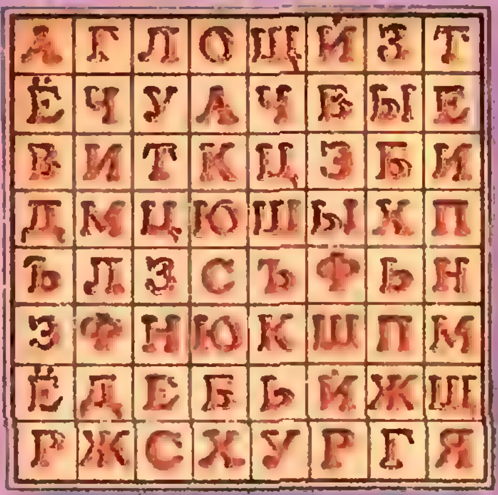

ПОЧТА СССР
1965
КОМАНДИР
КОСМИЧЕСКОГО
КОРАБЛЯ-СПУТНИКА
„ВОСХОД-2"
ЛЕТЧИК-КОСМОНАВТ
ПОДПОЛКОВНИК
ПАВЕЛ ИВАНОВИЧ
БЕЛЯЕВ
ВТОРОЙ ПИЛОТ
КОСМИЧЕСКОГО
КОРАБЛЯ-СПУТНИКА
„ВОСХОД-2"
ЛЕТЧИК-КОСМОНАВТ
ПОДПОЛКОВНИК
АЛЕКСЕЙ АРХИПОВИЧ
ЛЕОНОВ

В движении знакомой всем детской игрушки юлы, или волчка, есть много удивительного и, на первый взгляд, странного. Объяснением свойств этого движения занимались и математики, и физики. Замечательные результаты в решении задачи о движении волчка получила Софья Васильевна Ковалевская. О жизни выдающегося русского математика мы рассказываем в этом номере журнала (см. с. 2).

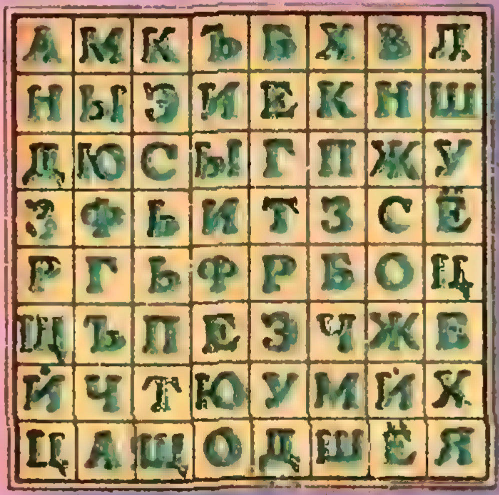
Цена 30 коп.
Индекс 70465

3

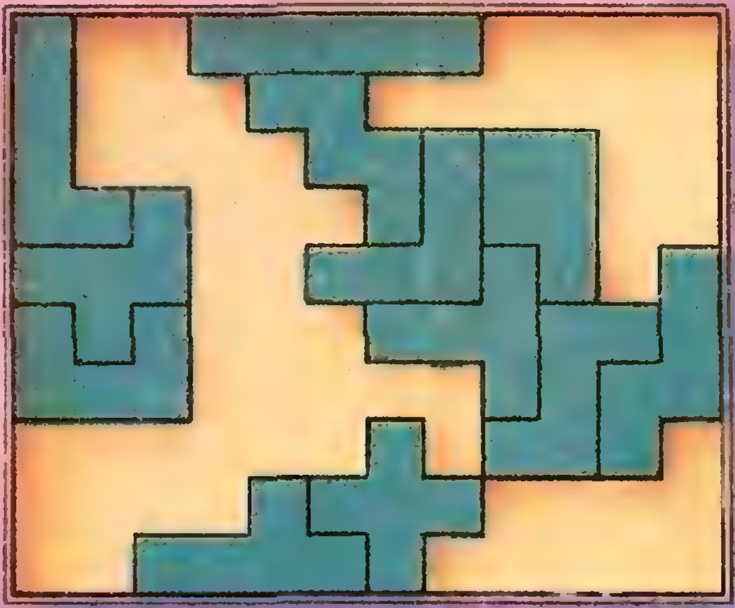
Головоломки



А	Г	Л	О	Щ	И	З	Т
Ё	Ч	У	А	Ч	В	Ы	Е
В	И	Т	К	Ц	Э	Б	И
Д	М	Ц	Ю	Ш	Ы	Х	П
Ъ	Л	З	С	Ъ	Ф	Ь	Н
Э	Ф	Н	Ю	К	Ш	П	М
Ё	Д	Е	Б	Ь	Й	Ж	Щ
Г	Ж	С	Х	У	Р	Г	Я



А	М	К	Ъ	Б	Х	В	Л
Н	Ы	Э	И	Е	К	Н	Ш
Д	Ю	С	Ы	Г	П	Ж	У
З	Ф	Ь	И	Т	З	С	Ё
Р	Г	Ь	Ф	Р	Б	О	Ц
Щ	Ъ	П	Е	Э	Ч	Ж	В
Й	Ч	Т	Ю	У	М	Й	Х
Ц	А	Щ	О	Д	Ш	Ё	Я



Лабиринт — алфавит

В 64 клеточки квадрата вписаны буквы алфавита. Начиная с буквы А в верхнем левом углу, проведите ломаную несамопересекающуюся линию, которая проходила бы ровно через 33 буквы алфавита и заканчивалась в нижнем правом углу буквой Я. Ломаная не должна проходить через вершины маленьких квадратиков.

Пентамино — пасьянс.

12 фигур пентамино уложены в прямоугольник 12×10. Попробуйте разместить эти же фигуры пентамино на оставшемся желтом поле (при этом фигуры можно переворачивать).

Л. П. Мочалов

НОМЕР
4

Основан в 1970 году.
1975
4

Квант

Научно-популярный
физико-математический
журнал
Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической
литературы

Главный редактор
академик И. К. Кикоин

Первый заместитель
главного редактора
академик А. Н. Колмогоров

Редакционная коллегия:
М. И. Башмаков,
С. Т. Беляев,
В. Г. Болтянский,
Н. Б. Васильев,
Ю. Н. Ефремов,
В. Г. Зубов,
П. Л. Капица,
В. А. Кириллин,
главный художник
А. И. Климанов,
С. М. Козел,
зам. главного редактора
В. А. Лешковцев,
Л. Г. Макар-Лиманов
А. И. Маркушевич,
Н. А. Патрикеева,
И. С. Петраков,
Н. Х. Розов,
А. П. Савин,
И. Ш. Слободецкий,
зам. главного редактора
М. Л. Смолянский,
Я. А. Смородинский
В. А. Фабрикант,
А. Т. Цветков,
М. П. Шаскольская,
С. И. Шварцбурд,
А. И. Ширшов.

Редакция:
В. Н. Березин,
А. Н. Виленкин,
И. Н. Клумова,
художественный редактор
Т. М. Макарова,
Н. А. Минц,
Т. С. Петрова,
В. А. Тихомирова,
зав. редакцией
Л. В. Чернова

В НОМЕРЕ:

2 *Я. А. Смородинский.* Сила Кориолиса
9 *И. Н. Бронштейн.* Парабола
17 *В. Н. Ланге.* Зачем топят печи?

Лаборатория «Кванта»

19 *М. И. Емельянов, А. М. Жарков, В. М. Загайнов, В. С. Маточкин.* Суточное вращение Земли

Математический кружок

21 *А. П. Винниченко.* Квадратичный треугольник и непрерывные цепочки

Задачник «Кванта»

25 Задачи М316—М320; Ф328—Ф332
27 Решения задач М280—М285; Ф291—Ф295

Практикум абитуриента

37 *С. Т. Берколайко.* Использование неравенства Коши при решении задач
41 *Г. Я. Мякишев.* Электростатическое поле
48 *Г. В. Меледин, А. И. Ширшов.* Новосибирский государственный университет

Рецензии, библиография

52 *Д. Бородин.* Школьникам о современной физике

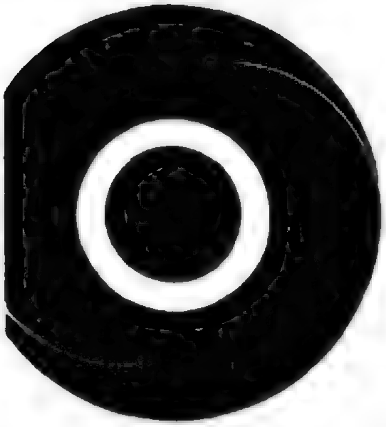
«Квант» для младших школьников

53 Задачи
54 *Е. Я. Гик.* Математические игры на шахматной доске
60 **Ответы, указания, решения**
Смесь *(с. 18, 24, 47)*

На первой странице обложки вы видите известный фонтан «Дружба народов» (Москва, ВДНХ). Струи бьющей воды имеют весьма характерную форму — форму параболы. Об этой кривой и некоторых ее свойствах вы можете прочесть в статье «Парабола» (с. 9). Обратите внимание на то, что по сравнению с этой фотографией параболы в статье изображены «вниз головой», но пусть это вас не смущает: интересна сама кривая, а не ее расположение.

Фото Д. Н. Германа.

© *Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», «Квант», 1975 год*



СИЛА КОРИОЛИСА

Я. А. Смородинский

Знаете ли вы?

Какую кривую вычерчивает на плоскости маятник Фуко? В какую сторону отклоняется брошенный с поверхности Земли вертикально вверх камень? Может ли снаряд лететь строго по меридиану?

Можете ли вы ответить на эти вопросы? У всех этих задач есть общая черта: их все удобнее решать в неинерциальных системах отсчета *), точнее, в системах отсчета, вращающихся с постоянной угловой скоростью. Можно, конечно, рассматривать все явления в какой-то инерциальной системе, такой, например, как система далекой звезды или даже Солнца (неравномерностью движения которого относительно далекой звезды можно пренебречь). Хотя такой путь совершенно правильный и, следуя ему, мы не покинем твердой почвы законов Ньютона, тем не менее, часто бывает удобнее (и даже нагляднее) рассматривать явление с точки зрения наблюдателя, находящегося во вращающейся системе отсчета.

Неинерциальные системы отсчета

Одно и то же движение выглядит по-разному, если его наблюдать из разных систем отсчета. Посмотрим, например, на движение снаряда, который был выпущен из пушки, стоящей на северном полюсе. Если бы Земля не вращалась вокруг своей оси, то траектория снаряда лежала бы в плоскости меридиана. Такую картину видели бы как наблюдатель, находящийся на Земле, так и наблюдатель, неподвижно закрепленный вне Земли.

Однако Земля вращается! С точки зрения неподвижного наблюдателя (находящегося вне Земли) Земля вращается против часовой стрелки (если смотреть сверху на ее северный полюс), поэтому плоскость фиксированного меридиана поворачивается вместе с Землей с запада на восток, а плоскость движения снаряда в пространстве остается неизменной.

Наблюдатель, находящийся на Земле (подвижный наблюдатель), видит неподвижную плоскость меридиана и летящий снаряд, который отклоняется от этой плоскости на запад. С любой точки зрения плоскость движения снаряда не совпадает с плоскостью начального меридиана, только один наблюдатель приписывает это несовпадение движению Земли, а другой — движению самого снаряда.

Земной наблюдатель (например, артиллерист) знает, конечно, что причиной «отклонения» на самом деле является вращение Земли. Однако для практических вычислений часто бывает удобнее считать, что боковое отклонение снаряда вызвано некоторой силой, которая действует только в неинерциальной системе отсчета. Такие силы называют силами инерции. От обычных сил они отличаются тем, что они не являются результатом взаимодействия каких-то двух тел.

---

*) О неинерциальных системах отсчета было рассказано в статье Я. А. Смородинского «Силы инерции», «Квант», 1974, № 8.

Во вращающейся системе отсчета действуют силы инерции двух типов: центробежная сила инерции, которая зависит только от расстояния до оси вращения, и сила Кориолиса, зависящая только от скорости тела (материальной точки) относительно вращающейся системы отсчета. О первой силе было подробно рассказано в статье «Силы инерции». Напомним основные ее свойства.

Центробежная сила инерции

Почему у мальчика, который катается на карусели, при увеличении скорости вращения слетает шапка? На этот вопрос можно ответить по-разному. С точки зрения неподвижного наблюдателя, стоящего около карусели, объяснение будет таким. Пока скорость вращения была небольшой, шапку удерживала на голове мальчика сила трения, которая и сообщала шапке необходимое центростремительное ускорение. С увеличением угловой скорости вращения карусели центростремительное ускорение должно увеличиваться, а сила трения покоя может расти только до определенного предела. Поэтому в какой-то момент шапка теряет связь с головой мальчика, она движется по инерции равномерно и прямолинейно, а карусель вместе с мальчиком уходит от шапки.

Подвижный наблюдатель, связанный с каруселью, скажет, что кроме силы трения на шапку действует еще центробежная сила инерции, равная по абсолютной величине

$$F_{\text{и.ц}} = m\omega^2 r,$$

где m — масса шапки, ω — угловая скорость вращения карусели, а r — расстояние до оси вращения. Центробежная сила инерции лежит в плоскости, перпендикулярной оси вращения, и направлена по радиусу в сторону от центра. Выражение для $F_{\text{и.ц}}$ можно записать в векторной форме:

$$\mathbf{F}_{\text{и.ц}} = m\omega^2 \mathbf{r},$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор рассматриваемого тела, он лежит в плоскости, перпендикулярной к оси вращения. Если центробежная сила инерции превышает по величине силу трения шапки о голову мальчика, шапка улетит.

Сила Кориолиса

Сложнее обстоит дело, если материальная точка движется во вращающейся системе координат. В этом случае кроме центробежной силы инерции на точку действует еще одна сила, зависящая от скорости движения точки относительно вращающейся системы координат. Она называется силой Кориолиса *).

Силу Кориолиса мы сможем определить, если рассмотрим два частных случая:

1) скорость материальной точки направлена перпендикулярно к ее радиусу-вектору во вращающейся системе отсчета;

2) скорость точки направлена вдоль этого радиуса.

Вращающийся стул

Представьте себе, что вы сидите на стуле, который вращается вокруг своей оси. С вашей точки зрения все предметы вокруг совершают равномерное круговое движение, подобно тому, как в картине мироздания древних весь небосвод поворачивался за сутки на один оборот вокруг Земли. Но уже древние понимали, что звезды должны быть накрепко прикреплены к небесным сферам — иначе они разлетятся. Почему же мебель и сами

---

*) Гюстав Гаспар Кориолис (1792—1843) — французский механик. Кроме теории, о которой идет речь в этой статье, известен математической теорией биллиардной игры, в которой он рассмотрел законы движения шара на плоскости под действием удара.

стены комнаты не разлетаются от вас под действием центробежной силы инерции?

Ответ может быть только такой, что во вращающейся системе отсчета существует другая сила, которая не только компенсирует центробежную силу инерции, направленную наружу, но и сообщает телу центростремительное ускорение, направленное к оси вращения. Такую роль и выполняет сила Кориолиса:

$$\mathbf{F}_{\text{К}} + \mathbf{F}_{\text{и.ц}} = -m\omega^2\ \mathbf{r}.$$

Отсюда мы можем вычислить силу Кориолиса; она должна быть равна в этом случае

$$\mathbf{F}_{\text{К}} = -2\ \mathbf{F}_{\text{и.ц}},$$

то есть

$$F_{\text{К}} = -2m\omega^2 r.$$

Исключим r из выражения для величины силы *Кориолиса. Линейная* скорость точки, находящейся на расстоянии r от оси вращения, равна ωr, а потому можно написать, что

$$F_{\text{К}} = -2\ m\omega v_{\text{кас}}$$

(знак минус по-прежнему означает, что сила Кориолиса в нашем случае направлена к оси вращения).

Таким образом, действие силы $\mathbf{F}_{\text{К}}$ во вращающейся системе приводит к тому, что, сидя на вращающемся стуле, вы видите комнату хотя и вращающейся вокруг вас, но такой же целой, как ее видит неподвижный наблюдатель.

Шарик на вращающемся диске

Пусть в центре диска находится шарик, который может скользить по диску абсолютно без трения. В некоторый момент времени шарику сообщается скорость $v_{\text{рад}}$, направленная вдоль одного из радиусов. Как будут описывать характер движения шарика два наблюдателя — неподвижный и подвижный, вращающийся на диске?

Очевидно, что для неподвижного наблюдателя шарик на диске движется с постоянной скоростью $v_{\text{рад}}$ по прямой линии. Расстояние, которое проходит шарик по диску от его центра к моменту времени t, равно $v_{\text{рад}}t$.

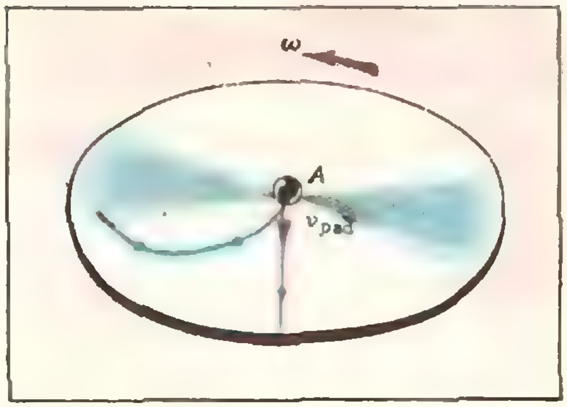


Рис. 1.

След, который оставляет шарик на вращающемся диске, представляет траекторию шарика с точки зрения подвижного наблюдателя, находящегося на диске. Для этого наблюдателя шарик движется не прямолинейно, а описывает некоторую кривую линию (см. рис. 1). Но это означает, что шарик движется с ускорением. Следовательно, во вращающейся системе появляется сила, которая и сообщает это ускорение. Определим, чему равна эта сила в самом начале движения шарика.

За малый промежуток времени Δt от начала движения шарик, перемещаясь вдоль красной линии (см. рис. 1), удаляется от центра диска на расстояние $\Delta l = v_{\text{рад}}\Delta t$. За это же время диск поворачивается на угол $\Delta\varphi = \omega\Delta t$ (ω — угловая скорость вращения диска). Та точка диска, которая оказывается под шариком на расстоянии Δl от центра диска, за время Δt прошла расстояние $\Delta s = \Delta l\Delta\varphi = v_{\text{рад}}\omega\Delta t^2$. Конечно, все точки вращающегося диска движутся по окружностям, но мы рассматриваем столь малый промежуток времени Δt, что можно считать движение точек, близких к центру диска, прямолинейным. Тогда Δs есть перемещение точки, которая в начальный момент времени находилась на расстоянии Δl от центра, в направлении, перпендикулярном красной линии. Для наблюдателя, находящегося на диске, шарик за время Δt перемещается в противоположном направлении на то же самое расстояние $\Delta s = v_{\text{рад}}\omega\Delta t^2$ и при этом перемещается равномерно вдоль радиуса. Сравнив выражение для Δs с формулой для пути при равномерном движении — $s = \frac{at^2}{2}$, мы замечаем, что в нашем примере для подвижного наблюдателя в течение промежутка времени Δt движение шарика в направлении, перпендикулярном вектору скорости $\mathbf{v}_{\text{рад}}$, будет равноускоренным с ускорением

$$a = 2v_{\text{рад}}\omega.$$

Следовательно, во вращающейся системе именно в этом направлении и действует на шарик массы m сила

$$F_{\text{К}} = 2\,mv_{\text{рад}}\omega.$$

Это опять сила Кориолиса, но теперь она направлена перпендикулярно радиусу.

Конец вывода формулы

Мы рассмотрели два случая движения тела относительно вращающейся системы отсчета. В первом примере («вращающаяся» комната) тело двигалось в неинерциальной системе по окружности, в любой момент скорость тела была направлена по касательной к этой окружности. Как мы видели, при этом на тело действует сила Кориолиса, которая направлена вдоль радиуса окружности, то есть перпендикулярно вектору скорости.

Во втором примере (шарик на диске) мы показали, что если в некоторый момент времени скорость тела направлена вдоль радиуса, то в этот момент на тело действует сила Кориолиса, направленная перпендикулярно радиусу, то есть перпендикулярно скорости тела. Абсолютная величина силы Кориолиса в обоих случаях была прямо пропорциональна произведению $v\omega$, где v — абсолютная величина скорости тела относительно вращающейся системы в данный момент времени, а ω — величина угловой скорости вращающейся системы относительно инерциальной.

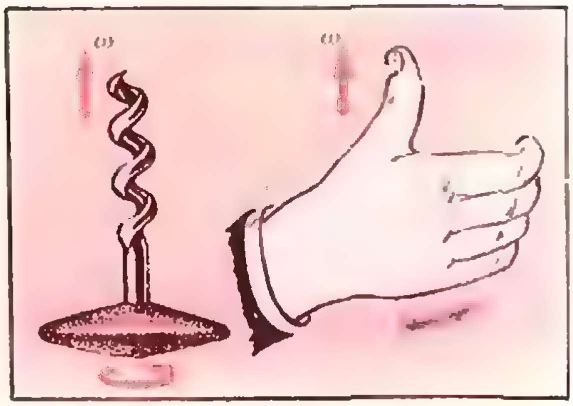


Рис. 2.

А какова будет сила Кориолиса, действующая на тело, мгновенная скорость которого во вращающейся системе отсчета направлена произвольным образом? Нетрудно показать, что величина силы Кориолиса и в этом общем случае будет пропорциональна произведению $|\mathbf{v}|$ на величину угловой скорости системы (для этого надо только разложить вектор скорости на две компоненты, одну из которых направить вдоль радиуса, а другую — перпендикулярно к нему по касательной).

Теперь надо еще определить направление силы Кориолиса. Для этого, прежде всего, заметим, что угловую скорость можно задать в виде вектора. Вектор $\boldsymbol{\omega}$ параллелен оси вращения. Направление этого вектора связывается с направлением вращения системы с помощью правила буравчика (или винта): если вращать рукоятку буравчика так, как вращается система, то поступательное движение буравчика укажет направление вектора угловой скорости. Можно пользоваться и другим правилом — правилом правой руки: если согнуть четыре пальца правой руки по направлению вращения системы, то отогнутый большой палец укажет направление вектора $\boldsymbol{\omega}$ (см. рисунок 2).

Если в нашем первом примере система отсчета вращалась против часовой стрелки, то векторы $\boldsymbol{\omega}$, $\mathbf{v}$ и $\mathbf{F}_{\text{К}}$ располагались так, как показано на рисунке 3. Во втором примере эти

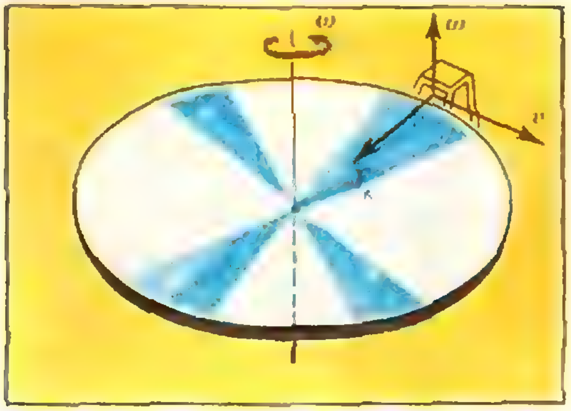


Рис. 3.

векторы располагались так, как на рисунке 4. Из этих рисунков видно, что сила Кориолиса в обоих случаях перпендикулярна к плоскости, в которой лежат векторы **ω** и **v**. Говорят, что векторы $\mathbf{F}_К$, **v** и **ω** (именно в этой последовательности) образуют правую систему векторов (правая рука поэтому и изображена на рисунке 2).

Векторное произведение

Мы видим, что сила Кориолиса зависит от двух векторных величин — от скорости **v** движения материальной точки относительно вращающейся системы координат и от угловой скорости **ω** самой системы отсчета. Величина этой силы пропорциональна произведению величин скорости точки и угловой скорости системы, а ее направление однозначно определяется направлениями векторов **v** и **ω**.

Формулу для кориолисовой силы в современных книжках пишут так:

$$\mathbf{F}_К = 2\,m\,\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega},$$

где × — знак так называемого векторного произведения двух векторов.

Векторным произведением двух перпендикулярных друг к другу векторов **A** и **B** называется третий вектор **C**, который строится следующим образом (рис. 5). Его величина численно равна площади прямоугольника, построенного на векторах **A** и **B**, то есть $|\mathbf{C}| = |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}|$. Направление вектора **C** перпендикулярно к плоскости указанного прямоугольника и выбирается таким, чтобы векторы **A**, **B** и **C** (в этом порядке) составляли правую систему векторов. *По-другому*, направление вектора **C** можно определить по правилу буравчика (или правой руки): если поворачивать вектор **A** к вектору **B** и связать с этим вращением вращение рукоятки буравчика (или направление, в котором

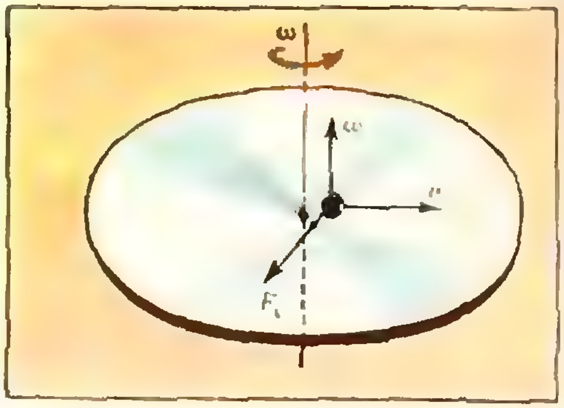


Рис. 4.

согнуты пальцы правой руки), то поступательное движение острия буравчика (или отогнутый большой палец) укажет направление вектора **C**.

Маятник Фуко

В 1851 году французский ученый Леон Фуко (1810—1868) продемонстрировал фактически первое экспериментальное доказательство вращения Земли вокруг своей оси. Небольшой тяжелый шар подвешивался на длинной нити так, чтобы он мог свободно качаться в любом направлении. В некоторый момент этот маятник выводили из положения равновесия, он начинал колебаться. Если внимательно следить за плоскостью колебаний маятника, то оказывается, что она не остается постоянной для земного наблюдателя, а медленно поворачивается по часовой стрелке (если смотреть сверху).

Этот опыт, который теперь называют опытом Фуко, удивляет зрите-

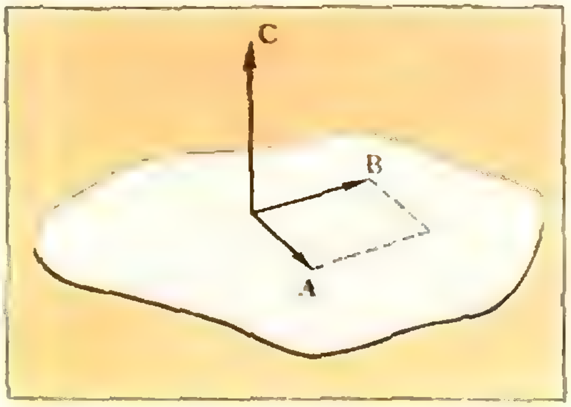


Рис. 5.

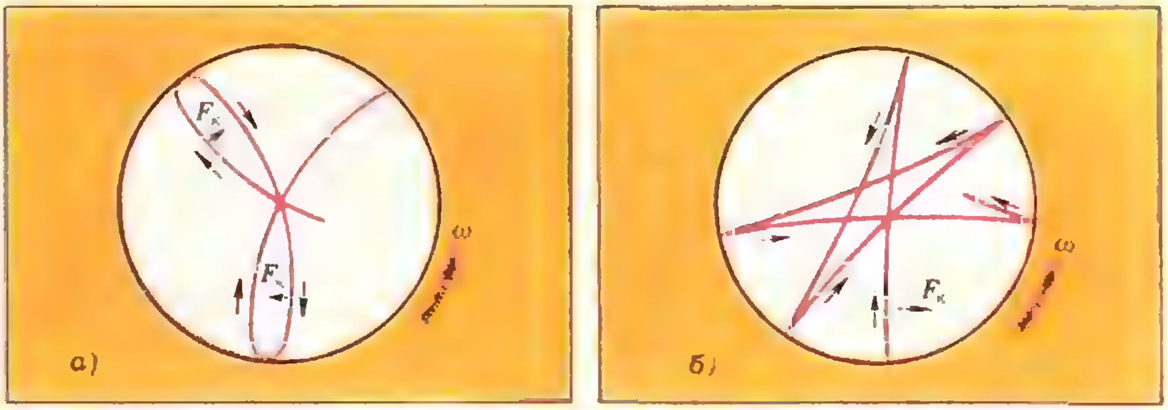


Рис. 6.

лей даже сейчас, а раньше на него смотрели как на чудо. Сейчас мы его очень легко можем объяснить. Пусть, для простоты рассуждений, маятник подвешен на полюсе. С точки зрения неподвижного наблюдателя, находящегося в инерциальной системе отсчета, плоскость колебаний маятника, конечно, неподвижна, а Земля вращается против часовой стрелки. По той же причине след движения шарика на горизонтальной плоскости был не прямой линией, а сложной кривой (рис. 6).

Земной наблюдатель, связанный с вращающейся системой отсчета, объяснит поворот плоскости колебаний действием на шарик силы Кориолиса. При небольших отклонениях маятника от положения равновесия можно считать, что скорость шарика в любой момент перпендикулярна к угловой скорости $\omega_З$ вращения Земли, поэтому кориолисова сила всегда лежит в горизонтальной плоскости и направлена перпендикулярно к скорости шарика вправо, если смотреть по направлению движения шарика. Эта сила и вызывает поворот плоскости колебаний маятника, причем угловая скорость поворота ω как раз равна угловой скорости вращения Земли.

Нетрудно показать, что если маятник подвешен в месте, широта которого равна φ, то угловая скорость будет равна $\omega_З \sin\varphi$, обращаясь в ноль на экваторе. Для этого достаточно найти проекцию $\omega_З$ на нормаль к плоскости горизонта (проведите доказательство до конца).

Картина качания маятника содержит интересные детали. Если мы попытаемся понять, какую же линию вычерчивает маятник Фуко на плоскости, то обнаружим, что форма траектории зависит от того, как маятник начал качаться.

Если маятник начал свое движение из положения покоя (вертикального положения на полюсе), то и при движении он всегда будет проходить через полюс и будет рисовать на плоскости кривую типа изображенной на рисунке 6, *а*.

Если в начальный момент маятник был максимально отклонен, то для инерциального наблюдателя он имел в этот момент отличную от нуля угловую скорость, и значит, для такого наблюдателя маятник качается не в одной плоскости, а выписывает на плоскости, перпендикулярной к плоскости колебаний, эллипс. Наблюдатель на Земле будет видеть траекторию, которую можно описать как поворачивающийся эллипс (рис. 6, *б*). Траектория теперь уже не проходит через полюс.

Отклонение падающих тел

Когда в школе начинают изучать равноускоренное движение, то обязательно решают задачу о падении материальной точки с некоторой высоты H. Решение этой задачи простое. Если точка вначале покоилась, то зависимость пути h, пройденного точкой, от времени выражается формулой $h = \frac{1}{2} gt^2$ (g — ускорение силы тяжести). Скорость у поверхности Земли равна $v_0 = \sqrt{2gH}$.

Если точка движется, напротив, вертикально вверх и имеет вначале (на поверхности Земли) скорость v_0, то время ее полета вверх будет равно $t = \sqrt{2H/g}$, то есть времени падения тела в первой задаче.

При этом, однако, предполагается, что точка все время движется по прямой. Как вы теперь понимаете, такое предположение можно делать только, если не учитывать вращение Земли.

В действительности, с точки зрения наблюдателя в инерциальной системе отсчета тело, брошенное с высоты H, имеет горизонтальную скорость $\omega_3 (H + R) \cos\ \varphi$, где R — радиус Земли, ω_3 — ее угловая скорость, φ — широта места. Падая, тело сохраняет эту скорость и в своем горизонтальном движении будет опережать покоящиеся (относительно Земли) точки (например, окна в доме, если тело падает с крыши) на высотах $h < H$, поскольку эти точки движутся с меньшей скоростью $\omega_3 (h+R)\cos\varphi$.

Попробуем сосчитать, на сколько падающее с высоты H тело отклонится от вертикали к востоку (Земля вращается с запада на восток, и тело обгоняет Землю). Эту задачу проще решить в системе отсчета, связанной с Землей, использовав выражение для силы Кориолиса *).

Итак, пусть тело падает с высоты H, где оно находилось в момент времени $t=0$. Тело будет двигаться равноускоренно, и его вертикальная компонента скорости с течением времени будет изменяться по закону

$$v = gt.$$

Для земного наблюдателя на тело будет действовать горизонтальная составляющая силы Кориолиса, которая будет увеличивать горизонтальную компоненту количества движения тела, отклоняя его к востоку. Запишем уравнение для этого движения:

$$ma = 2m\omega_3 v\cos\varphi,$$

или, учтя зависимость скорости от времени,

$$a = 2\omega_3 \cos\varphi\, gt = At,$$

где $A = 2\omega_3 g\cos\varphi$ — постоянная величина.

С таким уравнением вы в школе не встречались. Если бы a было постоянным, то движение было бы равноускоренным, но у нас ускорение растет линейно со временем. Как в этом случае выражается зависимость пути от времени? Такая задача легко решается, если уметь дифференцировать. Мы попытаемся угадать (а потом проверить) ответ.

Сначала найдем выражение для скорости. В равноускоренном движении $v=v_0+at$ и $a=\text{const}$. Так как теперь a линейно зависит от времени, то разумно положить, что скорость от времени зависит квадратично:

$$v = v_0 + \alpha t + \beta t^2.$$

Сосчитаем ускорение. Для этого найдем скорость в соседний момент времени $t+\Delta t$ $(\Delta t \ll t)$:

$$v = v_0 + \alpha(t+\Delta t) + \beta(t+\Delta t)^2.$$

Вычитая из этого равенства предыдущее и отбрасывая член с $(\Delta t)^2$ ввиду его малости по сравнению с остальными членами, получим

$$a = \frac{v_{t+\Delta t} - v_t}{\Delta t} = \alpha + 2\beta t.$$

Теперь мы видим, что если $a = At$, то $\alpha = 0$, $\beta = \frac{A}{2}$. Тогда (положив еще, что $v=0$ при $t=0$, откуда $v_0=0$)

$$v = \frac{At^3}{2}.$$

Теперь мы можем найти и путь s. Предположим, что

$$s = s_0 + \alpha_1 t + \beta_1 t^2 + \gamma t^3.$$

Это выражение отличается на один лишний член γt^3 от формулы для равноускоренного движения. Запишем пройденный путь к моменту времени $t+\Delta t$ и составим, как и раньше, отношение

$$v = \frac{s_{t+\Delta t} - s_t}{\Delta t} = \alpha_1 + 2\beta_1 t + 3\gamma t^2$$

(здесь мы отбросили члены с $(\Delta t)^2$ и $(\Delta t)^3$). Сравнивая с предыдущим выражением для скорости и полагая еще $s_0=0$, найдем, что

$$\alpha_1 = 0,\ \beta_1 = 0,\ \gamma = \frac{1}{6}\ A$$

и

$$s = \frac{At^3}{6}.$$

Возвращаясь теперь к нашей задаче, мы можем выразить время t через конечную скорость v_0 из закона для вертикальной скорости: $t = \frac{v_0}{g}$. Так как $A = 2\omega_3 g\cos\varphi$, то смещение падающего тела на восток оказывается равным

$$s = \frac{1}{3}\,\frac{\omega_3 \cos\varphi}{g^2}\,v_0^3.$$

Подставьте сами сюда соответствующие числа и вычислите s, если тело падает, например, с высоты 1 *км*. Несколько длиннее выглядят вычисления для тела, брошенного вверх с поверхности Земли. Это упражнение можете сделать сами.

---

*) Ее, конечно, можно решать и в инерциальной системе. Попробуйте это сделать.

ПАРАБОЛА

И. Н. БРОНШТЕЙН

После двух «цариц школьной геометрии» — прямой линии и окружности — парабола, пожалуй, самая простая и в то же время самая важная линия. Обычно парабола не рассматривается на уроках геометрии, она встречается в школе только как график квадратного трехчлена, но эта кривая интересна сама по себе.

В этой статье мы используем некоторые факты и термины из статей «Эллипс» и «Гипербола», помещенных в «Кванте» № 1 и № 3 за этот год.

I АНАЛИТИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАБОЛЫ

Вид параболы

Характерный облик параболы известен всем. Форму параболы принимает струя воды, бьющая из шланга, по параболе летит мяч или камень. Выражаясь языком механики, парабола — это траектория движения материальной точки, брошенной в наклонном или горизонтальном направлении и падающей под действием силы притяжения Земли *).

На рисунке слева изображена не вся парабола, а только ее часть. Всю параболу изобразить невозможно — эта кривая имеет бесконечное протяжение, то есть не может уместиться на ограниченном куске плоскости. Опишем эту линию (рис. 1).

Парабола — плавная кривая, симметричная относительно прямой $Y'Y$ (на рисунке 1 — вертикальной), пересекает ее в одной точке O (эта точка называется *вершиной* параболы) и расположена по одну сторону от перпендикуляра $X'X$ к $Y'Y$ (на рисунке — над $X'X$). Луч OY прямой $Y'Y$, идущий в ту же сторону, называется *осью* параболы. Из плавности и симметрии параболы следует, что прямая $X'X$ касается параболы в ее вершине. Парабола сильнее всего искривлена вблизи вершины; чем дальше от вершины, тем парабола больше распрямляется. С удалением от вершины точки параболы отходят от оси, но все более медленно **).

---

*) Внесем уточнение. По параболической траектории двигалось бы брошенное тело, если бы не существовало сопротивления воздуха. На самом деле траектория падающего тела немного отклоняется от параболы.

**) Например при подъеме на 1 *см* от L_1 до L_1' по оси OY соответствующая точка M_1 параболы отойдет от оси OY на $N_1N_1'=0{,}7$ *см*, а при подъеме на ту же длину от точки L_2, расположенной выше, чем L_1, точка M_2 параболы отойдет по горизонтали только на 0,4 *см*.

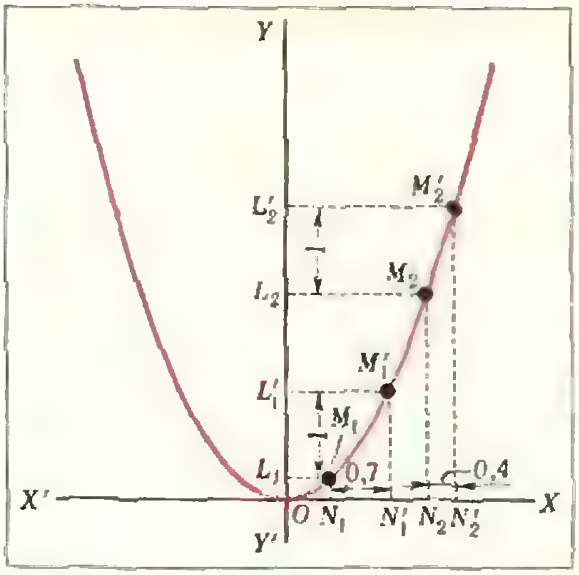


Рис. 1.

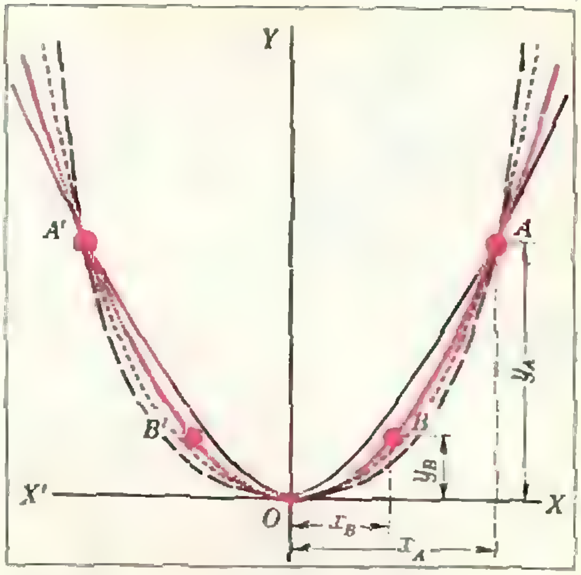


Рис. 2.

Это описание, конечно, не вполне определяет параболу. Существует много кривых, имеющих такой же вид, но лишь некоторые из них имеют право называться параболами.

Из всевозможных линий, изображенных на рисунке 2 и имеющих общую ось OY, вершину O и пару симметричных точек A и A', только одна — красная — является параболой. Она проходит через две «средние» точки B и B' такие, что $x_B = \frac{1}{2}x_A$ и $y_B = \frac{1}{4}y_A$. Это будет установлено из определения параболы.

Определение параболы и первое ее построение по точкам

Из школьного курса известно, что параболой называется график функции $y = ax^2 + bx + c$ при $a \neq 0$. Нам достаточно рассмотреть функцию

$$y = ax^2 \qquad (1)$$

и ограничиться случаем $a > 0$. Добавление слагаемых bx и c не меняет ни формы, ни размеров графика, а только сдвигает его. График же функции (1) при $a < 0$ это — опрокинутый график функции $y = |a|\, x^2$. Поэтому мы *определим параболу как график функции* (1) *при* $a > 0$ (разумеется, параболой является и любая другая кривая, которую можно совместить с этим графиком).

Вместо слов «парабола есть график функции (1)» можно сказать: «уравнение (1) есть уравнение параболы»*). Для параболы (и для любой линии, которая пересекает каждую прямую, параллельную оси $Y'Y$, не более чем в одной точке) оба выражения равноправны. Отметим также принятый оборот речи: вместо слов «парабола, имеющая уравнение $y = ax^2$», говорят кратко: «парабола $y = ax^2$».

Из этого определения параболы можно вывести все особенности ее формы, о которых было сказано: *ее бесконечное протяжение, симметрию,* гладкость, наличие вершины, распрямление параболы по мере удаления от вершины, характер отклонения от оси симметрии, доказательство того, что тело, брошенное под углом к вертикали, движется по параболе. Мы не будем здесь проводить этих доказательств. Остановимся только на том, как получены точки B и B' *на рисунке 2 и как вообще построить* несколько точек параболы, если заданы ее вершины, направление оси и еще одна точка.

---

*) Об уравнении линии см., например, в статье «Эллипс», «Квант», № 1, с. 5.

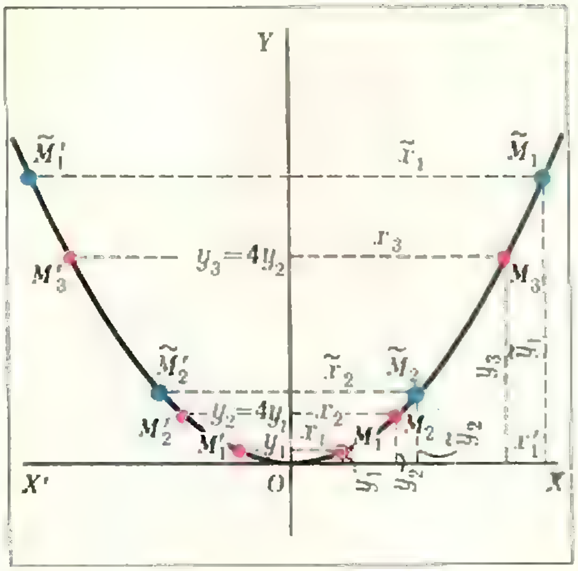


Рис. 3.

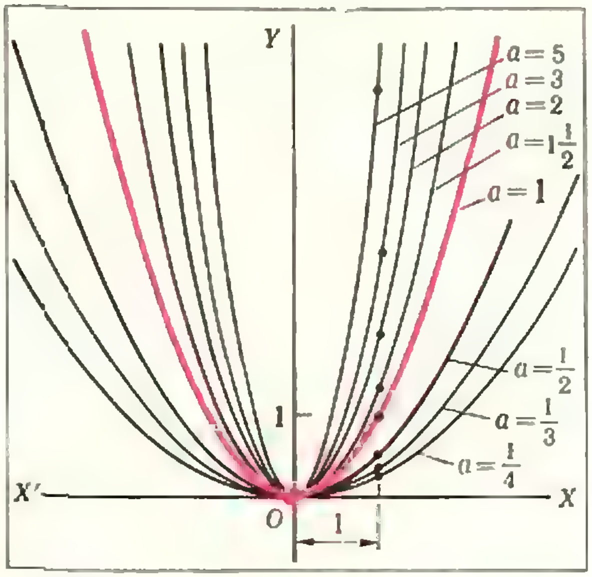


Рис. 4.

Пусть даны: вершина параболы O, ее ось OY и точка M_1, принадлежащая параболе (рис. 3); точка M'_1, симметричная M_1 относительно OY, также лежит на параболе. Если M_1 близка к O, то удвоим $x_1=ON_1$ и учетверим $y_1=OL_1$. (см. рис. 1). Точки M_2 $(2x_1, 4y_1)$ и M'_2 $(-2x_1, 4y_1)$ также принадлежат параболе (докажите). Если же точка $\tilde M_1$ $(\tilde x_1, \tilde y_1)$ была далеко от O, то возьмем точку $\tilde M_2\left(\frac{\tilde x_1}{2}, \frac{\tilde y_1}{4}\right)$ — она тоже лежит на параболе. С полученной точкой M_2 (или $\tilde M_2$) поступаем так же. Получив несколько точек параболы, соединяем их плавной линией от руки или при помощи лекала. Ниже будут указаны и другие способы построения параболы, практически более удобные.

Коэффициент *a* параболы и его роль

Различных парабол — бесконечное множество; каждому значению a соответствует своя парабола *). На рисунке 4 изображено несколько таких парабол — при $a = \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, 1\frac{1}{2}, 2, 3, 5$.

Замечательно, что *все параболы подобны между собой*, а если их расположить так, как на рисунке 4, то и подобно расположены с центром подобия O. Действительно, возьмем две такие параболы $y = ax^2$ и $y = a'x^2$ (рис. 5) и проведем произвольный луч OMM', встречающий параболы соответственно в точках M и M'. Из подобия треугольников ONM и $ON'M'$ имеем, с одной стороны,

$$\frac{OM'}{OM} = \frac{ON'}{ON} = \frac{x'}{x} \text{ или}$$

$$\frac{OM'^2}{OM^2} = \frac{x'^2}{x^2}, \qquad \text{(а)}$$

а с другой,

$$\frac{OM'}{OM} = \frac{N'M'}{NM} = \frac{y'}{y} = \frac{a'x'^2}{ax^2}. \qquad \text{(б)}$$

Разделив (а) на (б), получим $\frac{OM'}{OM} = \frac{a}{a'}$, то есть это отношение — одно и то же для всех лучей OMM'. А это и есть определение подобного расположения двух фигур. У всех парабол одинаковая форма: отличаются они друг от друга только размерами. А размер каждой параболы определяется коэффициентом a в уравнении (1).

---

*) Число a является одним из параметров параболы (определение параметра см. в статье «Гипербола», с. 16.) Но мы намеренно избегаем здесь этого слова, так как для параболы слово «параметр» обычно применяется в специальном смысле (см. ниже).

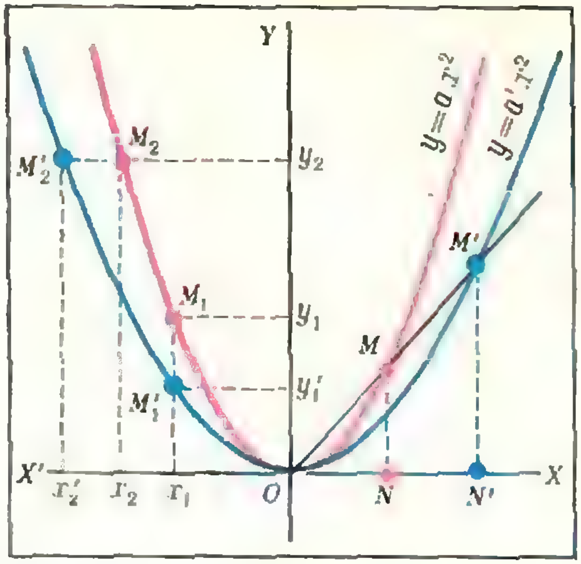


Рис. 5.

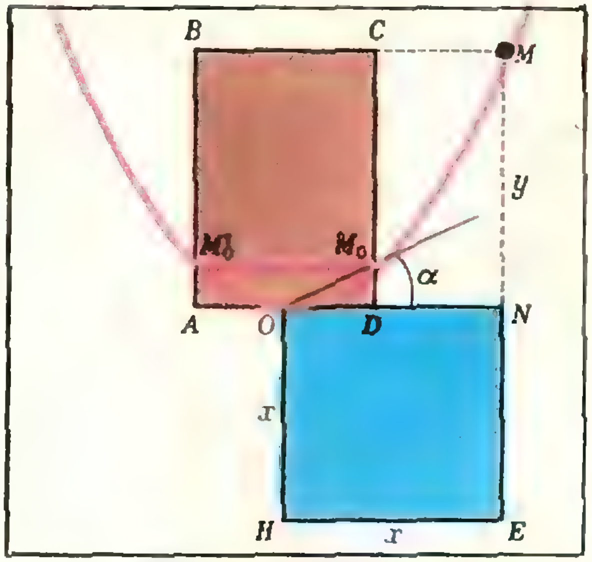


Рис. 6.

Сравнив две параболы $y = ax^2$ и $y = a'x^2$, видим, что при одном x_1 для двух точек парабол $M_1\,(x_1,\ ax_1^2)$ и $M'_1\,(x_1,\ a'x_1^2)$ выше та, у которой коэффициент больше (рис. 5); при одном y_2 из двух точек парабол

$$M_2\left(\sqrt{\frac{y_2}{a}},\ y_2\right) \text{ и } M'_2\left(\sqrt{\frac{y_2}{a'}},\ y_2\right)$$

ближе к оси симметрии та, у которой этот коэффициент больше. Значит, чем меньше a, тем парабола шире, чем больше a, тем парабола у́же. Образно можно назвать число a «коэффициентом худобы» параболы.

II. ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАБОЛЫ

Недостатки аналитического определения

Определение параболы как графика *квадратичной функции можно назвать* аналитическим, так как оно использует вычислительные средства *). При таком определении к параболе присоединяется система координат, вовсе не необходимая при первом знакомстве с кривой. Аналитический метод удобен для изучения свойств рассматриваемого геометрического образа (этот метод составляет предмет аналитической геометрии), но для его определения желательно использовать только сведения из геометрии.

Вторым недостатком является то, что число a (коэффициент худобы), участвующее в определении, имеет сравнительно сложный геометрический смысл *).

Параметр параболы, ее каноническое уравнение и происхождение названия

Второй недостаток можно устранить, заменив в уравнении (1) параметр a другим, имеющим простой геометрический смысл и линейную размерность. Мы видели, что парабола определяется ее вершиной, направлением оси и какой-нибудь одной ее точкой (M_0). Для определенности и удобства дальнейшего изложения возьмем такую точку M_0, чтобы ее расстояние x_0 от оси симметрии OY было вдвое больше расстояния y_0 ее до касательной $X'X$ в вершине (рис. 6).

---

*) Слово «анализ» имеет много значений. *Математическим анализом* в широком смысле слова называют разработку приемов вычислений и их применений к решению вопросов о величинах.

*) Из-за того, что размерность коэффициента a обратна размерности длины: $[a]=[L^{-1}]$.

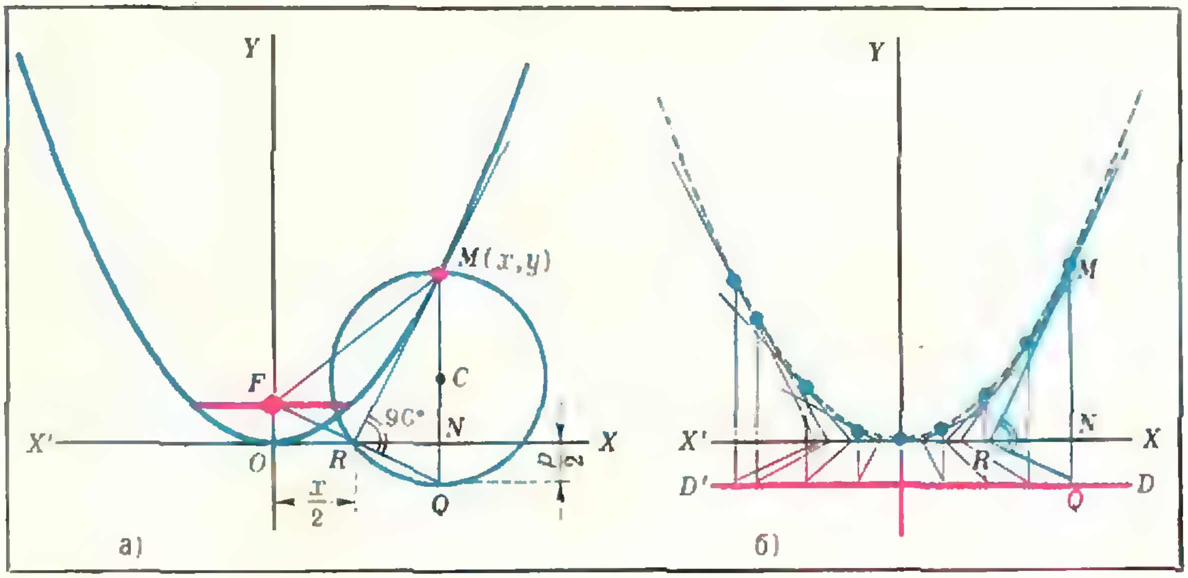


Рис. 7.

Расстояние x_0 обозначим через p; тогда $y_0 = \frac{p}{2}$. Из уравнения (1) имеем $\frac{p}{2} = ap^2$, откуда $a = \frac{1}{2p}$ и уравнение (1) принимает вид $y = \frac{1}{2p} x^2$ или

$$x^2 = 2py. \qquad (2)$$

Оно называется *каноническим уравнением параболы*.

Отрезок p принято называть *параметром* параболы *). Хорда $M_0'M_0 \parallel X'X$ (рис. 6), проходящая на расстоянии $\frac{p}{2}$ от касательной $X'X$ в вершине, имеет длину $2p$; будем называть ее *главной хордой* параболы; ее значение выяснится позже.

Уравнению (2) можно дать такое геометрическое истолкование. Для любой точки $M(x, y)$ параболы площадь прямоугольника $ABCD$, одна сторона которого равна главной хорде $2p$, а другая — ординате y, равна площади квадрата $ONEH$, построенного на абсциссе.

Примерно в такой форме древнегреческие геометры, не знавшие языка формул и буквенных обозначений, выражали равенство (2).

Построение прямоугольника с заданной стороной, равновеликого данному квадрату, древние греки называли «прикладыванием данного отрезка к квадрату». Слово «прикладывание» по гречески — *parabole* — отсюда и происхождение названия кривой.

Другой способ построения точек параболы. Директриса

Решим и мы задачу на «прикладывание», немного видоизменив ее. Это решение даст новый способ построения точек параболы.

Представим равенство (2) в виде

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{p}{2} \cdot y, \qquad (2')$$

то есть «приложим» отрезок $\frac{p}{2}$ к квадрату со стороной $\frac{x}{2}$. Так как $\frac{x}{2}$ — *средняя пропорциональная для* $\frac{p}{2}$ *и* y, то построение y по $\frac{p}{2}$ и $\frac{x}{2}$ сводится к использованию теоремы о высоте прямоугольного треугольника, опущенного на гипотенузу. Для построения ординаты точки M параболы (2') по ее абсциссе $ON = x$ (рис. 7, *а*) проводим отрезок $NQ \perp X'X$ длиной $\frac{p}{2}$ в сторону, противоположную на-

---

*) Точнее, p следовало бы назвать *фокальным параметром* параболы по причине, которая скоро выяснится.

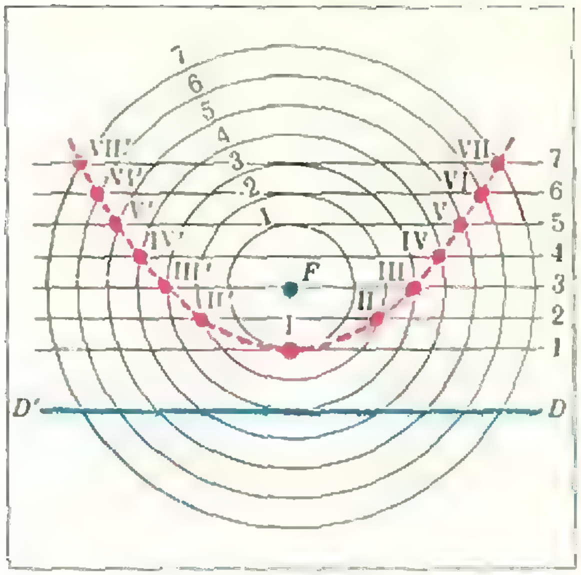


Рис. 8.

правлению оси OY, соединим Q с серединой R отрезка ON и проведем $RM \perp QR$ до пересечения M с продолжением QN за точку N. Точка M принадлежит параболе.

Так можно поступить с любой точкой N на оси $X'X$. Для простоты построения других точек сразу проведем прямую $D'D$ параллельно $X'X$ на расстоянии $\frac{p}{2}$ от нее по другую сторону от главной хорды (рис. 7, *б*). Эта прямая называется *директрисой* (по-русски — направляющая) параболы. Восставляем из любой точки N на оси $X'X$ перпендикуляр к ней до пересечения с директрисой в точке Q и затем, поступая указанным образом, получаем точку M. Советуем читателю получить ряд точек параболы этим построением *).

Фокус и фокальное свойство параболы

Из этого способа построения точек параболы вытекает наиболее замечательное ее свойство, которое часто принимается за определение параболы.

Обратим внимание на точку F пересечения прямой QR и главной хорды (см. рис. 7, *а*). Легко сообразить, что эта точка лежит и на оси симметрии OY. Действительно, треугольники RNQ и ROF равны, как прямоугольные треугольники с одинаковыми катетами ($NQ = OF$, $OR = RN$). Поэтому какую бы точку N мы ни взяли, построенная по ней прямая QR пересечет главную хорду в ее середине F. Теперь ясно, что $\triangle FMQ$—равнобедренный. Действительно, отрезок MR является одновременно и медианой и высотой этого треугольника. Отсюда следует, что $MF = MQ$. *Расстояние от любой точки параболы до середины главной хорды равно ее расстоянию до директрисы.* Середина главной хорды параболы приобретает таким образом особое значение для параболы; ее называют *фокусом* параболы *), а доказанное свойство — *фокальным свойством параболы.* Вершина параболы является серединой перпендикуляра, опущенного из фокуса на директрису.

Справедливо и обратное положение: указанным свойством обладают только точки параболы (попробуйте доказать это самостоятельно).

Таким образом, *парабола — это множество точек, одинаково удаленных от фокуса и директрисы.* Это характеристическое свойство параболы — наиболее простое ее геометрическое определение. На этом определении основан третий способ построения точек параболы (рис. 8). Построим серию концентрических окружностей с центром в фокусе F (начиная с радиуса $\frac{p}{2}$) и серию прямых, параллельных директрисе (начиная с той, которая находится на расстоянии $\frac{p}{2}$ от директрисы), чтобы радиусы и эти расстояния возрастали на одну и ту же величину. Точки пе-

---

*) Интересно, что отрезок RM является *касательной* к параболе в точке M. Доказательства этого мы здесь давать не будем.

*) Фокус (*focus*) по-латински — очаг. Происхождение этого термина будет объяснено в следующем номере «Кванта».

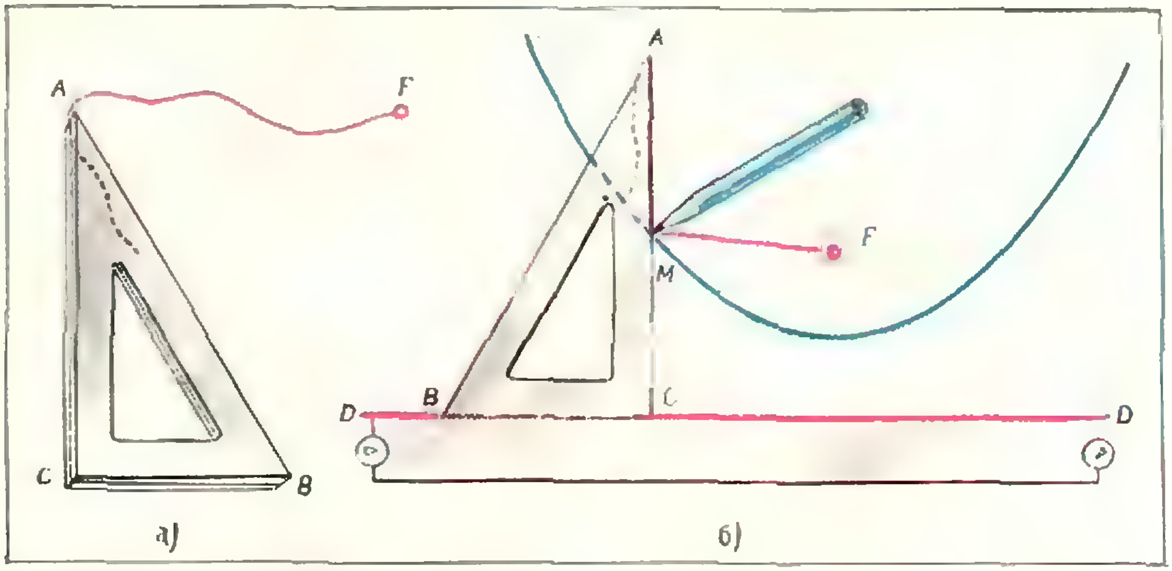


Рис. 9.

ресечения соответствующих окружности и прямой лежат на параболе.

Параболограф

Нетрудно изготовить прибор (назовем его параболографом) для вычерчивания дуги параболы любого параметра непрерывным движением (и притом — наиболее характерной части параболы, содержащей вершину). Параболограф состоит из двух одинаковых угольников и нити. Чем больше длинный катет угольников, тем больше будет вычерченная дуга. Кроме параболографа для вычерчивания понадобятся линейка и 3 канцелярские кнопки.

Склейте вместе оба угольника (рис. 9, *а*), проложив предварительно между ними нить так, чтобы одна ее часть была прочно вклеена, а другая, свободная, выходила из вершины *A* меньшего острого угла. На свободной части нити сделайте узелок с маленькой («точечной») петлей в такой точке *F* нити, чтобы длина этой части *AF* равнялась длине большего катета *AC* угольника *). Затем отрежьте остаток нити за узелком. Параболограф готов.

На листе бумаги начертим фокус и директрису параболы. Приложим к директрисе линейку так, чтобы она легла по другую сторону от фокуса. Зажмем линейку между двумя кнопками, вколотыми у ее концов, вденем острие третьей кнопки в петлю *F* нити и вколем эту кнопку в фокус (рис. 9, *б*).

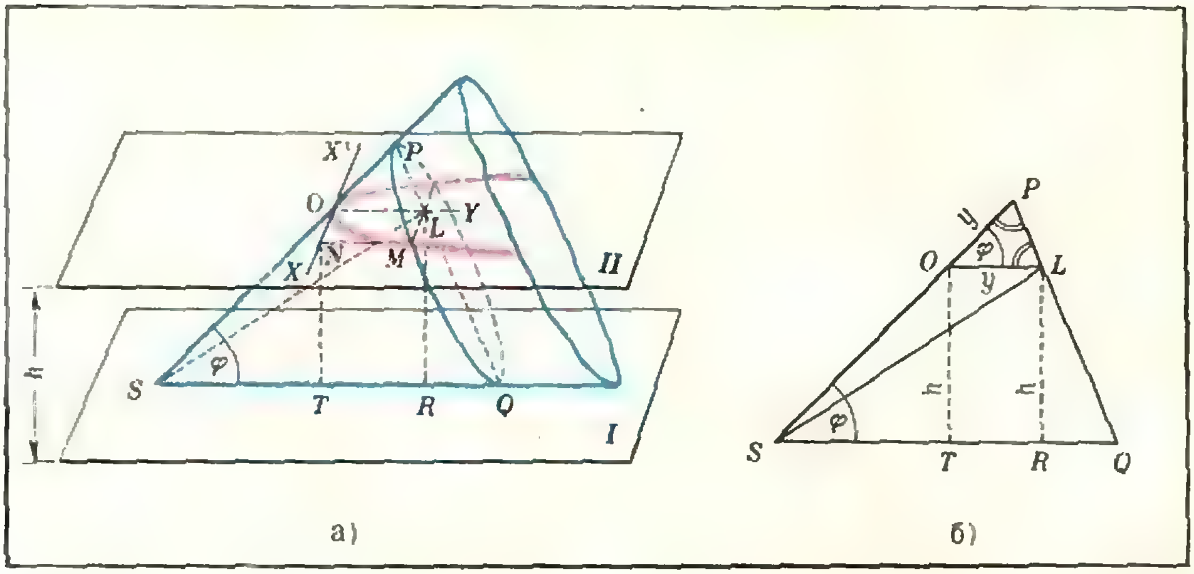
Приложим параболограф коротким катетом к линейке-директрисе. Острием карандаша прижмем нить к длинному катету в его точке *M*, чтобы нить была натянута. Точка *M* лежит на параболе, так как $AC = AM + MF$ и $MC = MF$. Если теперь одной рукой двигать параболограф вдоль неподвижной линейки, а другой прижимать карандашом нить к длинному катету, то острие карандаша опишет дугу левой половины параболы. Перевертывая параболограф другой стороной, вычертим вторую половину.

III. ПАРАБОЛА — КОНИЧЕСКОЕ СЕЧЕНИЕ

Пересекая поверхность прямого кругового конуса плоскостью, параллельной одной из его образующих, мы получим в сечении параболу.

---

*) *Рекомендуется сначала сделать на нити узелок с петлей, а затем, отмерив от узелка F длину FA=AC, вклеить остаток нити между угольниками.*



а) б)

Рис. 10.

Докажем это. Положим конус на горизонтальную плоскость I (рис. 10, а). Введем обозначения: S — вершина конуса, φ — его осевой угол, SQ — образующая, вдоль которой конус касается плоскости I.

Пересечем конус плоскостью II, параллельной I (и, следовательно, параллельной образующей SQ), на высоте h (расстояние между плоскостями). Нужно доказать, что плоскость II пересекает конус по параболе.

Проведем через образующую SQ и через ось конуса вертикальную плоскость SQP, изображенную отдельно на рисунке 10, б; она пересекает плоскость II по прямой OY — оси симметрии исследуемого сечения. Через точку O встречи этой прямой с конусом проведем в плоскости II прямую $X'X \perp OY$ и примем $X'X$ и OY за оси координат. Произвольная точка M нашего сечения имеет в этой системе координат абсциссу $ON = x$ и ординату $NM = OL = y$. Нам нужно найти уравнение линии сечения в этой системе координат и показать, что оно имеет вид $x^2 = 2py$.

Через M проведем круговое сечение конуса QMP, перпендикулярное к его оси. Из прямоугольного треугольника SML имеем

$$LM^2 = SM^2 - SL^2 = SP^2 - SL^2. \qquad (а)$$

Очевидно,

$$SP = SO + OP = SO + OL = \frac{h}{\sin\varphi} + y. \qquad (б)$$

Из треугольника SOL

$$SL^2 = SO^2 + OL^2 - 2SO\cdot OL\cos(180^\circ - \varphi) = \left(\frac{h}{\sin\varphi}\right)^2 + y^2 + \frac{2hy}{\sin\varphi}\cos\varphi. \qquad (в)$$

Подставляя (б) и (в) в (а), получаем

$$x^2 = \left[\left(\frac{h}{\sin\varphi}\right)^2 + y^2 + \frac{2hy}{\sin\varphi}\right] - \left[\left(\frac{h}{\sin\varphi}\right)^2 + y^2 + \frac{2hy}{\sin\varphi}\cos\varphi\right] = 2h\,\frac{1-\cos\varphi}{\sin\varphi}\,y.$$

Обозначая $h\cdot\frac{1-\cos\varphi}{\sin\varphi}$ через p, имеем $x^2 = 2py$. В сечении получается парабола с параметром p.

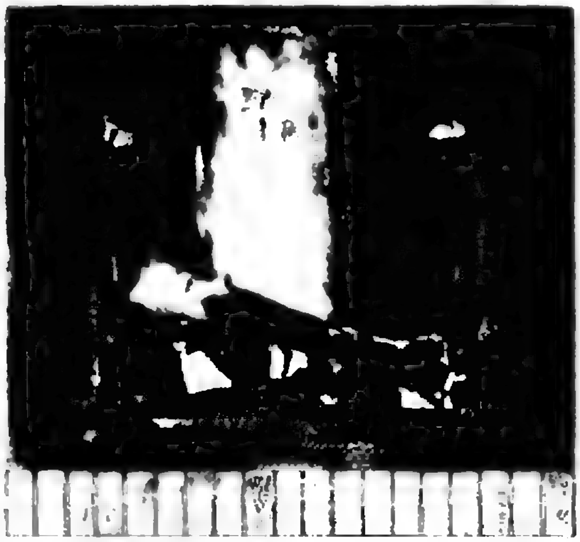
В частности, если осевой угол конуса φ прямой, то $p = h$. Таким образом, если конус с прямым углом в осевом сечении пересекается плоскостью, перпендикулярной к одной из его образующих, то в сечении получается парабола, параметр которой равен расстоянию от вершины конуса до плоскости сечения. Интересно, что Менехм, открывший около 360 г. до нашей эры эллипс, гиперболу и параболу, получил их как сечения кругового конуса соответственно с острым, тупым и прямым осевым углом плоскостью, перпендикулярной к одной из образующих, и они были впервые названы *сечениями остроугольного, тупоугольного и прямоугольного конуса*. Современные названия этих кривых были даны позднее Аполлонием.

* * *

В статье приведены только начальные сведения о параболе. Дальнейшие ее свойства, общие для эллипса, гиперболы и параболы, будут рассмотрены в статье «Общие свойства конических сечений».

ЗАЧЕМ ТОПЯТ ПЕЧИ?

В.Н. ЛАНГЕ



Если спросить специалиста по теплотехнике и человека, не искушенного в этой науке, зачем мы топим печи зимой, то первый ответит, возможно: для того, чтобы повысить внутреннюю энергию воздуха в комнате; тогда как второй почти наверняка выразится проще: чтобы в комнате стало теплее. И неспециалист даст более точный ответ.

Как это ни кажется на первый взгляд неправдоподобным, внутренняя энергия воздуха в помещении после сгорания дров в печи останется неизменной.

Предположим, что поздней осенью вы приехали на дачу. В комнатах около 0 °С, и чтобы согреться, вы решили протопить печь. Пока столбик в термометре поднимается к отметке 20°, посчитаем, как изменится за это время внутренняя энергия воздуха в комнатах.

При условиях, близких к нормальным (то есть при температуре, не очень сильно отличающейся от 0 °С, и давлении порядка 10^5 *н/м*^{2}), воздух подобен идеальному газу, внутренняя энергия которого пропорциональна массе m и абсолютной температуре T:

$$U = \alpha m T,$$

(α — коэффициент пропорциональности, постоянный для данного газа).

При протапливании помещения воздух нагревается, расширяется, и часть его выходит через неплотно прикрытую дверь, поры и щели в стенах, так что масса воздуха в комнатах меняется. Объем комнат и давление воздуха при этом остаются неизменными. Поэтому изменение внутренней энергии воздуха после протапливания можно записать следующим образом:

$$\Delta U = U_2 - U_1 = \\ = \alpha m_2 T_2 - \alpha m_1 T_1 = \\ = \alpha (m_2 T_2 - m_1 T_1).$$

Воспользуемся для дальнейшего решения уравнением Клапейрона — Менделеева

$$PV = \frac{m}{\mu} RT.$$

Поскольку, как мы уже отметили, давление в комнате остается все время равным внешнему и объем комнат не меняется, а меняется только масса воздуха, получаем

$$m_2 T_2 = m_1 T_1 = \frac{PV\mu}{R} = \mathrm{const}.$$

Стало быть, после сгорания дров внутренняя энергия воздуха в комнатах действительно не меняется, то есть все выделившееся тепло «уходит» через щели на улицу.

Зачем же в таком случае мы все же протапливаем жилые помещения? Дело в том, что, хотя для нас совершенно несущественна суммарная внутренняя энергия воздуха в комнатах, наше тело очень хорошо чувствует температуру, которая определяется энергией, приходящейся на одну молекулу.

Немецкий астрофизик Р. Эмден в 1938 году отметил, что протапливать помещения необходимо по той же причине, по которой жизнь на Земле стала бы невозможной без постоянного притока солнечного тепла. И дело заключается не в количестве падающей энергии, которая будет снова излучена вплоть до пренебрежимо малой доли, подобно тому как человек не меняет своего веса, несмотря на принятие пищи. Просто условия нашего существования требуют определенной температуры, для достижения которой мы и топим печи.

Из научного юмора, или электричество и жизнь

В весьма серьезных научно-технических журналах встречаются сообщения, которые могли бы существенно пополнить сборники типа «Физики шутят». Иногда шутка маскируется наукообразным слогом, и бывает, что материал попадает в картотеки, указатели, составители которых вовсе не думали шутить.

В приводимой ниже заметке Тома Стивенсона из американского журнала «Electronic Design News» юмор фактически не скрывается, но чтобы разоблачить «парадокс Стивенсона», нужно вспомнить кое-что из основ учения об электричестве. Вот что пишет Т. Стивенсон в заметке «Генератор высокого напряжения».

«Работая недавно над статьей, я отвлекся из-за одной интересной мысли. Возьмем два больших медных диска. Прикрепим к каждому из них провод и изолирующую рукоятку. Дадим по рукоятке двум мальчикам.

Далее, пусть мальчики держат диски на очень близком расстоянии, но так, чтобы они не касались друг друга. Зарядим получившийся конденсатор от 12-вольтового автомобильного аккумулятора. Отсоединим аккумулятор. Если мальчики будут спокойно стоять, то напряжение между дисками останется равным 12 вольтам. Но что произойдет, когда они будут двигаться?

Из элементарного уравнения U (напряжение) $= \frac{Q\ \text{(заряд)}}{C\ \text{(емкость)}}$ видно, что если они вдвое уменьшат расстояние между дисками, то напряжение также уменьшится вдвое, потому что заряд не может измениться, а емкость удвоится.

(Продолжение см. с. 24).

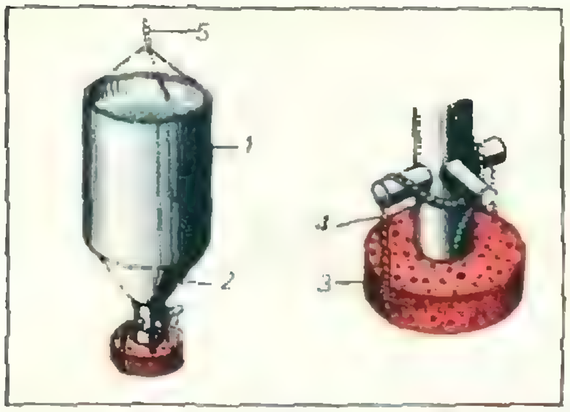


Рис. 1. Сосуд для опыта. *1* — цилиндрический сосуд; *2* — воронка; *3* — мягкая резина на твердой основе; *4* — нить; *5* — двойная струна для бадминтона.

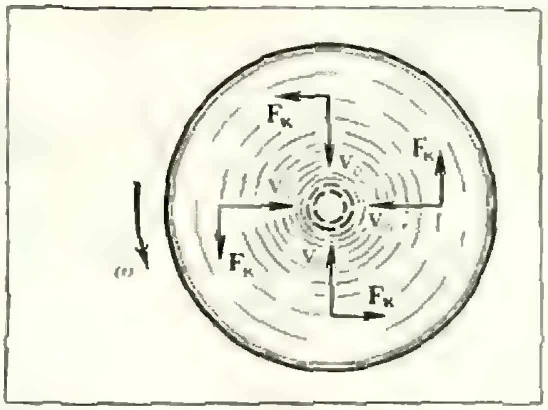


Рис. 2

торая в конечном итоге приводит к вращению сосуда с водой, со временем уменьшается, то в какое-то время действие момента силы Кориолиса компенсируется действием момента сил деформации, и в дальнейшем силы деформации превалируют над силой Кориолиса. В результате скорость вращения сосуда уменьшается, но сосуд по-прежнему вращается в направлении вращения Земли.

В некоторый момент времени угловая скорость вращения сосуда становится равной нулю, и затем, под действием момента упругих сил деформации, сосуд начинает вращаться в противоположную сторону. Угловая скорость вращения растет. Теперь начинает уменьшаться сила деформации (нить раскручивается). Действие момента силы Кориолиса (эта сила по-прежнему уменьшается) теперь направлено против вращения сосуда и ведет к уменьшению скорости вращения . . . В какой-то момент времени убывающий момент сил деформации «догонит» по величине момент силы Кориолиса, после этого скорость вращения начнет уменьшаться и т. д.

При проведении опыта мы пользовались цилиндрическим сосудом диаметром 25 *см* и высотой 30 *см* (см. рис. 1). Сосуд оканчивался воронкой с диаметром отверстия 8 *мм*. На сточную трубку воронки была надета муфта с четырьмя симметрично расположенными винтиками. К концу трубки с помощью нитки, перекинутой через два противоположных винтика, плотно прижималась мягкая резинка на твердой основе. Нитка завязывалась узлом на одном из винтиков. Сосуд мы подвешивали к потолку на двойной струне для бадминтона длиной 2,5 *м* (можно взять два шнура, закрученных в противоположные стороны, чтобы устранить побочные явления при вращении). В сосуд почти до верхнего края наливали воду, и когда она успокаивалась, узел нити пережигали. Во всех случаях мы наблюдали, что во время вытекания воды через отверстие в воронке сосуд вращался сначала против часовой стрелки, а потом — в противоположную сторону.

Опыт можно проводить также со стеклянными воронками, подвешенными на двойных тонких лесках. Но при этом оказывается, что угол поворота сосуда существенно зависит от диаметра отверстия воронки. С одной стороны, действие силы Кориолиса проявляется тем заметнее, чем меньше отверстие. Но с другой стороны, при уменьшении отверстия повышается роль вязкости жидкости. Нам удалось наблюдать заметное вращение воронки, вмещающей 1 *л* воды, при диаметре отверстия 5 *мм*.

М. И. Емельянов,
А. М. Жарков,
В. М. Загайнов,
В. С. Маточкин

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

Квадратичный треугольник и непрерывные цепочки

А. П. Винниченко

Вероятно, некоторые читатели слышали о спирали Улама (о ней рассказывается, например, в книге М. Гарднера «Математические досуги»). Если же кто-то ничего не знает об этой спирали — не беда; вот вкратце ее история. Однажды американский математик Станислав Улам, присутствуя на каком-то неинтересном заседании, нарисовал от скуки на листке клетчатой бумаги спираль, пронумеровал клетки этой спирали и обвел кружочками простые числа *). У Улама получилась картинка, изображенная на рисунке 1: простые числа в его спирали как бы выстраивались по диагоналям. Сейчас мы расскажем об ином порядке записи натурального ряда, при котором простые числа все равно размещаются как бы по диагоналям.

Составим «квадратичный треугольник»: напишем в первой строке только одно число — 1, во второй — числа от 2 до 4, в третьей — числа от 5 до 9 и так далее, обрывая строку всякий раз, как только получится квадрат какого-то натурального числа (см. рис. 2). Таким образом, первая строка у нас кончается 1^2, вторая — 2^2, третья — 3^2 и так далее (отсюда и название образующейся фигуры — «квадратичный треугольник»; докажите, что каждая строчка квадратичного треугольника длиннее предыдущей ровно на 2 клеточки).

Давайте теперь и мы обведем простые числа кружочками — так, как это сделано на рисунке 3.

Замечаете ли вы, что и здесь простые числа «выстраиваются» вдоль диагоналей (подумайте, кстати, почему они оказываются не на всех диагоналях, а только через одну — ис-

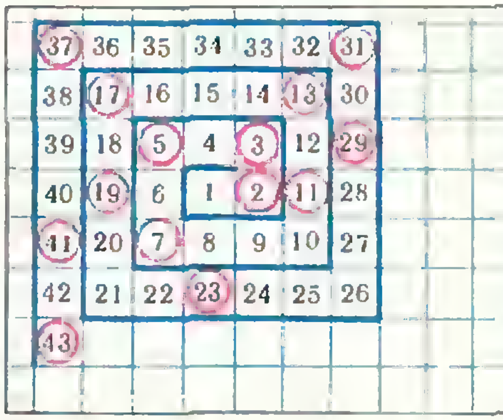

37 36 35 34 33 32 31
38 17 16 15 14 13 30
39 18 5 4 3 12 29
40 19 6 1 2 11 28
41 20 7 8 9 10 27
42 21 22 23 24 25 26
43

Рис. 1.

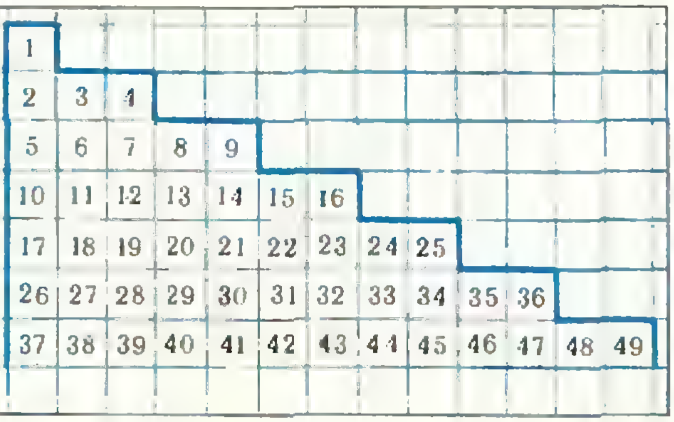

1
2 3 4
5 6 7 8 9
10 11 12 13 14 15 16
17 18 19 20 21 22 23 24 25
26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36
37 38 39 40 41 42 43 44 45 46 47 48 49

Рис. 2.

---

*) Натуральное число (не равное 1) называется простым, если оно делится только на себя и единицу.

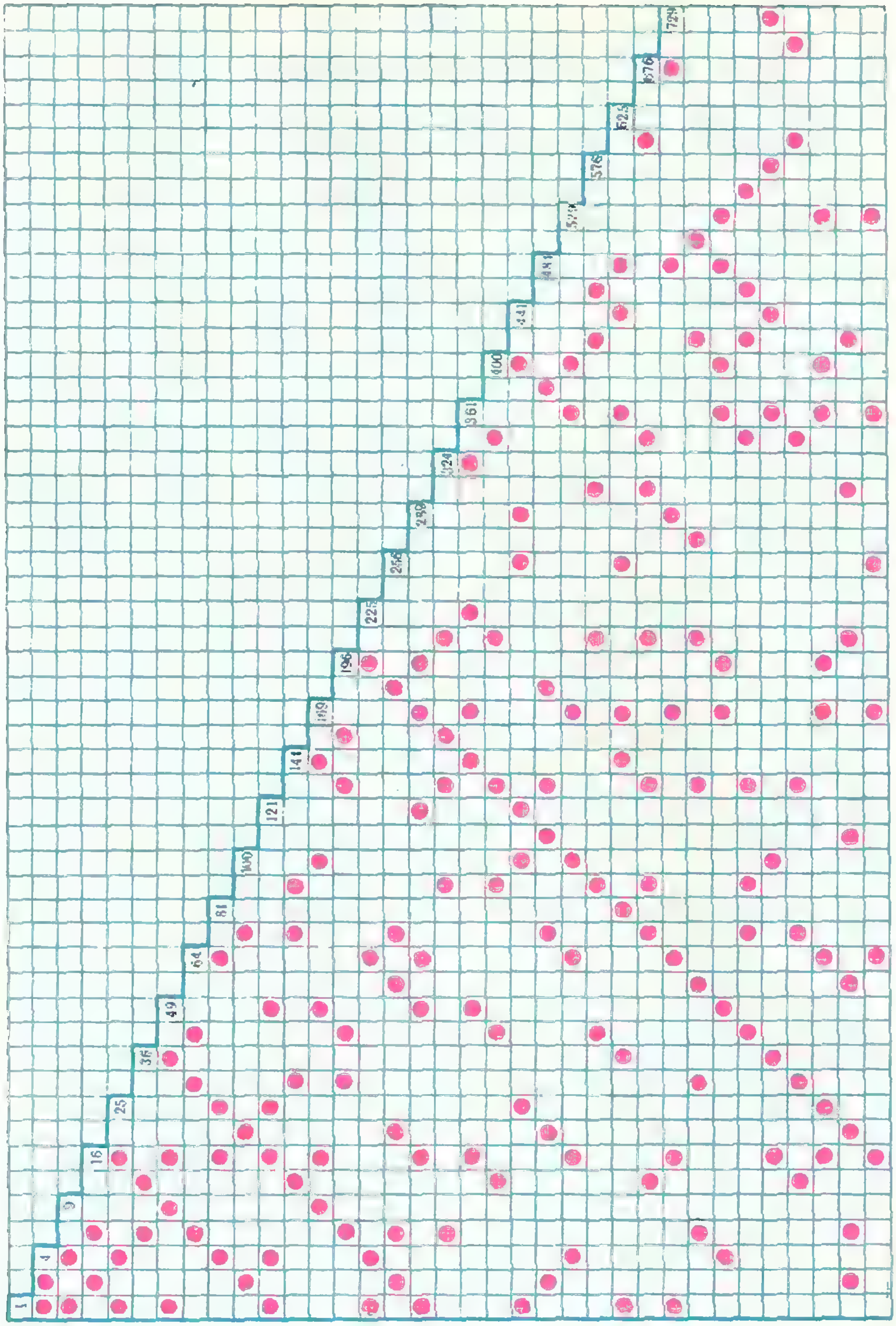


Рис. 3.

ключение составляет лишь число 2)? Но помимо этого на нашей картинке получились «непрерывные цепочки», тянущиеся от «гипотенузы» «треугольника» до его «катета» — *на рисунке* 3 таких цепочек шесть. Выпишем простые числа, стоящие вдоль этих цепочек:

2
3, 5
7, 11, 17
23, 31, 41, 53, 67, 83, 101
47, 59, 73, 89, ..., 227, 257
223, 251, 281, 313, ..., 1523, 1601

Оказывается, все эти числа подчиняются одному и тому же закону:

1-я цепочка — это значение многочлена $x^2 + x + 2$ при $x = 0$ (при $x = 1$ получаем 2^2),

2-я цепочка — *это значения многочлена* $x^2 + x + 3$ при $x = 0, 1$ (при $x = 2$ получаем 3^2),

3-я цепочка — это значения многочлена $x^2 + x + 5$ при $x = 1, 2, 3$ (при $x = 4$ получаем 5^2),

4-я цепочка — это значения многочлена $x^2 + x + 11$ при $x = 3, 4, 5, \ldots, 8, 9$ (при $x = 10$ получаем 11^2),

5-я цепочка — это значения многочлена $x^2 + x + 17$ при $x = 5, 6, \ldots, 14, 15$ (при $x = 16$ получаем 17^2),

6-я *цепочка — это значения многочлена* $x^2 + x + 41$ при $x = 13, 14, \ldots, 38, 39$ (при $x = 40$ получаем 41^2).

Многочлены вида $x^2 + x + k$ были известны еще Эйлеру; формула $x^2 + x + k$ для $k = 2, 3, 5, 11, 17, 41$ дает простые числа при всех $x = 0, 1, \ldots, (k-1), (k-2)$.

Таким образом, наши непрерывные цепочки — это «хвосты» значений многочленов $x^2 + x + k$, где $k = 2, 3, 5, 11, 17, 41$. Существуют ли более длинные непрерывные цепочки? Пока это неизвестно.

Вернемся к нашему квадратичному треугольнику — перенесем на него *«решето Эратосфена»* (см. «Квант» № 1 за 1974 год): возьмем какое-нибудь натуральное число и зачеркнем все числа, делящиеся на него. Мы получим какой-то узор; например, для числа 2 — это «шахматный» *узор (рис. 4). Для тройки узор получается* уже посложнее (см. рис. 5). Однако в этих зачеркиваниях есть закономерность. Так, если сделать из картона квадрат со стороной 2 и вырезать из него два квадратика, помеченных на рисунке 6 крестиками, то с помощью такого штампа можно вычеркнуть из квадратичного треугольника все числа, делящиеся на 2.

Действительно:

1) приложим штамп так, чтобы над ним виднелась только единичка;

2) зачеркнем числа в отверстиях;

3) *передвинем штампик* вниз, вправо или влево на две клеточки;

4) опять зачеркнем числа в отверстиях и так далее.

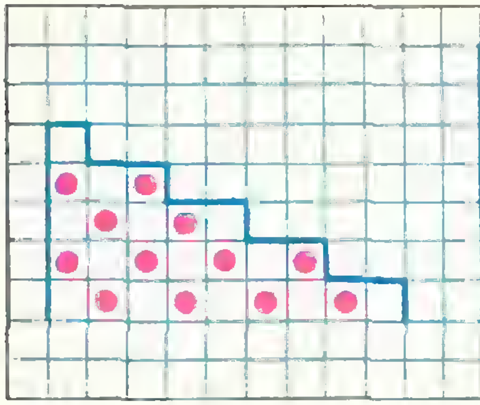


Рис. 4.

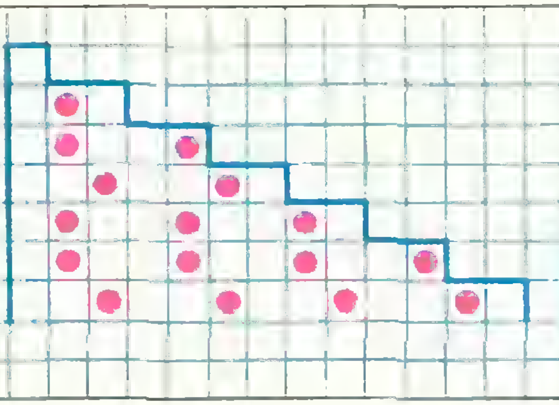


Рис. 5.

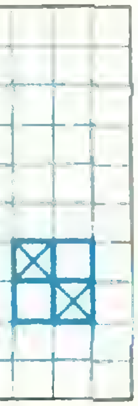


Рис. 6.

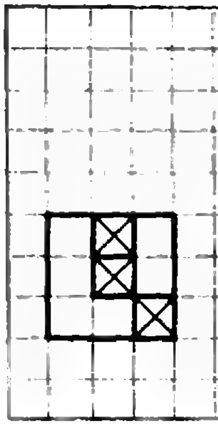


Рис. 7.

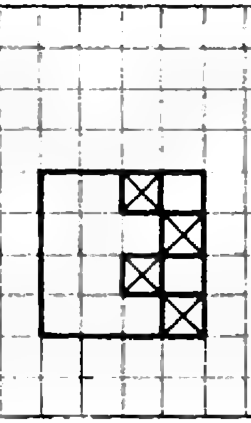


Рис. 8.

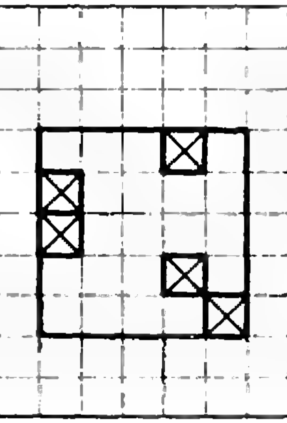


Рис. 9.

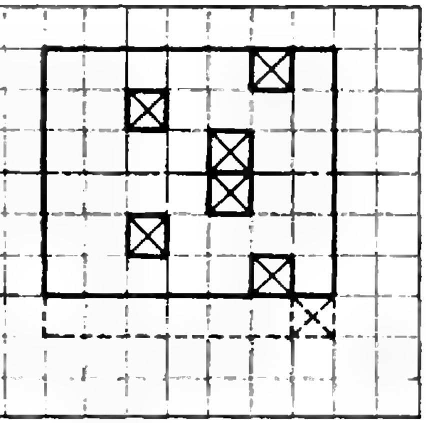


Рис. 10.

Для тройки нужный штамп изображен на рисунке 7, для четверки — на рисунке 8, для пятерки — на рисунке 9.

В заключение мы предлагаем читателям несколько задач.

1. Докажите, что, пользуясь штампом в виде квадрата $k \times k$ (где k — любое натуральное число), на квадратичном треугольнике можно зачеркнуть все числа, делящиеся на k.

2. Докажите, что у штампа $k \times k$ должно быть ровно k отверстий.

3. Докажите, что в каждой строке штампа должно быть по отверстию.

4. Докажите, что у штампа всегда будут отверстия в предпоследней клеточке первой строки и в последней клеточке последней строки.

5. Докажите, что если у штампа отрезать последнюю строчку, то оставшиеся отверстия будут расположены симметрично относительно горизонтальной оси (пример со штампом для семерки см. на рисунке 10).

Из научного юмора, или электричество и жизнь

(Начало см. с. 18)

Рассуждая точно так же, получим, что, если увеличить вдвое расстояние между дисками, то напряжение должно удвоиться, потому что емкость уменьшилась вдвое.

Я думаю снабдить такими дисками двух босых мальчишек, и как только пойдет дождь, зарядить диски и пустить мальчишек пятиться в противоположных направлениях. По моим расчетам, когда они сделают шагов по десять, произойдет пробой с оглушительным треском и ослепительной вспышкой, и двое этих мальчишек уже никогда не будут мне мешать, когда я буду пытаться писать».

Такую участь уготовил Стивенсон бедным мальчишкам... Рассуждения об увеличении напряжения между обкладками плоскопараллельного конденсатора при увеличении расстояния между ними верны. Но только пробой диэлектрика (в данном случае воздуха) обусловливается не напряжением, а напряженностью электрического поля, а она в этом «коварном» эксперименте постоянна:

$$E\ (\text{напряженность}) = \frac{U\ (\text{напряжение})}{d\ (\text{расстояние})}.$$

Более того, по мере увеличения расстояния между обкладками конденсатора однородность поля нарушается, и напряженность уменьшается.

Предлагаем вам самостоятельно провести все вычисления в «эксперименте Стивенсона» (в приближении однородного поля): кроме напряжения и напряженности электрического поля определить зависимость энергии системы и силы притяжения между дисками от расстояния между ними.

(Окончание см. с. 47)

задачник кванта

Решения задач из этого номера можно посылать не позднее 1 июня 1975 г. по адресу: 117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15, издательство «Наука», журнал «Квант». После адреса на конверте напишите, решения каких задач вы посылаете, например: «Задачник «Кванта», М316, М317» или «... Ф328». Решения задач по каждому из предметов (математике и физике), а также новые задачи просьба присылать в отдельных конвертах. Задачи из разных номеров журнала присылайте также в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки ваших решений). Условия оригинальных задач, предлагаемых для публикации, присылайте в двух экземплярах вместе с вашими решениями этих задач (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «... новая задача по математике»). После формулировки задачи мы обычно указываем, кто предложил нам эту задачу. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Наиболее трудные задачи отмечены звездочкой.

Задачи

М316—М320; Ф328—Ф332

М316. а) Докажите, что сумма квадратов k последовательных натуральных чисел не может быть квадратом целого числа, если k равно 3, 5, 7 или 9.

б) Придумайте 11 последовательных натуральных чисел, сумма квадратов которых есть квадрат целого числа.

Э. Г. Готман

М317*. На некоторой планете каждая страна граничит не более чем с 7 другими. В каждой стране имеется запас золота. Требуется распределить золото так, чтобы каждые две страны, граничащие друг с другом, отличались по количеству золота не более чем в 13 раз. Докажите, что распределение золота можно организовать так, чтобы каждая страна лишилась не более половины имевшегося у нее золота.

Г. В. Егоров

М318. В треугольнике ABC проведены биссектрисы $[AD]$ и $[CE]$. Докажите, что $|CE|\cdot|AB|=|AD|\cdot|BC|$ тогда и только тогда, когда выполняется хотя бы одно из двух условий: 1) $|AB|=|BC|$; 2) $\widehat{ABC}=60^\circ$.

А. П. Савин

М319. На плоскости заданы окружность γ и точка P внутри нее. Рассмотрим множество тетраэдров $ABCD$, у которых все четыре грани конгруэнтны, причем треугольник ABC вписан в окружность γ так, что его медианы пересекаются в точке P.

а) При каком положении точки P внутри γ такие тетраэдры существуют?

б) Докажите, что вершины D таких тетраэдров расположены в одной из двух фиксированных точек пространства (симметричных относительно данной плоскости)

И. Ф. Шарыгин

М320*. Какие выпуклые n-угольники можно разбить на треугольники так, чтобы никакие два из треугольников разбиения не имели общих (полностью совпадающих) сторон? (На рисунке 1 показано, что треугольник так разбить можно.)

А. Печковский

Ф328. Жесткие стержни длины l_1 и l_2 соединены шарнирно в точке A. Их свободные концы удаляются друг от друга равномерно со скоростями соответственно v_1 и v_2, направленными вдоль одной прямой (рис. 2). Найти ускорение точки A в тот момент, когда стержни составляют друг с другом угол 90°. Движение стержней происходит в одной плоскости.

Б. Б. Буховцев

Ф329*. Многие из вас, по-видимому, замечали, что в тот момент, когда вы ступаете на мокрый песок, он светлеет. Это связано с тем, что песок становится суше. Но как только вы забираете ногу, след, оставленный ногой, немедленно заполняется водой. Объясните это явление.

Ф330. В цилиндре под невесомым поршнем площади S находится воздух при атмосферном давлении p_0 и температуре T_0. Внутренний объем цилиндра разделен на две равные части неподвижной горизонтальной перегородкой с маленьким отверстием. На поршень кладут груз массой M, под действием которого поршень доходит до перегородки. Найти температуру воздуха внутри цилиндра, если стенки цилиндра и поршень не проводят тепло.

Б. А. Луговцов

Ф331. Плоская спираль с очень большим числом витков n и наружным радиусом R (рис. 3) находится в однородном магнитном поле, перпендикулярном к плоскости спирали и изменяющемся по закону $B = B_0 \cos \omega t$. Найти э. д. с. индукции, наводимую в спирали. Расстояние между витками спирали постоянно.

Г. Л. Коткин

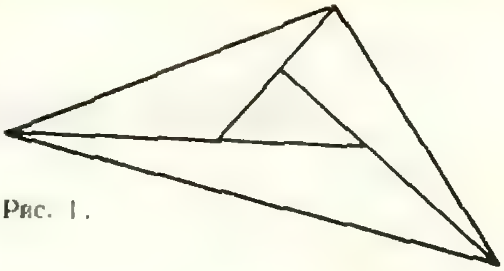


Рис. 1.

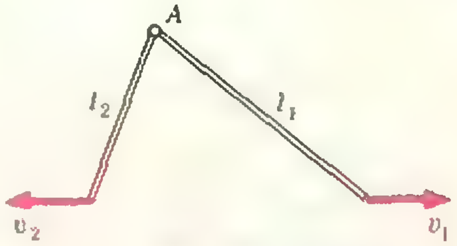


Рис. 2.

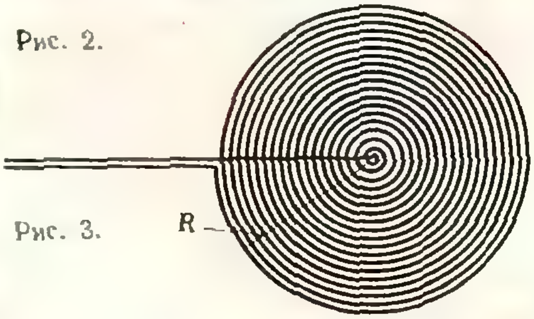


Рис. 3.

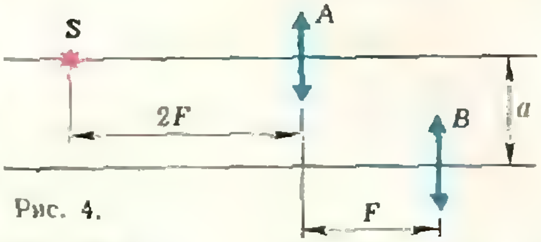


Рис. 4.

Ф332. Найти расстояние между источником света S и его изображением в оптической системе, приведенной на рисунке 4. Фокусные расстояния линз A и B одинаковы и равны F.

В. Г. Сербо

Решения задач

М280—М285; Ф291—Ф295

М280. *Дан треугольник ABC площади 1. Пусть A_1, B_1 и C_1 — середины сторон BC, AC и AB соответственно. Какую минимальную площадь может иметь общая часть треугольника $A_1B_1C_1$ и KLM, если точки K, L и M лежат соответственно на отрезках AB_1, CA_1 и BC_1?*

Решение состоит из двух частей. Сначала мы докажем, что площадь общей части не меньше половины площади треугольника $A_1B_1C_1$, что есть не меньше $\frac{1}{8}$, а затем построим пример, когда площадь пересечения равна $\frac{1}{8}$.

1) Обозначим через Q точку пересечения отрезков KL и C_1B_1, а через R и T — точки пересечения отрезка KM с отрезком C_1B_1 и продолжением отрезка CB (рис. 1). Докажем, что $RQ \geqslant QB_1$. В самом деле, из подобия треугольников KTL и KRQ, KLC и KQB_1 имеем $\frac{TL}{RQ}=\frac{LK}{QK}=\frac{LC}{QB_1}$, то есть $\frac{RQ}{QB_1}=\frac{TC}{LC}$; но $TL \geqslant BA_1=A_1C \geqslant LC$, значит, и $RQ \geqslant QB_1$. Аналогично, $FP \geqslant PA_1$ и $XY \geqslant XC_1$ (см. рис. 1).

Соединим точки R, F и Y (рис. 2). Очевидно, что $S_{RQF} \geqslant S_{B_1QF}$ (у этих треугольников общая высота, а $RQ \geqslant QB_1$), $S_{FPY} \geqslant S_{A_1PY}$ и $S_{RXY} \geqslant S_{C_1XR}$. Поэтому

$$S_{B_1QF}+S_{A_1PY}+S_{C_1XR} \leqslant S_{RQF}+S_{FPY}+S_{RXY}+S_{RYF},$$

а так как сумма площадей всех семи треугольников равна площади $\triangle A_1B_1C_1$, то правая часть полученного неравенства не меньше половины площади этого треугольника.

2) Нужный пример построен на рисунке 3 (точка M совпадает с точкой B, K—с B_1, точка L — любая).

Итак, минимально возможная площадь общей части треугольников $A_1B_1C_1$ и KLM равна $\frac{1}{8}$.

Б. М. Ивлев

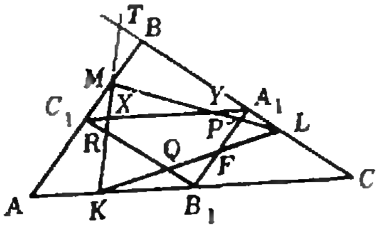


Рис. 1.

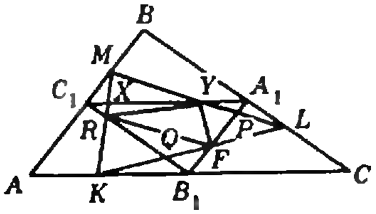


Рис. 2.

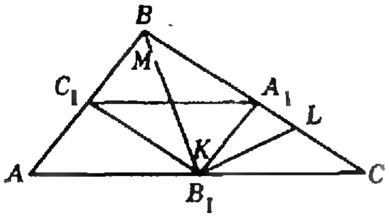


Рис. 3.

◆

М281. *Сколько сторон может иметь выпуклый многоугольник, все диагонали которого имеют одинаковую длину?*

Докажем, что многоугольник с указанным свойством не может иметь более пяти сторон.

Обозначим через n число сторон многоугольника и допустим, что $n \geqslant 6$. Пусть A_1, $A_2, \ldots, A_{n-1}$, A_n — вершины многоугольника. Рассмотрим вершины A_1, A_2, A_{n-2}, A_{n-1}. Отрезки A_1A_2 и $A_{n-2}A_{n-1}$ являются сторонами, а отрезки A_1A_{n-1}, A_2A_{n-2} — диагоналями нашего многоугольника (в силу предположения о числе n, см. рис. 4).

В выпуклом четырехугольнике $A_1A_2A_{n-2}A_{n-1}$ сумма диагоналей A_1A_{n-2} и A_2A_{n-1} всегда больше суммы двух его сторон A_1A_{n-1} и A_2A_{n-2}; а это противоречит тому, что $A_1A_{n-1}=A_1A_{n-2}=A_2A_{n-1}=A_2A_{n-2}$ по условию задачи. Значит, $n<6$.

Очевидно, что $n>3$ (в треугольнике нет диагоналей). Для случаев же $n=4$ и $n=5$ многоугольники с указанным свойством легко строятся: ими являются квадрат и правильный пятиугольник.

Итак, ответ в задаче таков: число сторон может быть равным 4 или 5.

Г. А. Гальперин

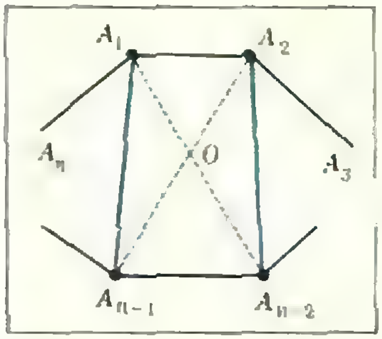


Рис. 4.

М282. *В клетках прямоугольной таблицы размерами $m\times n$ записаны любые натуральные числа. За один ход разрешается удвоить все числа одной строки или же вычесть единицу из всех чисел одного столбца. Докажите, что за несколько ходов можно добиться, чтобы все числа стали равными нулю.*

◆

Превратим в нули вначале все числа первого столбца. Если в первом столбце есть единицы, то удвоим числа в тех строках таблицы, на пересечении которых с первым столбцом стоят единицы, а затем вычтем из всех чисел первого столбца по единице. Понятно, что при этом «старые» единицы останутся на местах, а каждое отличное от единицы число первого столбца на единицу уменьшится. Если единиц в первом столбце с самого начала нет, то будем вычитать из всех его чисел по единице до тех пор, пока единицы (хотя бы одна) не появятся; а затем произведем уже описанную операцию. Эту операцию (удвоения строк, на пересечении которых с первым столбцом находятся единицы, и последующего вычитания по единице из каждого числа первого столбца) будем повторять, пока все числа первого столбца не станут единицами. Вычитая затем из каждого числа первого столбца по единице, мы превратим их все в нули.

Итак, мы получили таблицу, в первом столбце которой стоят нули, а в остальных $n-1$ столбцах — натуральные числа. Превратив в нули описанным способом последовательно числа 2-го, 3-го, . . . , n-го столбцов (заметим, что при этом уже имеющиеся нули не будут «портиться»), мы получим таблицу, состоящую целиком из нулей.

С. В. Конягин

М283. *Выпуклый многоугольник обладает следующим свойством: если все его стороны отодвинуть на расстояние 1 во внешнюю сторону, то полученные прямые образуют многоугольник, подобный исходному. Докажите, что в этом многоугольник можно вписать окружность.*

◆

Заметим, что обратное утверждение доказать значительно проще: если в многоугольник можно вписать окружность, то при отодвигании всех его сторон на одно и то же расстояние (в частности, на единицу) получается подобный многоугольник, причем центром подобия служит центр окружности (рис. 5).

Перейдем теперь к решению задачи.

Первое доказательство. Пусть многоугольник P' получается из многоугольника P отодвиганием сторон внутрь многоугольника P на расстояние 1 и в то же время P' можно получить из P преобразованием f подобия с коэффициентом $k<1$. Подвергнем этому преобразованию многоугольник P вместе с нарисованным внутри него многоугольником P'. Тогда внутри P' (образа P) появится новый многоугольник P'' (образ P'), подобный P' (с коэффициентом k) и P (с коэффициентом k^2), причем, очевидно, стороны $P''=f(P')$ можно получить отодвиганием сторон P' внутрь *на расстояние k. Точно так же, отодвинув стороны еще на k^2,* получим многоугольник $f(P'')=P^{(3)}$, расположенный внутри P'' (образ P'' при преобразовании f), и так далее: $f(P^{(3)})=P^{(4)}, \ldots, f(P^{(n)})=P^{(n+1)}, \ldots,$

где $P\supset P'\supset P''\supset P^{(3)}\supset \ldots \supset P^{(n)}\supset \ldots$

Очевидно, поскольку стороны многоугольника $P^{(n)}$ каждый раз уменьшаются в одном и том же отношении, их длины стремятся к нулю, и поэтому пересечение всех многоугольников

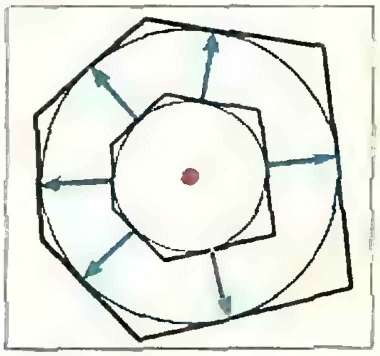


Рис. 5.

состоит из одной точки (рис. 6)*). Обозначим ее через O.

Каждая сторона многоугольника P' последовательно отодвигается на расстояния k, k^2, k^3, . . . , k^n, . . ., поэтому расстояние от каждой стороны до точки O равно одному и тому же числу — сумме бесконечной геометрической прогрессии

$$k + k^2 + k^3 + \ldots + k^n + \ldots = r.$$

Таким образом, окружность с центром O и радиусом r касается всех сторон многоугольника P'.

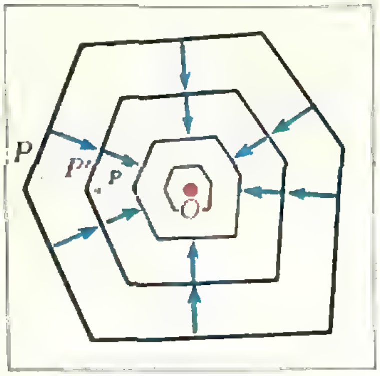


Рис. 6.

Заметим, что в приведенном доказательстве было несущественно, какие именно стороны соответствуют друг другу при подобном преобразовании f, переводящем P в P'. Между тем, в большинстве решений, присланных читателями, молчаливо предполагалось, что имеется в виду естественное соответствие: каждой стороне P' сопоставляется сторона P, которая получается из нее *отодвиганием на единицу. Можно доказать* такую лемму: если многоугольники P и P' (полученный из P отодвиганием сторон на 1) подобны — с каким угодно соответствием сторон (с «поворотом» или «симметричным отражением» порядка сторон), то всегда будет иметь место и подобие с естественным порядком сторон — гомотетия с коэффициентом k $(0<k<1)$. Доказательство, независимое от первого решения, мы приведем в конце, а пока дадим еще два решения задачи, опирающихся на эту лемму (то есть *подразумевающих* естественное соответствие сторон при подобии).

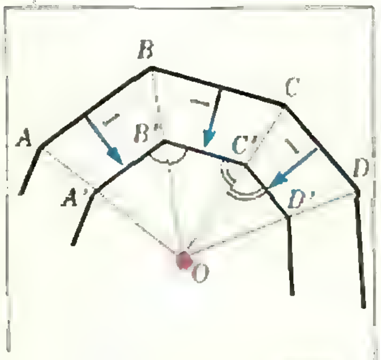


Рис. 7.

Второе доказательство. Пусть $[AB]$ — сторона P, $[A'B']$ — соответствующая сторона P', O — точка пересечения (AA') и (BB'). Тогда (см. рис. 7)

$$\frac{|A'O|}{|AO|} = \frac{|A'B'|}{|AB|} = \frac{|B'O|}{|BO|} = k.$$

Отсюда следует, что в той же точке O прямую BB' пересекает и прямая CC' (BC и $B'C'$ — соответствующие стороны P и P'), и так далее. Кроме того, очевидно, что прямые AA', BB', CC', . . . являются биссектрисами углов A', B', C', . . . многоугольника P'. Отсюда следует, что точка O служит центром окружности, вписанной в P'.

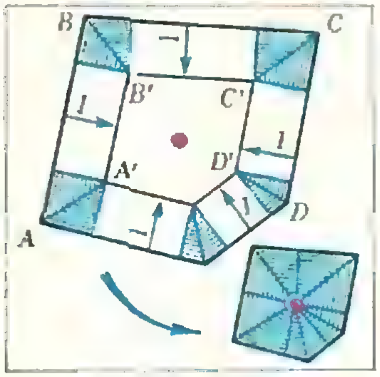


Рис. 8.

Третье доказательство. Разрежем «щель» между многоугольниками P и P' на прямоугольники высоты 1 с основаниями $A'B'$, $B'C'$, $C'D'$, . . . и «ромбоиды» — четырехугольники, остающиеся у каждой вершины A, B, C, . . . *(рис. 8). Очевидно, из этих ромбоидов можно составить* один многоугольник, описанный около окружности радиуса единица, причем его углы соответственно конгруэнтны $\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$, $\sphericalangle C$, . . . , а длины сторон равны разностям длин соответствующих сторон многоугольников P и P', то есть равны $(1-k)\ |AB|$, $(1-k)\ |BC|$, . . . Таким образом, наш многоугольник P' подобен многоугольнику, описанному около окружности радиуса 1, значит, и в него можно вписать окружность (радиус ее будет равен, очевидно, $r=\dfrac{k}{1-k}$).

Доказательство леммы. Будем для каждой стороны $[AB]$ многоугольника P обозначать через $[A'B']$ ту сторону P', которая получается при отодвигании AB.

---

*) Тот факт, что это пересечение не пусто, легко вывести из аналогичного утверждения для числовой прямой: последовательность вложенных отрезков

$$[a;\ b] \supset [a_1;\ b_1] \supset \ldots \supset [a_n;\ b_n] \supset \ldots$$

всегда имеет общую точку (это утверждение или какое-либо ему эквивалентное при аксиоматическом введении действительных чисел принимается обычно за аксиому).

Пусть при подобии стороне $[A_1B_1]$ соответствует $[A_2'B_2']$: $[A_1B_1] \to [A_2'B_2']$, $[A_2B_2] \to [A_3'B_3']$, $\ldots$, $[A_{r-1}B_{r-1}] \to [A_r'B_r']$, $[A_rB_r] \to [A_1'B_1']$. Тогда $\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = \ldots = \hat{A}_r = 2\alpha$ и $\hat{B}_1 = \hat{B}_2 = \ldots = \hat{B}_r = 2\beta$, а поэтому разность длин $|A_iB_i| - |A_i'B_i'| = d$ одна и та же для всех i ($d = \operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta$). Пусть k — коэффициент подобия, $|A_iB_i| = x_i$. Тогда

$$\begin{cases} x_1 - kx_r = d, \\ x_2 - kx_1 = d, \\ x_3 - kx_2 = d, \\ \ldots\ldots\ldots \\ x_r - kx_{r-1} = d; \end{cases}$$

но, как нетрудно доказать, эта система (при $0 < k < 1$) имеет только одно решение $x_1 = x_2 = \ldots = x_r = \frac{d}{1-k}$. Таким образом, мы доказали, что для любой стороны A_1B_1 многоугольника P

$$|A_1'B_1'| = k|A_1B_1|,$$

то есть соответствующие друг другу (при отодвигании!) стороны многоугольников пропорциональны. Углы при отодвигании не меняются, поэтому подобие многоугольников с естественным соответствием сторон $[AB] \to [A'B']$ доказано.

Н. Б. Васильев

◆

М284. *Сумма 100 натуральных чисел, каждое из которых не больше 100, равна 200. Докажите, что из них можно выбрать несколько чисел, сумма которых равна 100.*

Будем решать эту задачу, считая, что задано $n = 2k$ натуральных чисел, каждое из которых не больше n и сумма которых равна $2n$. Докажем, что из этих n чисел можно выбрать несколько чисел так, что их сумма будет равна n.

Пусть среди заданных чисел $a_1, \ldots, a_n$ какие-нибудь два, например числа a_1 и a_2, — различны (если все числа одинаковы, то они все равны 2 и k из них дадут в сумме $n = 2k$). Составим новые n чисел:

$$\begin{cases} A_0 = a_1, \\ A_1 = a_2, \\ A_2 = a_1 + a_2, \\ \ldots\ldots\ldots \\ A_{n-1} = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1}. \end{cases}$$

Каждое из этих чисел меньше $2n$, но больше 0. Среди остатков от деления чисел $A_0, \ldots, A_{n-1}$ на n найдутся либо нуль, либо же два равных остатка (так как остатков, как и чисел, n). В первом случае A_m, соответствующее нулевому остатку, равно n (делится на n, больше 0 и меньше $2n$). Во втором — $A_m = A_k + n$ ($k < m$). При этом $m \neq 0$ и $m \neq 1$, так как числа A_0 и A_1 не превосходят n. В случае $m = 2$ либо A_0 равно n, либо A_1 равно n. В остальных же случаях $A_m = A_k + a_{k+1} + \ldots + a_m$, откуда получаем, что $a_{k+1} + \ldots + a_m = n$.

С. В. Конягин

М285. *Прямоугольный лист бумаги размерами $a \times b$ разрезан на прямоугольные полоски, у каждой из которых одна сторона имеет длину 1. Докажите, что хотя бы одно из чисел a и b целое.*

Назовем прямоугольную полоску, являющуюся элементом указанного разбиения, блоком. Обозначим одну из сторон исходного прямоугольника длины b через B; назовем блок горизонтальным, если его единичная сторона параллельна стороне B, и вертикальным — в противном случае. Обозначим прямую, параллельную B, отстоящую от B на расстояние x и пересекающую данный прямоугольник, через L_x (тогда $x \leqslant a$). Будем считать, что прямая B — левая.

Если вертикальный блок расположен между прямыми L_i и L_{i+1} для некоторого целого i, то выкрасим его в красный цвет, остальные вертикальные блоки выкрасим в синий цвет, а все горизонтальные — в желтый. Сумму длин красных отрезков прямой L_x обозначим через К (L_x), синих — через С (L_x) и желтых — через Ж (L_x). (Если отрезок разделяет блоки двух цветов, будем считать, что он имеет цвет правого блока.) Очевидно, что Ж (L_x) — целое число для любого x. Покажем, что если перекрасить все синие блоки в желтый цвет, то сумма длин желтых частей любой прямой L_x останется числом целым. Для этого нам достаточно доказать, что сумма длин синих частей прямой L_x (то есть С (L_x)) — целое число при любом x.

Обозначим всевозможные расстояния от синих блоков до B через $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, причем

$$0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n \leqslant a - 1.$$

Прежде всего, покажем, что можно перекрасить блоки $С_1^{(1)}, \ldots, С_{k_1}^{(1)}$, отстоящие от B на расстояние α_1. Пусть $[a]$ — целая часть числа a. Так как α_1 — наименьшее среди всех расстояний синих блоков от прямой B и $[\alpha_1] < \alpha_1$, то К $(L_{\alpha_1}) =$ К $(L_{[\alpha_1]}) = b -$ Ж $(L_{[\alpha_1]})$. Поэтому С $(L_{\alpha_1}) = b -$ К $(L_{\alpha_1}) -$ Ж $(L_{\alpha_1}) =$ Ж $(L_{[\alpha_1]}) -$ Ж (L_{α_1}), — целое число, и, значит, блоки $С_1^{(1)}, \ldots, С_{k_1}^{(1)}$ можно перекрасить, поскольку произвольная прямая L_x либо пересекает их все, либо не пересекает ни одного из них.

Точно так же доказывается, что из возможности перекрасить блоки $С_1^{(s)}, \ldots, С_{k_s}^{(s)}$, отстоящие от B на расстояние α_s для всех $s \leqslant i - 1$, следует, что можно перекрасить блоки $С_1^{(i)}, \ldots, С_{k_i}^{(i)}$. Теперь утверждение следует из принципа математической индукции: С (L_x) — целое при любом x.

Итак, у нас остались лишь красные и желтые блоки. Если теперь прямая $L_{[a]}$ совпадает со стороной прямоугольника, то a — целое число. Если же нет — то

$$b = \text{Ж}\,(L_{[a]+\varepsilon}), \quad [a] + \varepsilon < a,$$

и так как Ж (L_x) — целое, то, значит, и b — целое.

Утверждение полностью доказано.

И. Н. Клунова

◆

Ф291. *Два одинаковых конденсатора A и B, каждый емкостью C, и катушка с индуктивностью L соединены, как показано на рисунке 9. В начальный момент ключ K разомкнут, конденсатор A заряжен до разности потенциалов U. Заряд конденсатора B и ток в катушке равны нулю. Определите максимальное значение тока в катушке после замыкания ключа.*

Если бы не было конденсатора B, то после замыкания ключа в контуре, содержащем конденсатор A и катушку индуктивности, возникли бы электромагнитные колебания. Из закона сохранения энергии можно было бы сразу найти максимальный ток.

В нашем случае сначала произойдет перераспределение заряда между конденсаторами, а потом в контуре установятся колебания. Попробуем это объяснить.

Участок цепи, состоящий из двух конденсаторов и соединительных проводов, тоже можно считать колебательным контуром. Но его индуктивность — индуктивность проводов — очень мала (по сравнению с L), поэтому собственная частота колебаний в этом контуре будет очень большой (намного больше собственной частоты колебаний в контуре, который

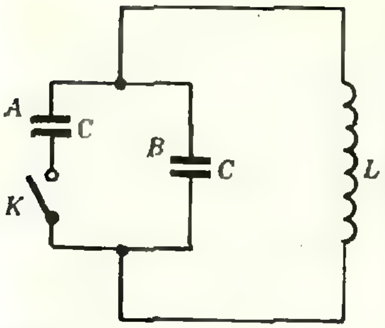


Рис. 9.

образуют конденсаторы и катушка индуктивности). Конечно, и этот контур обладает активным сопротивлением, но оно очень мало по сравнению, например, с индуктивным сопротивлением. Поэтому в течение некоторого времени после замыкания ключа колебания в контуре можно считать незатухающими. То есть в контуре, состоящем из конденсаторов и проводов, произойдет много колебаний тока за то время, пока ток в катушке еще можно будет считать равным нулю. Из-за сопротивления проводов колебания в этом контуре будут затухающими. Это приведет к быстрому установлению равновесия и перераспределению заряда поровну между конденсаторами (так как равны емкости конденсаторов). При этом часть энергии электрического поля заряженного конденсатора A перейдет в тепловую энергию.

Найдем, какая часть энергии останется в контуре после быстрого перераспределения заряда между конденсаторами. Первоначальный заряд конденсатора A был равен $Q=CU$. После перераспределения заряда между конденсаторами их заряды стали равны $\frac{Q}{2}$, а энергия $\frac{Q^2}{8C}=\frac{CU^2}{8}$. Следовательно, полная энергия, которая останется в контуре, равна

$$\frac{CU^2}{8}+\frac{CU^2}{8}=\frac{CU^2}{4}.$$

(До замыкания ключа энергия в контуре была равна $\frac{CU^2}{2}$. Таким образом, в тепло перешла половина первоначальной энергии.)

Теперь рассмотрим контур, состоящий из конденсаторов и катушки индуктивности. Ток в катушке будет максимальным, когда конденсаторы полностью разрядятся и их энергия перейдет в энергию магнитного поля в катушке. Из закона сохранения энергии следует, что

$$\frac{CU^2}{4}=\frac{LI_{\max}^2}{2}.$$

Отсюда

$$I_{\max}=U\sqrt{\frac{C}{2L}}.$$

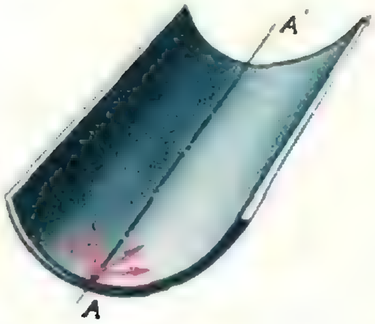


Рис. 10.

Ф292. *Из одной точки на дне горизонтального кругового желоба разлетаются шарики под небольшими углами к образующей желоба с одинаковыми проекциями скорости вдоль этой образующей (рис. 10). Встретятся ли эти шарики?*

◆

Рассмотрим движение шариков в системе координат, которая движется поступательно вдоль одной из своих осей, совпадающей с образующей желоба. Скорость системы **v** равна проекции скоростей шариков на образующую цилиндра. В этой системе координат все шарики в любой момент времени находятся в одной плоскости П, перпендикулярной к **v**. Будем считать, что шарики скользят без трения по боковой поверхности желоба, тогда в плоскости П эти шарики движутся по кривой, показанной на рисунке 11, то есть совершают колебания.

Если амплитуды колебаний малы (малы начальные составляющие скоростей шариков, перпендикулярные к образующей желоба и касательные к его поверхности), то колебания шариков гармонические и их период не зависит от амплитуды. В этом случае через половину периода все шарики встретятся на той же образующей AA' желоба, с которой они начали свое движение.

Если же амплитуды колебаний шариков велики, то колебания не будут гармоническими, их периоды будут зависеть от амплитуды, и шарики будут попадать на образующую AA' в различные моменты времени. Это означает, что вместе шарики не встретятся.

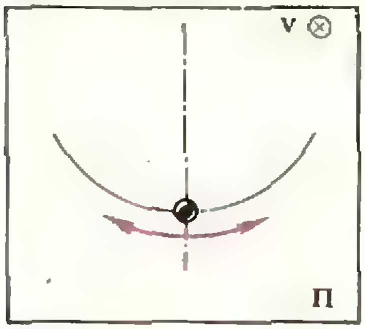


Рис. 11.

Ф293. *Марс во время противостояния находится на расстоянии $l=5{,}56\cdot10^{10}$ м от Земли и его угловой диаметр $\alpha=25'',1$. Определить ускорение свободного падения на поверхности Марса, если известно, что максимальное угловое расстояние между центрами Марса и его спутника Фобоса $\beta=34'',5$, а период обращения Фобоса вокруг Марса $T=2{,}76\cdot10^{4}$ с.*

Ускорение свободного падения на поверхности Марса согласно закону всемирного тяготения и второму закону Ньютона равно

$$g_{\text{М}}=\gamma\frac{M}{R_{\text{М}}^2},$$

где γ — гравитационная постоянная, M — масса Марса, $R_{\text{М}}$ — его радиус.

Радиус Марса можно определить непосредственно из условия задачи (см. рис. 12): $R_{\text{М}}=l\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=l\frac{\alpha}{2}$ (так как α мало, то $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\alpha}{2}$).

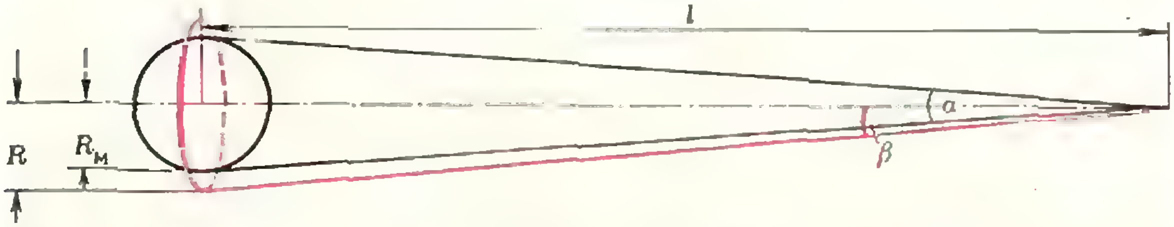


Рис. 12.

Чтобы найти массу Марса, рассмотрим движение его спутника Фобоса. Для простоты рассуждений будем считать, что спутник вращается по круговой орбите, радиус R которой равен (см. рис. 12) $R=l\operatorname{tg}\beta=l\beta$. Период обращения спутника равен T. Центростремительное ускорение $a=\omega^2R=\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2R$ спутнику сообщает сила тяготения $F=\gamma\frac{mM}{R^2}$ (m — масса спутника). Поэтому $a=\frac{F}{m}$, или $\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2R=\gamma\frac{M}{R^2}$, откуда

$$\gamma M=\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2R^3=\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2(l\beta)^3.$$

Тогда окончательно

$$g_{\text{М}}=\gamma\frac{M}{R_{\text{М}}^2}=\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\frac{(l\beta)^3}{(l\alpha/2)^2}=\frac{16\pi^2}{T^2}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2l\beta.$$

Подставляя в эту формулу данные задачи и учитывая, что $1''=\frac{3{,}14}{180\cdot60\cdot60}$ *рад* $\approx4{,}9\cdot10^{-5}$ *рад*, получим

$$g_{\text{М}}=3{,}64\ м/с^2.$$

◆

Ф294. *К некоторому прибору, находящемуся внутри камеры высокого давления, необходимо подводить тепло. Во время опыта меняется давление в камере, и это приводит к изменению сопротивления любой проволо-*

Мощность, выделяющаяся на сопротивлении R_3, равна

$$P=I_3^2R_3=\frac{U_3^2}{R_3},$$

где I_3 — ток и U_3 — напряжение на сопротивлении R_3. Обозначим R_0 общее сопротивление параллельно соединен-

ки, используемой в качестве нагревателя. На рисунке 13 показана схема, используемая в случае, когда необходимо, чтобы количество подводимого за одно и то же время тепла очень слабо зависело от давления. Сопротивление R_3 — это обмотка нагревателя. R_1 и R_2 — некоторые постоянные сопротивления, которые находятся вне камеры высокого давления. При каком соотношении между R_1, R_2 и R_3 мощность, рассеиваемая на сопротивлении R_3, меняется меньше всего при изменении величины сопротивления R_3?

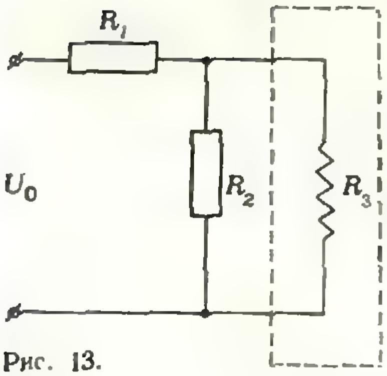


Рис. 13.

ных сопротивлений R_2 и R_3; тогда сопротивления R_1 и R_0 соединены последовательно и $\frac{U_3}{R_0}=\frac{U_0}{R_1+R_0}$, или $U_3=U_0\frac{R_0}{R_1+R_0}$. Но $R_0=\frac{R_2R_3}{R_2+R_3}$, следовательно,

$$U_3=U_0\frac{R_2R_3}{R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3},$$

и

$$P=\frac{U_0^2R_2^2R_3}{(R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3)^2}=\frac{U_0^2R_2^2}{\left[\frac{R_1R_2}{\sqrt{R_3}}+\sqrt{R_3}\,(R_1+R_2)\right]^2}. \quad (*)$$

Исследуем полученное выражение. При $R_3=0$ $P=0$. При R_3, стремящемся к ∞ (то есть $R_3 \gg R_1$ и $R_3 \gg R_2$), P стремится к 0. Так как $P(R_3)$ — непрерывная функция (это ясно из физических соображений), то при некотором значении R_3 мощность максимальна. График зависимости P от R_3 показан на рисунке 14. Из графика видно, что при одном и том же изменении R_3 изменение величины P минимально как раз тогда, когда сама величина P максимальна *). Таким образом, нам нужно найти, при каком значении R_3 мощность максимальна, или, что то же самое, знаменатель в выражении (*) минимален.

Как известно, для двух чисел a и b среднее арифметическое не меньше среднего геометрического: $a+b \geqslant 2\sqrt{ab}$; $a+b$ минимально и равно $2\sqrt{ab}$ при $a=b$. Произведение слагаемых $\frac{R_1R_2}{\sqrt{R_3}}$ и $\sqrt{R_3}\,(R_1+R_2)$ не зависит от R_3, поэтому согласно сказанному выше знаменатель выражения (*) минимален, а значит, P максимальна, если

$$\frac{R_1R_2}{\sqrt{R_3}}=(R_2+R_1)\sqrt{R_3}, \text{ или } R_3=\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}.$$

Именно при таком соотношении между R_1, R_2 и R_3 мощность, выделяемая на сопротивлении R_3, меняется меньше всего при изменении величины сопротивления R_3.

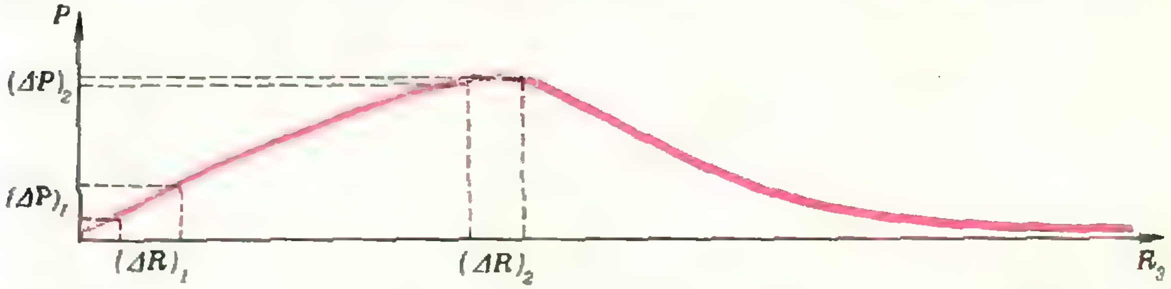


Рис. 14.

---

*) Те, кто знаком с элементами высшей математики, знают, что, когда функция принимает максимальное (или минимальное) значение, скорость изменения функции (первая производная) равна нулю.

Ф295. *Какова должна быть точность измерения ускорения свободного падения у поверхности Земли для того, чтобы можно было обнаружить изменение этой величины в течение суток из-за притяжения Луны? Считать, что измерение производится в точке, которая лежит в плоскости орбиты Луны; вращением Земли пренебречь.*

Под действием притяжения друг к другу Земля и Луна вращаются вокруг их общего центра масс. В системе отсчета, связанной с центром масс системы Земля — Луна, на тело, находящееся у поверхности Земли, действуют две силы — сила притяжения со стороны Земли $F_з = \gamma \frac{M_з m}{R_з^2}$ и сила притяжения со стороны Луны $F_л = \gamma \frac{M_л m}{l^2}$, где m — масса тела, $M_з$ — масса Земли, $M_л$ — масса Луны, $R_з$ — радиус Земли и l — расстояние от тела до Луны. Сумма этих сил сообщает телу ускорение $\mathbf{a} = \frac{1}{m}(\mathbf{F}_з + \mathbf{F}_л)$.

Для того чтобы найти ускорение тела относительно Земли, необходимо учесть, что в нашей системе отсчета сама Земля движется с центростремительным ускорением, сообщаемым ей силой тяготения $F_{з-л}$, действующей на Землю со стороны Луны: $a_з = \frac{F_{з-л}}{M_з} = \gamma \frac{M_л}{l_0^2}$ (l_0 — расстояние между центрами Земли и Луны).

Таким образом, ускорение свободного падения тела на Землю (ускорение относительно Земли) равно $\mathbf{g} = \mathbf{a} - \mathbf{a}_з$.

Поскольку Земля вращается вокруг своей оси, то взаимное расположение тела, находящегося на поверхности Земли, Земли и Луны будет со временем меняться. Следовательно, будет меняться и ускорение свободного падения $\mathbf{g}$. (Однако изменение ускорения $\mathbf{g}$, связанное с тем, что вращающаяся Земля не является инерциальной системой отсчета, мы учитывать не будем.)

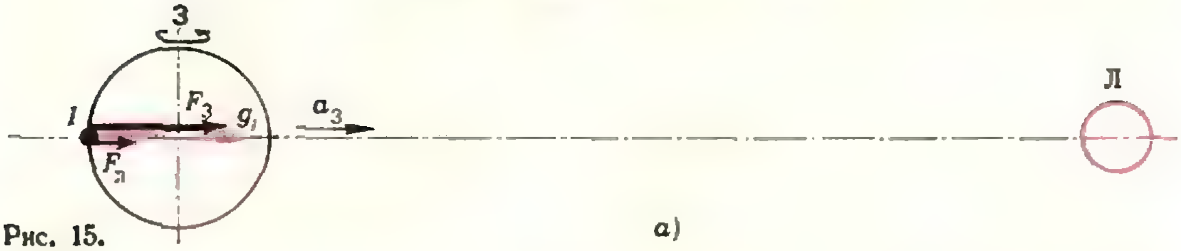


Рис. 15.

а)

В тот момент, когда Луна, Земля и тело расположены вдоль одной прямой и Земля находится *между телом и Луной* (рис. 15), силы $\mathbf{F}_з$ и $\mathbf{F}_л$ направлены в одну сторону и ускорение свободного падения равно по абсолютной величине

$$g_1 = \gamma \frac{M_з}{R_з^2} + \gamma \frac{M_л}{(l_0 + R_з)^2} - \gamma \frac{M_л}{l_0^2} =$$

$$= \gamma \frac{M_з}{R_з^2} + \gamma \frac{M_л}{l_0^2} \frac{1 - (1 + x)^2}{(1 + x)^2},$$

где $x = \frac{R_з}{l_0}$. Так как $x \ll 1$, то $1 - (1 + x)^2 \approx 2x$ и, кроме того, можно пренебречь x по сравнению с 1 в знаменателе второго слагаемого. В результате получим, что

$$g_1 \approx \gamma \frac{M_з}{R_з^2} - 2\gamma \frac{M_л}{l_0^2} x.$$

Через полоборота Земли вокруг своей оси, когда тело находится в точке 2 между Землей и Луной (рис. 16,

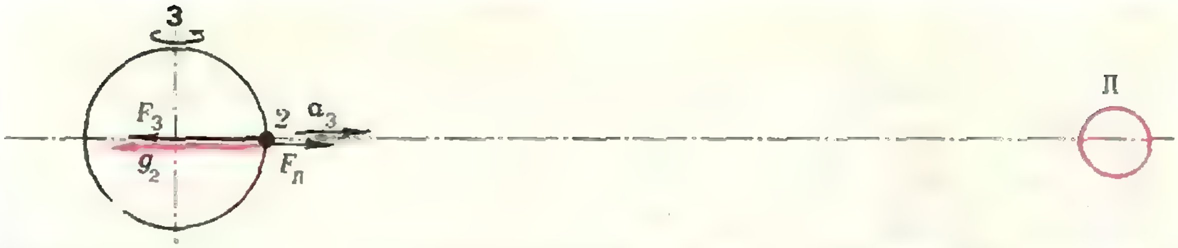


Рис. 16.

силы $\mathbf{F}_З$ и $\mathbf{F}_Л$ направлены в противоположные стороны и

$$g_2 = \gamma \frac{M_З}{R_З^2} - \gamma \frac{M_Л}{(l_0 - R_З)^2} + \gamma \frac{M_Л}{l_0^2} \approx \gamma \frac{M_З}{R_З^2} - 2\gamma \frac{M_Л}{l_0^2}\, x.$$

То есть ускорения тела в этих двух точках практически одинаковы: $g_1 \approx g_2$.

В те моменты, когда тело находится в точках *3* и *4*, то есть через 1/4 и 3/4 оборота после начала отсчета, силы $\mathbf{F}_З$ и $\mathbf{F}_Л$ направлены так, как показано на рисунке 17. Ускорение свободного падения в точке *3* равно $g_3 = \frac{\mathbf{F}_З}{m} + \frac{\mathbf{F}_Л}{m} - \mathbf{a}_З$. Сравним второе и третье слагаемые в этом выражении. Направления силы $\mathbf{F}_Л$ и ускорения $\mathbf{a}_З$ практически совпадают, а абсолютные величины слагаемых почти одинаковы: $\frac{F_Л}{m} = \gamma \frac{M_Л}{l_0^2 + R_З^2} \approx \gamma \frac{M_Л}{l_0^2}$ (так как $R_З \ll l_0$), $a_З = \gamma \frac{M_Л}{l_0^2}$. Поэтому можно считать, что величина ускорения свободного падения в точках *3* и *4* определяется только силой притяжения к Земле:

$$g_3 = g_4 = \frac{F_З}{m} = \gamma \frac{M_З}{R_З^2}.$$

По мере удаления от точек *3* и *4* ускорение уменьшается.

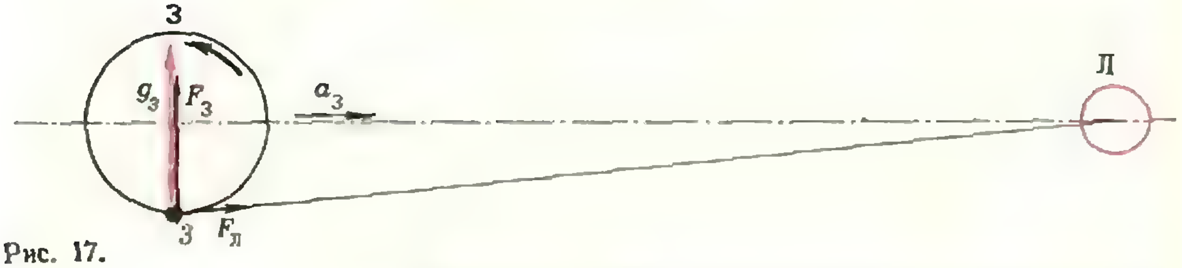


Рис. 17.

Таким образом, в точках *3* и *4* ускорение свободного падения максимально, а в точках *1* и *2* — минимально.

Найдем отношение $\frac{\Delta g}{g_3} = \frac{g_3 - g_1}{g_3}$:

$$\frac{\Delta g}{g_3} = 2 \frac{M_Л}{M_З} x^3 \approx 10^{-7}.$$

Очевидно, именно такой должна быть точность измерения ускорения свободного падения у поверхности Земли для того, чтобы можно было обнаружить изменение этой величины из-за притяжения тел Луной.

И. Ш. Слободецкий

ПРАКТИКУМ
АБИТУРИЕНТА

Использование неравенства Коши при решении задач

С. Т. Берколайко

В школьном курсе математики свойствам элементарных неравенств и методам их доказательства отводится значительное место. Однако на вступительных экзаменах в вузы многие абитуриенты с трудом применяют неравенства при исследовании элементарных функций и решении задач на максимум и минимум (преимущественно геометрического и физического содержания). Между тем, для решения подобных задач достаточно знать и, главное, уметь применять сравнительно несложные неравенства.

К числу таких неравенств относится, прежде всего, неравенство Коши: *среднее арифметическое двух положительных чисел a и b не меньше их среднего геометрического*:

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}. \qquad (1)$$

Наряду с неравенством Коши абитуриентам полезно знать некоторые следствия из него, а именно:

$$a+b \geqslant 2\sqrt{ab}, \qquad (2)$$

$$a^2+b^2 \geqslant 2ab, \qquad (3)$$

$$ab \leqslant \left(\frac{a+b}{2}\right)^2, \qquad (4)$$

$$ab \leqslant \frac{1}{2}\,(a^2+b^2) \qquad (5)$$

(выведите их самостоятельно).

Как известно, в неравенстве (1) равенство достигается лишь при $a=b$. Следовательно, и неравенства (2)—(5) переходят в равенства лишь при $a = b$.

Неравенства (1) — (5) эквивалентны друг другу (при $a > 0$, $b > 0$), любое из них можно применять при решении задач, и, как показывает практика вступительных экзаменов, решение конкурсных задач на максимум и минимум легко находится именно с помощью этих неравенств. Рассмотрим ряд примеров.

Задача 1. *Найти наибольшее значение произведения двух переменных, сумма которых постоянна.*

Этот вопрос решает неравенство (4), утверждающее, что произведение двух положительных чисел не больше квадрата их среднего арифметического. Действительно, если a и b — две переменные, $a + b = M$, где M — некоторая постоянная, то при $a \neq b$ согласно (4) $ab < \left(\frac{M}{2}\right)^2$, а при $a = b$ неравенство (4) переходит в равенство $ab = \left(\frac{M}{2}\right)^2$.

Следовательно, при $a = b$ произведение ab достигает наибольшего значения, равного $\left(\frac{M}{2}\right)^2$.

Аналогично, если требуется найти наименьшее значение суммы двух переменных, произведение которых постоянно, то применяется неравенство (2).

Задача 2 (МГУ, мехмат, 1966). *Из гранита нужно вырубить постамент в форме прямоугольного параллелепипеда, высота которого должна быть равна диагонали осно-*

вания, а площадь основания должна быть равна 4 м². При каких длинах сторон основания площадь поверхности постамента будет наименьшей?

Пусть x и y — длины (в метрах) сторон прямоугольника, лежащего в основании постамента. Тогда по условию задачи высота z постамента равна $\sqrt{x^2+y^2}$, а площадь его поверхности (в $м^2$)

$$S = 2(x+y)\cdot\sqrt{x^2+y^2}+8,$$

при этом $xy = 4$. Воспользовавшись неравенствами (2) и (3), получим

$$x+y \geqslant 2\sqrt{xy} = 4; \quad x^2+y^2 \geqslant 2xy = 8,$$

откуда $\sqrt{x^2+y^2} \geqslant \sqrt{8}$. Следовательно,

$$S \geqslant 2\cdot 4\cdot\sqrt{8}+8 = 8+16\sqrt{2}\,(м^2),$$

причем равенство достигается при $x = y$, поскольку периметр основания $(2(x+y))$ и высота $\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$ одновременно при $x = y\ (=2)$ достигают наименьшего значения. Итак, наименьшая площадь поверхности будет у постамента, в основании которого лежит квадрат со стороной в 2 *м*.

Задача 3 (МГУ, мехмат, 1966). *Нужно изготовить коробку в форме прямоугольного параллелепипеда с площадью основания, равной 1 см². Сумма длин всех ребер параллелепипеда должна быть равна 20 см. При каких размерах коробки площадь ее поверхности будет наибольшей?*

Пусть x и y — длины сторон прямоугольника (в сантиметрах), лежащего в основании параллелепипеда, а z — его высота. Тогда по условию $xy = 1$, $4x+4y+4z = 20$, откуда $x+y+z = 5$.

Площадь поверхности коробки равна

$$S = 2(x+y)\cdot z+2.$$

С учетом соотношения $(x+y)+z = 5$ и неравенства (4) получим

$$(x+y)\cdot z \leqslant \left[\frac{(x+y)+z}{2}\right]^2 = \frac{25}{4},$$

причем это неравенство обращается в равенство лишь при $x+y = z = 2{,}5$. Таким образом, произведение $(x+y)z$, а вместе с ним и площадь поверхности коробки достигают наибольшего значения, если $z = 2{,}5$ (*см*) и $x+y = 2{,}5$. Решая систему уравнений

$$\begin{cases} x+y = 2{,}5, \\ xy = 1, \end{cases}$$

находим размеры коробки: $2\times 0{,}5\times 2{,}5$ (*см*).

Задача 4 (НГУ, 1968). *Дан прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = a$; $BC = b$. Вокруг него описываются прямоугольники таким образом, что каждая сторона описанного прямоугольника проходит через одну из вершин прямоугольника $ABCD$. Найти описанный прямоугольник с наибольшей площадью и определить его площадь.*

Пусть a и b — длины сторон данного прямоугольника (рис. 1), α — угол между соответствующими сторонами данного и описанного прямоугольников. Тогда длины сторон описанного прямоугольника равны $a\sin\alpha + b\cos\alpha$, $a\cos\alpha + b\sin\alpha$, его площадь

$$S(\alpha) = (a\sin\alpha + b\cos\alpha)\times$$
$$\times(a\cos\alpha + b\sin\alpha) =$$
$$= (a^2+b^2)\sin\alpha\cos\alpha + ab.$$

Здесь переменным является произведение $\sin\alpha\cdot\cos\alpha$. Нам надо найти наибольшее значение этого произведения. Учитывая, что $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, применим неравенство (5):

$$\sin\alpha\cdot\cos\alpha \leqslant \frac{1}{2}(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha) = \frac{1}{2}.$$

Равенство достигается лишь при $\sin\alpha = \cos\alpha$, то есть при $\alpha = 45°$ (так как по условию $0° < \alpha < 90°$). Следовательно, наибольшую площадь имеет тот описанный прямоугольник, стороны которого образуют со сторонами данного угол 45°. Нетрудно убедиться, что этот прямоугольник — квадрат, площадь его $S_{наиб} = \frac{1}{2}(a+b)^2$.

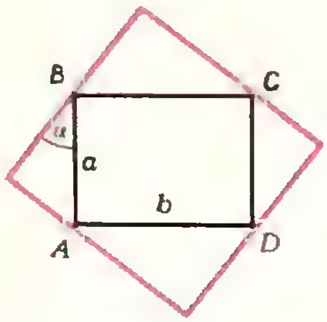


Рис. 1.

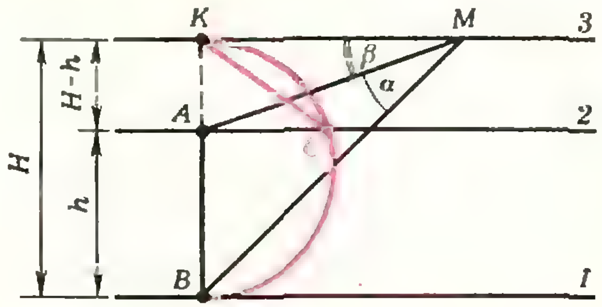


Рис. 2.

Задача 5 (НГУ, 1968). *Расстояние между двумя параллельными прямыми равно h. Третья прямая, параллельная данным, находится вне полосы между ними на расстоянии H от дальней. Отрезок AB перпендикулярен к прямым, а концы его лежат на первых двух прямых.*

Найти на третьей прямой точку M так, чтобы $\sphericalangle AMB$ был наибольшим.

Положение точки M на третьей прямой определяется, например, расстоянием от нее до точки K пересечения прямой AB с третьей прямой (рис. 2). Обозначим KM через x. Для решения задачи достаточно найти то значение x, для которого соответствующий угол $\alpha = \sphericalangle AMB$ достигает наибольшей величины.

Введем вспомогательный угол $\beta = \sphericalangle KMA$ и выразим с помощью него $\operatorname{tg}\alpha$ в виде функции от x. Используя формулу тангенса разности двух аргументов и определение тангенса острого угла, получим

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}[(\alpha+\beta)-\beta] = \frac{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}(\alpha+\beta)\cdot\operatorname{tg}\beta} = \frac{\frac{H}{x}-\frac{H-h}{x}}{1+\frac{H(H-h)}{x^2}} = \frac{h}{x+\frac{H(H-h)}{x}}.$$

Отсюда видно, что $\operatorname{tg}\alpha$ (а, следовательно, и α) достигает наибольшего значения, когда сумма $x+\frac{H(H-h)}{x}$ достигает наименьшего значения. Поскольку $x\,\frac{H(H-h)}{x}$ постоянно, воспользуемся неравенством (2):

$$x+\frac{H(H-h)}{x} \geqslant 2\sqrt{x\,\frac{H(H-h)}{x}} = 2\sqrt{H(H-h)}.$$

Искомое значение x является положительным корнем уравнения $x=\frac{H(H-h)}{x}$, то есть

$$x=\sqrt{H(H-h)}.$$

Искомую точку теперь можно найти с помощью несложного построения: опишем на отрезке KB как на диаметре полуокружность, которая пересечет вторую прямую (проходящую через A) в точке C (рис. 2), и отложим на третьей прямой отрезок $KM_1 = KC$; точка M_1 — искомая (докажите это самостоятельно).

Нетрудно заметить, что точка M_2, симметричная точке M_1 относительно точки K, обладает тем же свойством, что и точка M_1. Итак, искомых точек — две: M_1 и M_2.

Задача 6 (МГУ, 1971). *Автомобиль едет от пункта A до пункта B с постоянной скоростью 42 км/ч. В пункте B он переходит на равнозамедленное движение, причем за каждый час его скорость уменьшается на a км/ч, и едет так до полной остановки. Затем он сразу же начинает двигаться равноускоренно с ускорением a км/ч^2.*

Каково должно быть значение a, чтобы через 3 часа после возобновления движения автомобиль находился ближе всего к пункту B?

Пусть автомобиль остановился в точке C, а через 3 часа был в точке D. Рассмотрим движение автомобиля на участке BC. По условию скорость автомобиля в пункте B равна $v_B = 42$ *км/ч*; эта скорость является начальной на участке BC. Конечная скорость на рассматриваемом участке $v_C = 0$, поэтому время движения на участке BC (в часах) $t_{BC} = \frac{42}{a}$.

Используя формулу длины пути при равнопеременном прямолинейном движении, выразим BC и CD через параметр a:

$$BC = \frac{882}{a}, \quad CD = \frac{9a}{2}.$$

Таким образом,

$$BD = BC + CD = \frac{882}{a} + \frac{9a}{2}.$$

Так как произведение слагаемых $\frac{882}{a}$ и $\frac{9a}{2}$ постоянно, то полученная сумма — это следует из неравенства (2) — достигает наименьшего значения при

$$\frac{882}{a} = \frac{9a}{2},$$

откуда $a = 14$ *км/ч*^{2}. При этом $BD = 126$ *км*.

Упражнения

1 (МГУ, 1966). Нужно сделать воздушный змей в форме прямой призмы с основанием в форме прямоугольного треугольника с гипотенузой, равной 50 *см*. Боковая поверхность этой призмы имеет площадь 0,96 *м*^{2}. Какими должны быть стороны треугольника основания, чтобы сумма длин всех ребер призмы была наименьшей?

2 (МГУ, 1966). В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник с площадью, равной 2 *м*^{2}, а высота призмы равна гипотенузе основания. Какими должны быть стороны основания, чтобы боковая поверхность призмы была наименьшей?

3 (МГУ, 1966). Требуется изготовить коробку в форме прямоугольного параллелепипеда. Площадь дна коробки должна быть равна 2 *дм*^{2}, а боковая поверхность 18 *дм*^{2}. При каких размерах коробки сумма длин всех ее ребер будет наименьшей?

4 (МГУ, экон. ф-т, 1969). При каком действительном x выражение

$$y = \frac{2x - 1}{2x - x^2 - 4}$$

принимает наименьшее значение?

5 (МГУ, 1971). Мотоциклист выезжает из пункта A и движется с постоянным ускорением 12 *км/ч*^{2} (начальная скорость равна нулю). Достигнув скорости v *км/ч*, он едет с этой скоростью 25 *км*, а затем переходит на равнозамедленное движение, причем за каждый час его скорость уменьшается на 24 *км/ч*, и движется так до полной остановки. Затем он сразу же поворачивает обратно и едет до пункта A с постоянной скоростью v *км/ч*.

При какой скорости v мотоциклист быстрее всего проделает обратный путь от остановки до пункта A?

6 (МГУ, филологич. ф-т, 1972). При каких положительных x выражение

$$y = 2x + \frac{3\frac{1}{8}}{x+1}$$

принимает минимальное значение?

7 (МИФИ, 1972). Найти объем наименьшего по объему конуса среди всех тех конусов, которые можно описать около шара радиуса R.

Поправки

В «Кванте» №2 допущены следующие опечатки

Страница 25, левая колонка, 14-я строка снизу

Напечатано	Следует читать
$\ldots\overline{A} \Rightarrow \overline{B}$	$\ldots A \Rightarrow B$

Страница 26, в задаче **М309.**

Напечатано	Следует читать
$x^{2n} + x + 1$	$x^{2n} + x^n + 1$

Страница 44, правая колонка

рисунок 1 и рисунок 2 следует поменять местами

Страница 47, левая колонка

рисунок 5 и рисунок 6 следует поменять местами

Страница 63, правая колонка, 2-я строка сверху

Напечатано:	Следует читать
$-(\vec{A} - \vec{B}) + .$	$= (\vec{A} - \vec{B})^2 + \ldots$

Страница 64, левая колонка, 5-я строка снизу

Напечатано	Следует читать
заказ=59259	заказ=59295

Г. Я. Мякишев

Электростатическое поле

Задачи раздела «Электростатика» имеют много общего с задачами на равновесие тел в механике, но есть между ними и принципиальные различия. Отличие электрических задач от механических состоит, прежде всего, в том, что для описания взаимодействия электростатических зарядов вводится особое понятие — электрическое поле, а также новые величины для количественной характеристики этого поля — напряженность и потенциал. Если электрическое поле создается неподвижными зарядами, то говорят об электростатическом поле и соответственно о напряженности и потенциале электростатического поля.

Цель данной статьи — обратить внимание читателей на наиболее трудные вопросы, связанные с понятием электростатического поля, и предостеречь от возможных ошибок.

Напряженность поля

Прежде всего, нужно привыкнуть к обращению с этой величиной, научиться ее вычислять в различных случаях. В этом очень помогает принцип суперпозиции полей *). Достаточно знать формулу для напряженности поля точечного заряда, для того чтобы вычислить напряженность поля заряженного тела с произвольно распределенным в пространстве зарядом. Заряженное тело можно рассматривать как совокупность точечных зарядов. Суммируя геометрически поля отдельных зарядов, можно найти напряженность поля в любой точке. Правда, вычисление этой суммы иногда оказывается весьма сложной математической задачей.

Не менее важно уметь свободно пользоваться понятием силовых линий, дающих качественную картину распределения поля в пространстве. На многие вопросы можно ответить, отчетливо представляя себе, как идут силовые линии.

Интересно заметить, что знание размерностей напряженности поля и электрического заряда позволяет в ряде случаев найти с точностью до числового коэффициента зависимость напряженности поля от расстояния.

Часто при решении задач на электростатику используется тот факт, что напряженность поля внутри проводника равна нулю, и электростатическое поле не проникает сквозь проводник. Это означает, что геометрическая сумма полей всех зарядов в любой точке внутри проводника обращается в нуль. Отсюда можно делать выводы и о соответствующем распределении зарядов в пространстве.

Основной закон электростатики — закон Кулона — очень похож на закон всемирного тяготения. Это, конечно, облегчает решение ряда электростатических задач. Однако, нужно помнить и о различии этих законов: наряду с притяжением разноименных зарядов существует и отталкивание одноименных зарядов. Поэтому при вычислении напряженности поля надо обязательно учитывать знаки зарядов.

---

*) См., например, статью Л. П. Баканиной и С. М. Козела «Принцип суперпозиции в электростатике», «Квант», 1973, № 3.

Следует избегать также часто повторяемого неверного утверждения о том, что электрически нейтральная в целом система не создает вовсе электрического поля. Напряженность поля нейтральной системы, состоящей из положительных и отрицательных зарядов, вне системы не равна нулю. Правда, она убывает с расстоянием гораздо быстрее, чем напряженность поля заряженного тела.

Рассмотрим несколько конкретных задач.

Задача 1. *Может ли точечный электрический заряд, помещенный в электростатическое поле, находиться в состоянии устойчивого равновесия?*

Нет, не может. Для того чтобы, к примеру, положительный заряд находился в состоянии устойчивого равновесия, необходимо, чтобы при смещении заряда в любом направлении на него действовала сила, возвращающая заряд в положение равновесия. Следовательно, силовые линии поля должны сходиться в точке, где расположен заряд. Но силовые линии электростатического поля начинаются на положительных зарядах и оканчиваются на отрицательных. В точке же, где расположен рассматриваемый заряд, отрицательных зарядов нет, и, следовательно, силовые линии внешнего по отношению к заряду поля не могут сходиться в точке, где он расположен.

Задача 2. *Зная размерность напряженности электрического поля, найти (с точностью до числового коэффициента) напряженность поля бесконечной плоскости, находящейся в вакууме и имеющей плотность поверхностного заряда* σ.

Напряженность электрического поля в точке, отстоящей на расстоянии R от пластины, может зависеть только от σ и R. Согласно принципу суперпозиции зависимость от σ должна быть линейной, то есть $E = |\sigma| f(R)$, где $f(R)$ — неизвестная функция. Размерности напряженности E и плотности заряда σ равны соответственно

$$[E] = \frac{[q]}{[\varepsilon_0]\,[R^2]} \text{ и } [\sigma] = \frac{[q]}{[R^2]}.$$

Поэтому $E = \frac{k|\sigma|}{\varepsilon_0}$, где k — безразмерный коэффициент. От расстояния напряженность поля не зависит. Точные расчеты дают для коэффициента k значение $^1/_2$.

Задача 3. *На расстоянии* d *от большой проводящей пластины находится точечный электрический заряд* $+q$. *С какой силой действует на него пластина?*

Под влиянием заряда $+q$ на пластине появляются наведенные отрицательные заряды. Они распределяются по поверхности пластины таким образом, что результирующая напряженность электрического поля, созданного этими зарядами и зарядом $+q$, внутри пластины равна нулю (индуцированные положительные заряды уходят на удаленные края пластины, и их влиянием можно пренебречь). Поскольку пластина большая, величина суммарного наведенного заряда практически равна по модулю заряду $+q$. Справа от пластины (рис. 1) электрическое поле создается точечным зарядом $+q$ и распределенным по поверхности пластины наведенным отрицательным зарядом $-q$. Слева электрическое поле отсутствует (эффект электростатической защиты).

Представим себе, что мы поместили слева от пластины на расстоянии d точечный отрицательный заряд $-q$ (заряд-изображение). Он наведет на левой поверхности пластины положительные заряды, которые распределятся по ней точно так же, как отрицательные заряды на правой поверхности. При этом электрическое поле справа от пластины не

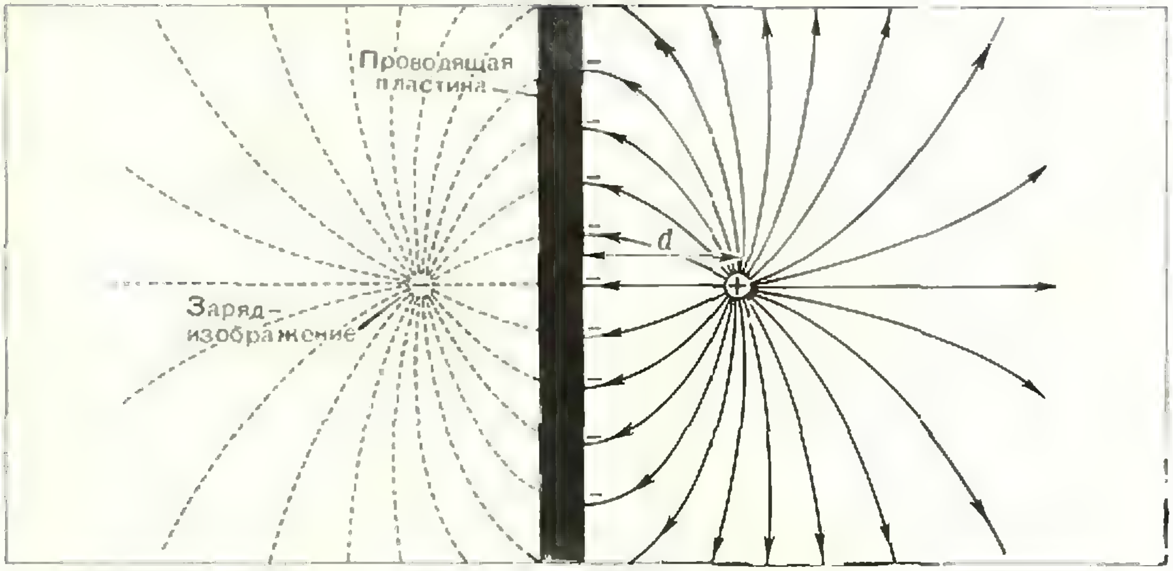


Рис. 1.

изменится (опять действует электростатическая защита).

Можно сказать, что справа от пластины поле создается двумя точечными зарядами $+q$ и $-q$ и зарядами (отрицательными и положительными), индуцированными на обеих сторонах пластины. (В самом деле суммарная напряженность электрического поля от точечного отрицательного заряда и наведенных положительных зарядов равна нулю.) Если пластина тонкая (ее толщина мала по сравнению с расстоянием d), то напряженность поля наведенных зарядов вне пластины равна нулю.

Таким образом, оказывается, что справа от пластины электрическое поле, создаваемое зарядом $+q$ и наведенными отрицательными зарядами, совпадает с полем, созданным двумя точечными зарядами $+q$ и $-q$, находящимися на расстоянии $2d$ друг от друга (рис. 2). Это означает, что напряженность поля индуцированных зарядов в точке, где находится заряд $+q$, равна напряженности поля точечного заряда $-q$. Тогда искомая сила *притяжения*

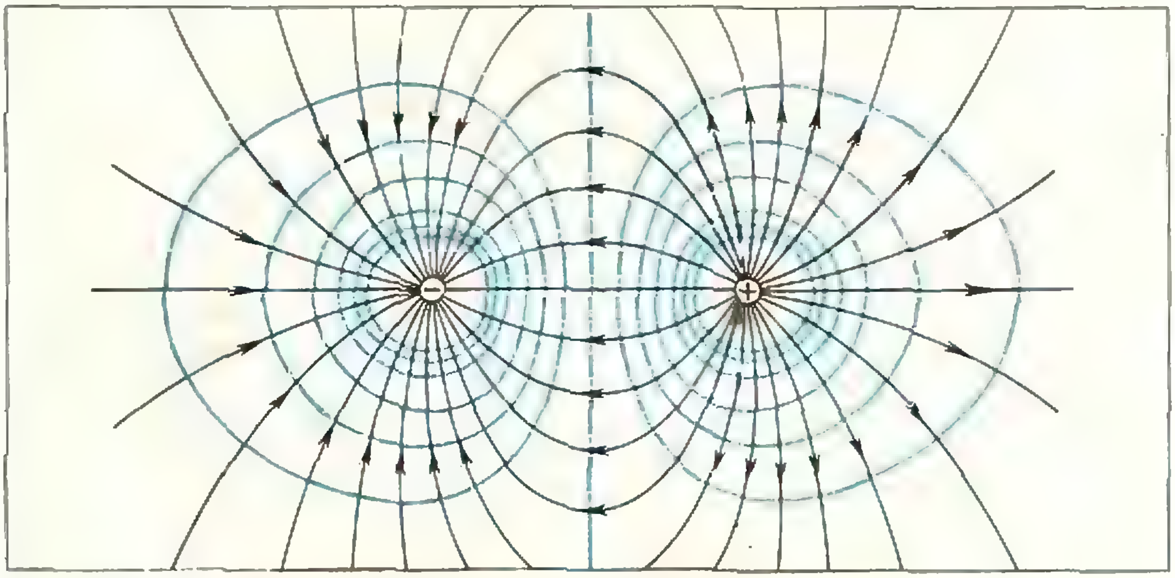


Рис. 2. Синим цветом показаны эквипотенциальные поверхности.

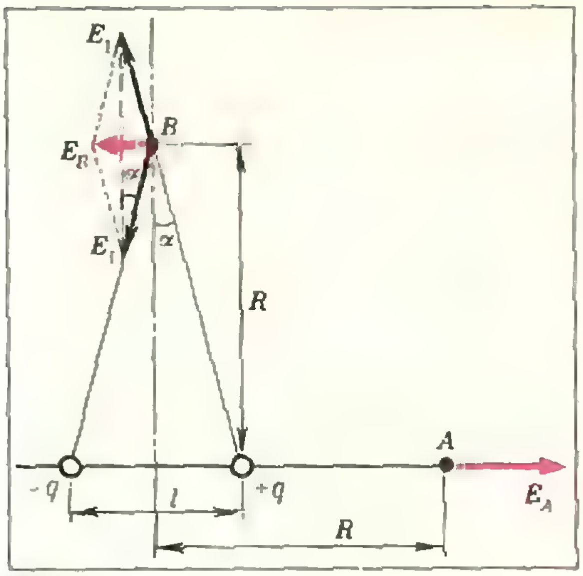


Рис. 3.

равна

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q^2}{4d^2} = \frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 d^2}.$$

Задача 4. *Свойства электрического диполя (системы из двух точечных зарядов $+q$ и $-q$, находящихся на расстоянии l друг от друга) характеризуются его электрическим моментом $p = ql$.*

Найти напряженность поля электрического диполя с моментом p в точке, отстоящей от центра оси диполя на расстоянии $R \gg l$, в двух случаях:

1) *точка лежит на прямой, проходящей через ось диполя;*

2) *точка лежит на прямой, перпендикулярной к оси диполя.*

В первом случае, как это видно из рисунка 3, напряженность в точке A равна

$$E_A = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{1}{(R-l/2)^2} - \frac{1}{(R+l/2)^2}\right\}.$$

Так как $R \gg l$, то

$$\frac{1}{(R-l/2)^2} - \frac{1}{(R+l/2)^2} \approx \frac{2l}{R^3}.$$

Следовательно,

$$E_A \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{2ql}{R^3} = \frac{2p}{4\pi\varepsilon_0 R^3}.$$

Во втором случае (см. рис. 3) напряженность поля, созданного каждым из зарядов в точке B, равна по величине

$$E_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{R^2 + l^2/4}.$$

Суммарный вектор напряженности $\mathbf{E}_B$ направлен по оси диполя. Его величина равна

$$E_B = 2E_1 \sin\alpha = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \times$$
$$\times \frac{ql}{(R^2 + l^2/4)^{3/2}} \approx \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 R^3}.$$

Заметим, что в обоих случаях напряженность убывает как $\frac{1}{R^3}$, то есть быстрее, чем напряженность точечного заряда $\left(\text{пропорциональная } \frac{1}{R^2}\right)$.

Потенциал и потенциальная энергия

Самые большие трудности при решении электростатических задач обычно возникают при использовании понятия потенциала. Потенциал — энергетическая характеристика поля, и задачи с использованием понятия потенциала — это преимущественно задачи на закон сохранения энергии.

Применение закона сохранения энергии в механике вызывает значительные затруднения главным образом из-за сложности понятия потенциальной энергии взаимодействия тел *). В электростатике мы встречаемся с новым видом потенциальной энергии. Причем из-за наличия зарядов противоположных знаков потенциальная энергия П и, следовательно, потенциал $\varphi = \frac{П}{q}$ могут быть как положительными, так и отрицательными.

Наряду с взаимной потенциальной энергией заряженных тел каждое заряженное тело обладает собственной энергией, которая представляет собой энергию взаимодействия частей заряженного тела друг с другом. Например, собственная энергия заряженного шара радиуса R равна $\Pi = \frac{q^2}{2C} = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$ (q — заряд шара). При взаимодействии заряженных тел может изменяться не только их взаимная потенциальная энергия, но и собственная энергия каждого тела.

---

*) См. статью Г. Я. Мякишева «О законе сохранения энергии в механике», «Квант», 1974, № 3. (*Прим. ред.*)

Необходимо иметь в виду, что потенциальная энергия и потенциал определяются с точностью до постоянной. Значение этой постоянной зависит от выбора нулевого уровня потенциальной энергии. Обычно начало отсчета потенциальной энергии выбирают таким, чтобы постоянная была равна нулю. Выбирать можно произвольно, но, выбрав нулевой уровень для данной задачи, в дальнейшем при решении задачи его уже менять нельзя.

Часто при решении задач используется тот факт, что все точки проводника имеют один и тот же потенциал. Действительно, напряженность поля внутри проводника равна нулю, и при перемещении заряда внутри проводника работа не совершается. Типичная ошибка, которую довольно часто допускают, такова: выбирают постоянный потенциал внутри проводника равным нулю и забывают, что тогда уже нельзя считать потенциал заряженного тела на бесконечности нулевым (именно в бесконечности чаще всего выбирается нулевой уровень потенциальной энергии, а значит, и потенциала).

Теперь продолжим рассмотрение конкретных задач.

Задача 5. *Чему равен потенциал в центре проводящей сферы радиуса R, несущей заряд q?*

Напряженность электрического поля внутри сферы равна нулю. Следовательно, разность потенциалов между любыми двумя точками внутри сферы или на ее поверхности равна нулю. Другими словами, потенциал в произвольной точке внутри сферы, а значит, и в центре сферы равен потенциалу поверхности сферы, то есть

$$\varphi_0 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R},$$

если потенциал на бесконечности считать равным нулю.

Задача 6. *Положительный заряд $+q_0$ равномерно распределен по тонкому проволочному кольцу радиуса R. В центре кольца находится точечный заряд $-q$, масса которого m.*

Заряду сообщается начальная скорость v_0 вдоль оси кольца. Определить характер движения заряда в зависимости от величины начальной скорости. Кольцо неподвижно.

Полная энергия заряда в начальный момент равна сумме кинетической энергии и потенциальной энергии в электростатическом поле кольца:

$$E_{\text{пол}} = \frac{mv_0^2}{2} - \varphi_0 q = \frac{mv_0^2}{2} - \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0 R},$$

так как потенциал в центре кольца $\varphi_0 = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0 R}$ (это непосредственно следует из принципа суперпозиции).

При $E_{\text{пол}} \geqslant 0$ заряд уйдет в бесконечность. Причем его скорость на бесконечно большом расстоянии будет равна нулю, если $E_{\text{пол}} = 0$. Если $E_{\text{пол}} > 0$, скорость заряда на бесконечно большом расстоянии от кольца равна

$$v = \sqrt{v_0^2 - \frac{qq_0}{2\pi\varepsilon_0 Rm}}.$$

Если же $E_{\text{пол}} < 0$, то заряд будет совершать периодическое движение вдоль оси кольца. Наибольшее расстояние r, на которое при этом удалится заряд от центра кольца, можно найти из закона сохранения энергии:

$$\frac{mv_0^2}{2} - \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0 R} = -\frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0 \sqrt{R^2 + r^2}}.$$

Отсюда

$$r = R\sqrt{\frac{1}{\left(\frac{2\pi\varepsilon_0 m v_0^2 R}{qq_0} - 1\right)^2} - 1}.$$

Задача 7. *Два маленьких шарика радиуса r несут заряды q_1 и q_2, различные по величине, но одинаковые по знаку. Шарики первоначально находятся на расстоянии l друг от друга. Один из шариков закреплен. Второй шарик, удаляясь под действием электростатических сил, приобретает максимальную кинетическую энергию* $К_1$. *Если перед началом движения второго шарика оба шарика на некоторое время были соединены проводником, то второй шарик, удаляясь, приобретает максимальную кинетическую энергию* $К_2$, *причем* $К_2 > К_1$.

Определить количество теплоты, выделившейся в проводнике при соединении шариков, и выяснить, за счет какой энергии выделяется эта теплота и увеличивается кинетическая энергия второго шарика.

Согласно закону сохранения энергии в первом случае

$$К_{01} + П_{01} + П_{0c} = К_1 + П_1 + П_{1c},$$

где $К_{01}$ и $П_{01} + П_{0c}$ — начальные, $К_1$ и $П_1 + П_{1c}$ — конечные значения кинетической и потенциальной энергий системы двух шариков. Причем $П_{01}$ и $П_1$ — потенциальные энергии взаимодействия шариков, а $П_{0c}$ и $П_{1c}$ — их суммарные собственные энергии, одинаковые по величине. Считая потенциальную энергию взаимодействия при бесконечно большом расстоянии между шариками равной нулю и учитывая, что $К_0 = 0$, получим

$$К_1 = П_{01} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 l}.$$

После соединения проводником заряды шариков становятся одинаковыми и равными $q = \frac{q_1 + q_2}{2}$. Начальная потенциальная энергия шариков изменяется. Кинетическая энергия теперь равна

$$К_2 = П_{02} = \frac{(q_1 + q_2)^2}{16\pi\varepsilon_0 l}.$$

Нетрудно видеть, что действительно $К_2 > К_1$. Кроме того, в проводнике выделяется количество теплоты Q. Однако, разумеется, полная энергия должна сохраняться. Увеличение кинетической энергии и выделение теплоты во втором случае происходит за счет уменьшения собственной потенциальной энергии заряженных шариков при их соединении.

С учетом собственной энергии шариков конечную энергию в первом случае можно представить в виде

$$E_1 = К_1 + П_{1c},$$

где $П_{1c} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1^2}{2r} + \frac{q_2^2}{2r}\right)$ — собственная энергия шариков. Конечную энергию во втором случае запишем так:

$$E_2 = E_1 = К_2 + П_{2c} + Q,$$

где

$$П_{2c} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q^2}{2r} + \frac{q^2}{2r}\right) = \frac{1}{16\pi\varepsilon_0}\frac{(q_1 + q_2)^2}{r}.$$

Количество выделенного тепла равно

$$Q = П_{1c} + К_1 - П_{2c} - К_2 = \frac{(q_1 - q_2)^2}{16\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{l}\right).$$

Упражнения

1. В вершинах двух острых углов ромба, составленного из двух равносторонних треугольников со стороной a, помещены положительные заряды $+q_1$. В вершине одного из тупых углов находится положительный заряд $+q_2$. Определить напряженность электрического поля **E** в четвертой вершине ромба.

2. Два неподвижных заряда $+q_0$ расположены на расстоянии a друг от друга. Вдоль оси симметрии системы этих зарядов может перемещаться третий точечный заряд $-q$, обладающий массой m (рис. 4). Считая смещение заряда $-q$ от прямой, соединяющей заряды $+q_0$, малым по сравнению с a, определить период T колебаний заряда $-q$.

3. Зная размерность напряженности электрического поля, найти (с точностью до числового коэффициента) напряженность поля бесконечно длинной нити, заряженной с линейной плотностью τ.

4. Пространство между двумя бесконечными параллельными пластинами заполнено диэлектриком, заряженным с постоянной объемной плотностью заряда ρ. Расстояние между пластинами a. Найти зависимость напряженности электрического поля от расстоя-

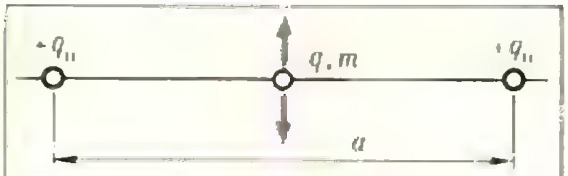


Рис. 4.

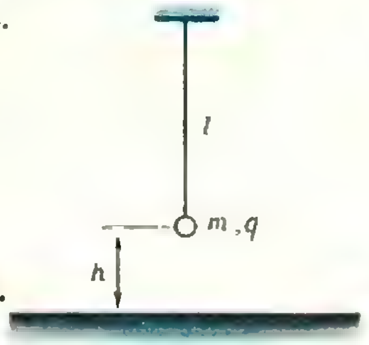


Рис. 5.

ния x, отсчитываемого от середины объемного заряда.

5. Шарик, имеющий заряд q и массу m, подвешен на нити длины l (рис. 5). На расстоянии h под ним находится проводящая плоскость. Найти период свободных колебаний маятника при малых углах отклонения нити от вертикали.

6. Три одинаковых точечных заряда $q = -2 \cdot 10^{-8}$ *к* расположены в вершинах равностороннего треугольника со стороной $a = 10$ *см*. Какую работу A нужно совершить, чтобы перенести один из них на середину противоположной стороны?

7. Три проводящие концентрические сферы имеют радиусы R, $2R$ и $3R$ соответственно. Средняя сфера несет заряд $+q$. В ней проделано отверстие, через которое тонкой проволочкой соединяют внешнюю и внутренюю сферы. Определить заряд q_1 внешней сферы после соединения.

8. Два одноименных точечных заряда q_1 и q_2 с массами m_1 и m_2 движутся навстречу друг другу. В момент, когда расстояние между зарядами равно r_1, они имеют скорости v_1 и v_2. До какого минимального расстояния r_2 сблизятся заряды?

9. Маленький пластмассовый шарик массой $m = 3 \cdot 10^{-15}$ *кг* падает в воздухе с постоянной скоростью $v_1 = 10^{-4}$ *м/с*. Чему равен заряд шарика, если в электрическом поле с напряженностью $E = 2{,}8 \cdot 10^5$ *в/м*, направленной вверх, он поднимается с установившейся скоростью $v_2 = 2 \cdot 10^{-4}$ *м/с*? Сила сопротивления воздуха прямо пропорциональна скорости шарика.

10. Две проводящие электрические сферы заряжены так, что внутренняя имеет потенциал φ_1, а внешняя φ_2. Какой потенциал будет иметь внутренняя сфера, если обе сферы соединить проводником?

Из научного юмора, или электричество и жизнь

(Начало см. с. 18, 24)

Какую работу против сил поля должны совершить босоногие участники эксперимента, чтобы пройти по 5 *м* в противоположных направлениях? Для числовых расчетов можно взять площадь поверхности дисков, равную 5 *дм*², а первоначальное расстояние между ними — 0,5 *см*.

Следует сделать еще несколько замечаний. Если мальчики босые, то есть у них хороший контакт с Землей, и если из-за дождя у них хороший контакт и с медными дисками, то конденсатор просто не удастся зарядить поскольку независимо от расстояния между дисками заряд будет сразу же стекать в Землю через мальчиков. При этом вероятность поражения электрическим током зависит от многих факторов, например от состояния кожи (из всех частей организма она обладает наибольшим электрическим сопротивлением), от емкости батареи. В данных условиях вероятность поражения током ничтожна: если принять, что сопротивление тела мальчиков составляет 10 *ком* (обычно же оно около 100 *ком*), то при напряжении батареи 12 *в* через мальчиков будет протекать ток порядка 1 *ма*. Такой ток практически не ощущается человеком.

Л. Н. Крыжановский

Новосибирский государственный университет

Мы уже писали о Новосибирском государственном университете (см. «Квант», 1973, № 5). Расскажем теперь более подробно о механико-математическом факультете НГУ.

Выпускники этого факультета имеют глубокие знания в таких фундаментальных областях математики, как математический анализ, алгебра и логика, дифференциальные уравнения. Они могут принять активное участие в разработке новых направлений в технике и научных методов, необходимых для решения важных народнохозяйственных задач.

Механико-математический факультет НГУ имеет два отделения: отделение математики и отделение прикладной математики и механики.

Отделение математики готовит специалистов по следующим разделам: дифференциальные уравнения и уравнения математической физики, теория функций и функциональный анализ, математическая логика, программирование, алгебра, геометрия и топология, теория вероятностей, математическая экономика, вычислительная математика.

Специализация студентов отделения математики концентрируется вокруг основных направлений современной математики.

Отделение прикладной математики и механики готовит специалистов по следующим разделам: гидродинамика, газовая динамика, теория упругости и пластичности, динамическая метеорология, математическая геофизика, вычислительная математика, теоретическая кибернетика.

Студенты отделения прикладной математики и механики получают широкое математическое образование и овладевают основами ряда прикладных дисциплин; они приобретают навыки в постановке и решении задач, возникающих в различных областях техники.

Ниже приводятся варианты письменного вступительного экзамена 1974 года по математике и физике на факультетах НГУ.

Математика

Механико-математический, физический и экономический факультеты

Вариант 1

1. Решить неравенство

$$2^{4x+2}\cdot 4^{-x^2}-3\cdot 2^{-x^2+2x+2}+5\geqslant 0.$$

2. Из точки вне окружности проведены касательные и секущая, причем точки касания и точки пересечения секущей с окружностью являются вершинами некоторой трапеции. Найти отношение оснований трапеции, если известно, что угол между касательными равен 60°.

3. Решить уравнение

$$\sqrt{\cos 2x-\sin 4x}=\sin x-\cos x.$$

4. При каких вещественных a система

$$\begin{cases} x^2=y^2=z^2,\\ x+y+z=3a,\\ xy=z-\dfrac{4}{9} \end{cases}$$

имеет вещественные решения, удовлетворяющие условию $xyz\geqslant 0$? Найти эти решения.

5. В треугольной пирамиде $SABC$ ребро SA перпендикулярно к плоскости треугольника ABC, $AC=CB=a, AS=AB=a\sqrt{2}$. Через середину ребра AC проведена плоскость, перпендикулярная к ребру SB. Найти расстояние от вершины A до этой плоскости.

Вариант 2

1. Решить неравенство

$$5\cdot 9^{2x+2}\cdot 3^{x^2-1}-2^4\cdot 3^{\frac{x^2}{2}+1}\cdot 9^x+1\leqslant 0.$$

2. В трапеции $ABCD$ боковая сторона CD перпендикулярна к основанию AD, $BC=a$, $AD=b$, $a<b$. На основании AD существует такая точка M, что MB перпендикулярно к AC, а MC перпендикулярно к BD. Найти высоту трапеции.

3. Решить уравнение

$$\frac{\sin x-\cos 3x}{1+\sin 3x}=\frac{1}{2}.$$

4. Для каких вещественных m оба корня уравнения

$$2y^2-(3m+1)y+m^2+m=0$$

удовлетворяют неравенству

$$y^2-my-3m-1\geqslant 0?$$

5. В основании пирамиды $SABC$ лежит прямоугольный треугольник ABC. Ребро SB перпендикулярно к плоскости основания, $SB=AB=AC=a$. Через середину AB перпендикулярно к SC проведена плоскость. Найти площадь сечения.

Факультет естественных наук (специальности: химия, биология) и геолого-геофизический факультет

Вариант 3

1. Решить неравенство

$$(0{,}05)^{-\log_{(x-0{,}25)}x} \geqslant (2\sqrt{5})^{\log_{(x-0{,}25)}(4x-1)}$$

2. Около окружности радиуса R описана равнобочная трапеция. Найти ее площадь, если известно, что расстояние между точками касания окружности с боковыми сторонами равно $R\sqrt{3}$.

3. Решить уравнение

$$\sin x - \cos x = \sqrt{4 - 3(\sin x + \cos x)}.$$

4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y+z} = \dfrac{1}{a}, \\ \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{x+z} = \dfrac{1}{b}, \\ \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{x+y} = \dfrac{1}{c}. \end{cases}$$

5. Дан куб $ABCDA'B'C'D'$. Точка M — середина ребра AA', а точка N — середина ребра $A'B'$. Плоскость, проведенная через точки M, N и C, разбивает куб на две части. Найти отношение объемов этих частей.

Вариант 4

1. Решить неравенство

$$\left(\frac{1}{8}\right)^{\log_{(x+2)}|x-2|} \leqslant (2\sqrt{2})^{-\log_{(x+2)}(11-2x)}.$$

2. Угол ABC равен 60°, причем $AB = BC = a$. Окружность O_1 касается AB в точке A, а окружность O_2 касается BC в точке C, кроме того, эти окружности касаются друг друга внешним образом. Найти радиусы окружностей, если известно, что их отношение равно двум.

3. Решить уравнение

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 2(\sin 2x + \cos 2x).$$

4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+a} - \sqrt{y+b} = 1, \\ \sqrt{y+a} - \sqrt{x+b} = 1 \end{cases}$$

(a и b — действительные числа, $a \neq b$).

5. Дан куб $ABCDA'B'C'D'$. Точка M — центр грани $AA'B'B$, точка N — середина ребра $C'C$, точка K лежит на ребре DC и $DK = \frac{1}{4}DC$. Плоскость, проведенная через точки M, N, K, делит куб на две части. Найти отношение объемов этих частей.

Физика

На письменном экзамене по физике каждому абитуриенту предлагалось 6 задач. В первой задаче нужно было объяснить физическое явление, показанное экзаменатором на демонстрационном столе. Вторая и третья — легкие задачи, которые под силу большинству абитуриентов. Четвертая и пятая — задачи, требующие достаточно уверенных знаний основных физических законов и некоторой сообразительности. Шестой предлагалась задача повышенной трудности. Чтобы ее решить, надо уметь разбираться в непривычной или усложненной физической ситуации.

На решение всех задач давалось 5 часов. Абитуриентам рекомендовалось решить вначале первые три задачи и подчеркивалось, что для получения высокой оценки не обязательно решение всех задач.

В приводимых ниже вариантах после условия каждой задачи указана в скобках ее максимальная оценка в баллах. (За неполное решение ставилась лишь часть баллов.) Для получения положительной оценки нужно было набрать не меньше *пяти баллов*. «Отлично» ставилось при 20 баллах и выше.

Вариант 1

1. В цилиндрической трубе (рис. 1) возбуждаются гармонические звуковые колеба-

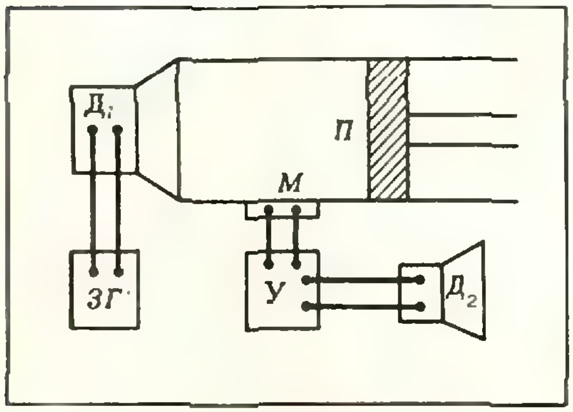


Рис. 1

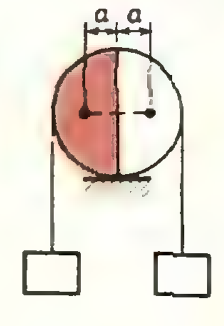


Рис. 2.

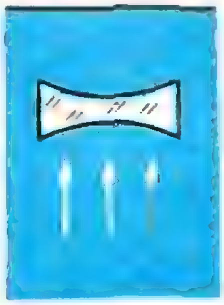


Рис. 3.

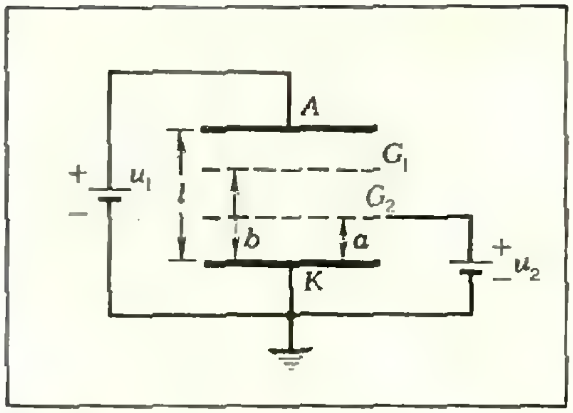


Рис. 4.

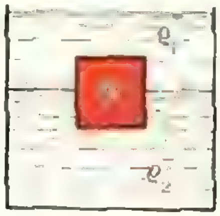


Рис. 5.

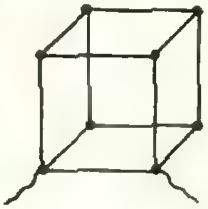


Рис. 6.

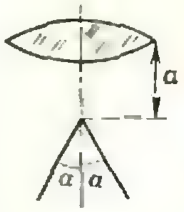


Рис. 7.

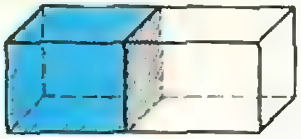


Рис. 8.

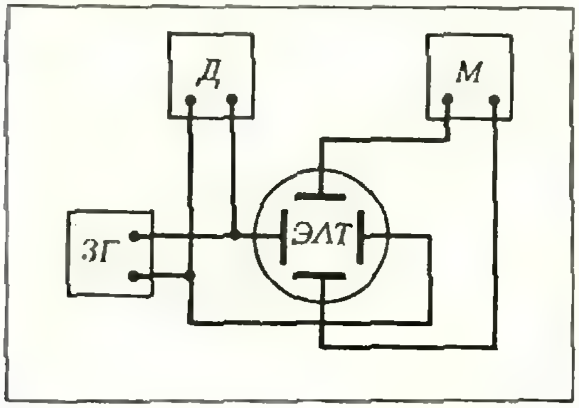


Рис. 9.

ния определенной частоты с помощью динамика $Д_1$, установленного на одном из ее концов. Длина трубы изменяется при перемещении поршня $П$. На боковой стенке трубы находится микрофон M, сигнал с которого через усилитель $У$ подается на динамик $Д_2$. Объяснить, почему при перемещении поршня изменяется сила звукового сигнала динамика $Д_2$. Можно ли этот эксперимент использовать для определения параметров колебательного процесса в трубе? Возможно ли определение свойств среды, в которой распространяются звуковые волны (скорость звука, плотность,...)? (5)

2. Катящийся без проскальзывания по горизонтальной плоскости обруч массы m сталкивается с вертикальной стенкой и прилипает к ней. Найти количество тепла, которое выделилось при столкновении, если центр обруча двигался со скоростью v. (4)

3. Цилиндр радиуса R, лежащий на подставке, разрезан пополам по вертикальной плоскости, проходящей через его ось (рис. 2). Вес каждой половины цилиндра P, и центры тяжести находятся на расстоянии a от оси цилиндра. Чтобы цилиндр не распался, через него перекинули нить с одинаковыми грузами на концах. Трение пренебрежимо мало. Найти минимальный вес грузов, не допускающий распада. (4)

4. Под водой находится полая двояковогнутая линза, имеющая в воде фокусное расстояние F (рис. 3). На нее снизу падает параллельный пучок света. Показатель преломления воды n. Линза расположена на расстоянии l $(l<F)$ от поверхности воды параллельно этой поверхности. Найти, на каком расстоянии от линзы соберутся лучи. Считать, что для любых лучей угол между лучом и оптической осью мал, то есть таков, что $\operatorname{tg}\alpha \approx \sin\alpha$. (5)

5. В цилиндрическом сосуде под невесомым поршнем находится насыщенный пар при температуре T. Определить, какая масса пара сконденсировалась, если при вдвигании поршня совершена работа A. Молекулярный вес пара μ, газовая постоянная R. (6)

6. В четырехэлектродной лампе с плоскими параллельными электродами заданы одинаковая площадь электродов S и расстояния от катода K до: анода A — l, сетки G_2 — a, сетки G_1 — b. Анодное напряжение u_1, между сеткой G_2 и катодом K напряжение u_2 (рис. 4). Найти заряд на сетке G_1, когда ток через лампу прекратится. (8)

Вариант 2

1. См. задачу 1 из варианта 1.

2. Сосуд заполнен двумя несмешивающимися жидкостями с плотностями ρ_1 и ρ_2 (рис. 5). На границе раздела жидкостей плавает куб с длиной ребра l. Найти глубину погружения куба в жидкость с плотностью ρ_2. Плотность куба ρ $(\rho_2>\rho>\rho_1)$. (3)

3. Найти сопротивление между соседними вершинами проволочного куба (рис. 6).

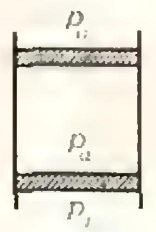


Рис. 10.

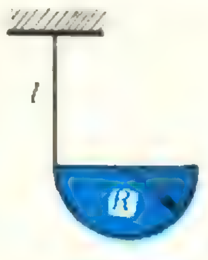


Рис. 11.

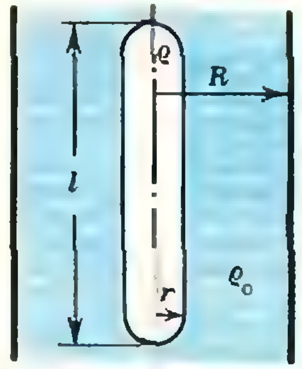


Рис. 12.

Сопротивление каждого из ребер равно R. (4)

4. Острие конуса с углом 2α рассматривают через лупу с фокусным расстоянием F, расположенную на расстоянии a от вершины конуса ($a<F$) (рис. 7). Каким виден угол конуса через лупу? Ось линзы проходит через ось симметрии конуса. (6)

5. В прямоугольном сосуде длиной $2l$ с непроницаемыми стенками находится слева тяжелая жидкость (например, ртуть), отделенная подвижным тонким поршнем от воздуха в правой части сосуда (рис. 8). В начальный момент поршень находится в равновесии и делит объем сосуда пополам. На сколько смещается поршень вправо, если абсолютная температура системы уменьшается в три раза? Тепловым расширением ртути и стенок сосуда, а также трением пренебречь. (7)

6. Две частицы с массами m и M и противоположными зарядами под влиянием взаимного электрического притяжения движутся по окружностям. Скорость частицы с массой m мгновенно увеличивают, не изменяя ее направления. В какое минимальное число раз нужно увеличить скорость, чтобы частицы после этого разлетелись неограниченно далеко друг от друга? (8)

Вариант 3

1. Собрана экспериментальная установка, схема которой приведена на рисунке 9. От генератора *ЗГ* звуковых частот синусоидальное напряжение подается на динамик *Д* и на горизонтально отклоняющие пластины электроннолучевой трубки *ЭЛТ*. На вертикально отклоняющие пластины *ЭЛТ* подается сигнал с микрофона *М*, который является приемником звуковых колебаний, возбуждаемых динамиком *Д*. Объяснить причину изменений, наблюдаемых на экране *ЭЛТ* при перемещении микрофона *М* относительно динамика *Д*. Нельзя ли использовать этот эксперимент для определения скорости звука? (5)

2. Светящаяся лампочка висит на высоте h над точкой стола O. На каком расстоянии от точки O освещенность стола в n раз меньше, чем в точке O? (3)

3. Два электропроводящих невесомых поршня площади S образуют плоский конденсатор, заполненный воздухом при атмосферном давлении p_a (рис. 10). Во сколько раз изменится расстояние между поршнями, если их зарядить разноименными зарядами Q? Система хорошо проводит тепло. Трением можно пренебречь. (5)

4. На горизонтальной поверхности расположены закрепленный заряд Q и на расстоянии r_0 от него масса m с одноименным зарядом q, которая может перемещаться вдоль поверхности с коэффициентом трения k. В начальный момент масса m покоилась, а затем начала двигаться под действием закрепленного заряда. На каком расстоянии от заряда Q она остановится? Ускорение силы тяжести g. (6)

5. Половник с тяжелой жидкостью аккуратно подвесили за конец ручки. Черпалка половника — полусфера радиуса R, а ручка, касательная к полусфере, имеет длину l (рис. 11). Пренебрегая весом половника, найти, какой объем жидкости останется в половнике. (6)

6. В вертикальной трубе радиуса R, заполненной жидкостью плотности ρ_0, находится цилиндр радиуса r и длины l, причем $l \gg R$ (рис. 12). Плотность цилиндра ρ. Пренебрегая влиянием концов цилиндра, определить скорость и ускорение в зависимости от пройденного цилиндром расстояния h, если в начальный момент цилиндр покоился. Ускорение силы тяжести g. Тепловыми потерями пренебречь. (9)

Г. В. Меледин,
А. И. Ширшов

РЕЦЕНЗИИ,
БИБЛИОГРАФИЯ

Школьникам о современной физике

Тот, кто любит физику и хочет избрать физику своей профессией, должен много знать и много уметь. Решая задачи, работая в физической лаборатории, школьник изучает то, что называется школьным курсом физики. Но всегда хочется узнать не только о том, что есть в школьных учебниках, но и то, над чем работают физики в своих лабораториях.

Прежде всего, в этом может помочь научно-популярная литература, особенно если она написана учеными, которые сами активно занимаются изучением природы. Пусть в их рассказе будет не все понятно, зато можно быть уверенным в том, что читателю не будут сообщены ошибочные, неверные сведения, ошибочные, например, потому, что в последнее время изменились взгляды ученых или же появились сообщения о новых экспериментальных фактах.

По таким книгам или статьям нельзя научиться решать задачи; не следует и пытаться вступать в споры с автором, стараясь придумать новую теорию. Обычно в них излагаются только конечные результаты, и поэтому почти невозможно понять, почему теории явлений в современной физике не имеют (почти никогда) разных вариантов, почему физики так уверены в правильности своих построений. Чтобы это понять, надо знать очень много и почувствовать, сколь много требований ставит природа перед теорией и как много самых неожиданных следствий проистекает из любых изменений теории. Поэтому только те, кто много работал в науке и на себе испытал всю сложность переплетений явлений природы, могут оценить значение и, конечно, достоверность теоретических объяснений того, что обнаруживает опыт.

Именно такие авторы написали статьи, вошедшие в книгу, которой открывается новая серия «Школьникам о современной физике» *). Эта книга включает в себя шесть статей; все они написаны известными советскими физиками.

Первая статья называется «Современная астрофизика». Автор ее — академик, лауреат Ленинской премии В. И. Гинзбург — рассказывает о новых разделах астрономии — гамма-астрономии, возникшей в последние несколько лет, и рентгеновской астрономии, родившейся немного раньше. В статье рассказывается о нейтронных звездах, пульсарах и черных дырах, о новых гипотезах эволюции Вселенной.

Статья «Всемирное тяготение и гравитационные волны» написана доктором физико-математических наук В. Б. Брагинским и кандидатом физико-математических наук В. Н. Руденко. В этой статье идет речь о том, как можно зарегистрировать гравитационные волны, которые приходят к нам из глубин нашей галактики, рассказывается об экспериментах, которые пока (вопреки первым утверждениям) не дали никаких результатов. Эта статья о том, как обнаруживают эффекты, которые находятся сейчас у самой границы наших возможностей.

В статье кандидата физико-математических наук В. А. Угарова «Принцип относительности и специальная теория относительности» коротко, но ясно рассказано об основных идеях теории относительности.

Очень интересна статья доктора физико-математических наук В. Б. Берестецкого «Тяжелый электрон». В ней подробно рассказано об одной из элементарных частиц — о μ-мезоне, или мюоне, как его сейчас называют. Эта частица с массой, примерно в 200 раз большей массы электрона, очень похожа по своим свойствам на электрон, но она «живет» лишь две миллионные доли секунды (в покое).

Доктор физико-математических наук И. С. Шапиро в статье «Механизм ядерных реакций» говорит о том, как физики расшифровывают процессы, происходящие в атомных ядрах, как из большого количества опытов выбирается и систематизируется информация о ядерных силах и ядерных реакциях.

Последняя статья книги «Управляемый термоядерный синтез», написанная доктором физико-математических наук, лауреатом Ленинской премии М. С. Рабиновичем, посвящена проблеме практического применения физических открытий нашего века. Вопрос об использовании энергии ядерного синтеза очень сложный. В статье обсуждаются все аргументы, которые привели физиков к уверенности в успешном практическом завершении идеи «термояда».

Издательство «Просвещение» предполагает выпустить еще несколько сборников «Школьникам о современной физике» (сейчас готовится к печати второй сборник).

Д. Бородин

---

*) Школьникам о современной физике. Классическая физика. Ядерная физика. М., «Просвещение», 1974.

«Квант» для младших школьников

Задачи

1. Четыре юных филателиста Митя, Толя, Саша и Петя купили почтовые марки. Каждый из них покупал марки только одной страны, причем двое из них купили советские марки, один — болгарские, а один — чешские. Известно, что Митя и Толя купили марки двух разных стран. Марки разных стран купили и Митя с Сашей, Петя с Сашей, Петя с Митей и Толя с Сашей. Кроме этого известно, что Митя купил не болгарские марки. Определить, марки каких стран купил каждый из них.

2. Почему при прыжках в воду надо стараться «войти» в воду вертикально?

3. Пусть x — сумма кубов десяти последовательных натуральных чисел, а y — сумма этих же натуральных чисел. Доказать, что x^2-y^2 делится на 300.

4. Два сосуда одинаковых объемов доверху наполнены теплой водой. Чтобы остудить воду, один сосуд ставят на лед, а на другой сосуд сверху кладут большой кусок льда. В каком сосуде вода остынет скорее?

5. Я моложе своего деда во столько же раз, во сколько старше своей сестры. Сколько мне лет, если моей сестре еще нет семи лет, а мне вместе с дедом уже 84 года?

Рисунки Э. Назарова

Е. Я. ГИК

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИГРЫ НА ШАХМАТНОЙ ДОСКЕ

Шахматная игра создавалась на протяжении многих веков, и ее правила неоднократно менялись. Однако с точки зрения математики движение шахматных фигур и форма доски имеют весьма условный характер. Существует множество самых разнообразных игр на прямоугольных досках, теория которых занимает значительное место в математической литературе. Одних только шашечных игр известно больше десятка: русские, стоклеточные, шашки Ласкера (см. «Квант», 1970, № 4), поддавки, уголки и другие. Даже современные шахматы имеют много разновидностей. Например, М. Гарднер в книге «Математические головоломки и развлечения» (М., «Мир», 1971) рассказывает о японских шахматах (соги), китайских (цюнь ки) и корейских (тьян кеуи). Сейчас мы остановимся на некоторых играх и задачах (содержащих математические элементы), в которых доска или правила игры отличаются от обычных.

До первого шаха

В этой игре все как в настоящих шахматах, только побеждает не тот, кто «первым» дает мат, а тот, кто первым объявляет шах. При обычной начальной позиции белые форсированно побеждают, причем не позднее пятого хода:

1. Кb1—с3. Грозит выпад конем на е4, d5 или b5 с неизбежным шахом, у черных единственный ответ: **1 ... е7—е6.** Теперь после **2. Кс3—е4 Крe8—е7** второй конь с решающим эффектом вступает в игру: **3. Кg1—f3 Фd8—е8 4. Кf3—е5** и шах следующим ходом.

Чтобы «оживить» игру, следует каким-либо образом изменить начальную позицию, например, передвинув белую пешку с с2 на с3, а черную с с7 на с6. Теперь невозможно 1. Кс3, а значит, и весь указанный вариант. Форсированного выигрыша уже не видно, например: 1. Фb3 d5! 2. Фb4 Фd6! 3. Фа4 Сd7 4. Фh4 Кf6, и черный король надежно защищен.

Двухходовые шахматы

В этой игре каждый ход белых и черных состоит из двух обычных. По-видимому, она ничуть не проще настоящих шахмат. Тем удивительнее, что удается доказать следующий неочевидный факт: *при правильной игре в двухходовые шахматы белым, по меньшей мере, гарантирована ничья.*

Вот доказательство, приведенное в некоторых источниках. Предположим противное: пусть при наилучшей игре обеих сторон белые проигрывают. После 1. Кb1—с3—b1 сохраняется начальная позиция, а первый ход уже принадлежит черным. Фактически теперь черные играют белыми и, по предположению, проигрывают. Противоречие.

Это доказательство не совсем точно. После первого хода белых позиция действительно повторяется, но ситуация иная! Так, после 1...Кg8 — f6 — g8 2. Кb1 — с3 — b1 белые еще не могут требовать ничью, а черные могут, поскольку 2...Кg8 — f6 — g8 приводит к троекратному повторению исходной позиции при ходе белых. Таким образом, нельзя считать, что после 1.К b1 — c3 — b1 «черные играют белыми»— возможности сторон разные. Кстати, аналогичный пример можно привести и на правило 50 ходов.

Приведем теперь строгое доказательство. По-прежнему считаем, что черные при безукоризненной игре обеих сторон выигрывают. Будем играть одновременно на двух досках. На первой пойдем 1.К b1 — c3 — b1, а ответный ход черных воспроизведем на второй доске со стороны белых. Затем ответ черных на второй доске повторим на первой за белых, ход черных на первой — за белых на второй и т. д. По нашему предположению, черные выигрывают и, значит, наступит момент, когда на первой доске своим очередным ходом они объявят мат белому королю. Но тогда на второй доске при повторении этого хода за белых возникнет позиция, в которой мат получает черный король! Но ведь черные и на второй доске играли безошибочно — противоречие.

Приведенное доказательство, как говорят математики, неконструктивно. Мы доказали, что белые могут не проиграть в двухходовые шахматы, но не выяснили, как им нужно играть. Более того, если будет найден форсированный выигрыш за белых (как, например, в игре «до первого шаха»), то тогда, очевидно, первый ход 1. Кb1 — c3 — b1 проигрывает. Таким образом, не исключено, что наше доказательство беспроигрышности белых проведено с помощью проигрывающего хода!

Шахматы без цугцванга

Если в обычной партии возникает такая позиция, что любой наш ход проигрывает, то мы говорим о цугцванге (если проигрывает и любой ход партнера, то цугцванг взаимный). Шахматы без цугцванга отличаются от обычных добавлением одного хода — хода на месте. В них цугцванга не бывает, так как всегда можно передать очередь хода партнеру.

Приведенное выше доказательство того, что при правильной игре белым гарантирована ничья, полностью проходит и для шахмат без цугцванга. Однако, в отличие от двухходовых шахмат, поиск непосредственного мата здесь безнадежен! Напомним, что в настоящих шахматах, где шансы белых, судя по статистике, заметно выше, вовсе не доказано, что даже при наилучшей игре им обеспечена хотя бы ничья.

Среди студентов мехмата МГУ популярностью пользуется следующая игра в крестики и нолики. На клетчатой бумаге произвольной формы (хоть «бесконечной») двое по очереди ставят крестики и нолики. Побеждает тот, кто первым ставит пять своих значков подряд (по вертикали, горизонтали или диагонали). Аналогично двойным шахматам и шахматам без цугцванга, можно доказать, что и здесь начинающий при безупречной игре не проигрывает. Правда, доказательство в данном случае сложнее, чем в шахматных играх.

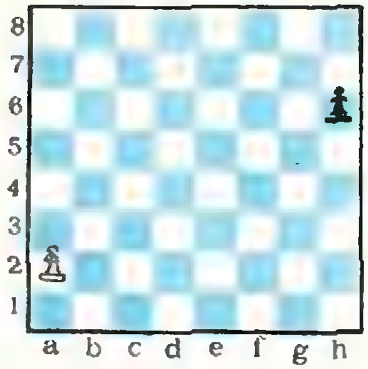
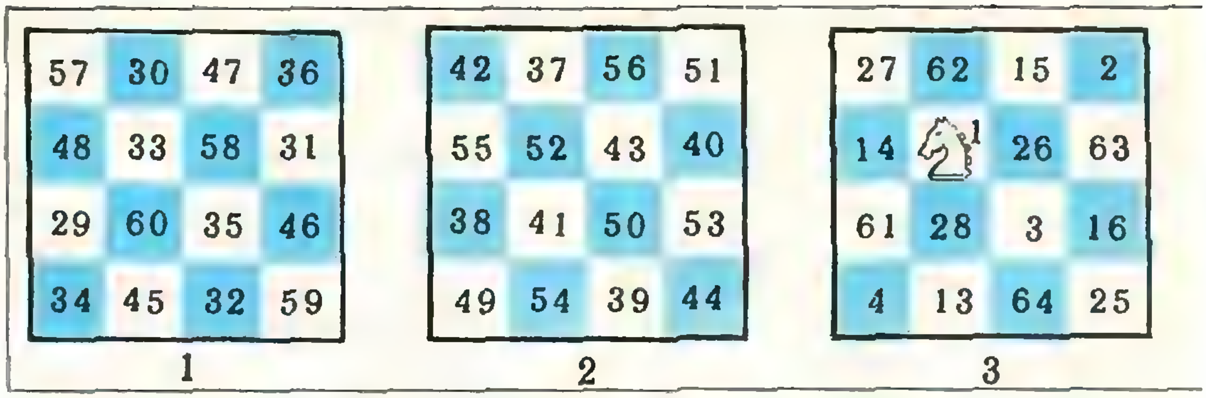


Рис. 1. Эндшпиль в поддавки.

Поддавки

Эта игра более популярна в шашках, однако и ее шахматный вариант весьма интересен. Победителем в ней становится тот, кому удается отдать все свои фигуры. Взятие в этой игре обязательно (в том числе и короля, которого можно ставить под бой), а если возможно несколько взятий, то выбор произволен. Кстати, гроссмейстер Д. Бронштейн в шахматные поддавки играет не менее охотно, чем в настоящие шахматы.

Теория поддавков довольно оригинальна и совершенно не похожа на законы обычных шахмат. Рассмотрим простейший эндшпиль (рис. 1). На доске всего две пешки, но посмотрите сколько тонкостей содержит позиция. **1. a2—a3**! Но не 1. a4, так как белая пешка должна превратиться позже черной. **1...h6—h5 2. a3—a4 h5—h4. 3. a4—a5 h4—h3 4. a5—a6 h3—h2 5. a6—a7 h2—h1Л!** Именно ладья, при других превращениях черной пешки (в ферзя, слона или коня) белые ставят ферзя, которого отдают сразу или на следующем ходу. **6. a7—a8С!!** Только так, иначе черные легко отдадут свою ладью. Теперь на любой ход черной



57	30	47	36
48	33	58	31
29	60	35	46
34	45	32	59

1

42	37	56	51
55	52	43	40
38	41	50	53
49	54	39	44

2

27	62	15	2
14	♘1	26	63
61	28	3	16
4	13	64	25

3

Рис. 2. Маршрут коня по всем полям объемной доски 4×4×4.

ладьи следует **7. Ca8—h1!**, и белые избавляются от слона.

Предлагаем вам самостоятельно оценить одно окончание в игре в поддавки и решить один этюд.

Упражнение 1. У белых пешка на d7, а у черных конь на f5 (других фигур на доске нет). Чем закончится игра в поддавки:

а) при ходе белых;

б) при ходе черных?

Упражнение 2 (Х. Клювер и К. Фабель). Белый король на f3, у черных две фигуры — король на d7 и ферзь на c8. Белые начинают и проигрывают (то есть выигрывают в поддавки).

Шахматы на прямоугольной доске

Многочисленные игры и задачи возникают при переходе к прямоугольным доскам $m \times n$ при различных значениях m и n. Большинство известных шахматно-математических задач и головоломок о движении фигур, маршрутах, расстановках, силе фигур нетрудно перенести и на такие доски (см. «Квант», 1971, №№ 8, 10; 1973, № 1; 1974, № 6). Можно играть также на бесконечной и проективной шахматной доске (см. «Квант», 1974, № 3). Все эти доски, как и привычная шахматная доска, — плоские.

Объемные шахматы

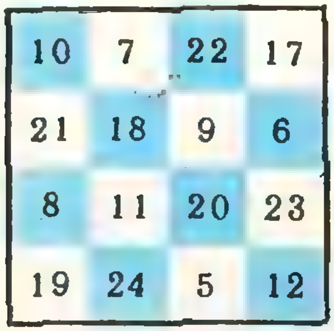
В них играют на трехмерной доске, представляющей собой параллелепипед $m \times n \times k$, единичные кубики которого образуют поля доски. Хорошо известна задача, которой занимался Эйлер: обойти конем все поля доски 8×8, посетив каждое из них по одному разу (см. «Квант», 1971, № 9). Рассмотрим аналогичную задачу на объемной доске, состоящей, как и обычная, из 64 полей (кубиков): *обойти конем все поля объемной шахматной доски* $4 \times 4 \times 4$, *побывав на каждом из них по одному разу.*

Доску удобно представить в виде четырех горизонтальных слоев, лежащих один на другом. На рисунке 2 изображены поверхности этих слоев, а сами слои занумерованы. Для нахождения искомого маршрута достаточно указать такую нумерацию, при которой кубики с соседними номерами отстоят друг от друга на один ход коня. Такая нумерация возможна, она приведена на рисунке 2.

Упражнение 3. Найдите маршрут коня на поверхности объемной доски $8 \times 8 \times 8$. Здесь конь фактически перемещается по шести плоским доскам. Основная трудность задачи состоит в сопряжении шести обычных маршрутов, для решения удобно воспользоваться разверткой куба.

Цилиндрические шахматы

Из обычной доски можно сделать, вообще говоря, две цилиндрические (см. также «Квант», 1970, № 5; 1971, № 8). Вертикальная цилиндрическая доска получается приклеиванием вертикали «a» к «h», а горизонтальная — приклеиванием первой горизонтали к восьмой.



10	7	22	17
21	18	9	6
8	11	20	23
19	24	5	12

4

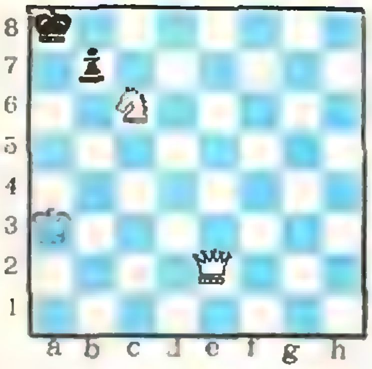


Рис. 3. Мат в 1 ход.

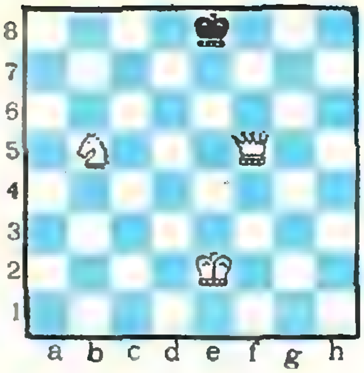


Рис. 4. Мат в 4 хода.

При переходе к цилиндрической доске не удается решить некоторые задачи, имеющие решение на обычной доске. Например, известная задача о расстановке восьми ферзей, которой занимался Гаусс, имеет 92 решения на обыкновенной доске и ни одного на цилиндрической!

Упражнение 4. Доказать, что на цилиндрической доске нельзя расставить восемь ферзей так, чтобы никакие два из них не угрожали друг другу.

На рисунке 3 изображена начальная позиция сразу трех задач: и на обычной, и на двух цилиндрических досках имеется свое решение:

а) на обычной доске **1. Фе2—е8 мат;**

б) на вертикальном цилиндре 1. Фе8 — лишь шах из-за ответа 1... Кра8—h7!, а к цели ведет **1. Фе2—g8 мат** (белый ферзь прошел по маршруту е2—а6—h7—g8);

в) на горизонтальном цилиндре 1. Фе8+также ничего не дает из-за 1... Кра8—а1!, а решает **1. Фе2—а2 мат!**

Тороидальные шахматы

Тороидальная доска получается в результате двойного приклеивания противоположных краев обычной доски.

Решим задачу, приведенную на рисунке 4. После **1. Фf5—h7!** в распоряжении черных два ответа:

а) **1... Кре8—f8** (поля d1, е1 и f1 контролирует белый король с е2 — на торе действуют правила горизонтального цилиндра!) **2. Фh7—g6 Крf8—е7 3. Кре2—е1 Кре7—d7** (теперь белый король с е1 держит поля d8 и f8) **4. Фg6—е8 мат!**

б) **1... Кре8—d8 2. Фh7—с7+ Крd8—е8 3. Кb5—h6!** (конь идет по тору, как по вертикальному цилиндру!) **3...Кре8—f8 4. Фс7—е1 мат!** (поля f7 и g8 держит белый конь, а остальные — ферзь).

Шахматы на необычных досках

Перечень шахматных игр на различных досках, получающихся из обычной при помощи геометрических преобразований, можно продолжить. Существуют многомерные доски, доска для игры двое на двое (на этой доске играют в так называемые «четверные шахматы») и «на троих» (здесь победителем становится тот, кто съедает обоих королей противников).

Можно играть на двух параллельных досках — на каждой из них правила обычные и, кроме того, фигурам разрешается перемещаться с одной доски на другую как в лифте. Если при склеивании доску перекрутить на пол-оборота, то вместо цилиндрической доски мы получим лист Мебиуса! На нем фигура за один ход может очутиться на том же поле, но только с другой стороны!

Забавная доска изображена на рисунке 5, она экспонировалась на выставке французских авангардистов!

Сказки

В шахматной композиции задачи и игры с необычными правилами, на нестандартных досках и с необычными фигурами относят к жанру сказочных (или фантастических) шахмат. Мы уже рассказали о нескольких сказочных играх на необычных досках. Остановимся теперь на некоторых сказочных фигурах, имеющих наибольшую популярность.

Ряд сказочных персонажей получается при комбинировании обычных ходов ладьи, слона и коня. Возможны четыре комбинации: ладья + слон, (в этом случае получается ферзь), ладья + конь (*канцлер*), слон + конь (*кентавр*), ладья + слон + конь (*магараджа* или *амазонка*).

Магараджа — очень мощная фигура, значительно превосходящая по силе ферзя (попробуйте найти силу магараджи методом, описанном в «Кванте», 1974, № 6). С магараджей связана следующая популярная игра.

У одного игрока полный комплект фигур, стоящих на первоначальных местах, а у другого лишь одна магараджа, которую он ставит на произвольное поле. Магараджа проигрывает, если ее удастся съесть, и выигрывает, если дает мат неприятельскому королю.

В этой игре пешкам запрещено превращаться, так как в противном случае выигрыш слишком прост — достаточно провести обе крайние пешки в ферзей, после чего три ферзя и две ладьи без труда окружат магараджу. При сделанной оговорке магараджа оказывает упорное сопротивление, а неопытный игрок может и проиграть. И все же у играющего полным комплектом фигур имеется форсированный выигрыш. М. Гарднер в книге «Математические новеллы» (М., «Мир», 1974) предлагает план окружения магараджи, состоящий из 25 ходов. Однако цели можно добиться, по крайней мере, десятью ходами раньше.

Рис. 5. Шахматная доска — экспонат выставки авангардистов.

Не обращая внимания на перемещения магараджи, белые делают подряд следующие 14 ходов: **a4**, **h4**, **Лa3**, **Лhh3**, **Кc3**, **Кf3**, **Лb3**, **Лg3**, **d4**, **Фd3**, **Фe4**, **Лb7**, **Фd5**, **Лg8** (легко видеть, что пока магараджа не могла съесть ни одной белой фигуры или дать мат). Теперь у магараджи имеются лишь два безопасных поля — a6 и f6. В первом случае она гибнет после 15.Сg5, а во втором — после 15.e4. Может быть, вы сумеете улучшить этот рекорд?

Упражнение 5. Расставить 10 магарадж на доске 10×10 так, чтобы они не били друг друга (на досках меньшего размера необходимым образом их расставить невозможно).

Сказочные кони

Различные сказочные фигуры получаются из обобщенного коня (a, b) при выборе тех или иных значений a и b. Такой конь ходит на a полей по одному из направлений и на b полей по перпендикулярному. Для обычного коня $a = 1$, $b = 2$.

Конь (1,3) называется *верблюдом*, (1,4) — *жирафом*, (2,3) — *зеброй*. Если одно из чисел a, b равно нулю, то получается ладья, перемещающаяся на фиксированное число полей, если же $a = b$, то получается слон, обладающий тем же свойством. Конь, совершающий за один ход несколько скачков подряд, имеет «звание» *всадника*. Интересной игре посвящена задача М268 (см. «Квант», 1974, № 6). В ней одной и той же фигурой один игрок ходит как обычным конем (с двойным ходом), а другой — как верблюдом. При этом конь оказывается хитрее верблюда!

Существует множество математических игр и задач с участием сказочных фигур, все упомянутые выше темы (маршруты, расстановки, сила фигур и другие) легко переносятся и на такие фигуры.

Шашматы

Эту игру, представляющую собой смесь шахмат и шашек, придумал американский математик С. Голомб, известный у нас своей игрой «полимино». В шашматы играют шахматными фигурами, но только на черных полях (как в шашках). Обычный конь здесь не в состоянии сделать ни одного хода (он сразу же попадает на запрещенное белое поле), поэтому его заменяют верблюдом — конем (1,3), не меняющим цвета полей.

На рисунке 6 предложен один из замкнутых маршрутов верблюда по всем полям шашматной доски. Известно, что на шахматной доске можно расставить максимум 32 коня, не угрожающих друг другу (их можно поставить на все белые или на все черные поля). Максимальное число «мирных» верблюдов на шашматной доске равно 16, то есть они также могут занять половину всех полей. Верблюдов можно поставить на поля со всеми четными или со всеми нечетными числами на рисунке 6. Таким образом, этот рисунок дает решение сразу двух задач на шашматной доске. Более подробный рассказ о шашматах (в частности, расстановку фигур перед началом партии) можно найти во второй из упомянутых книг М. Гарднера.

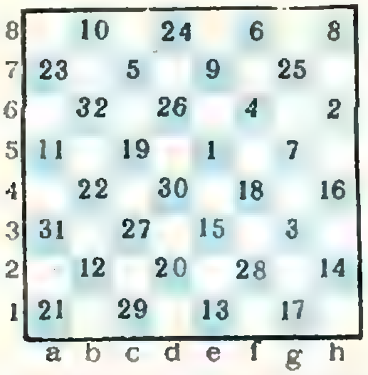


Рис. 6. Замкнутый маршрут верблюда на шашматной доске.

В заключение расскажем еще о нескольких сказочных фигурах, которые вообще уже ни на что не похожи! *Сверчок* ходит как ферзь, но перепрыгивает через свои и чужие фигуры, останавливаясь сразу за ними. *Лев*, в отличие от сверчка, приземляется на любом свободном поле за перепрыгнутой фигурой. Существуют *нейтральные фигуры*, которыми могут играть и белые и черные. *Бьющим фигурам* разрешается делать ход только со взятием. Бьющий конь называется *гиппопотамом*, а бьющий ферзь — *динозавром*. Фигура *дипломат* сама не ходит, но и ее нельзя брать; мало того, около дипломата собственные фигуры неприкосновенны! А фигура *камикадзе* (самоубийца) убирается с доски вместе со взятой фигурой!

До сих пор речь шла исключительно о фигурах. Однако и для пешек создано много разновидностей. *Пешка-хамелеон* при взятии неприятельской фигуры превращается в такую же фигуру, но своего цвета. *Сверхпешка* ходит на любое число полей по прямой и бьет на любое число полей по диагонали. *Пешка-такси* ходит и вперед, и назад. Наконец, один раз в партии пешке можно разрешить превращение в «*атомную бомбу*». Эта фигура сразу же после появления ставится на любое поле доски и в радиусе r полей (число r заранее оговаривается) уничтожает все вокруг себя.

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

К статье «Использование неравенства Коши при решении задач»

1. 30 *см*, 40 *см*.
2. 2 *м*, 2 *м*.
3. 1 *дм*×2 *дм*×3 *дм*.
4. $x=(1+\sqrt{13})/2$. Указание. Пусть $2x-1=k$, тогда

$$y=\frac{-4}{\left(k+\frac{13}{k}\right)-2}.$$

5. $v=20$ *км/ч*.
6. $x=1/4$. Указание.

$$4y+8=(8x+8)+\frac{100}{8x+8}.$$

7. $V=8\pi R^3/3$. Указание. Пусть x — расстояние от вершины конуса до шара, тогда

$$V=\frac{\pi R^2}{3}\left[\left(x+\frac{4R^2}{x}\right)+4R\right].$$

К статье «Электростатическое поле»

1. Напряженность поля направлена вдоль короткой диагонали ромба в сторону от заряда $+q_1$ и равна по модулю $E=\frac{q_1+q_2}{4\pi\varepsilon_0 a^2}$.

2. $T=\pi a\sqrt{\frac{\pi\varepsilon_0 ma}{q_0 q}}$.

3. $E=\frac{k\tau}{\varepsilon_0 R}$. Расчеты дают $k=\frac{1}{2\pi}$.

4. При $|x|\leqslant\frac{a}{2}$ $E=\frac{\rho|x|}{\varepsilon_0}$, при $|x|>\frac{a}{2}$ $E=\frac{\rho a}{2\varepsilon_0}$.

5. $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g+\frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 h^2 m}}}$.

6. $A=\frac{2q^2}{4\pi\varepsilon_0 a}\approx 72\cdot 10^{-6}$ *дж*.

7. $q_1=\frac{q}{4}$.

8. $r_2=\frac{r_1}{1+\frac{2\pi\varepsilon_0 m_1 m_2}{(m_1+m_2)}\frac{(v_1+v_2)^2}{q_1 q_2}r_1}$.

9. $q=\frac{mg(v_2/v_1+1)}{E}=3{,}2\cdot 10^{-19}$*к*.

10. $\varphi_1'=\varphi_2$.

К статье «Новосибирский государственный университет»

Математика

Вариант 1

1. $x\leqslant 1-\sqrt{2}$, $x\geqslant 1+\sqrt{2}$. Указание. Положить $-x^2+2x+1=y$.

2. $3+\sqrt{5}/2$. Указание. Пусть SA, SC — касательные, SBD — секущая, $AB\parallel CD$. Тогда $\triangle SBC\backsim\triangle SCD$, $\triangle SBA\backsim\triangle SAD$, откуда

$$\frac{CD}{AB}=\frac{CB\cdot SD^2}{SC\cdot SA\cdot AD}=\frac{SD^2}{SA^2},$$

поскольку $SA=AC=CS$ и трапеция равнобочная. Далее воспользоваться теоремой о касательной и секущей.

3. $x_1=2k\pi+\frac{3\pi}{8}$, $x_2=2k\pi+\frac{7\pi}{8}$, $x_3=2k\pi+\pi$, $x_4=k\pi+\frac{\pi}{4}$ (k — целое). Указание. Привести уравнение к виду

$$(\sin 2x+\cos 2x)(1-\cos 2x-\sin 2x)=0$$

и учесть условие $\sin x-\cos x\geqslant 0$.

4. $a=-\frac{4}{9}$, $x_1=-\frac{4}{3}$, $y_1=\frac{4}{3}$, $z_1=-\frac{4}{3}$, $x_2=\frac{4}{3}$, $y_2=-\frac{4}{3}$, $z_2=-\frac{4}{3}$.

5. $a/4$. Указание. Пусть LN — линия пересечения проведенной плоскости с плоскостью SAB, $AD\parallel LN$ (N, D на SB), тогда ND — искомое расстояние. Длины всех отрезков легко находятся по теореме Пифагора (поскольку $\measuredangle ACB=90°$).

Вариант 2

1. $-2-\sqrt{2}\leqslant x\leqslant -2+\sqrt{2}$.

2. $h=a\sqrt{\frac{b}{a+b}}$. Указание. Пусть $CD=h$. Используя подобие треугольников BCD и CDM, легко найти MD. Затем найти площадь трапеции двумя способами: по данным основаниям и высоте и как $S_{CDM}+S_{ABCM}$; получится уравнение, из которого находится h.

3. $x = k\pi + (-1)^k \frac{\pi}{6}$, $x = n\pi - (-1)^n \arcsin \frac{3}{4}$ (k, n — целые).

4. $-6-\sqrt{33} \leqslant m \leqslant -1/3$.

5. $a^2\sqrt{3}/8$. Указание. Сечение получается так: из точки M (середины AB) опускаем перпендикуляр MK на BC, из K перпендикуляр KN на SC; аналогично, $ML \perp SA$, $LN \perp SC$, при этом $\angle MKN = \angle MLN = 90°$ ($MK \perp$ пл. SBC, $ML \perp$ пл. SAC).

Вариант 3

1. $2-\sqrt{3} < x < 5/4$, $x \geqslant 2+\sqrt{3}$.

2. $8R^2\sqrt{3}/3$.

3. $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ (k — целое).

4. Запишем систему в виде

$$\begin{cases} a(x+y+z) = x(y+z), \\ b(x+y+z) = y(x+z), \\ c(x+y+z) = z(x+y). \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения второе и сравнивая с третьим, получаем

$$c(x-y) = (a-b)(x+y),$$

откуда

$$y = x\frac{c+b-a}{a+c-b}.$$

Аналогично,

$$z = x\frac{b-a+c}{a-c+b}.$$

Подставляя найденные выражения в первое уравнение системы и решая его, находим x:

$$x = \frac{2(ab+ac+bc)-a^2-b^2-c^2}{2(b+c-a)}.$$

Аналогично находим y и z. Анализ значений a, b и c, при которых система имеет решения, проведите самостоятельно.

5. 25:47.

Вариант 4

1. $1-\sqrt{8} \leqslant x < -1$, $1+\sqrt{8} \leqslant x$.

2. Радиус меньшей окружности $r_1 = a/\sqrt{3}$, $r_2 = 2a/\sqrt{3}$, $r_{3,4} = \frac{\sqrt{35}\pm3\sqrt{3}}{4}a$.

Указание. Восставить перпендикуляры AN, CN в точках A и C к прямым AB, CB и рассмотреть $\triangle ACN$, применив теорему косинусов. Рассмотреть все варианты расположения окружностей.

3. $x_1 = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$, $x_2 = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$ (k — целое).

4. $x = y = (a^2-2ab+b^2-2a-2b+1)/4$ при $a-b \geqslant 1$. При других a, b решений нет.

5. 97:191.

Физика

Вариант 1

1. Волна, идущая от динамика, интерферируя с волной, отраженной от поршня, образует систему стоячих волн, если выполнено условие:

$$l = \frac{\lambda}{4}(2n-1),$$

где l — расстояние между поршнем и динамиком, λ — длина звуковой волны, n — целое число. На динамике — пучность — максимум амплитуды, на поршне — узел — минимум амплитуды колебаний. Пусть при этом микрофон регистрирует звук. Если сдвинуть поршень, стоячие волны пропадут. Снова они возникнут, когда поршень будет отодвинут на расстояние $l_1 = \frac{\lambda}{4}[2(n\pm1)-1]$, то есть на расстояние $\Delta l = \lambda/2$ от прежнего положения (рис. 1). При расстройке из-за произвольности разности фаз суммируемых сигналов звука не слышно.

По величине $\Delta l = \lambda/2$ находится длина волны. Зная частоту ν и длину волны λ, можно определить скорость звука $u = \lambda\nu$.

2. Так как проскальзывания нет, скорости поступательного и вращательного движений равны v. В итоге

$$Q = m\frac{v^2}{2} + m\frac{v^2}{2} = mv^2.$$

3. Рассмотрим силы, действующие на левый полуцилиндр, и их моменты относительно линии его соприкосновения с опорой (рис. 2). Так как нить невесома и нет трения, натяжение нити во всех точках по ве-

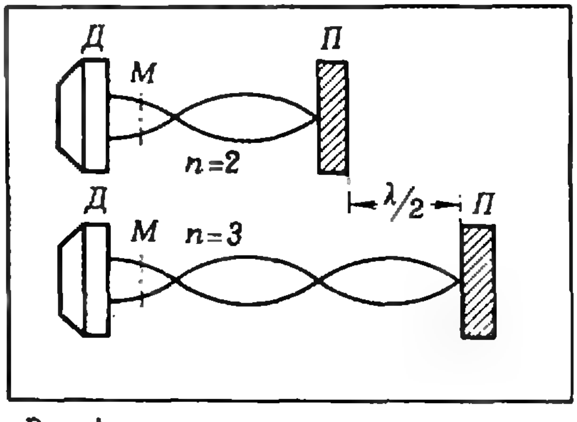


Рис. 1.

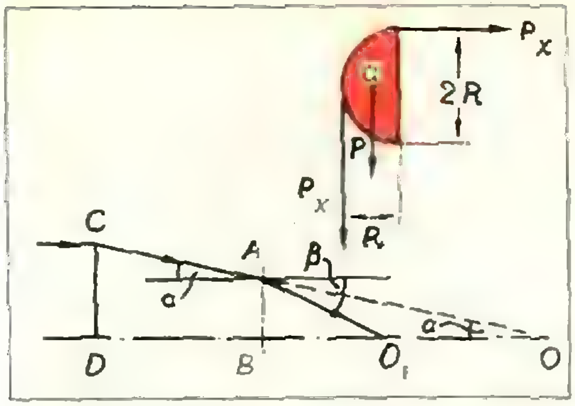


Рис. 2. Рис. 3.

личине одно и то же и равно весу неизвестного груза P_x. Уравнение моментов: P_xR+ $+Pa=P_x2R$. Отсюда

$$P_x=Pa/R.$$

4. Раз линза полая, а вокруг вода, значит, линза собирающая. Параллельный пучок, падающий на нее, должен был бы собраться в фокусе O (рис. 3), но, преломляясь на границе раздела AB, он попадает в точку O_1. Угол падения α, угол преломления β.

$$\sin\alpha/\sin\beta=1/n;\quad \operatorname{tg}\alpha=AB/BO;$$
$$\operatorname{tg}\beta=AB/BO_1;\quad BO_1/BO=$$
$$=\operatorname{tg}\alpha/\operatorname{tg}\beta\approx\sin\alpha/\sin\beta=1/n;$$
$$BO_1=(F-l)/n.$$

Искомое расстояние

$$DO_1=l+BO_1=F/n+l(1-1/n).$$

5. Так как пар насыщенный и есть жидкая фаза, то при сжатии его давление постоянно. Работа по сжатию равна $A=F\Delta l=pS\Delta l=p\Delta V=p(V_{\text{кон}}-V_{\text{нач}})$. К пару можно применить уравнение газового состояния: $pV_{\text{нач}}=(m_{\text{нач}}/\mu)RT$; $pV_{\text{кон}}=(m_{\text{кон}}/\mu)RT$; это дает $A=p(V_{\text{кон}}-V_{\text{нач}})=(m_{\text{кон}}-$ $-m_{\text{нач}})RT/\mu$. Отсюда

$$\Delta m=m_{\text{нач}}-m_{\text{кон}}=A\mu/RT.$$

6. Ток прекратится, когда потенциал сетки G_1 из-за осевших на нее электронов станет равным потенциалу катода, то есть нулевым. Так как тока нет, всю систему электродов можно рассматривать как систему плоских конденсаторов. В частности, анод, две поверхности сетки G_1 и сетка G_2 образуют два конденсатора (рис. 4). Искомый заряд Q_x равен сумме зарядов этих конденсаторов: $Q_x=q_1+q_2$, где $q_1=$ $=-u_1C_1$; $q_2=-u_2C_2$. Следовательно,

$$Q_x=-\frac{S}{4\pi}\left(\frac{u_1}{l-b}+\frac{u_2}{b-a}\right).$$

Вариант 2

2. $x=l\dfrac{\rho-\rho_1}{\rho_2-\rho_1}$.

3. Соединив точки с равными потенциалами, получаем эквивалентную схему (рис. 5). По этой схеме находим искомое сопротивление:

$$R_x=7R/12.$$

4. Простейший подход к решению задачи — пустить луч вдоль поверхности конуса и узнать, как он пойдет, пройдя лупу. Построение хода луча после лупы показано на рис. 6. Изображение острия конуса будет мнимым. Пусть оно находится на расстоянии b от лупы. Тогда $1/F=$ $=1/a-1/b$; $b\operatorname{tg}\beta=a\operatorname{tg}\alpha$. Отсюда искомый угол

$$2\beta=2\operatorname{arctg}[(1-a/F)\operatorname{tg}\alpha].$$

5. Введем искомое смещение x, высоту сосуда H_1, конечный уровень ртути H_2, начальное давление воздуха p_1, конечное p_2, d — удельный вес ртути. Условие сохранения объема ртути: $H_1l=H_2(l+x)$. Из условия равновесия вначале $p_1H_1=$ $=p_{\text{ср}1}H_1=d\dfrac{H_1}{2}H_1=\dfrac{d}{2}H_1^2$ и в конце $p_2H_1=p_{\text{ср}2}H_2=\dfrac{dH_2}{2}H_2=\dfrac{d}{2}H_2^2$ имеем $p_1/p_2=(H_1/H_2)^2$. Используя уравнение га-

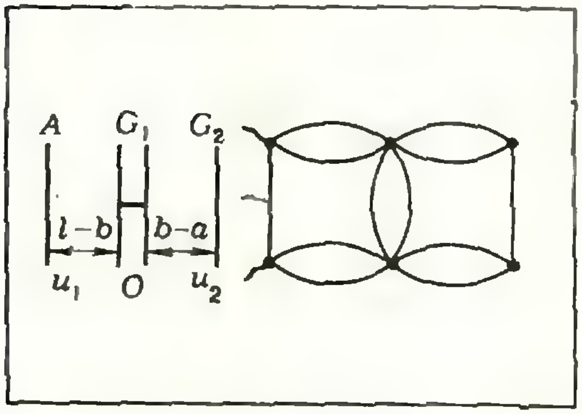


Рис. 4. Рис. 5.

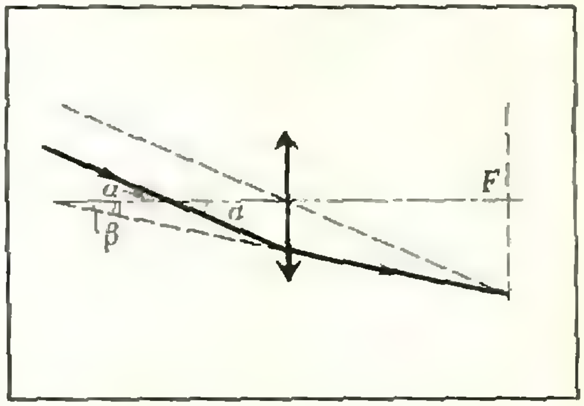


Рис. 6.

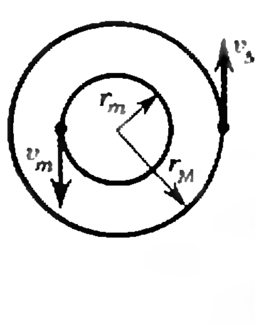


Рис. 7.

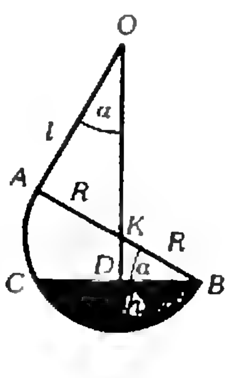


Рис. 8.

зового состояния, получаем

$$\frac{p_1}{p_2}=\frac{T_1V_2}{T_2V_1}=\frac{T_1(l-x)}{T_2 l}=\frac{3(l-x)}{l}=\left(\frac{H_1}{H_2}\right)^2=\left(\frac{l+x}{l}\right)^2.$$

Отсюда

$$x=\frac{\sqrt{33}-5}{2}\,l.$$

6. Введем расстояние между частицами r и величину заряда q. Частицы будут двигаться вокруг общего центра масс (см. рис. 7) по окружностям с радиусами $r_m = rM/(M+m)$ и $r_M = rm/(M+m)$ со скоростями v_m и v_M такими, что

$$mv_m = Mv_M. \qquad (1)$$

На основании II закона Ньютона

$$\frac{q^2}{r^2}=\frac{mv_m^2}{r_m}=\frac{m(M+m)\,v_m^2}{Mr},$$

отсюда

$$\frac{q^2}{r}=\frac{m(M+m)\,v_m^2}{M}. \qquad (2)$$

Пусть скорость частицы увеличили в n раз. Тогда на основании закона сохранения импульса обе частицы будут продолжать двигаться даже при наименьшем n с некоторой скоростью u после удаления частиц на очень большое расстояние (их относительная скорость в этом случае равна нулю). Закон сохранения импульса даст уравнение

$$m(n-1)\,v_m=(M+m)\,u. \qquad (3)$$

По закону сохранения энергии

$$-\frac{q^2}{r}+\frac{mn^2v_m^2}{2}+\frac{Mv_M^2}{2}=\frac{(m+M)\,u^2}{2}.$$

Подставляя сюда v_M из (1), r из (2) и u из (3), получаем квадратное уравнение для n: $n^2+2n\frac{m}{M}-\left[\left(\frac{m}{M}\right)^2+2+4\frac{m}{M}\right]=0$, откуда $n=\left(\frac{m}{M}\right)\left[\pm\left(1+\frac{M}{m}\right)\sqrt{2}-1\right]$.

Оба корня имеют смысл, так как новая скорость частицы m может быть направлена как по скорости v_m (тогда знак $+$), так и против скорости (знак $-$).

Вариант 3

1. Если на динамик подается напряжение $u_x=u_Д\cos\omega t$, то с микрофона снимается запаздывающее по фазе напряжение $u_y=u_M\cos(\omega t+\varphi)\equiv u_M\cos\omega(t+t_0)$, где сдвиг по фазе обусловлен временем t_0 прохождения звуком расстояния l от динамика до микрофона. Световое пятно на экране, таким образом, участвует в двух взаимно-перпендикулярных колебаниях с одинаковой частотой, но с разными амплитудами и сдвигом по фазе. В общем случае на экране виден эллипс. Если сдвиг по фазе $\varphi=\pi k$, где $k=0,\ 1,\ 2\ \ldots$, то эллипс вырождается в отрезок с углом наклона к горизонтальной оси

$$\alpha_{\pm}=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=\pm\operatorname{arctg}\frac{u_M}{u_Д}.$$

Сдвиг по фазе $\varphi=\omega t_0=\omega\frac{l}{c}$, где c — скорость звука. В случае вырождения эллипса в отрезок по величинам l_k, ω, используя связь $\pi k=\omega\frac{l}{c}$, можно определить скорость звука:

$$2\pi=\omega\,\frac{|l_k-l_{k\pm1}|}{c};$$

$$c=\frac{|l_k-l_{k\pm1}|\,\omega}{2\pi}=\frac{|l_k-l_{k\pm1}|}{T}.$$

2. $x=h\sqrt{n^{2/3}-1}$.

3. Учитывая, что напряженность поля, создаваемого одной пластиной, равна $2\pi Q/S$, имеем

$$\frac{x_0}{x}=1+2\pi Q^2/p_0S^2.$$

4. По закону сохранения энергии

$$\frac{Qq}{r_0}=\frac{Qq}{r}+mgk(r-r_0).$$

Отсюда

$$r=\frac{Qq}{mgkr_0},$$

второй корень r_0 не годится.

5. Ручка половника и оставшаяся жидкость должны расположиться в итоге так (рис. 8), чтобы вертикаль OD, проведенная через точку подвеса O, прошла через центр тяжести оставшейся жидкости и была бы перпендикулярна к ее поверхности ($OD \perp BC$, $CD = DB$). Объем области, занятой жидкостью: $V = \pi h^2 \left(R - \frac{h}{3}\right)$. Так как $BA \perp AO$, $OD \perp CB$, $CD = DB$, то $AK = KB = R$, $\sphericalangle AOD = \sphericalangle ABC = \alpha$; $\sin\alpha = R/\sqrt{R^2+l^2}$; $h = R - R\sin\alpha = R\left(1 - R/\sqrt{R^2+l^2}\right)$. Отсюда

$$V = \frac{\pi R^3}{3}\left(1 - \frac{R}{\sqrt{R^2+l^2}}\right)^2\left(2 + \frac{R}{\sqrt{R^2+l^2}}\right).$$

6. Если цилиндр движется со скоростью v, то из-за несжимаемости жидкости она должна проходить в противоположную сторону между цилиндром и стенками со скоростью u так, что $S_1 v = S_2 u$, то есть $\pi r^2 v = \pi (R^2 - r^2) u$; отсюда $u = r^2 v/(R^2 - r^2)$. Из закона сохранения энергии $\rho\pi r^2 l v^2/2 + \rho_0 \pi (R^2 - r^2) l u^2/2 = (\rho - \rho_0)\pi r^2 l g h$. Таким образом, $v = \sqrt{\frac{2gh(\rho/\rho_0 - 1)}{\rho/\rho_0 + r^2/(R^2 - r^2)}}$;

$$a = \frac{v^2}{2h}\ g\left(\frac{\rho/\rho_0 - 1}{\rho/\rho_0 + r^3/(R^2 - r^2)}\right).$$

К задачам «Квант» для младших школьников»

(см. «Квант», 1975, № 3)

1. Используйте признак делимости на 3.

2. Видимые нами размеры предмета зависят не только от его величины, но и от расстояния, на котором он от нас находится. (Спичечной головкой можно «заслонить» Луну.) Все видимые из окна вагона предметы перемещаются на одно и то же расстояние за единицу времени. Но один и тот же отрезок кажется нам тем меньше, чем дальше он от нас находится.

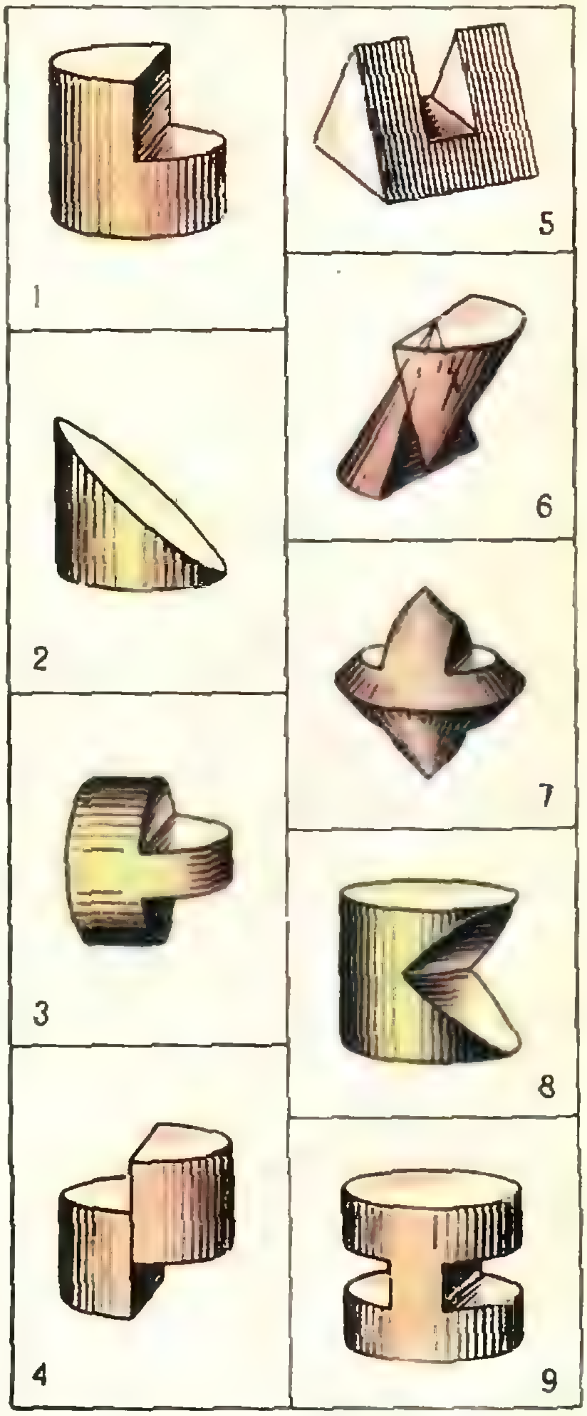
3. 18 секунд.

4. Когда температура воды (и коробочки) достигает 100 °С, вода закипает (при 100 °С бумага не горит). В дальнейшем температура воды (и коробочки) не повышается, так как тепло идет на поддержание кипения воды.

5. Достаточно даже одной гири в 200 *г*. При первом взвешивании кладем на чашку весов гирю в 200 *г* и высыпаем всю крупу на чашки весов так, чтобы весы были уравновешены. Тогда на одной чашке будет 4 *кг* 400 *г*, на другой — 4 *кг* 600 *г* крупы. При втором взвешивании аналогично рассыпаем 4 *кг* 600 *г*, получаем 2 *кг* 400 *г* и 2 *кг* 200 *г*. При третьем взвешивании от 2 *кг* 200 *г* отвешиваем 200 *г*.

К задаче «Универсальные пробки»

(см. «Квант», 1975, № 2, 4-я с. обл.)

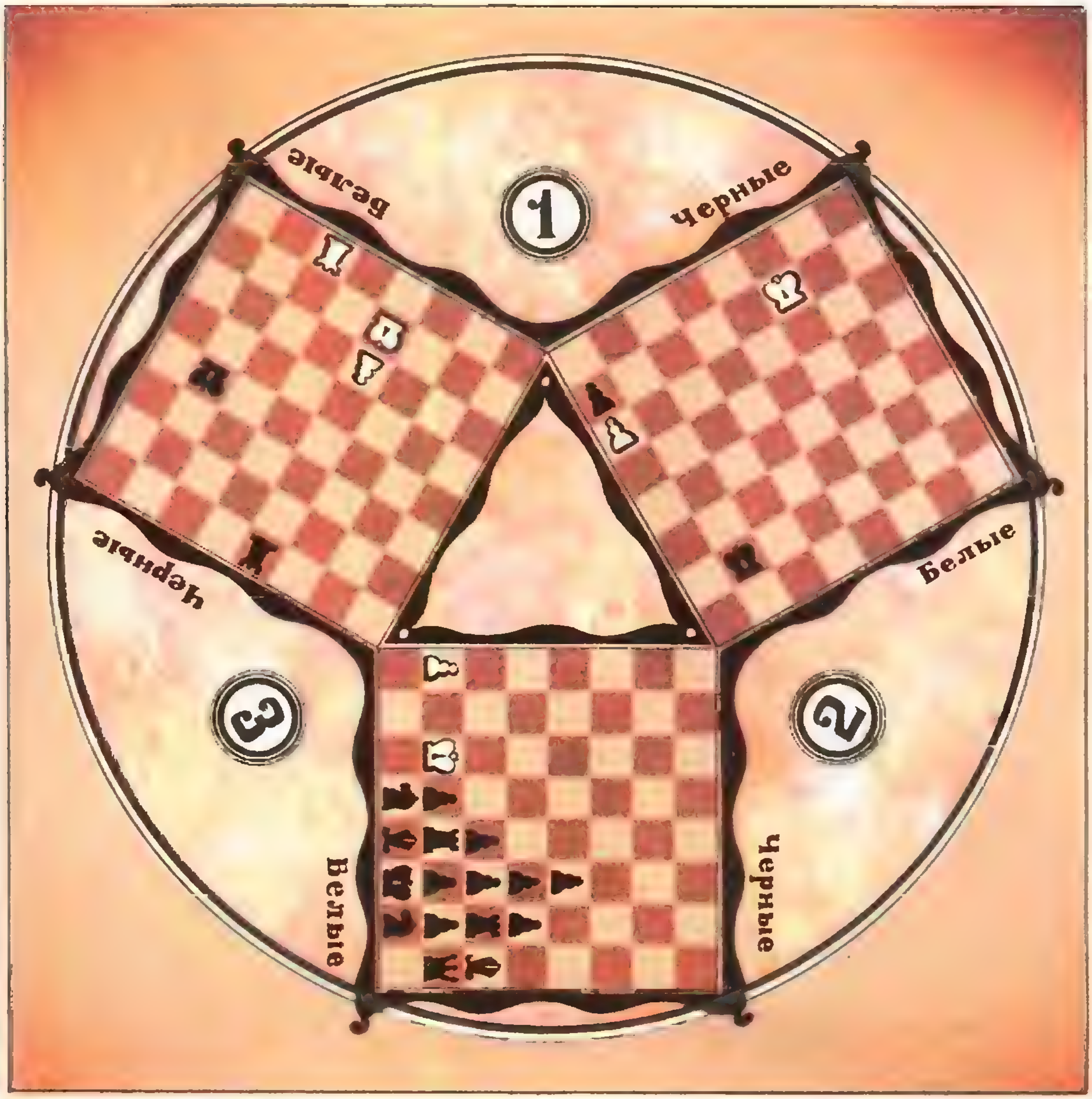


Корректор *Л. С. Сомова*

117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15, «Квант», тел. 234-08-11. Сдано в набор 16/I-75
Подписано в печать 5/III-75
Бумага 70×100 1/16. Физ. печ. л. 4
Усл. печ. л. 5,20 Уч.-изд. л. 5,94 Т-03286
Цена 30 коп. Заказ 33. Тираж 367 850 экз.

Чеховский полиграфический комбинат
Союзполиграфпрома
при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли, г. Чехов Московской области

Рукописи не возвращаются

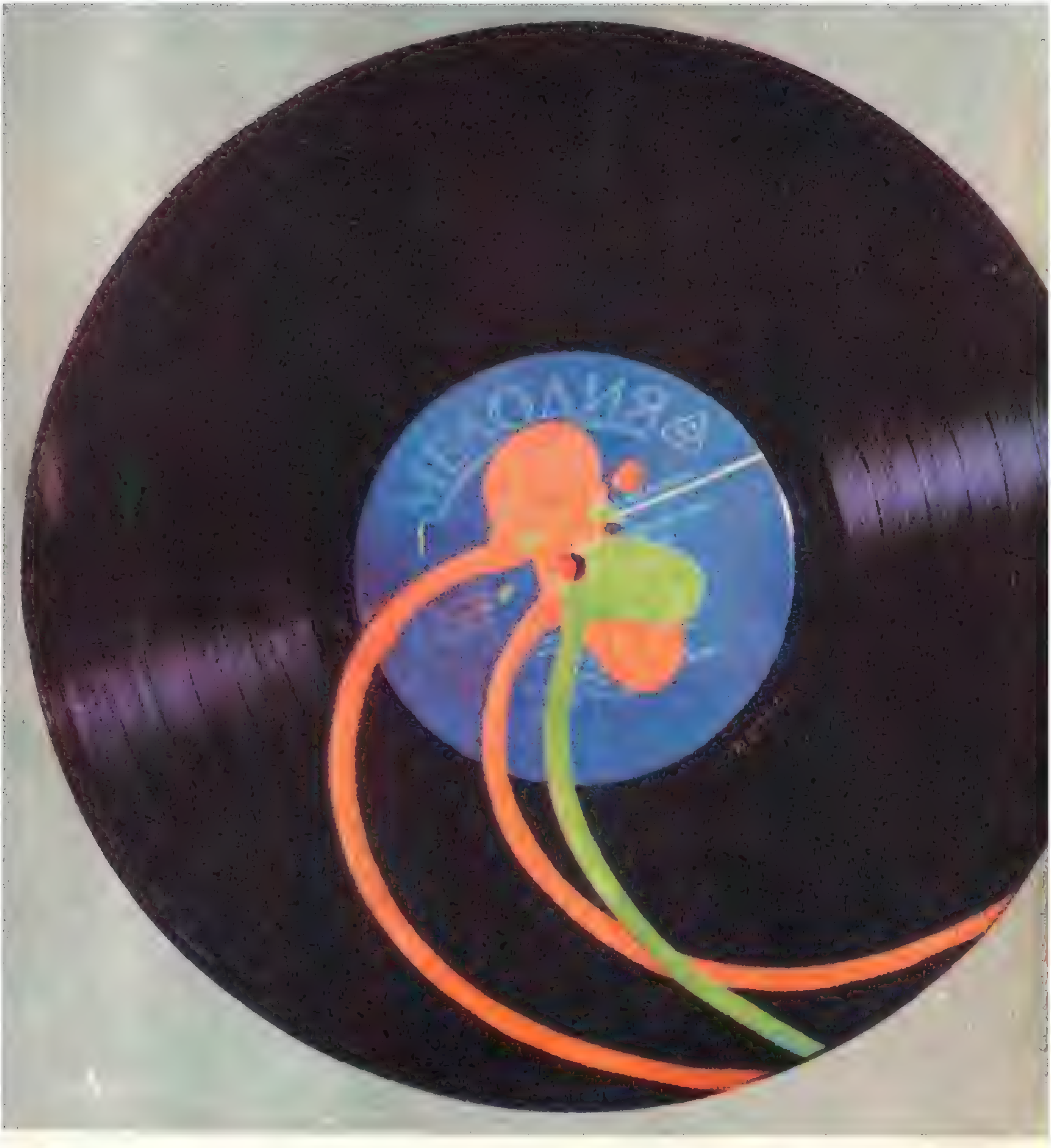


Турнир трех математиков

Трое юных математиков решили провести между собой шахматный турнир. Однако их несколько огорчало то обстоятельство, что всякий раз, когда двое играют, третий вынужден наблюдать за сражением вместо того, чтобы сесть за доску самому.

Тогда математики проявили всю свою изобретательность и придумали такое хитрое расположение досок, при котором «простоев» нет и все три партии играются одновременно.

В тот момент, когда мы подошли к столику, возникли очень интересные позиции, изображенные на диаграммах. Везде был ход белых. Постарайтесь выяснить, чем закончился турнир, если шахматисты действовали в этих позициях наилучшим образом. Заметьте, что результаты турнира в какой-то мере соответствовали тому, насколько хорошо наши игроки были знакомы с геометрией шахматной доски.



Цветные «следы» на пластинке получены так: из центра вращающегося диска над пластинкой по прямой линии двигали тюбик с вытекающей из него краской. А пластинка крутилась. Два «следа» получились при вращении на 78 оборотов, а один — на 33 оборота. Какой из трех? Чтобы проверить себя и ответить на вопрос этот совершенно уверенно, прочитайте статью Я. А. Смородинского «Сила Кориолиса» (см. с. 2).

Цена 30 коп.
Индекс 70465

4

НОМЕР
5

Основан в 1970 году.

Квант

1975

5

Научно-популярный
физико-математический
журнал
Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической
литературы

Главный редактор
академик И. К. Кикоин

Первый заместитель
главного редактора
академик А. Н. Колмогоров

Редакционная коллегия:

М. И. Башмаков,
С. Т. Беляев,
В. Г. Болтянский,
Н. Б. Васильев,
Ю. Н. Ефремов,
В. Г. Зубов,
П. Л. Капица,
В. А. Кириллин,
главный художник
А. И. Климанов,
С. М. Козел,
зам. главного редактора
В. А. Лешковцев,
Л. Г. Макар-Лиманов,
А. И. Маркушевич,
Н. А. Патрикеева,
И. С. Петраков,
Н. Х. Розов,
А. П. Савин,
И. Ш. Слободецкий,
зам. главного редактора
М. Л. Смолянский,
Я. А. Смородинский,
В. А. Фабрикант,
А. Т. Цветков,
М. П. Шаскольская,
С. И. Шварцбурд,
А. И. Ширшов

Редакция:

В. Н. Березин,
А. Н. Виленкин,
И. Н. Клумова,
художественный редактор
Т. М. Макарова,
Н. А. Минц,
Т. С. Петрова,
В. А. Тихомирова,
зав. редакцией
Л. В. Чернова

В НОМЕРЕ:

2 Великий подвиг советского народа
5 *Ю. В. Матиясевич* Формулы для простых чисел
14 *А. В. Чаплик* Волновая механика
22 *С. Г. Веров* Касательные к рулеттам
31 *И. Н. Бронштейн* Общие свойства конических сечений

Лаборатория «Кванта»

41 *М. П. Головей* Опыты со струей воды

Математический кружок

45 *И. Ф. Шарыгин* Выход в пространство

Задачник «Кванта»

50 Задачи М321—М325, Ф333—Ф337
52 Решения задач М286—М290, Ф296—Ф298

Практикум абитуриента

58 *К. И. Кашин* Институт начинается со школы
60 *Г. И. Розенблат* Как приступить к решению задачи по физике?
64 *Ж. М. Михайлов, В. Н. Слудский, А. В. Устинова* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Информация

68 *А. Л. Стасенко* ФАЛТ — что это такое?
70 *А. А. Быков, Ю. И. Ионин* Школа-интернат при Ленинградском государственном университете им. А. А. Жданова

«Квант» для младших школьников

71 Задачи
72 *О. П. Чопенко* Про счеты

Ответы, указания, решения

Уголок коллекционера

76 *А. В. Алтыкис* XXX лет победы над гитлеровским фашизмом *(3-я с. обложки)*

© Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», «Квант», 1975 год

30 ЛЕТ ПОБЕДЫ

Великий подвиг советского народа

9 мая советские люди и вместе с ними все прогрессивное человечество празднуют тридцатилетие победы над гитлеровской Германией. Эту великую победу одержали не только советские вооруженные силы, сражаясь на передовой, но и весь советский народ под руководством Коммунистической партии Советского Союза.

Не остались в стороне и советские ученые, плоть от плоти народа. Они внесли весомый вклад в победу, сражаясь на фронтах и работая в научных лабораториях.

Незабываем митинг в Коммунистической аудитории Московского государственного университета на Моховой, когда университетская комсомольская организация объявила себя мобилизованной «для выполнения любого задания партии и правительства — на фронте, на заводах, на транспорте, на колхозных и совхозных полях». Фронтовики-ученые самоотверженно сражались с врагом; все помыслы их были направлены на победу. Но и тогда, в дни горячих боев, они оставались верными науке. Одному из них писал в марте 1945 года замечательный советский математик и педагог А. Я. Хинчин:

«...Вы заставили меня задуматься над тем, почему в эту войну такие, совсем юные бойцы, как Вы, при каждой небольшой передышке со всей страстью рвутся к своему любимому делу — к тому делу, которому они отдали себя еще до войны и от которого были оторваны войной. В прошлую мировую войну этого не было. Тогда юноша, попавший на фронт, почти всегда чувствовал, что жизнь его переломилась, что все, чем он жил прежде, стало для него невозможной сказкой. А сейчас ведь есть такие, которые в перерывах между боями пишут диссертации и защищают их, приехав в короткий отпуск! Не потому ли это, что Вы ощущаете всем существом Ваш ратный труд и Ваше любимое занятие — науку, искусство, практическую деятельность — как два звена одного и того же великого дела? И если это так, то не есть ли это ощущение одна из главных движущих пружин Ваших побед, которыми мы здесь, в тылу, так восхищаемся?..»

Не все дожили до дня великой победы. Немало ученых отдали свою жизнь за независимость нашей Родины. Мы с благоговением произносим их имена.

Герой Советского Союза Евгения Максимовна Руднева — выпускница механико-математического факультета МГУ. Перед войной она заведовала отделом Всесоюзного астрономо-геодезического общества. Гвардии старший лейтенант, штурман гвардейского авиационного полка, она совершила 645 боевых вылетов. Дневники и письма Евгении Максимовны Рудневой собраны в книге «Пока стучит сердце», выпущенной издательством «Молодая гвардия».

Тем, кто интересуется научно-популярной литературой, должны быть известны имена талантливых популяризаторов науки — Ростислава Николаевича Бончковского и Георгия Николаевича Бермана. Ростиславу Николаевичу принадлежит книга о первых математических олимпиадах для школьников, проводившихся у нас в стране. Он был основным редактором сборников «Математическое просвещение», издававшихся до войны. И все вы, конечно, читали замечательные научно-популярные книги Георгия Николаевича Бермана: «Циклоида», «Число и наука о нем» и другие. Тяжело раненный, он нашел в себе силы продолжать любимую работу и буквально за два дня до смерти правил корректуру своей книги.

В 1937—1941 годы одной из секций математического кружка для школьников при МГУ руководил молодой талантливый математик Давид Оскарович Шклярский. С первых дней войны ушел он на фронт и в 1944 году пал смертью храбрых. Но до сих пор ощущается влияние Д. О. Шклярского на математическое образование. С 1946 года выходит серия книг «Библиотека математического кружка», где используются материалы кружка, которым руководил Давид Оскарович. Он ни разу не держал в руках этих книг, но в знак признания его особых заслуг на первом месте среди авторов стоит фамилия Д. О. Шклярского.

Живы в памяти народа имена ученых, погибших в боях с фашистами. Вечная им память и слава!

Неоценим вклад ученых, которые, не жалея сил, работали днем и ночью, привнося в труд весь свой опыт, знания и талант, помогая вооруженным силам и оборонной промышленности. В том, что Советская Армия была оснащена современным оружием, большая заслуга наших ученых и конструкторов. Мы упомянем лишь о некоторых работах советских математиков и физиков.

«Богом войны» называют артиллерию. Наука помогала артиллерии более метко «накрывать» цель и сообщать снарядам разящую силу. Большую роль в выполнении этой задачи сыграли работы советских математиков, механиков, в частности, школы академика А. Н. Колмогорова по теории стрельбы, академика М. А. Лаврентьева по направленным взрывам, члена-корреспондента АН СССР А. А. Ильюшина по пластическому течению металлов.

Еще до войны группа специалистов Ленинградского физико-технического института, возглавляемого академиком А. Ф. Иоффе, начала разрабатывать актуальную для флота проблему — размагничивание кораблей. В то время на вооружение многих флотов мира были взяты так называемые магнитные мины, которые автоматически взрывались при прохождении корабля над ними. Дело в том, что всякое стальное тело (в данном случае корпус корабля) в большей или меньшей степени намагничено и тем самым создает вокруг себя магнитное поле. Это поле и «чувствовали» мины. Чтобы обезопасить корабль от магнитных мин, его нужно размагнитить. Размагничивание кораблей производилось системой определенным образом расположенных проводов, по которым пропускался электрический ток.

Во время войны работы по размагничиванию кораблей велись непосредственно на военно-морских базах. Эти работы проводились группой физиков под руководством академиков А. П. Александрова и И. В. Курчатова. Размагничивание оказалось настолько эффективным, что наш флот практически не нес потерь от магнитных мин. Благодаря этому была сохранена жизнь тысячам советских моряков.

Ученые занимались не только проблемами защиты от вражеских мин — велись работы и по созданию подрывных снарядов. Так, группой наших физиков были разработаны противотранспортные мины, на которых подрывались немецкие танки, поезда и автомобили. Немецкие миноискатели оказались бессильны в попытках обезвредить эти мины.

Ленинградским физикам, руководимым членом-корреспондентом АН СССР П. П. Кобеко, совместно с моряками военно-морского флота во время блокады Ленинграда пришлось решать не совсем обычную задачу: разработать методы, обеспечивающие безопасное прохождение транспорта по ледовой дороге. Как известно, в период блокады город снабжался продовольствием, сырьем и снарядами по единственной дороге, проходившей по льду Ладожского озера. В невероятно тяжелых условиях осажденного города, находящегося под обстрелом и бомбежкой, ученые-физики и моряки обеспечили бесперебойную работу «дороги жизни».

Эффективными оказались результаты труда уральских физиков, разработавших метод магнитной дефектоскопии, который позволил обнаруживать опасные изъяны в стальных корпусах артиллерийских снарядов Метод основан на том, что у изделий, имеющих «внутренние» дефекты в металле, магнитное поле вблизи этих дефектов отличается от магнитного поля в «здоровых» частях изделия. Эти отклонения и удавалось обнаружить специальными приборами, получившими название магнитных дефектоскопов. Миллионы снарядов, забракованных по внешним механическим признакам, но в действительности вполне пригодных для стрельбы, с помощью этих приборов были признаны годными и возвращены на фронт.

Хорошо известна та исключительная роль, которую сыграли в войне радиолокаторы. Идея создания этого прибора принадлежит академику Ю. Б. Кобзареву.

Заслуги советских ученых получили высокую оценку партии и правительства: многим из них были присвоены звания Героя Советского Союза, Героя Социалистического Труда. Многие награждены орденами и медалями Советского Союза и других государств, удостоены государственных премий.

Задача овладения боевой техникой, в разработке которой активно участвуют советские ученые, теперь стала еще актуальней и сложней. Генеральный секретарь ЦК КПСС Л. И. Брежнев отметил: «Военная техника в наши дни — это не обтянутые парусиной «фарманы» 20-х годов и даже не «ястребки» и «уточки» периода Отечественной войны. Сегодня защитники Советской родины должны владеть искусством управления межконтинентальными ракетами, вождения сверхзвуковых самолетов, атомных подводных лодок, быть знатоками многих других сложнейших видов оружия. Сегодня нужны уже не только просто смелые, тренированные, мускулистые ребята с метким глазом и твердой рукой, но и инженеры, математики, знакомые с тайнами электроники и кибернетики. Задачи, таким образом, и в этой области стали более сложными, ответственными, поднялись на новый уровень. Но комсомольская хватка, энтузиазм, дерзание молодости, мужество и отвага нужны сегодня так же, как и во времена гражданской войны и первых пятилеток, как в огненные годы Великой Отечественной» *).

Со времени окончания войны минуло уже тридцать лет. Но подвиг советского народа навеки останется в памяти человечества. Наш народ высоко ценит вклад, который внесли в дело победы советские ученые. Честь им и слава!

---

*) Брежнев Л. И. Речь на торжественном Пленуме ЦК ВЛКСМ 25 октября 1968 г. — В кн.: «Ленинским курсом». Речи и статьи, т. 2, М., 1973, с. 273.

Ю. В. МАТИЯСЕВИЧ

ФОРМУЛЫ ДЛЯ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ

Что требуется?

Простые числа разбросаны в натуральном ряду очень прихотливым образом, и не удивительно, что издревле математики стремились найти «формулу для простых чисел». Такими формулами можно называть формулы, обладающие разными свойствами, и здесь очень важно понять, что нам требуется на самом деле.

Самая простая формула для простых чисел выглядит, по-видимому, так:

$$p = p_n, \tag{1}$$

где p_n обозначает n-е простое число. Чем же эта формула не устраивает нас? Дело в том, что правая часть этого равенства вычисляется слишком сложным образом — попробуйте, например, самостоятельно найти p_{1975}! Мы же хотим получить аналогичную формулу с возможно более простым способом вычисления правой части (однако, как мы увидим, простота вычислений — понятие совсем не очевидное). Это так сказать, *программа-максимум.*

Ради простоты формулы можно отказаться от требования явной зависимости от номера n и искать формулы, дающие простые числа, быть может, не по порядку. Далее, можно отказаться от желания задать одной формулой сразу все простые числа и требовать только того, чтобы формула давала бесконечно много простых чисел. Можно, наконец, допустить, чтобы эта формула давала наряду с бесконечно многими простыми числами и некоторые составные числа. Это — *программа-минимум.*

Формулы, кажущиеся очень простыми, на деле могут оказаться не лучше формулы (1). Именно к таким примерам мы сейчас и переходим.

Теорема Е. М. Райта

В 1947 году В. Х. Миллс опубликовал следующий результат:

Существует вещественное число λ такое, что при любом $n = 1, 2, \ldots$ число

$$\left[\lambda^{3^n}\right] \tag{2}$$

является простым *).

Впоследствии появился еще ряд формул такого же типа. Однако все это были результаты, формулировка которых выглядит заманчивой и многообещающей, но доказательство разочаровывает. Тому, кто хочет понять, почему это так, мы предлагаем разобраться в доказательстве следующей теоремы Е. М. Райта:

Существует вещественное число μ такое, что всякое число вида

$$\left[2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2^{\mu}}}}}}\right] \tag{3}$$

является простым.

Ключевым пунктом в доказательстве теоремы Райта является так называемый *постулат Бертрана.* Согласно этому постулату при $x \geqslant 4$ между x и $2x-2$ всегда есть простое число. Эту гипотезу впервые высказал французский математик **Бертран**: доказать ее он не смог, а потому использовал в своих рассуждениях в качестве недоказуемого постулата. Доказательство гипотезы Бертрана было найдено впоследствии выдающимся русским математиком П. Л. **Чебышевым** *).

---

*) Здесь и ниже $[\alpha]$ обозначает целую часть числа α, то есть наибольшее целое число, не превосходящее α.

Чтобы найти нужное число μ, выберем сначала последовательность простых чисел $q_1, q_2, \ldots$, такую, что при любом $n = 1, 2, \ldots$

$$2^{q_n} < q_{n+1} < 2^{q_n+1} - 1. \qquad (4)$$

(В качестве q_1 можно взять любое простое число, возможность же неограниченного продолжения последовательности $\{q_n\}$ с соблюдением неравенства (4) гарантирует постулат Бертрана.)

Обозначим для краткости число

$$2^{2^{\cdot^{\cdot^{2^{\alpha}}}}},$$

где берется n возведений в степень, через $\exp_2^n \alpha$, и обратную функцию,

$\log_2 \log_2 \ldots \log_2 \beta$ — через $\log_2^n \beta$.

Попробуем выбрать число μ так, чтобы при $n = 1, 2, \ldots$

$$[\exp_2^n \mu] = q_n. \qquad (5)$$

Согласно определению целой части числа равенство (5) эквивалентно неравенству

$$q_n \leqslant \exp_2^n \mu < q_n + 1.$$

Прологарифмировав его n раз по основанию 2, получим еще одно двойное неравенство, эквивалентное (5):

$$\log_2^n q_n \leqslant \mu < \log_2^n (q_n + 1). \qquad (6)$$

Проверьте сами, что из (4) следует

$$\log_2^1 q_1 < \log_2^2 q_2 < \ldots < \log_2^n q_n <$$
$$< \log_2^{n+1} q_{n+1} < \ldots$$
$$\ldots < \log_2^{n+1} (q_{n+1} + 1) < \log_2^n (q_n + 1) < \ldots$$
$$\ldots < \log_2^2 (q_2 + 1) < \log_2^1 (q_1 + 1).$$

Таким образом, последовательность

$$\log_2^1 q_1,\ \log_2^2 q_2,\ \ldots,\ \log_2^n q_n,\ \ldots$$

строго возрастает и ограничена сверху; следовательно, она имеет предел. Его-то мы и возьмем в качестве числа μ; докажите, что так выбранное μ удовлетворяет даже более сильному, чем (6), неравенству

$$\log_2^n q_n < \mu < \log_2^n (q_n + 1), \qquad (7)$$

и, следовательно, равенство (5) справедливо. Теорема Райта доказана.

Основным недостатком формул (2) и (3) является то, что они (точнее, их доказательства) не дают никакого способа находить новые простые числа, ибо чтобы вычислить какое-либо простое число по формулам (2) или (3), нужно числа λ и μ знать с достаточной точностью. Таким образом, формулы (2) и (3) в некотором смысле являются всего лишь замаскированными (и ухудшенными) вариантами формулы (1). Кроме того, вид формул (2) и (3) на самом деле почти ничего не говорит именно о множестве простых чисел. Из доказательства теоремы Райта видно, что формулы, аналогичные (2), (3), можно указать для любого «достаточно густого» множества.

Недостатки формул (2) и (3) порождены тем, что в них входят вещественные числа λ и μ, задаваемые неким косвенным образом. В дальнейшем мы будем рассматривать лишь формулы, в которые входят только целочисленные коэффициенты. Такие формулы обладают важным преимуществом: они могут быть (в принципе) выписаны явно.

Простые числа Мерсенна и Ферма

Формулы Миллса, Райта и другие подобные формулы остались изолированными фактами, не приведшими к новым результатам. Однако в других случаях возможность представить некоторые простые числа в том или ином специальном виде имеет неожиданные и глубокие следствия.

Рассмотрим сейчас две формулы, имеющие совсем простой вид:

$$p = 2^n - 1, \qquad (8)$$
$$p = 2^n + 1. \qquad (9)$$

Очевидно, что формула (8) не всегда дает простые числа; например, если n — составное число, $n = kl$, $k > 1$, $l > 1$, то p делится на $2^k - 1$ и на $2^l - 1$. Но и при простом n получающееся по формуле (8) число может оказаться составным:

$$2^{11} - 1 = 2047 = 23 \cdot 89.$$

Простые числа, получающиеся по формуле (8), называются *числами Мерсенна* в честь **Марина Мер-**

---

*) Прочитать об этом доказательстве можно в статье М. И. Башмакова, «Квант», 1971, № 5.

сенна, который еще в 1664 году указал все простые значения n, не превосходящие 257, для которых, по его мнению, формула (8) дает простые числа. Однако Мерсенн не дал доказательства; впоследствии выяснилось, что его предсказание было частично ошибочным.

Интерес к числам Мерсенна вызван их связью с так называемыми *совершенными числами* — числами, равными сумме всех своих делителей, отличных, конечно, от самого числа. Еще Евклид доказал (докажите и вы), что если простое число p имеет вид, указанный в формуле (8), то число $p\cdot(p+1)/2$ является совершенным. Например,

$$3=2^2-1,\qquad 7=2^3-1$$

— простые числа, и соответственно

$$6=(3\cdot4)/2=1+2+3,$$
$$28=(7\cdot8)/2=1+2+4+7+14$$

— совершенные числа. Спустя несколько столетий Леонард Эйлер доказал (попробуйте и здесь свои силы), что все четные совершенные числа имеют вид, указанный Евклидом. Таким образом, вопрос, конечно или бесконечно множество четных совершенных чисел, свелся к вопросу, конечно или бесконечно множество простых чисел Мерсенна, то есть к вопросу, реализует ли формула (8) нашу программу-минимум. Ответ на этот вопрос не известен до сих пор *).

Формула (9) также не всегда дает простые числа, например, если n имеет простой нечетный делитель m, то p делится на $2^{\frac{n}{m}}+1$, а если n само нечетно, то p делится на 3. Таким образом, вместо n в формулу (9) имеет смысл подставлять только 0 и степени числа 2. При $n=0$, 2^0, 2^1, 2^2, 2^3 и 2^4 формула (9) действительно дает простые числа, и Пьер Ферма, живший в XVII веке, высказал предположение, что и при любом n вида 2^k формула (9) дает простое число; в его честь простые числа вида $2^{2^k}+1$ получили название *чисел Ферма*. Гипотезу Ферма опроверг Эйлер, указавший, что число $2^{2^5}+1$ делится на 641. В настоящее время известно несколько значений n вида 2^k, при которых по формуле (9) получаются составные числа, но не найдено ни одного нового простого числа Ферма, отличного от указанных выше.

Простые числа Ферма обнаруживают неожиданную связь с геометрией. Выдающийся немецкий математик Карл Фридрих Гаусс доказал, что правильный p-угольник можно построить циркулем и линейкой при простом p в том и только том случае, когда p — число Ферма*). Более общий результат таков: правильный m-угольник допускает построение циркулем и линейкой тогда и только тогда, когда $m=2^s\cdot p_1p_2\ldots p_l$, где $p_1, p_2, \ldots, p_l$ — попарно различные простые числа Ферма.

Скатерть Улама

Формулы (8) и (9) содержат возведение в степень. А нельзя ли для задания бесконечно многих простых чисел обойтись лишь сложением, вычитанием и умножением? Поищем ответ на этот вопрос.

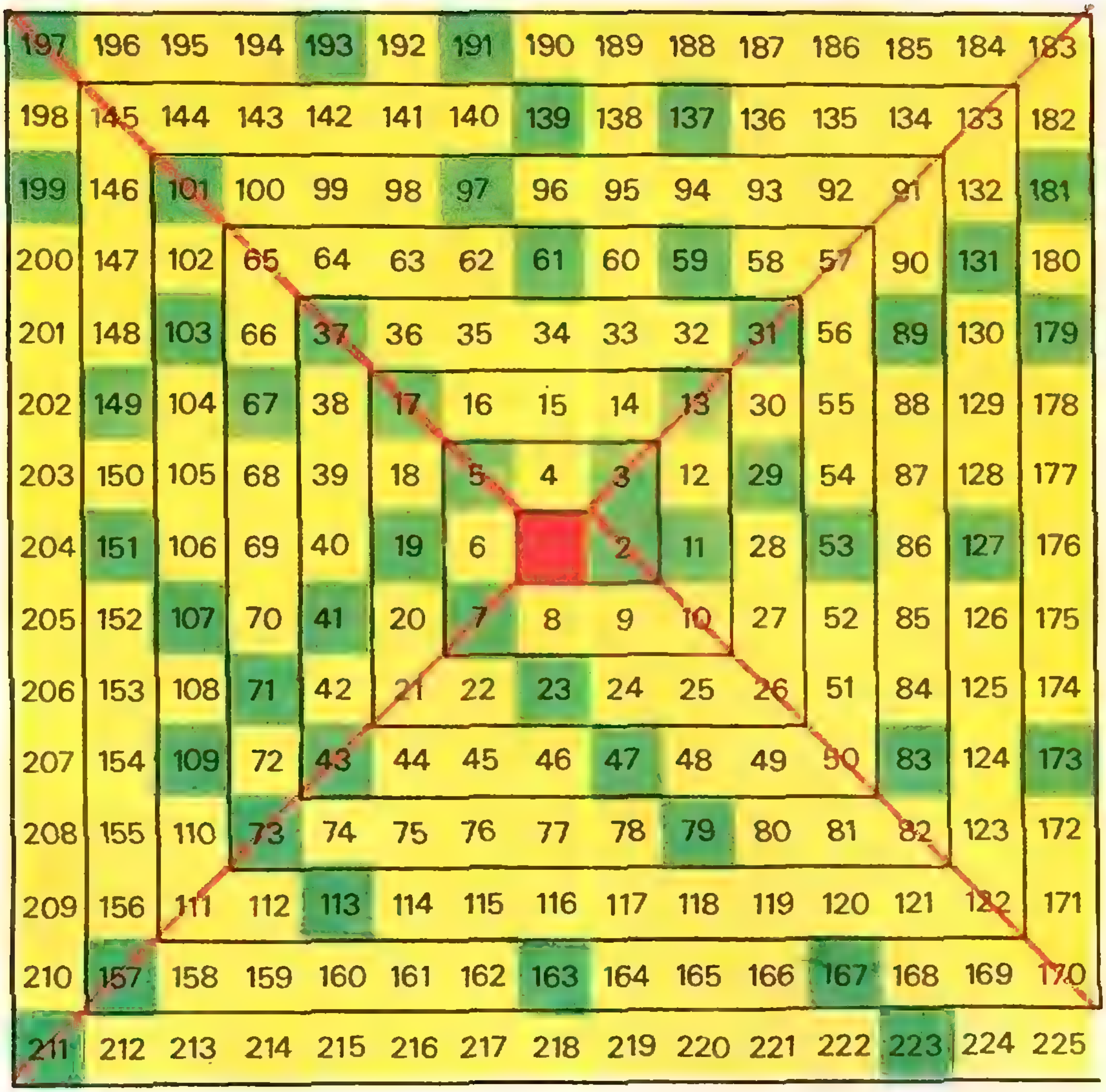
Начнем с рассмотрения многочленов от одной переменной с натуральными коэффициентами; посмотрим, какие многочлены будут своими значениями иметь простые числа и в каком количестве.

Возьмем вначале многочлены первой степени (то есть линейные многочлены). Очевидно, что *тривиальный* многочлен x задает бесконечно много простых чисел, более того, все простые числа, но это неинтересный случай. А что можно сказать о многочлене $ax+b$ (где a, b и x — натуральные числа)? Ясно, что если a и b имеют общий делитель, отличный

---

*) Об истории и современном состоянии исследований по совершенным числам и простым числам Мерсенна вы можете прочитать в статье И. Я. Депмана, «Квант», 1971, № 8.

*) Подробнее об этом открытии тогда еще совсем молодого Гаусса рассказано в статье С. Г. Гиндикина, «Квант», 1972, № 1.



197	196	195	194	193	192	191	190	189	188	187	186	185	184	183
198	145	144	143	142	141	140	139	138	137	136	135	134	133	182
199	146	101	100	99	98	97	96	95	94	93	92	91	132	181
200	147	102	65	64	63	62	61	60	59	58	57	90	131	180
201	148	103	66	37	36	35	34	33	32	31	56	89	130	179
202	149	104	67	38	17	16	15	14	13	30	55	88	129	178
203	150	105	68	39	18	5	4	3	12	29	54	87	128	177
204	151	106	69	40	19	6	🟥	2	11	28	53	86	127	176
205	152	107	70	41	20	7	8	9	10	27	52	85	126	175
206	153	108	71	42	21	22	23	24	25	26	51	84	125	174
207	154	109	72	43	44	45	46	47	48	49	50	83	124	173
208	155	110	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	123	172
209	156	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120	121	122	171
210	157	158	159	160	161	162	163	164	165	166	167	168	169	170
211	212	213	214	215	216	217	218	219	220	221	222	223	224	225

Рис. 1.

от 1, то значение многочлена $ax + b$ — число составное, кратное этому делителю. Случай же, когда a и b взаимно просты, гораздо менее очевиден.

Французский математик Лежандр (живший в XVIII веке) высказал гипотезу, что если a и b взаимно просты, то в арифметической прогрессии с первым членом b и разностью a встречается бесконечно много простых чисел. Эта гипотеза была доказана лишь в прошлом столетии немецким математиком Леженом Дирихле.

Перейдем теперь к квадратным многочленам. Среди них есть «рекордсмены», например, многочлен $x^2 + x + 41$ — его изучал еще Леонард Эйлер. Этот многочлен принимает простые значения при $x = 1, 2, \ldots, 40$. При $x = 41$ его значение — составное.

Доказано, что никакой многочлен (отличный, разумеется, от константы) не может иметь в качестве значений только простые числа, но до сих пор не известно, существует ли многочлен (кроме линейного), среди значений которого встречается бесконечно много простых чисел.

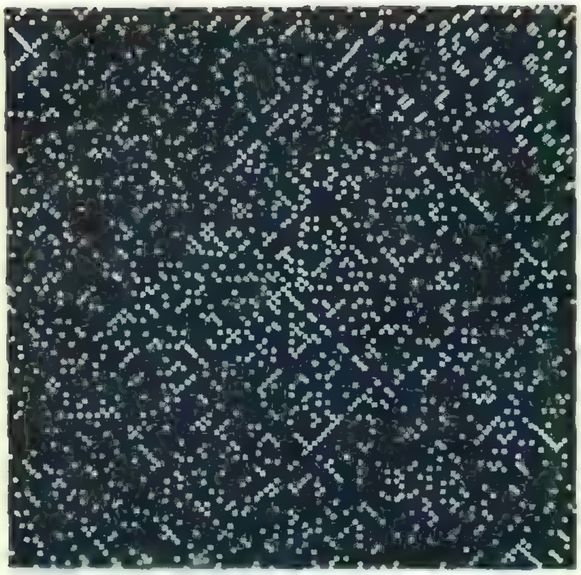
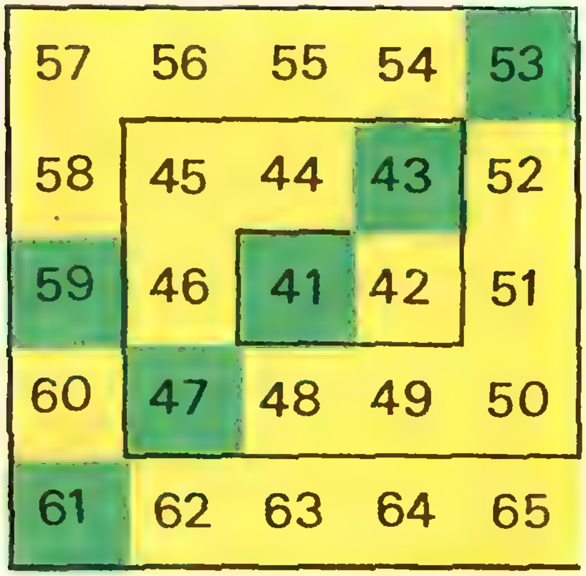


Рис. 2



57	56	55	54	53
58	45	44	43	52
59	46	41	42	51
60	47	48	49	50
61	62	63	64	65

Рис. 3.

Интерес к представлению простых чисел в виде значений квадратных многочленов недавно возродился в связи с неожиданным наблюдением С. М. Улама*). Начав на спирали из всех натуральных чисел (рис. 1) отмечать простые числа, Улам с удивлением обнаружил, что простые числа выстраиваются по диагоналям, образуя довольно длинные цепочки. (Докажите, что числа, расположенные вдоль какой-либо диагонали в пределах, ограниченных на рисунке 1 красными линиями — это значения некоторого квадратного многочлена с целыми коэффициентами). Еще более удивительным оказалось то, что закономерность эта наблюдалась и тогда, когда спираль была продолжена (с помощью ЭВМ) до больших чисел — на рисунке 2 светлыми точками отмечены простые числа на спирали из первых 10 000 чисел. Узор, изображенный на рисунке 2, получил название *«скатерть Улама»*.

Чтобы отмеченная закономерность проявилась, не обязательно начинать спираль с единицы. Например, значения многочлена $x^2 + x + 41$ выстраиваются по диагоналям у спирали, начинающейся с числа 41 (рис. 3). Возможно, что читатели «Кванта», проявив изобретательность и должное терпение, смогут найти новые красивые «геометрические» закономерности расположения простых чисел среди множества всех чисел.

Феномен со стремлением простых чисел располагаться в цепочки вдоль диагоналей был обнаружен сравнительно недавно и еще не получил какого-либо математического объяснения.

О представлении простых чисел с помощью многочленов от многих переменных мы скажем в конце статьи.

Экспоненциальный многочлен Джулии Робинсон

Экспоненциальные многочлены отличаются от обычных тем, что в них показателями степени могут быть не только конкретные натуральные числа, но и линейные многочлены от переменных с натуральными коэффициентами, то есть многочлены вида $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_kx_k + b$, где $a_1, a_2, \ldots, a_k$, b — целые неотрицательные числа.

Простейшими примерами экспоненциальных многочленов от переменной n являются правые части формул (8) и (9).

В дальнейшем мы всегда будем предполагать, что все встречающиеся у нас переменные принимают целые положительные значения.

В 1952 году американский математик Джулия Робинсон*) опубликовала следующий замечательный результат:

---

*) Как было сделано это наблюдение, красочно рассказывает М. Гарднер в «Математических досугах», М., «Мир», 1972.

*) Точнее, Робинсон получила чуть более слабый результат, а эту изящную форму придал результату Робинсон впоследствии Х. Патнам.

Существует экспоненциальный многочлен $R(x_0, \ldots, x_k)$, такой, что

любое его положительное значение при целых положительных значениях переменных является простым числом;

любое простое число можно представить в таком виде.

В результате получается такая «формула для простых чисел»:

$$p = R(x_0, \ldots, x_k). \qquad (10)$$

Эта формула замечательна вот чем. Во-первых, в нее входят только целые числа, и потому, в отличие от формул Миллса, Райта и им подобных, формула Джулии Робинсон может быть выписана явно. Во-вторых, она задает все простые числа, а не только какие-то избранные из них, в отличие от всех рассмотренных выше формул. В-третьих, хотя формула (10) задает и не только простые числа, у нас есть очень простой способ отсеивания «лишних» чисел: каждое не простое значение R при целых положительных значениях неизвестных не превосходит нуля. Этим формула Джулии Робинсон выгодно отличается от формул (8) и (9), а также и от только что рассмотренных *полиномиальных формул* *).

Доказательство Джулии Робинсон совершенно элементарно. Ниже излагаются его основные идеи; доведение же доказательства до формальной строгости мы оставляем читателям: все промежуточные результаты сформулированы в виде пяти лемм, — их-то и нужно доказать. Как мы увидим, из этих лемм следует не только существование экспоненциального многочлена R, но и его явный вид.

Что мы должны сделать?

Чтобы доказать теорему Джулии Робинсон, мы, очевидно, должны указать экспоненциальный многочлен R, такой, что уравнение (10) разрешимо в натуральных числах относительно переменных $x_0, \ldots, x_k$ тогда и только тогда, когда выполнено следующее условие:

$$p \text{ — простое число.} \qquad (11)$$

Это — пример *условия* на переменное p.

Приведем еще несколько примеров *условий* на набор переменных

$$\lambda_1, \ldots, \lambda_n, x_0, \ldots, x_k. \qquad (11')$$

Если мы потребуем, чтобы набор чисел (11) удовлетворяя системе уравнений вида

$$F_i(\lambda_1, \ldots, \lambda_n, x_0, \ldots, x_k) = 0 \quad (i = 1, \ldots, s), \qquad (11'')$$

или допустим словесное описание типа: «*все λ_i — простые числа*», или «*λ_1 — простое число, а $x_0, \ldots, x_k$ — четные числа*» и т. д., то тем самым мы из множества всех наборов (11′) выделим некоторые, подчиняющиеся наложенному на них *условию*.

Мы не станем точно определять, условия какого вида являются для нас допустимыми. Приведенное описание примеров условий достаточно для оправдания того способа действий, которым мы в дальнейшем будем пользоваться.

В последующем изложении мы будем различать переменные, называя некоторые из них *параметрами*, так что деление переменных на *параметры* и *неизвестные* у нас является чисто условным.

Если все левые части системы уравнений (11″) являются экспоненциальными многочленами от $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, x_0, \ldots, x_k$, и решения этой системы ищутся в целых положительных числах, то такая система называется *экспоненциально диофантовой*; если F_i — обыкновенные многочлены, то система уравнений (11″) называется просто *диофантовой*.

Уравнение (10) является примером экспоненциально диофантова уравнения относительно переменных $p, x_0, \ldots, x_k$.

Мы будем говорить, что две системы условий, имеющие одни и те же параметры, эквивалентны друг другу относительно этих параметров, если множество тех значений параметров, при которых имеет решение одна из этих систем, совпадает со множеством тех значений параметров, при котором имеет решение и другая система. (Обратите внимание, что в этом определении ничего не говорится о связи значений *неизвестных*— для наших целей это неважно, эквивалентные в нашем понимании системы могут вообще не иметь общих неизвестных.)

---

*) Полиномиальная формула — это формула, задаваемая многочленом.

Примером эквивалентных условий относительно параметра λ могут служить неравенство

$$2^n < \lambda < 2^{n+1}$$

и равенство

$$\lambda = (2x_0 + 1) \cdot x_1.$$

Ясно, что каждое из этих условий имеет решение тогда и только тогда, когда параметр λ принадлежит множеству чисел, не являющихся целыми степенями числа 2.

В этой терминологии наша цель формулируется так: *найти экспоненциальный многочлен* $R(x_0, \ldots, x_k)$, *такой, что условие* (10) *эквивалентно условию* (11) *относительно параметра* p.

Однако требование, чтобы параметр p стоял только в левой части равенства (10), является, как мы сейчас увидим, излишне жестким.

Пусть удалось найти экспоненциальный многочлен $Q(p, x_1, \ldots, x_k)$, такой, что экспоненциально диофантово уравнение (условие на $p, x_1, \ldots, x_k$)

$$Q(p, x_1, \ldots, x_k) = 0 \qquad (12)$$

эквивалентно условию (11).

Положим

$$R(x_0, \ldots, x_k) = x_0 \cdot (1 - Q^2(x_0, \ldots, x_k)). \qquad (13)$$

Лемма 1. *Если экспоненциальные многочлены* R *и* Q *связаны соотношением* (13), *то уравнения* (10) *и* (12) *эквивалентны относительно параметра* p.

Нам достаточно даже найти не уравнение, а хотя бы систему экспоненциально диофантовых уравнений

$$\left\{\begin{array}{l} Q_1(p, x_1, \ldots, x_k) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ Q_l(p, x_1, \ldots, x_k) = 0, \end{array}\right. \qquad (14)$$

эквивалентную условию (11) относительно p.

Лемма 2. *Если*

$$Q(p, x_1, \ldots, x_k) = \sum_{i=1}^{l} Q_i^2(p, x_1, \ldots, x_k),$$

то система (14) *эквивалентна уравнению* (12).

Именно поиском системы экспоненциально диофантовых уравнений, эквивалентной условию (11), мы и будем заниматься.

Что такое простое число?

Странный вопрос, — удивится читатель. Каждый знает, что простое число — это число, большее единицы, которое делится только на единицу и на себя. Конечно, это так, но с таким определением работать нелегко — ведь оно предполагает, что проверка простоты числа состоит в переборе бесконечного числа потенциальных делителей — всех натуральных чисел, кроме 1 и самого числа. Лучше сказать так: *число* p *является простым, если* $p > 1$ *и* p *не делится ни на какое число, меньшее* p *и отличное от* 1. Для наших же целей больше подходит следующее определение:

число p *является простым, если* $p > 1$, *и для любого числа* q, *меньшего* p, Н.О.Д.$(q, p) = 1$ *.)

В этом определении нет ограничения $q \neq 1$, и, что более важно, оно позволяет *переменное число* условий Н.О.Д. $(1, p) = 1$, Н.О.Д.$(2, p) = 1, \ldots$ $\ldots$, Н.О.Д.$(p-1, p) = 1$ свести в *одно* условие:

$$\text{Н.О.Д}((p-1)!, p) = 1.$$

Сделанное замечание позволяет нам написать первую систему условий, эквивалентную условию (11) относительно параметра p:

$$\left\{\begin{array}{ll} p = r + 1, & (15) \\ s = r!, & (16) \\ \text{Н.О.Д.}(s, p) = 1. & (17) \end{array}\right.$$

Первое из этих условий имеет искомый вид экспоненциально диофантова (более того, диофантова) уравнения, а третье легко приводится к такому же виду за счет введения двух новых неизвестных:

---

*) Н.О.Д.(a, b) — это наибольший общий делитель чисел a и b.

Лемма 3. *Условие* (17) *эквивалентно относительно параметров* p *и* s *условию*

$$x_1 \cdot s - x_2 \cdot p = 1\ ^{*)}. \qquad (18)$$

Так как уравнение (18) экспоненциально диофантово, то нам осталось лишь найти систему экспоненциально диофантовых уравнений, эквивалентную относительно параметров r и s условию (16).

Как вычислить факториал?

В условие (16) входит $r!$; этот-то факториал и «мешает» нам. Вспомним, что факториал фигурирует в выражении для биномиальных коэффициентов**): при $t \geqslant r$

$$C_t^r = \frac{t(t-1)\ldots(t-r+1)}{r!},$$

то есть

$$r! = \frac{t(t-1)\ldots(t-r+1)}{C_t^r}.$$

Многочлен, стоящий в числителе, имеет довольно сложную структуру. Попытаемся заменить его более простым — а именно, многочленом t^r. При $t \geqslant r$ имеем:

$$\frac{t^r}{C_t^r} = \frac{t^r}{t(t-1)\ldots(t-r+1)} \times$$

$$\times \frac{t(t-1)\ldots(t-r+1)}{C_t^r} =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{t-1}\right)\left(1 + \frac{2}{t-2}\right) \times \ldots$$

$$\ldots \times \left(1 + \frac{r-1}{t-r+1}\right) \cdot r! \geqslant r!. \qquad (19)$$

Легко видеть, что

$$r! = \lim_{t \to \infty} \frac{t^r}{C_t^r}, \qquad (20)$$

однако эта запись факториала нам ничего не даст, поскольку t, будучи параметром в искомой системе уравнений, сможет принимать любые, сколь угодно большие, но конечные значения. Но мы и не будем переходить к пределу, а воспользуемся целочисленностью $r!$ — из (19) и (20) следует, что при достаточно больших t

$$r! = \left[\frac{t^r}{C_t^r}\right]. \qquad (21)$$

Лемма 4. *Формула* (21) *верна как только* $t \geqslant 2\,r^{r+2}$.

Лемма 4 позволяет преобразовать условие (16) в эквивалентную ему относительно параметров r и s систему (проверьте эквивалентность!)

$$\begin{cases} t = 2r^{r+2}, & (22)\\ c = C_t^r, & (23)\\ t^r = s \cdot c + (x_3 - 1), & (24)\\ (x_3 - 1) + x_4 = c. & (25) \end{cases}$$

Здесь условия (22), (24) и (25) имеют требуемый вид, и нам остается лишь найти систему экспоненциально диофантовых уравнений, эквивалентных условию (23) относительно параметров r, t и c.

Итак, нам осталось «избавиться» от биномиального коэффициента.

Биномиальные коэффициенты — это коэффициенты бинома!

Только что мы использовали выражение биномиальных коэффициентов через факториал; но биномиальные коэффициенты имеют много и других определений. Воспользуемся теперь тем, что

$$(u+1)^t = \sum_{i=0}^{t} C_t^i u^i. \qquad (26)$$

Эта формула является определением биномиальных коэффициентов, если рассматривать ее как *тождество* относительно u. Но нам нужно, чтобы u было *неизвестной*, принимающей в каждом конкретном решении искомой системы лишь одно значение.

---

*) Сравните эту лемму с леммой 2 из «Кванта» № 6 за 1972 год, с. 33.

**) О свойствах биномиальных коэффициентов «Квант» рассказывал неоднократно; см., например, № 6 за 1970 год, с. 17—25, или № 2 за 1973 год, с. 27—34.

Заметим, что

$$C_t^i \leqslant \sum_{i=0}^{t} C_t^i = (1+1)^t = 2^t, \quad (27)$$

и, таким образом, если

$$u > 2^t, \quad (28)$$

то $C_t^0, C_t^1, \ldots, C_t^t$ — это цифры в записи числа $(u+1)^t$ в позиционной системе счисления с основанием u Следовательно, биномиальные коэффициенты однозначно определяются тем условием, что равенство (26) и неравенства (27) и (28) одновременно выполнены *хотя бы при одном* значении u

Лемма 5 *Условие* (23) *эквивалентно относительно параметров* r, t и c *системе условий*

$$\left|\begin{array}{ll} u = 2^t + 1, & (29)\\ x_5 = u + 1, & (30)\\ x_5^t = x_8 u^{r+1} + c u^r + x_7, & (31)\\ x_7 + x_8 = u^r, & (32)\\ c + x_9 = u & (33)\end{array}\right.$$

Здесь все условия уже имеют необходимый нам вид

Итак, мы показали, что условие (11) эквивалентно относительно параметра p системе, состоящей из экспоненциально диофантовых уравнений (15), (18), (22), (24), (25), (29) — (33) Чтобы получить требуемый экспоненциальный многочлен, осталось переименовать переменные r, s, t, c и u в x_{10}, x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, объединить по лемме 2 все уравнения в одно и преобразовать по лемме 1 это уравнение к искомому виду (10)

Дальнейшие шаги

Формула (10) не содержит явно номера задаваемого ею простого числа Описанный выше способ построения экспоненциального многочлена R не дает прямого пути для включения номера простого числа в формулу (10) Используя существенно более сложную технику, Мартин Дейвис, Хилэри Патнам и Джулия Робинсон в 1961 году доказали одну очень сильную теорему, которая имеет такое следствие

Существует экспоненциальный многочлен $P(x_0, \ldots, x_k, n)$ *такой, что при каждом фиксированном значении параметра* n *и произвольных значениях остальных переменных, многочлен* P *принимает ровно одно положительное значение, и этим значением является* n-*е простое число*

В 1970 году автору этой статьи удалось, используя другие результаты Джулии Робинсон, построить такое диофантово уравнение

$$M(a, b, c, z_1, \ldots, z_m) = 0, \quad (34)$$

которое разрешимо тогда и только тогда когда параметры a, b и c связаны соотношением $a = b^c$ Этот результат позволяет опустить в формулировке предыдущей теоремы слово «экспоненциальный», то есть позволяет построить многочлен, задающий простые числа Об этом, однако, мы поговорим в другой раз Те же читатели, кого заинтересовала подобная тематика и кого не страшат трудности, могут попробовать самостоятельно разобраться в статье автора «Диофантовы множества», опубликованной в журнале «Успехи математических наук», XXVII, № 5, 1972 год

Темы для размышлений

1 Докажите, что в арифметических прогрессиях 3, 7, 11, … и 5, 11, 17, … бесконечно много простых чисел

2 Каково множество тех многочленов, значения которых лежат вдоль диагонали, если спираль (см с 9) начата с 1? с некоторого числа u? с некоторого числа u, и по спирали стоят члены арифметической прогрессии u, $u+v$, $u+2v$, …?

3 Теорема Вильсона утверждает, что если p — простое число, то $(p-1)!+1$ делится на p Как можно использовать этот результат, чтобы уменьшить число неизвестных в экспоненциальном многочлене R задающем простые числа?

4 Постройте экспоненциальный многочлен $S(x_0, \ldots, x_k)$, который задает множество полусумм *простых чисел близнецов*, то есть такой, что если $S(x_0, \ldots, x_k) > 0$, то оба числа $S(x_0, \ldots, x_k) - 1$ и $S(x_0, \ldots, x_k) + 1$ являются простыми, и наоборот, если $s-1$ и $s+1$—простые числа, то $S(x_0, \ldots, x_k) = s$ при некоторых $x_0, \ldots, x_k$

5 Постройте экспоненциальный многочлен $T(q, x_0, \ldots, x_m)$, такой, что

если q — простое число, то существуют числа $x_0, \ldots, x_m$ такие, что $T(q, x_0, \ldots, x_m) > 0$

если q — простое число и $T(q, x_0, \ldots, x_m) > 0$, то $T(q, x_0, \ldots, x_m)$—простое число, следующее за q,

если q не является простым числом, то всегда $T(q, x_0, \ldots, x_m) \leqslant 0$

Этот экспоненциальный многочлен дает *«формулу для следующего простого числа»*

А. В. Чаплик

Волновая механика

Около пятидесяти лет назад родилась квантовая механика — наука о законах движения микроскопических частиц материи (атомов, атомных ядер, электронов и т. п.). Эти законы оказались настолько удивительными, настолько не похожими на то, с чем сталкивались физики до сих пор, что вначале даже крупные ученые отказывались верить выводам квантовой механики. Да и в наши дни не прекращаются дискуссии о физических основах этой науки, хотя многие ее разделы уже стали инженерными дисциплинами.

В первые годы существования квантовой механики ее называли волновой механикой. Сейчас это название уже начинают забывать, а между тем в нем содержится указание на самую главную черту, присущую явлениям микромира. Ведь квантовый, то есть дискретный характер процессов, в которых участвуют микрочастицы, связан именно с их волновыми свойствами. Например, тот факт, что энергия электронов в атоме может принимать лишь определенный дискретный набор значений, есть следствие волновой природы электрона.

В этой статье мы постараемся разобраться, что означают слова «волновая природа электрона» и почему она приводит к дискретности его свойств. Начать придется издалека.

Частицы и волны

Как мы описываем движение больших тел, например, движение артиллерийского снаряда, спутника Земли, планеты вокруг Солнца? Такие тела называют макроскопическими (в отличие от микрочастиц), и особенности их движения хорошо известны. Конечно, спутники Земли и артиллерийские снаряды вряд ли можно считать вполне обыденными вещами. Но законы, которые управляют их движением, легко понять на основе нашего повседневного опыта.

Мы привыкли к тому, что каждое тело занимает определенное место в пространстве, и это место можно указать, задавая координаты тела. Если тело движется, то оно с течением времени меняет свое положение в пространстве. Чтобы описать движение тела, можно указать положения, которые оно занимает в последовательные моменты времени, то есть (выражаясь более точно) можно задать зависимость координат тела от времени. Это — язык механики, вернее даже, — ее азбука. Но откуда берется уверенность, что можно в каждый момент времени определить положение тела в пространстве, задав его координаты? Ответ совершенно ясен: оттуда же, откуда берутся вообще все наши знания — из опыта. Именно повседневный опыт служит источником понятий и представлений, которыми пользуется обычная механика — механика макроскопических тел (ее также называют классической). Важно запомнить это обстоятельство: в повседневном опыте мы имеем дело с *макроскопическими* телами, поэтому наши привычные представления о перемещении в пространстве относятся как раз к таким телам. Согласно этим представлениям каждое движущееся тело имеет свою траекторию, и в каждой точке траектории можно указать скорость тела, его ускорение и т. д. Так описывается движение тел в классической механике.

По-иному приходится поступать при описании волновых процессов, например, звука или волн на поверхности воды. Первое, что нужно отметить, это бессмысленность понятия траектории для волн. Ведь звук распространяется от своего источника по *всем направлениям. Если все-таки* задать вопрос: где в данный момент находится звуковая волна, то ответ должен быть следующим: это некоторая часть пространства, ограниченная поверхностью, до которой волны успели дойти к данному моменту времени. Внутри этой поверхности в каждой точке (разумеется, если источник работает непрерывно) существуют колебания плотности воздуха, которые и являются звуком. Значит, бессмысленно говорить о координате звука, о точке пространства, в которой находится звук. Это становится особенно ясным в случае волн в замкнутой полости, где могут возникнуть стоячие волны. Примером могут служить резонансный ящик для камертона, духовые музыкальные инструменты (такие, как орган или саксофон), барабан и т. д. Когда по барабану ударяют, то внутри него устанавливаются стоячие волны, и при этом звучит весь объем воздуха, заключенный внутри барабана. Таким образом, можно сказать, что волна заполняет все доступное ей пространство, и такие понятия, как координата или траектория, к волнам не применимы. Здесь следует пользоваться другим языком. Волны характеризуются их амплитудой, частотой, фазой, скоростью распространения, длиной волны.

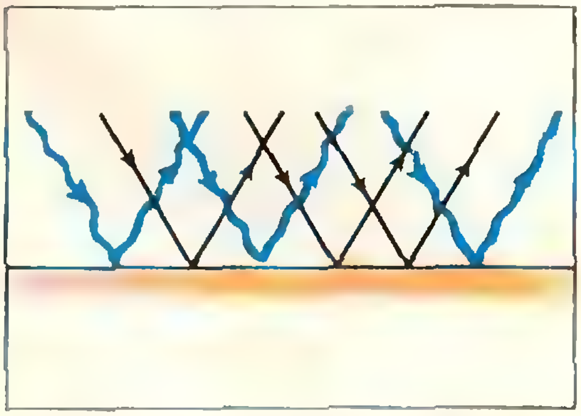


Рис. 1. Отражение от идеальной поверхности. Прямые линии изображают потоки частиц, волнистые соответствуют волнам.

Остановимся еще на одном различии в свойствах волн и частиц, которое очень важно для дальнейшего. Замечательной особенностью волн является их способность огибать препятствия, отклоняться от прямолинейного распространения при взаимодействии с препятствием. Это явление называется дифракцией и является исключительной привилегией волн. Волна, в прямом смысле слова, может завернуть за угол, частица — нет. Например, можно услышать речь, стоя за углом дома и не видя разговаривающих людей.

С явлением дифракции тесно связано поведение волн при их отражении от шероховатой поверхности. Если бы отражающая поверхность была идеально гладкой, то волны и частицы вели бы себя совершенно одинаково (*рис. 1*). *Для тех и других* выполнялся бы известный закон: угол падения равен углу отражения (разумеется, надо оговорить, что удар частиц о поверхность предполагается абсолютно упругим). Легко сообразить, что в этом идеальном случае параллельный пучок летящих частиц остается параллельным и после отражения от поверхности, так как скорость каждой частицы поворачивается на один и тот же угол. То же самое относится и к волнам.

Посмотрим теперь, что происходит в реальном случае, то есть когда поверхность не является идеально ровной плоскостью, а имеет некоторые

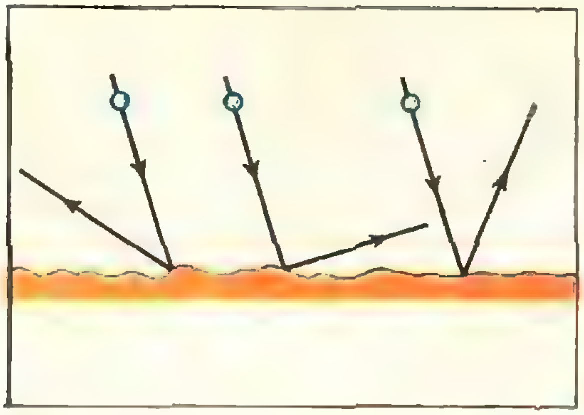


Рис. 2.

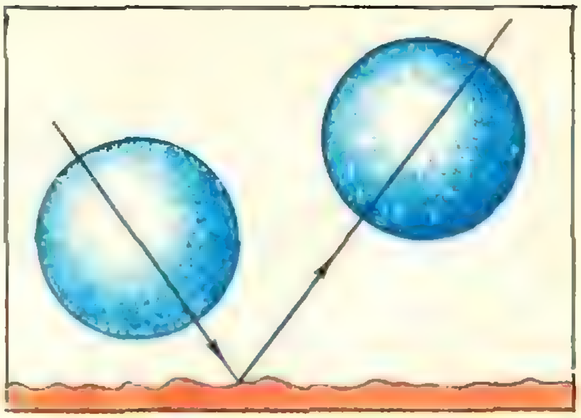


Рис. 3.

шероховатости. Начнем с частиц. Следует различать два случая. Первый, изображенный на рисунке 2, соответствует маленьким частицам. Их размеры гораздо меньше высоты и ширины зубцов поверхности, поэтому можно рассматривать такие частицы как материальные точки. Каждая из этих частиц попадает на некоторый участок поверхности, на некоторый склон зубца, и отражается от этого склона все по тому же закону: угол падения равен углу отражения. Но так как каждый зубец наклонен под своим определенным углом к направлению первичного потока частиц, то частицы, попавшие на разные зубцы, отлетают в разных направлениях. В результате отраженные частицы уже не образуют параллельного пучка, а разлетаются хаотически под разными углами.

Если же на поверхность падают большие частицы, которые при соприкосновении с поверхностью накрывают сразу много зубцов, то картина получается иной (рис. 3). «С точки зрения» такой частицы поверхность с мелкими зубцами мало отличается от идеальной плоскости. Например, стол для пинг-понга наверняка имеет шероховатую поверхность (неровно обработана фанера, краска легла не везде одинаковым слоем и т. д.), тем не менее шарик отскакивает почти так же, как от ровной плоскости. Дело в том, что большой шарик, касаясь при ударе сразу многих мелких зубцов поверхности, как бы усредняет их действия, и это усредненное действие оказывается *почти таким же, как для идеальной плоскости*. В таких случаях говорят о зеркальном отражении.

Отражение волн от шероховатой поверхности также может происходить двояким образом. Длинные волны (длина волны больше размеров неровностей) дифрагируют на неровностях; в результате отражение оказывается близким к идеальному. Например, неровности поверхности обычного зеркала гораздо меньше длин волн видимого света. Отражение света происходит направленно (зеркально). Однако жесткие рентгеновские лучи, длина волны которых в тысячи раз меньше, чем у видимого света, отражаются от того же зеркала рассеянно (диффузно) — отраженные лучи идут в различных направлениях.

Итак, при отражении потоков частиц или волн от неровностей поверхности решающую роль для частиц играет соотношение между размерами неровностей и размерами частиц, а в случае волн — соотношение между размерами неровностей и длиной волны.

Мы подошли теперь к главной части нашего рассказа.

Как ведут себя электроны

Когда Дж. Дж. Томсон в самом конце прошлого века открыл электрон, он представлял его себе как частицу, несущую определенную порцию электрического заряда. Действительно, все опыты как будто говорили за то, что электрон — это частица, заряженная отрицательным электричеством и ведущая себя так, как и полагается частицам. Мы уже знаем, что это означает. Во-первых, электроны можно считать поштучно (например, измеряя полный заряд и деля его на заряд одного электрона); никто еще никогда не наблюдал половины электрона. Во-вторых, каждый электрон пучка характеризуется своей траекторией, которую можно изменять, воздействуя на пучок электрическим или магнитным полем. Момент попадания электрона в мишень можно фиксировать по вспышке в люминесцирующем покрытии мишени. Эта вспышка практически точечная, а это значит, что электрон оказывает действие лишь на очень малую область мишени. Следовательно, можно говорить о координате электрона, о его траектории, то есть обо всем, что характеризует его как частицу.

Именно на основе представлений об электроне как о частице возникла так называемая планетарная модель атома, предложенная Резерфордом. В этой модели атом рассматривался как миниатюрная Солнечная система, в которой вокруг «Солнца» — атомного ядра — движутся по орбитам «планеты» — электроны. Размеры атома, то есть радиусы электронных орбит, вскоре удалось выяснить. Они оказались величинами порядка 10^{-8} *см*, или одного ангстрема. Относительно размеров самого электрона имелись расхождения во мнениях, но все сходились на том, что его радиус должен быть, конечно же, меньше 10^{-8} *см*. Ведь электрон — часть атома, а часть, во всяком случае, не может быть больше целого. Но вот в 1927 году американские физики Дэвиссон и Джермер осуществили свои знаменитые опыты с пучками электронов. И сразу стало ясно, что взгляд на электроны как на маленькие твердые шарики, мягко говоря, наивен. Природа электрона оказалась гораздо более сложной.

Мы разберем здесь лишь один из опытов Дэвиссона и Джермера. Параллельный пучок электронов направлялся на грань кристалла и отражался от нее. *Отраженный пучок оставался параллельным* (как в случае отражения видимого света от зеркала). Вот и все. На первый взгляд в этом факте нет ничего удивительного. Ведь мы знаем, что при определенных условиях частицы могут испытывать зеркальное отражение от твердой поверхности. Но не нужно забывать, что «с точки зрения электрона» поверхность кристалла ни в коем случае не является сплошной поверхностью. Кристалл состоит из атомов, разделенных промежутками пустого пространства. Размеры промежутков примерно равны размерам самих атомов и составляют величину порядка 10^{-8} *см*. А электроны — это маленькие частицы, радиус их много меньше, чем 10^{-8} *см*. Значит, при соударении пучка электронов с кристаллом должна иметь место ситуация, когда размеры частиц меньше размеров неровностей. Следовательно, отражение электронов должно быть диффузным.

Таким образом, либо надо считать электроны очень большими шарами, гораздо больше самих атомов (тогда они отражались бы от кристалла зеркально), либо... либо электроны не подчиняются законам классической механики и не являются частицами в привычном смысле этого слова. Первая возможность приводит к явной бессмыслице: большой шар не может кружиться по орбите внутри маленького атома. Значит, остается вторая возможность, сколь бы невероятной она ни казалась.

Зеркально отражаться от поверхности кристалла могут лишь волны, длина которых больше расстояния между атомами в кристалле. Следовательно, нужно считать, что пучок электронов ведет себя подобно волнам, а тогда возникает вопрос о характерных параметрах этих волн: об их частоте, длине волны и т.д. Ко времени опытов Дэвиссона и Джермера уже была известна «сумасшедшая» гипотеза французского ученого де Бройля (высказанная в 1923 году) о том, что всякая частица ведет себя подобно волне, длина которой λ связана с импульсом $p = mv$ частицы следующей формулой (формула де Бройля):

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}.$$

Заметим, что величина h в этой формуле — знаменитая постоянная Планка, равная $6{,}62\cdot10^{-27}$ *эрг·с*. Она связывает частоту ν колебаний электромагнитного поля с энергией E его кванта (фотона) по формуле Планка: $E = h\nu$, или длину волны с импульсом фотона: $\lambda = \frac{h}{p}$. Идея де Бройля возникла из предположения о симметрии в природе. Теория показала, что волны обладают в некотором смысле свойствами частиц. Не могут ли частицы в свою очередь обладать волновыми свойствами? Гипотеза де Бройля состоит в том, что указанные соотношения одинаково применимы как к фотонам, так и к частицам вещества. Многочисленные эксперименты, проведенные впоследствии, это действительно подтверждают.

Формулы Планка и де Бройля связывают механические характеристики частиц (импульс, энергию) с их волновыми характеристиками (длиной волны и частотой). Чрезвычайно малая (с точки зрения привычных нам масштабов) величина постоянной Планка показывает, что волновые эффекты в движении частиц становятся существенными лишь в области микромира. В самом деле, шарик для пинг-понга массой 1 *г*, летящий со скоростью 1 *м/с*, имеет дебройлевскую длину волны, равную $6{,}6\cdot10^{-29}$ *см*. Это фантастически малая длина, в триллионы раз меньшая размеров атомного ядра. Совершенно ясно, что никаких волновых эффектов (например, дифракции) в движении такого тела обнаружить нельзя. Напротив, для электрона в атоме длина волны де Бройля равна примерно 10^{-8} *см* ($m \approx 9\times10^{-28}$ *г*, $v \approx 10^{8}$ *см/с*), то есть порядка размеров самого атома, в котором движется электрон. В этих условиях волновое поведение электрона играет определяющую роль. Вся специфика атомных явлений и, в частности, их квантовый характер связаны именно с этим волноподобным поведением электронов. Мы рассмотрим сейчас простейший пример, показывающий, как дискретность свойств атома вытекает из волновой природы электрона.

При обычных условиях электроны удерживаются внутри атома силами электростатического притяжения и не могут удалиться от ядра на слишком большое расстояние. Таким образом, принадлежащие атому электроны движутся в ограниченной области пространства. Их обычно называют связанными электронами. Наоборот, электроны в пучке, созданном электронной пушкой, могут, в принципе, попасть в любую область пространства, поэтому называются свободными. Пример, о котором идет речь, схватывает именно эту особенность атомного электрона: ограниченность области пространства, доступной для его движения.

Для простоты рассуждений представим себе, что электрон может двигаться только вдоль некоторой прямой и не выходит за пределы отрезка AB (рис. 4). Скажем, в точках A и B находятся твердые стенки, сквозь которые электрон не может проникнуть. Такая система является одномерной моделью атома. Разумеется, атомы устроены гораздо сложнее, и наш пример не претендует на количественное соответствие реальному атому. Но главную качественную особенность атомов — существование дискретных энергетических уровней — нам удастся проследить даже на этой простой модели. (Впрочем, следует заметить, что такая модель может иметь и непосредственный физический смысл. Например, она довольно хорошо описывает поведение электронов в тонких пленках металлов или полупроводников. В этом случае отрезок AB изображает толщину пленки, а две поверхности пленки играют роль стенок, не выпускающих электрон наружу.) Чтобы рассчитать характеристики такого одномерного атома, воспользуемся формулой де Бройля. Поскольку электрон «заперт» в ограниченной области пространства (в данном случае — на отрезке прямой), то мы должны говорить о стоячих волнах. Аналогичные механические одномерные стоячие волны возникают, например, при колебаниях струны, закрепленной в двух точках. Естественно, что эти точки закрепления следует сопоставить точкам A и B, за которые электрон не может проникнуть. Колебания струны также не проникают сквозь закрепленные концы. Это означает, что смещения точек струны при колебаниях всегда таковы, что точки A и B являются узловыми (их смещения всегда равны нулю). Отсюда сразу следует, что на отрезке AB должно укладываться целое число полуволн. Таким образом, колеблющаяся струна с закрепленными концами может находиться лишь в определенных состояниях движения, которые можно нумеровать по числу полуволн, укладывающихся между точками A и B. Другими словами, в струне возможны лишь такие волны, длина которых λ удовлетворяет следующему соотношению: $AB = n\lambda/2$, где n — целое число, принимающее значения 1, 2, 3 и т. д. На рисунке 4 случаи I, II, III, IV соответствуют n, равному 1, 2, 3 и 4. Обозначим длину отрезка AB буквой L. Тогда возможные длины волн λ_n задаются формулой

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}; \quad n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

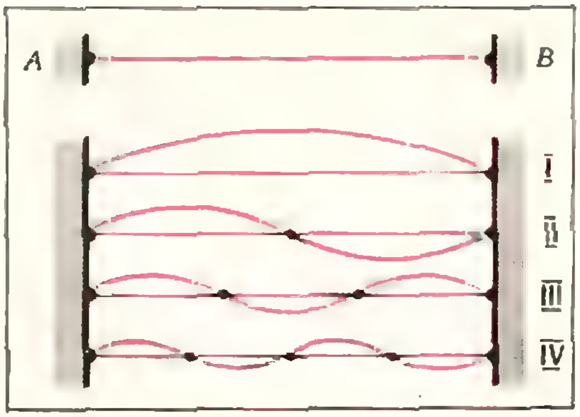


Рис. 4.

Теперь вернемся к электрону, бегающему между двумя стенками, и применим к нему формулу де Бройля. Поскольку может существовать лишь дискретный набор длин волн λ_n, то скорость электрона $v_n = \dfrac{h}{m\lambda_n}$ может принимать также лишь дискретный набор значений:

$$v_n = \frac{h}{m\lambda_n} = \frac{h}{m2L}n; \quad n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

Кинетическая энергия электрона равна $E = mv^2/2$, и она тоже не может быть произвольной. Существуют лишь дискретные энергетические уровни:

$$E_n = \frac{h^2n^2}{8mL^2}; \quad n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots \qquad (*)$$

(число n называется квантовым числом). Мы получили одну из первых формул квантовой механики — энергетические уровни электрона, «запертого» между двумя непроницаемыми стенками. С точки зрения классической механики сама постановка вопроса о дозволенных значениях энергии для этого случая бессмысленна. Если классический шарик прыгает между двумя стенками, упруго отражаясь от них, то его энергия $E = \dfrac{mv_0^2}{2}$ зависит от начальной скорости v_0 и может принимать любые значения. Никакой энергетической «лестницы» не существует, возможные значения энергии заполняют всю шкалу энергий. Для микрочастицы, как мы видели, дело обстоит поиному. Ее энергия может иметь лишь дискретный набор значений, и эта дискретность есть прямое следствие волновой природы микрочастицы.

Вообще говоря, выражение для энергетических уровней можно формально применить и к классической частице, например, все к тому же пинг-понговому шарику. Пусть его масса $m = 1$ *г*, а расстояние между стенками $L = 10$ *см*; тогда вследствие чрезвычайной малости h расстояния между соседними уровнями окажутся невообразимо маленькими; например,

$$E_{21} = \frac{h^2}{8mL^2}(2^2 - 1) \approx 16 \cdot 10^{-55} \text{ эрг.}$$

Энергетическая лестница получается настолько густой, что практически энергия может изменяться непрерывно, как и должно быть для классической частицы. В этом заключается предельный переход от квантовой механики к классической.

Помимо волновой природы микрочастиц для возникновения дискретного спектра чрезвычайно существенным оказывается тот факт, что движение частицы происходит в ограниченной области пространства. В этом случае, как мы уже говорили, возникают стоячие волны, а такие колебания характеризуются дискретными значениями длин волн, и следовательно, частот. Частота же, помноженная на h, равна энергии частицы. Общая тенденция такова, что чем меньше размеры доступной области движения, тем больше расстояние между соседними уровнями энергии (см., например, формулу (*)). Если же микрочастица движется под действием таких сил, которые разрешают ей уйти на бесконечность, то стоячие волны не возникают, и энергия может иметь любое значение. В этом случае говорят, что квантовая система имеет непрерывный спектр энергии (например, луч электронной пушки).

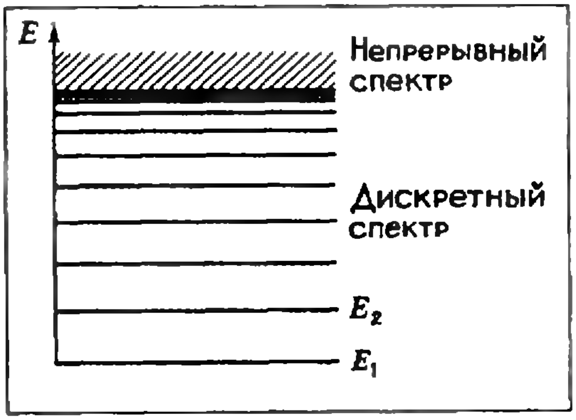


Рис. 5.

В атоме водорода электрон удерживается вблизи ядра силами электростатического притяжения. Если состояние электрона таково, что у него не хватает энергии преодолеть притяжение и уйти на бесконечно большое расстояние от ядра, то он обладает дискретным спектром. Однако, если каким-либо способом сообщить электрону достаточную энергию (это можно сделать, например, освещая атом светом), то электрон преодолеет притяжение к протону и может уйти от него сколь угодно далеко. Начиная с этой энергии, спектр электрона становится непрерывным, то есть энергия электрона может принимать любые значения.

На рисунке 5 изображены возможные значения энергии электрона в атоме водорода. Наинизший возможный уровень энергии называется нормальным или основным. В разобранном выше примере с электроном, «бегающим» между двумя стенками, основному уровню соответствует значение числа n, равное 1. Формула (*) для уровней энергии оказывается довольно полезной для оценки энергии основного состояния и других квантовых систем. В этом случае под L следует понимать размер доступной области пространства, в которой движется электрон. Например, диаметр атома водорода равен приблизительно 10^{-8} *см*, масса электрона $\approx 9 \cdot 10^{-28}$ *г*. Подставляя эти значения в формулу (*), получим для энергии основного состояния атома водорода $E_1 = 0{,}6 \cdot 10^{-10}$ *эрг*=37,5 *эв*. Точное значение этой энергии 13,5 *эв*, то есть мы ошиблись почти в три раза. Но ведь это именно оценка, грубая прикидка, которая дает представление только о порядке интересующей нас величины.

В заключение следует подчеркнуть, что события, происходящие в микромире на уровне атомов, молекул и атомных ядер, стали понятными лишь после того, как появилась идея о волновой природе микрочастиц. Их двойственная природа (с одной стороны, — это частицы, с другой волны) не имеет аналогий в привычном нам макроскопическом мире, поэтому было бы бесполезно пытаться представить себе, например, на что похож электрон, движущийся в атоме. Он не похож ни на что, известное нам до сих пор. Электрон обладает одновременно и свойствами частиц, и волновыми свойствами, но не является ни частицей в обычном смысле слова, ни обычной волной. Говорить об электроне как о частице можно лишь приближенно, не забывая о его волновых свойствах. Например, для обычной, классической частицы можно точно задать ее координату, импульс, энергию в любой момент времени. Что можно сказать об этих параметрах при описании поведения микрочастиц?

Согласно формуле де Бройля частице, обладающей данным импульсом, то есть определенным значением скорости, соответствует волна определенной длины. Определенным значением длины волны характеризуются только гармонические волны. Но гармоническая волна безгранична в пространстве. Значит, мы не можем говорить о локализации, о пространственных координатах микрочастицы в данный момент времени.

Если же мы считаем, что частица локализована в пространстве, то тем самым мы ограничили область, в которой сосредоточен колебательный процесс, описываемый волновыми свойствами данной частицы. Но описать такие колебания одной гармонической волной определенной длины нельзя. Следовательно, согласно соотношению де Бройля ничего нельзя с определенностью сказать об импульсе частицы в тот момент времени, в который мы считаем зафиксированными ее координаты.

Таким образом, нет смысла говорить об одновременных точных значениях координат и импульса микрочастицы. Эти параметры могут быть определены в один и тот же момент времени лишь приблизительно, с определенной степенью точности. В 1927 году немецкий физик Вернер Гейзенберг показал, что между неточностями Δx и Δp в определении координаты и импульса микрочастицы в данный момент времени существует следующее соотношение:

$$\Delta x \cdot \Delta p \geqslant h\,^{*}).$$

Это соотношение называется соотношением неопределенностей.

Сегодня мы не можем ответить на вопрос, почему мир микрочастиц устроен именно так, а не иначе, да и вряд ли такой вопрос относится к числу правильно поставленных. Но мы теперь твердо знаем, что самые привычные, кажущиеся незыблемыми представления о природе могут быть опрокинуты потоком новых фактов и наблюдений. Поэтому надо с большой осторожностью относиться ко всякого рода категорическим суждениям о свойствах и законах окружающего нас мира, ибо каждое такое «абсолютное» утверждение основано в действительности на ограниченном человеческом опыте.

---

*) Δp — составляющая полного импульса частицы на соответствующую ось координат. В данном случае — на ось X.

С. Г. Веров

КАСАТЕЛЬНЫЕ К РУЛЕТТАМ

Одним из важнейших достижений XVII века как в области механики, так и в области математики, было осознание глубокой связи между задачей о проведении касательных к кривым и задачей о нахождении скоростей неравномерных криволинейных движений. Выяснилось, в частности, что, исходя из механических соображений, для ряда интересных кривых можно указать элементарные приемы построения касательных. В этой статье рассказывается о двух таких приемах, применимых главным образом при построении касательных к так называемым рулеттам — кривым, по которым движутся точки плоскости, если считать, что вся плоскость движется как «твердая пластина». Хотя основной является задача о касательных, читателю предлагается также несколько других элементарных задач о траекториях движений.

> *«Некоторые вопросы выяснились для меня первоначально при помощи механического метода, после чего их надо было доказать геометрически, ибо исследование упомянутым методом не может дать подлинного доказательства. Однако, разумеется, легче найти доказательство, если сперва с помощью этого метода получено известное представление о вопросе, чем искать доказательство, не зная заранее, в чем суть дела»*
>
> *АРХИМЕД*

Сначала расскажем о приеме, разработанном Торричелли (1608—1647) и Робервалем (1602—1675); этот прием основывается на сложении скоростей.

Рассмотрим движение материальной точки. Если в момент времени t_0 прекратить действие сил, то точка остановится или начнет равномерно двигаться по касательной к траектории (скорость возникающего равномерного движения называется *мгновенной векторной скоростью* исходного движения при $t = t_0$). Это утверждение вытекает из законов Ньютона. Но можно, как это часто делали математики в XVII веке, принять его за кинематическое определение касательной, убедившись, что оно согласуется с наблюдениями над простейшими движениями (прежде всего вращательным). Встав на такую точку зрения, мы сможем строить касательные ко многим интересным кривым, используя при этом лишь простые факты о скоростях.

Будем рассматривать только плоское движение. Зафиксируем на плоскости точку O — начало отсчета. Если движущаяся точка в момент времени t занимает положение A_t, то через $\mathbf{r}(t)$ обозначим вектор $\overrightarrow{OA_t}$. Задание векторов $\mathbf{r}(t)$ для всех значений t полностью определяет движение. Мгновенную векторную скорость в момент времени t обозначим через $\dot{\mathbf{r}}(t)$; напомним, что *вектор* $\dot{\mathbf{r}}(t)$ *направлен по касательной к траектории движения.* Его длина $|\dot{\mathbf{r}}(t)|$ называется *величиной* скорости. Если движение происходит по фиксированной прямой, на которой введены координаты, то векторы $\mathbf{r}(t)$

и $\dot{\mathbf{r}}(t)$ направлены по этой прямой, и их можно характеризовать координатами $s(t)$ и $\dot{s}(t)$.

Пример 1. Галилей показал, что для прямолинейного движения $s(t)=\frac{gt^2}{2}$, скорость будет равна $\dot{s}(t)=gt$.

Пример 2. Пусть точка, находящаяся на расстоянии R от точки O, равномерно вращается вокруг O. Тогда вектор $\dot{\mathbf{r}}(t)$ направлен по касательной к окружности, по которой движется точка, в сторону, соответствующую направлению вращения, и $|\dot{\mathbf{r}}(t)|=\frac{2\pi R}{T}$, где T — период вращения (время полного оборота). В частности, при $T=2\pi$ имеем

$$|\dot{\mathbf{r}}(t)|=|\mathbf{r}(t)|=R.$$

Закон сложения скоростей

Пусть имеется два движения $\mathbf{r}_1(t)$ и $\mathbf{r}_2(t)$. Назовем их *суммой* движение, для которого $\mathbf{r}(t)=\mathbf{r}_1(t)+\mathbf{r}_2(t)$, где справа стоит векторная сумма. Закон сложения скоростей утверждает, что скорость движения $\dot{\mathbf{r}}(t)$ равна $\dot{\mathbf{r}}_1(t)+\dot{\mathbf{r}}_2(t)$, то есть сумме (векторной) скоростей составляющих движений. Закон сложения скоростей легко установить для суммы движений с постоянными скоростями; общий же случай получается из этого частного случая предельным переходом.

Всякое движение $\mathbf{r}(t)$ может быть представлено в виде суммы двух прямолинейных движений. Для этого достаточно ввести любую декартову систему координат так, чтобы $O=(0, 0)$ и рассмотреть изменение со временем координат $x(t)$, $y(t)$ вектора $\mathbf{r}(t)$. Очевидно, что исходное движение $\mathbf{r}(t)$ и будет суммой движений $x(t)$ и $y(t)$ по координатным осям. Скорости этих движений $\dot{x}(t)$ и $\dot{y}(t)$ являются компонентами вектора $\dot{\mathbf{r}}(t)$ (в силу закона сложения скоростей).

Рассмотрим пример 2 при $R=1$, $T=2\pi$, и пусть вектор $\mathbf{r}(0)$ направлен по положительному направлению оси x. Тогда $\mathbf{r}(t)=(\cos t, \sin t)$, $\dot{\mathbf{r}}(t)=(-\sin t, \cos t)$, и мы получаем, что $\dot{s}(t)=-\sin t$, если $s(t)=\cos t$, и $\dot{s}(t)=\cos t$, если $s(t)=\sin t$. Читатель, знакомый с дифференцированием, безусловно, заметит, что выявился очень простой кинематический смысл формул для *производных* $\sin t$ и $\cos t$.

Кинематическое определение касательной к параболе

Галилей (1564—1642) обнаружил, что если тело бросить под углом к горизонту, то оно летит по параболе. При доказательстве этого факта Галилей исходил из предположения, что такое движение является суммой равномерного движения по инерции и свободного падения. Однако Галилей не воспользовался своими вычислениями для построения касательной к параболе. Сделал это Торричелли. В приводимых ниже задачах 1, 2 сформулирован его результат.

Задача 1. Докажите, что касательная, проведенная в точке A_t траектории горизонтально брошенного тела: $A_t=(x(t), y(t))=(vt, -gt^2/2)$, соединяет эту точку с точкой $(0, -y(t))=(0, gt^2/2)$.

Все вычисления легко обобщаются на случай тела, брошенного под углом к горизонту со скоростью (u, v). В этом случае движение разбивается на движение $\{x_1(t)=ut,\ y_1(t)=vt\}$ с постоянной скоростью (u, v) и свободное падение $\{x_2(t)=0,\ y_2(t)=-gt^2/2\}$. Поэтому результирующее движение записывается так: $\{x(t)=ut, y(t)=vt-gt^2/2\}$ (при сложении векторов с началом в 0 координаты их концов складываются).

Задача 2. Докажите, что касательная к параболе, по которой летит тело, брошенное со скоростью (u, v), соединяет точку касания $(x(t), y(t))$ с точкой $(0, -y_2(t))=(0, gt^2/2)$.

Заметим, что указанный Торричелли способ построения касательных к параболе был известен и раньше; однако его кинематическая интерпретация, безусловно, поучительна.

Касательная к циклоиде

Циклоидой Галилей назвал кривую, которую описывает точка, лежащая на границе круга, катящегося по прямой (рис. 1); название означает — «происходящая от круга».

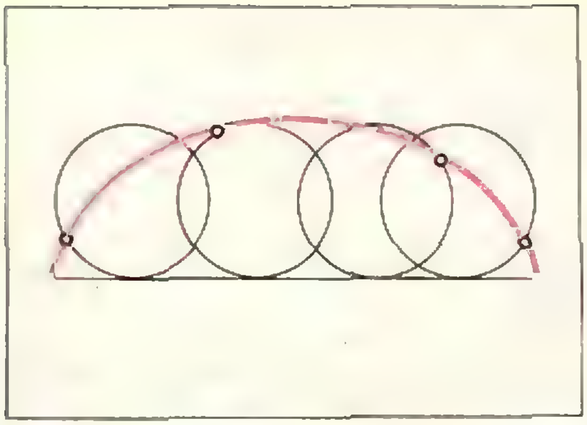


Рис. 1. Циклоида.

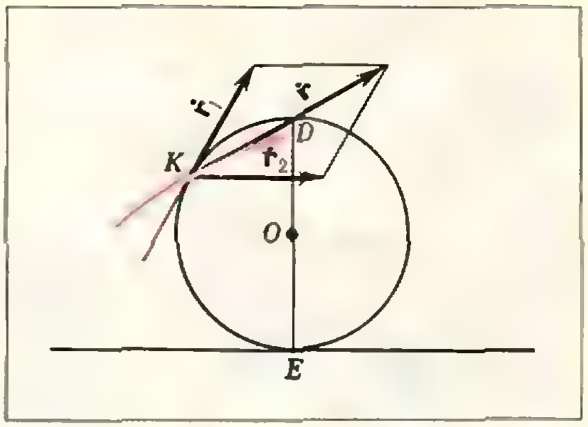


Рис. 3.

Во Франции циклоиду независимо от Галилея открыл **Мерсенн** (1588—1648); здесь ее называли *рулеттой* или *трохоидой*. Крупнейшие ученые и Италии, и Франции (**Торричелли**, **Вивиани** (1622—1703), **Ферма** (1601—1665), **Декарт** (1596—1650), Роберваль) решали разнообразные задачи о циклоиде. Вероятно, первым касательную к циклоиде построил Вивиани. Однако, поскольку циклоида определялась кинематически, естественно было найти такой способ построения касательной к ней, который исходил бы из кинематических соображений. Это сделали Роберваль и Торричелли.

Пусть в начальный момент времени ($t = 0$) O — центр *производящего* (катящегося) *круга*, а наблюдаемая точка A является точкой, в которой производящий круг касается *направляющей прямой* l. Очевидно, что движение точки A является периодическим; поэтому достаточно наблюдать за ней лишь до тех пор, пока она вновь не попадет на прямую l. Пусть, далее, в момент t наблюдаемая точка занимает положение A_t, а с прямой l соприкасается точка B_t (рис. 2). Тогда длина отрезка AB_t должна быть равна длине дуги B_tA_t. *Примем это равенство за определение качения без скольжения.*

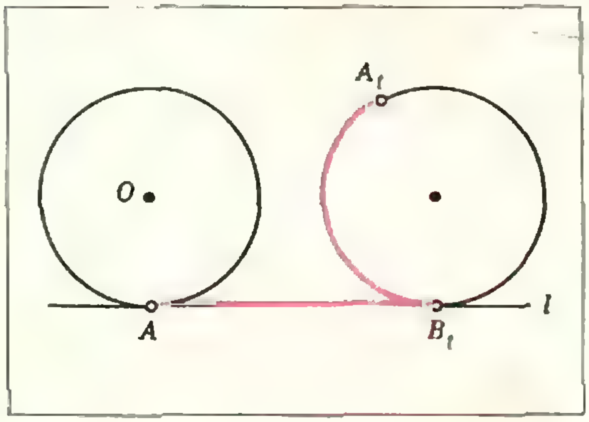


Рис. 2.

Наше движение можно рассматривать как сумму вращательного ($\mathbf r_1(t)$) — вокруг O, — и поступательного ($\mathbf r_2(t)$) — вдоль прямой l, причем движения эти происходят таким образом, что в каждый момент времени пройденные пути оказываются одинаковыми ($s(t)$). Закон изменения пути $s(t)$ можно задавать по-разному; от этого будет зависеть характер движения, но траектория (циклоида), а вместе с ней и интересующие нас касательные, меняться не будут. Выберем самый простой закон изменения: $s(t)=ct$. Тогда оба движения, и поступательное и вращательное, будут равномерными с одинаковой величиной скорости $|\dot{\mathbf r}_1(t)| = |\dot{\mathbf r}_2(t)| = c$ (см. пример 2)*).

Найдем скорость результирующего движения. Пусть в момент времени t точка занимает положение $A_t = K$ (рис. 3). Вектор $\dot{\mathbf r}_1(t)$ направлен по касательной к границе производящего круга, вектор $\dot{\mathbf r}_2(t)$ — горизонтально; длины их одинаковы. По правилу параллелограмма

---

*) Имеем $c = \frac{2\pi R}{T}$, где R — радиус производящего круга, T — время его полного оборота. В частности, если $T=2\pi$, то $c=R$.

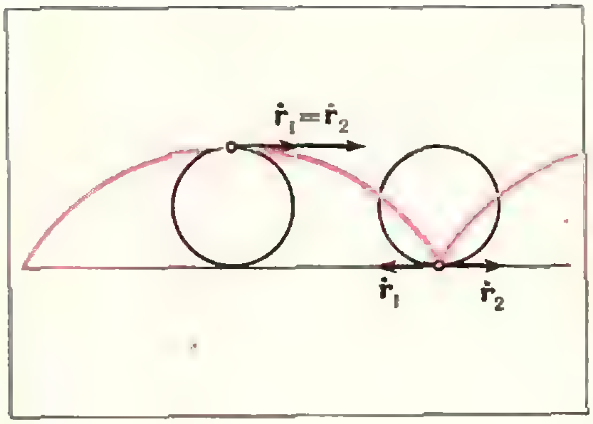


Рис. 4.

(в данном случае это ромб) находим искомую скорость $\dot{\mathbf r}(t)$, а значит, и касательную к циклоиде.

З а д а ч а 3. Докажите, что касательная к циклоиде в точке K соединяет эту точку с верхней точкой D производящего круга при его соответствующем положении.

(Для решения задачи нужно доказать лишь простой геометрический факт: вектор $\dot{\mathbf r}(t)$ направлен по прямой KD.)

Заметим, что величина скорости $|\dot{\mathbf r}(t)|$ не постоянна: она максимальная, когда точка занимает наивысшее положение (при этом векторы $\dot{\mathbf r}_1(t)$ и $\dot{\mathbf r}_2(t)$ лежат на одной прямой и совпадают по направлению), и равна нулю, когда точка попадает на прямую l (в этом случае векторы $\dot{\mathbf r}_1(t)$ и $\dot{\mathbf r}_2(t)$ противоположны(рис. 4)). *Можно показать, что равенство нулю скорости в точках соприкосновения круга и прямой во все моменты времени эквивалентно принятому ранее определению качения без скольжения.*

Итак, получаем, что там, где циклоида имеет заострения, скорость наблюдаемой точки обращается в нуль. Оказывается, что, вообще, какова бы ни была траектория, в точках ее заострения скорость всегда равна нулю. Иногда говорят, что траектория не может «сломаться» на ненулевой скорости. Принято считать, что в точках заострения у кривых нет касательных. Все сказанное здесь нуждается в серьезных уточнениях, но мы этого делать не будем.

Нормалью к кривой в точке A называется прямая, проходящая через A перпендикулярно к касательной в этой точке.

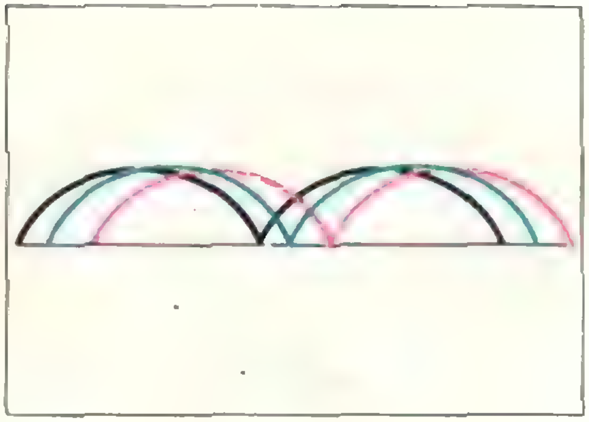


Рис. 5.

Из задачи 3 следует, что нормаль к циклоиде проходит через нижнюю точку производящего круга (точку E на рисунке 3; угол DKE — прямой, так как опирается на диаметр).

Укороченные циклоиды

Пока мы следили только за одной (фиксированной) граничной точкой производящего круга; однако ясно, что и другие граничные точки будут двигаться по таким же циклоидам, только сдвинутым вдоль прямой l (рис. 5). Проследим теперь за траекториями внутренних точек круга. Возникающие кривые называются *укороченными циклоидами* (рис. 6); они характеризуются отношением $k = \frac{\rho}{R}$, где R — радиус производящего круга, ρ — расстояние от центра

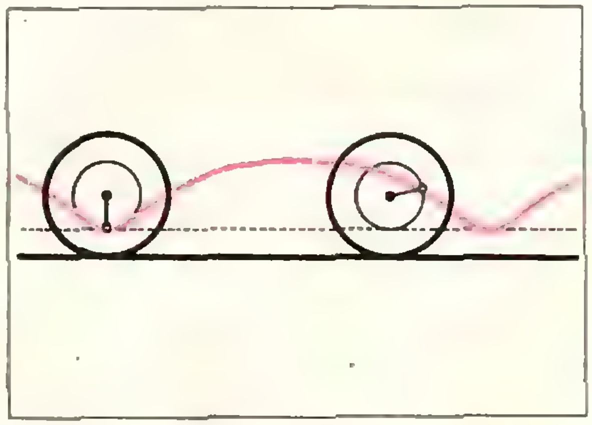


Рис. 6. Укороченная циклоида.

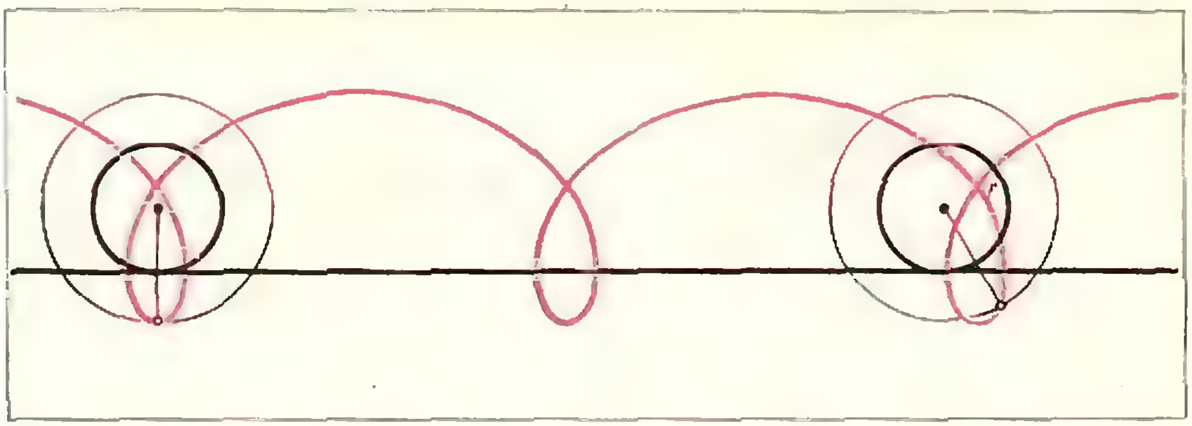


Рис. 7. Удлиненная циклоида.

круга до наблюдаемой точки. При $k = 0$ получаем прямую, по которой движется центр круга, а при $k = 1$ — циклоиду.

Задача 4. Докажите, что нормаль к укороченной циклоиде проходит через нижнюю точку производящего круга.

Заметим, что точка, движущаяся по укороченной циклоиде, нигде не имеет нулевой скорости. В нижней точке скорость направлена горизонтально и ее величина равна $R-\rho$. Это означает, что к качению окружности радиуса ρ добавляется скольжение со скоростью $R-\rho$ (поступательное движение).

Удлиненные циклоиды

Вовлечем в качение круга его внешние точки (можно представить себе, что на колесо, движущееся по рельсу, одет обод). Эти точки движутся по кривым, которые называются *удлиненными циклоидами* (рис. 7). Все рассуждения, которые ранее были приведены для укороченных циклоид, дословно переносятся на удлиненные. Здесь только $k = \frac{\rho}{R} > 1$. Заметим лишь, что в нижней точке удлиненной циклоиды скорость направлена в сторону, противоположную движению круга ($|\dot{\mathbf{r}}_1| = \rho$, $|\dot{\mathbf{r}}_2| = R$, $\rho > R$).

Обращали ли вы внимание на то, что нижние точки обода колеса вагона движутся назад?

Мгновенный центр вращения

Итак, мы вовлекли в качение круга по прямой все точки плоскости. Каждая точка движется по своей траектории, но все эти траектории согласованы, так как движущиеся точки составляют твердое тело. Характеристическим свойством твердого тела с точки зрения кинематики является то, что при движении расстояния между всеми его точками остаются неизменными. Мы ограничимся здесь рассмотрением лишь таких движений твердых пластин, которые можно производить, не выводя пластины из плоскости (запрещается, например, их переворачивать). Нас будет интересовать, какие ограничения накладывает на скорости точек пластины условие твердости (заметим, что вопрос о движении трехмерных твердых тел намного сложнее рассматриваемой нами плоской задачи).

Вот некоторые закономерности движения твердых пластин.

Принцип вовлечения. *Движение твердой пластины однозначно определяется движениями любых двух ее точек. Движение двух различных точек, при котором сохраняется расстояние между ними, можно, и притом единственным образом, продолжить до движения всей плоскости как твердой пластины.* Это утверждение носит чисто геометрический характер. Мы не будем приводить его доказательства, ограничившись наглядными пояснениями. Во-первых, движение прямолинейного стержня полностью характеризуется движением двух его точек, а, во-вторых, если треугольник составлен из жестких стержней, то движение одного из них однозначно приводит в движение весь треугольник. В результате в движение двух точек, A, B, можно вовлечь прямую AB, а затем всякую точку C вне AB.

Принцип инерции. *Если на твердую пластину не действуют никакие внешние силы (а лишь внутренние силы, обеспечивающие твердость), то она совершает равномерное прямолинейное или равномерное вращательное движение.*

При рассмотрении произвольных движений пластин нам потребуется еще один фундаментальный принцип механики. *Скорость не может измениться мгновенно* (для изменения скорости требуется ненулевое время). В частности, если в момент времени t_0 изменить силы, действовавшие на движущуюся точку, то скорость $\dot{\mathbf{r}}(t_0)$ не изменится, а значит, если $\dot{\mathbf{r}}(t_0) \neq \vec{0}$, не изменится и касательная к траектории в момент t_0 (хотя сама траектория начиная с этого момента может стать иной).

Пусть в момент времени t_0 на движущуюся твердую пластину перестали действовать внешние силы. Тогда, с одной стороны, скорости точек в момент времени t_0 останутся прежними, а, с другой стороны, движение должно подчиняться сформулированному принципу инерции. *Поэтому при движении твердой пластины в каждый момент времени t может иметь место лишь одна из двух возможностей:*

а) скорости всех точек равны (как векторы);

б) существует единственная точка O_t, в которой скорость равна нулю; в произвольной же точке A пластины скорость направлена перпендикулярно к вектору O_tA, а ее величина пропорциональна расстоянию от A до O_t. (Коэффициент пропорциональности зависит только от момента времени t и не зависит от A.)

Из того, что скорость не может измениться мгновенно, нетрудно вывести, что переход от ситуации *а*) к *б*) и наоборот возможен лишь в те моменты, когда пластина останавливается (скорости всех точек равны нулю). Поэтому в промежутках между остановками либо всюду имеет место ситуация *а*), либо всюду *б*). Можно показать, что в случае *а*) траектория любой точки A получается из траектории некоторой точки B параллельным переносом на вектор $\overrightarrow{BA}$. Мы будем рассматривать случай *б*) (то есть считать, что в каждый момент времени имеется единственная точка O_t с нулевой скоростью). Будем называть O_t *мгновенным центром вращения в момент* t. (В примере с качением круга по прямой мгновенным центром вращения является точка соприкосновения круга с направляющей прямой.)

Если известен мгновенный центр вращения O_t, то нормали к траекториям в момент времени t (прямые O_tA_t), а следовательно, и касательные, строятся автоматически. Наоборот, если в момент t известны скорости двух точек пластины, то взяв точку пересечения нормалей к этим скоростям, мы получим мгновенный центр вращения O_t.

Пусть теперь твердая пластина движется по неподвижной плоскости. Рассмотрим на этой плоскости кривую L, составленную из мгновенных центров вращения во все моменты времени; кривую L называют *неподвижным центроидом*; мы будем называть ее *«рельсом»*. С другой стороны, рассмотрим на пластине кривую C, составленную из всех таких точек, которые оказываются мгновенными центрами вращения в какие-то моменты времени; C называют *подвижным центроидом*; мы будем называть C *«колесом»*. Введенные «несерьезные» термины, вероятно, подсказали вам, что исход-

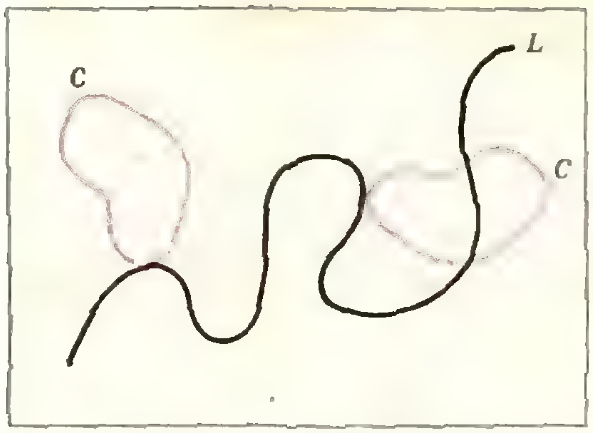


Рис. 8. «Неподвижный рельс» (L) и «колесо» (C).

ное движение можно получить, если рассмотреть качение без скольжения нашего кривого «колеса» по кривому «рельсу» и вовлечь в это качение остальные точки (рис. 8). Будем при этом считать, что отсутствие скольжения означает равенство нулю мгновенных скоростей в точках соприкосновения «колеса» и направляющего «рельса» во все моменты времени (это согласуется с *определением* мгновенного центра вращения). Отсюда можно вывести равенство длин дуги «колеса» и соответствующей дуги направляющего «рельса» (по которой эта дуга «колеса» прокатилась). При этом разрешается, чтобы при качении «колесо» пересекало «рельс».

Часто под рулеттами понимают траектории, которые описывают точки плоскости при ее движении как твердой пластины с условием (б) во все моменты времени, то есть при некотором качении. Ко всем рулеттам мы научились проводить нормали и касательные. При этом оказалось, что не нужно даже уметь проводить касательные к «колесу» и «рельсу» (это было бы необходимо, если пользоваться сложением скоростей). В наших механических рассмотрениях мы вышли за пределы XVII века; замечательно, однако, что способ проведения нормалей к общим рулеттам открыл Декарт, определявший их при помощи качения (не зная, конечно, сколь общий характер носят движения, порожденные качениями).

Эпициклоиды

Рассмотрим теперь рулетты, получающиеся при качении круга по кругу. Пусть круг радиуса r катится по внешней стороне окружности радиуса R. Траектории граничных точек катящегося круга («колеса») называются *эпициклоидами*. Их вид зависит от $k = \frac{R}{r}$ (рис. 9). Если k — целое, то подвижный круг, прокатившись один раз по границе неподвижного, сделает k оборотов и эпициклоида будет иметь k остриев и k арок. Эпициклоиду при $k = 1$ называют *кардиоидой* (она напоминает стилизованное изображение сердца). Если $k = \frac{p}{q}$ — несократимая дробь, то подвижный круг, сделав q оборотов, p раз прокатится по неподвижному. Если же k будет иррациональным числом, то никакой периодичности не будет, и наблюдаемая точка никогда не вернется в исходное положение.

Можно доказать, что получающаяся в этом случае бесконечная траектория заполняет кольцо $\{R \leqslant OA \leqslant R+r\}$, подходя сколь угодно близко к любой его точке, но не в каждую попадая.

Касательные к эпициклоидам легко строятся с помощью мгновенного центра вращения — точки соприкосновения кругов. Докажите, что касательная к эпициклоиде (в некоторой точке) проходит через точку соответствующего подвижного круга, диаметрально противоположную точке соприкосновения с неподвижным.

Замечание. При построении эпициклоид и решении задач нужно помнить следующее. Если A — начальное положение наблюдаемой точки (рис. 10), а в некоторый момент времени подвижный круг касается неподвижного в точке B, то эпициклоиде принадлежит такая точка его границы C, что *дуга BA равна по длине дуге BC*; учитывая разницу радиусов, получаем

$$\frac{\smile BC}{\smile BA} = \frac{R}{r} = k.$$

Траектории движения внутренних (соответственно внешних) точек подвижного круга при рассматриваемом качении называются укороченными (соответственно удлиненными) эпициклоидами (рис. 11; мы ограничиваемся целыми k).

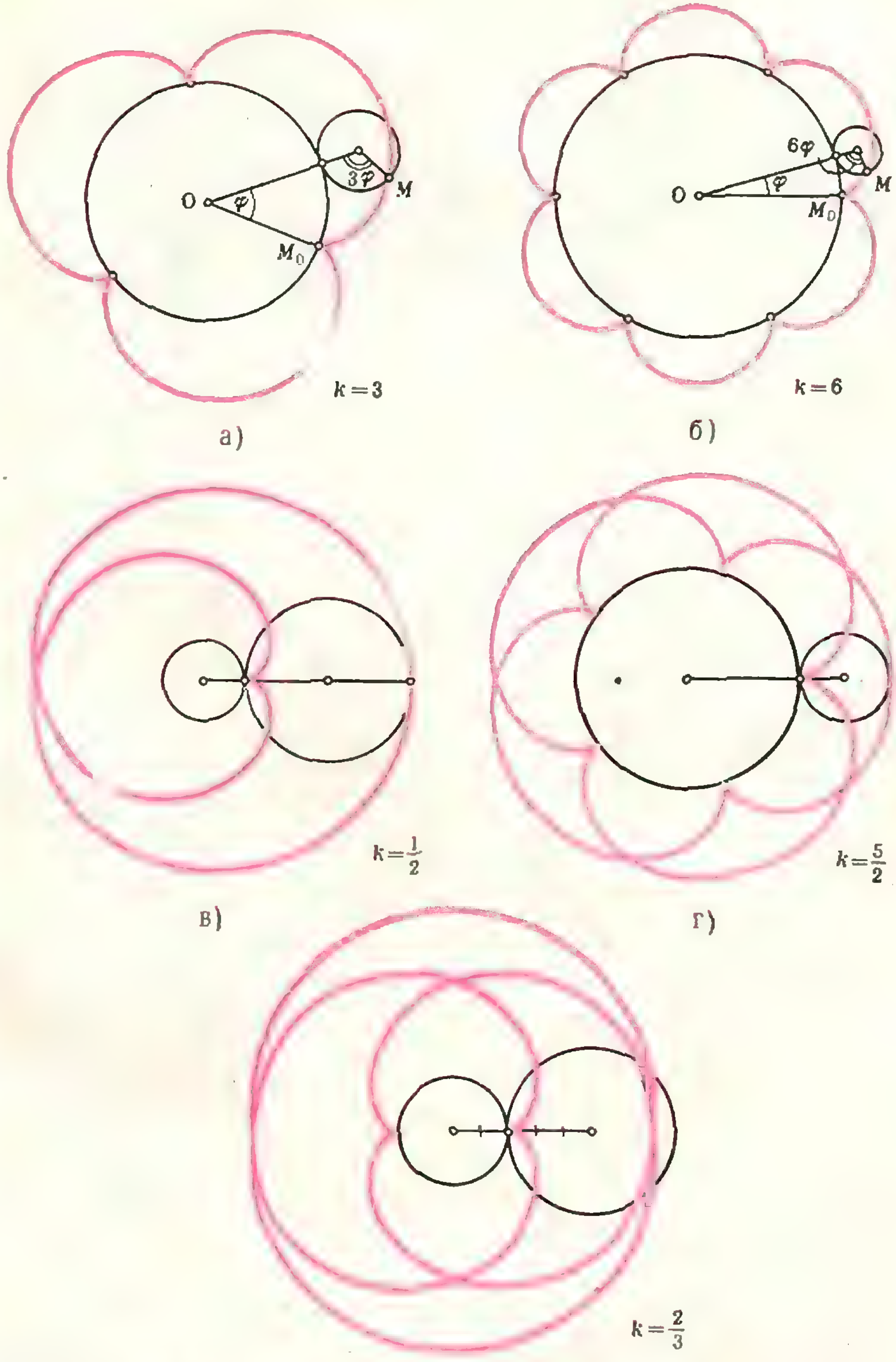

O
φ
3φ
M
M0
k = 3
а)
6φ
O
φ
M
M0
k = 6
б)
k = 1/2
в)
k = 5/2
г)
k = 2/3
д)

Рис. 9. Эпициклоиды.

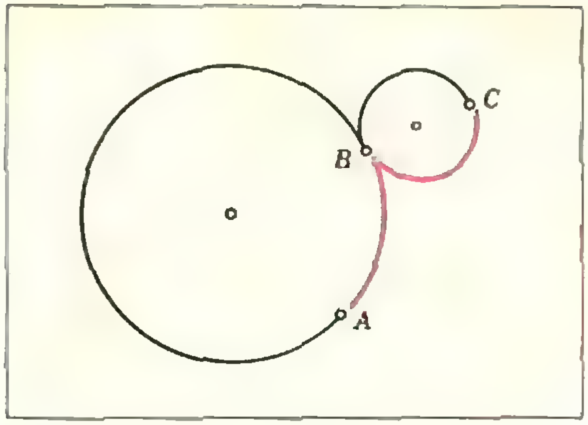
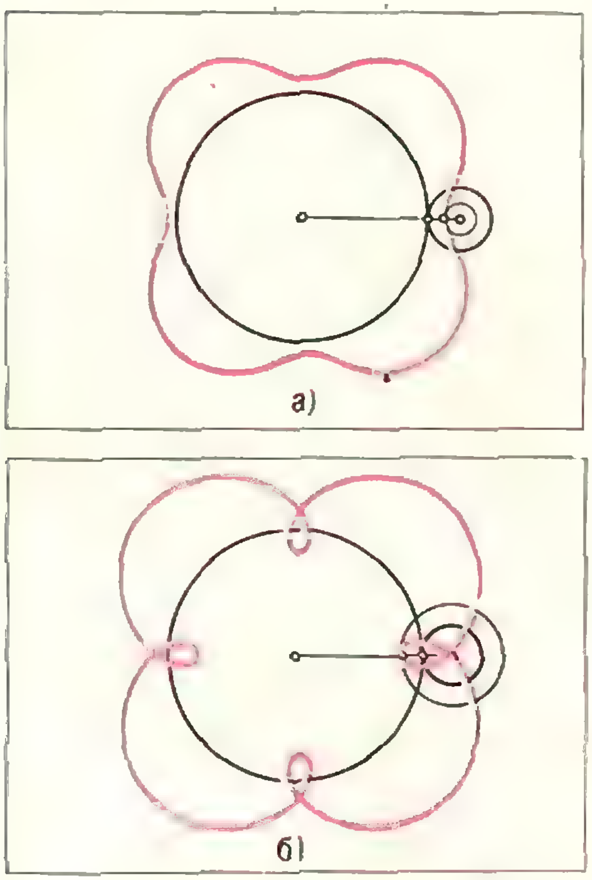


Рис. 10.


а)

б)

Рис. 11. Укороченные и удлиненные эпициклоиды.

Задача 5. Пусть точка A равномерно вращается вокруг точки O_1, в свою очередь равномерно вращающейся вокруг точки O: $|OO_1|=r_2$, $|O_1A|=r_1$. Пусть оба вращения происходят по часовой стрелке; v_1 и v_2 — величины линейных скоростей. Покажите, что движение точки A будет происходить по какой-то эпициклоиде (быть может, укороченной или удлиненной). Какими соотношениями определяется характер кривой?

Гипоциклоиды

Рулетты, получающиеся при качении круга радиуса r по внутренней стороне окружности радиуса $R>r$, называются *гипоциклоидами* (соответственно *удлиненными* и *укороченными*).

Если $r>R$, то можно в качестве аналога такого движения рассмотреть качение обруча радиуса r, внутренней стороной касающегося границы неподвижного круга радиуса R. Соответствующие рулетты называются перициклоидами. Но оказывается, что они совпадают с эпициклоидами (см. «Квант», 1975, № 1, задача М261).

Вид гипоциклоид зависит от арифметической природы $k=\frac{R}{r}$, и читатель легко разберется с этим самостоятельно по аналогии с эпициклоидами.

Задача 5'. Пусть вращения, описанные в задаче 5, происходят в противоположных направлениях (одно—по, а другое—против часовой стрелки). По каким траекториям будет при этом двигаться точка A?

Подчеркнем в заключение, что мы не ставили перед собой цели строго доказать все результаты, полученные нами из кинематических соображений. В некоторых случаях это сделать просто: механические рассуждения заменяются математическими почти автоматически (для этого оказывается достаточно скорости заменить производными). В других случаях такие «заменители» найти сложнее (например, там, где рассматривается движение пластин, или изменяются силы). Однако чисто математические рассмотрения не могут полностью заменить механическую интерпретацию, во многих случаях дающую возможность увидеть простой и красивый ответ.

И. Н. БРОНШТЕЙН

ОБЩИЕ СВОЙСТВА КОНИЧЕСКИХ СЕЧЕНИЙ

Конические сечения.

В статьях «Эллипс», «Гипербола» и «Парабола» *) эти кривые определялись по-разному: первая — как результат растяжения или сжатия окружности, а вторая и третья — как графики некоторых функций. Каждая из них имеет свое фокальное свойство, которое часто принимается за определение кривой. Напомним эти «фокальные определения» (предполагается, что все рассматриваемые точки для каждой линии лежат в одной плоскости):

Эллипс — это множество всех точек, сумма расстояний каждой из которых до двух точек (фокусов) одна и та же.

Гипербола — множество всех точек, разность расстояний каждой из которых до двух точек (фокусов) одна и та же.

Парабола — множество всех точек, одинаково удаленных от точки (фокуса) и от не проходящей через нее прямой (директрисы).

Древнегреческий математик Менехм, открывший эти кривые, определял их иначе: как сечения кругового конуса плоскостью, перпендикулярной к одной из образующих. Он назвал полученные кривые *сечениями остроугольного, прямоугольного и тупоугольного конусов*, в зависимости от осевого угла конуса. Первое, как мы увидим ниже, представляет собой эллипс, второе — параболу, третье — одну ветвь гиперболы (рис. 1, а, б, и в). Названия «эллипс», «гипербола» и «парабола» были введены Аполлонием *). До нас дошло почти полностью (7 книг из 8) сочинение Аполлония «О конических сечениях». В этом сочинении Аполлоний рассматривает обе полы конуса (рис. 2) и пересекает конус плоскостями, не обязательно перпендикулярными к одной из образующей.

Теорема. *Если плоскость сечения пересекает все образующие конуса (только одну его полу), то линия пересечения* (красная линия на рисунке 2) — *эллипс*;

если плоскость параллельна одной образующей (*и тоже пересекает одну полу*), *то линия пересечения* (синяя) — *парабола*;

если плоскость параллельна двум образующим (*пересекает обе полы*), *то линия пересечения* (черная) — *гипербола*.

Изящное доказательство этой теоремы было предложено в 1822 году бельгийским инженером Данделеном, использовавшим сферы, которые принято теперь называть *сферами Данделена*.

Эллипс. Впишем в конус две сферы, касающиеся плоскости сече-

---

*) См. «Квант», 1975, № 1, 3 и 4. Предполагается, что читатель знаком с этими статьями.

*) Аполлоний Пергский — один из трех великих геометров древности (Евклид, Архимед, Аполлоний), жил около 200 г. до нашей эры; работал в Александрии.

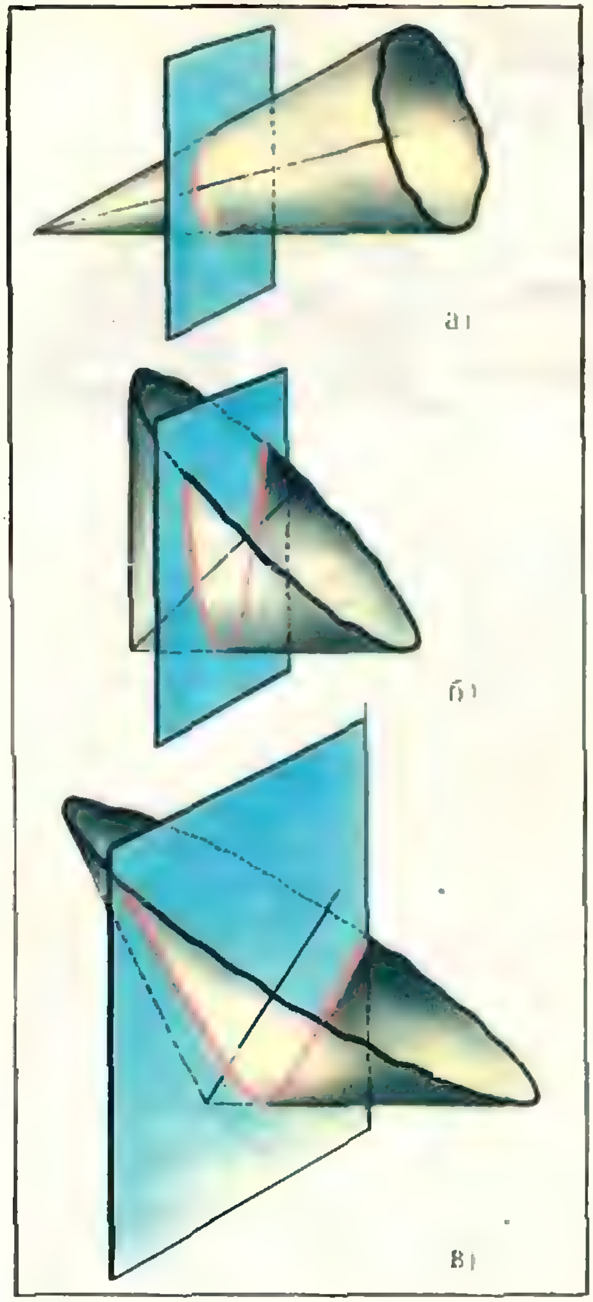


Рис. 1.

ния П с разных сторон (рис. 3, а, б). Обозначим через F_1 и F_2 точки касания этой плоскости со сферами. Возьмем на линии сечения конуса плоскостью П произвольную точку M. Отметим на образующей конуса, проходящей через M, точки P_1 и P_2, лежащие на окружностях k_1 и k_2, по которым сферы касаются конуса. Ясно, что $MF_1 = MP_1$ как отрезки двух касательных к первой сфере, выходящих из M; аналогично, $MF_2 = MP_2$. Следовательно,

$$MF_1 + MF_2 = MP_1 + MP_2 = P_1P_2.$$

Длина отрезка P_1P_2 — одна и та же для всех точек M нашего сечения: это — образующая усеченного конуса, ограниченного параллельными плоскостями I и II, в которых лежат окружности k_1 и k_2. Следовательно, линия сечения конуса плоскостью П — эллипс с фокусами F_1 и F_2.

Гипербола. Этот случай аналогичен только что разобранному. Читателю предлагается доказать, пользуясь рисунком 4, а, б, что в сечении получается гипербола.

Парабола. Этот случай рассмотрен в статье «Парабола» *), исходя из аналитического определения этой кривой. Но можно провести и рассуждение со сферой Данделена (рис. 5).

---

*) «Квант», № 4, с. 16.

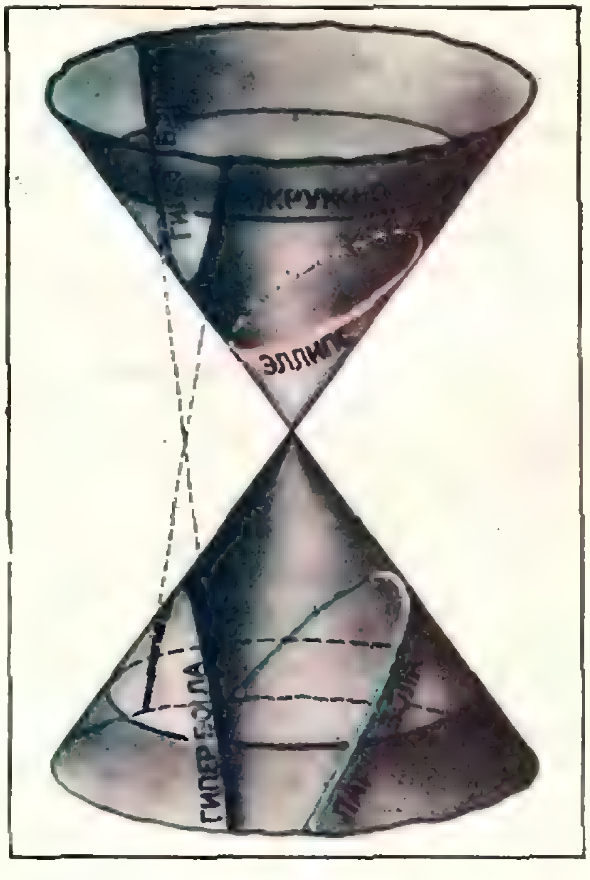


Рис. 2.

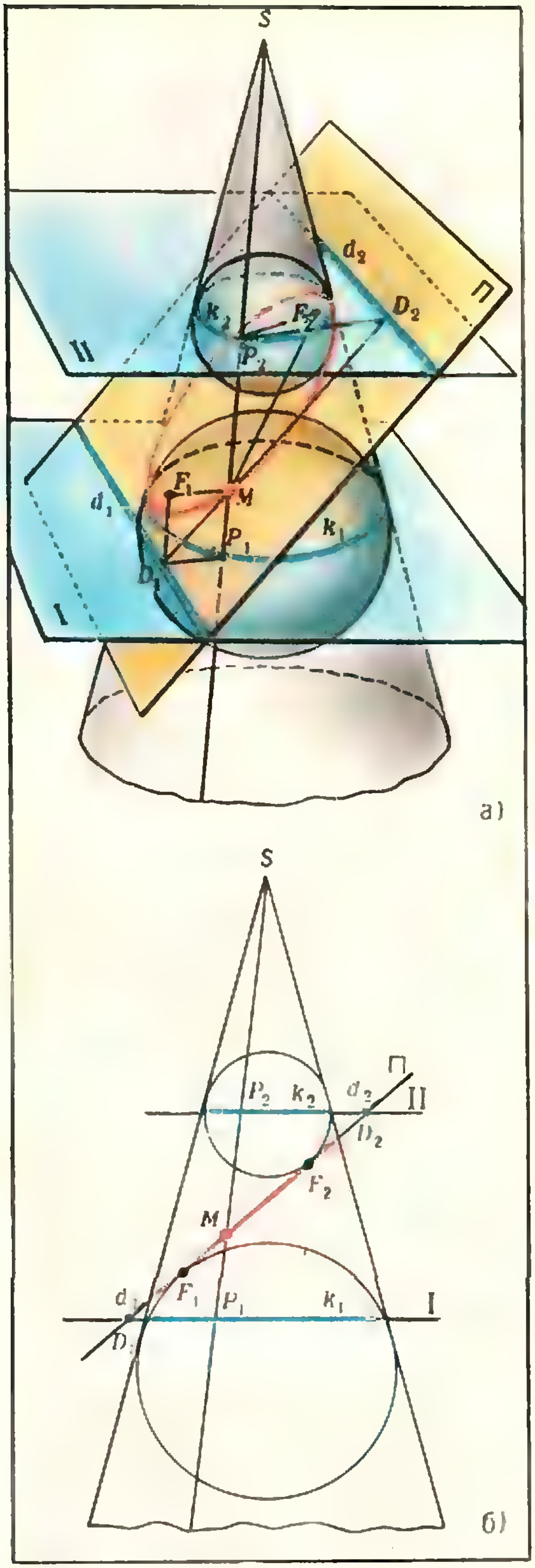

S
d2
D2
П
II
k2
F2
P2
M
F1
d1
k1
P1
D1
I
а)
S
П
P2
k2
d2
II
D2
F2
M
d1
F1
P1
k1
I
D1
б)

Рис. 3.

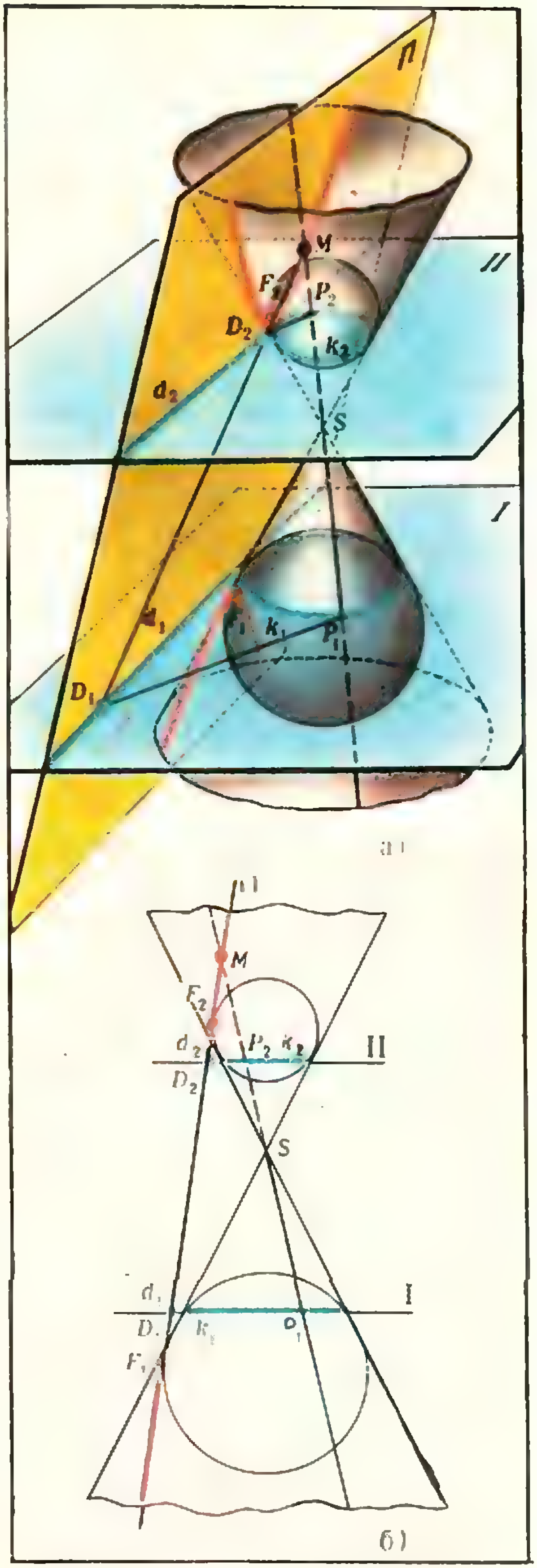

П
M
II
F2
P2
D2
k2
d2
S
I
d1
F1
k1
P1
D1
а)
M
F2
d2
P2
k2
II
D2
S
d1
I
D1
k1
O1
F1
б)

Рис. 4.

Плоскость П пересекает круговой конус параллельно образующей Sl. Впишем в конус сферу, касающуюся плоскости П. Точка касания F и есть фокус. Конус и сфера соприкасаются по окружности k, плоскость I которой пересекает П по прямой d. Это и есть директриса.

Для доказательства проведем через точку M, лежащую на образующей SHM конуса, плоскость II, параллельную I. Она пересечет конус по второй окружности k'. Затем опустим из M перпендикуляр MD на прямую d. Легко видеть, что он параллелен образующей Sl и что фигура $MDEB$ — параллелограмм. Имеем: $MF = MH$ (как две касательные из точки M к сфере); $MH = BE$ (как две образующие усеченного конуса, ограниченного плоскостями I и II); $BE = MD$ (как противоположные стороны параллелограмма). Из равенства $MF = MD$ для любой точки M сечения следует, что это сечение — парабола.

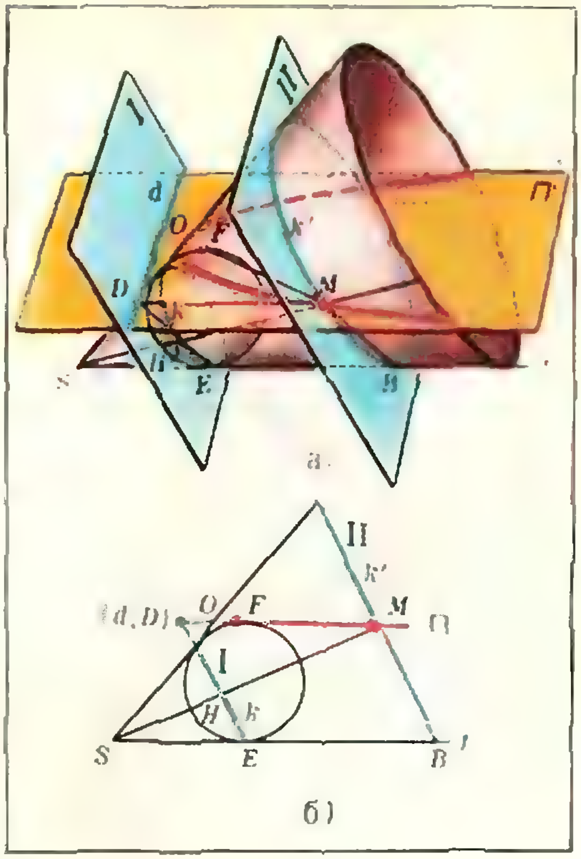


Рис. 5.

Директориальное свойство конических сечений. Эксцентриситет

Фокальному свойству параболы можно придать такую формулировку: отношение $\frac{MF}{MD}$ расстояний любой точки параболы до фокуса F и до директрисы d (рис. 5) — величина постоянная (равная единице).

Аналогичное свойство имеет место также для эллипса и гиперболы.

В плоскости эллипса (гиперболы) для каждого фокуса F существует такая прямая d (директриса), что отношение расстояний от любой точки M эллипса (гиперболы) до фокуса F и до директрисы d — величина постоянная. Она называется *эксцентриситетом* эллипса (гиперболы) и обозначается греческой буквой ε (эпсилон). Для параболы, таким образом, $\varepsilon = 1$; из дальнейшего выяснится, что для эллипса ε меньше 1, а для гиперболы ε больше 1. У параболы одна директриса, а у эллипса (гиперболы) — две, по одной для каждого фокуса (рис. 6).

Докажем это свойство, например, для эллипса. Директрисы d_1 и d_2 — это линии пересечения плоскости П с плоскостями I и II (см. рис. 3). Для эллипса они расположены вне конуса и, значит, вне кривой. Из подобия треугольников MD_1P_1 ($MD_1 \perp d_1$) и MD_2P_2 ($MD_2 \perp d_2$) имеем: $MP_1 : MD_1 = MP_2 : MD_2$. Обозначим эти отношения через ε. Так как $MP_1 = MF_1$, $MP_2 = MF_2$, то $MF_1 = \varepsilon \cdot MD_1$, $MF_2 = \varepsilon \cdot MD_2$. Складывая эти равенства, получаем

$$MF_1 + MF_2 = \varepsilon\,(MD_1 + MD_2) = \varepsilon \cdot D_1D_2.$$

Но левая часть, по фокальному свойству эллипса, постоянна и равна $2a$, длина D_1D_2 (расстояние между директрисами) тоже постоянна. Значит, $\varepsilon = \mathrm{const}$.

Аналогично проводится рассуждение и для гиперболы.

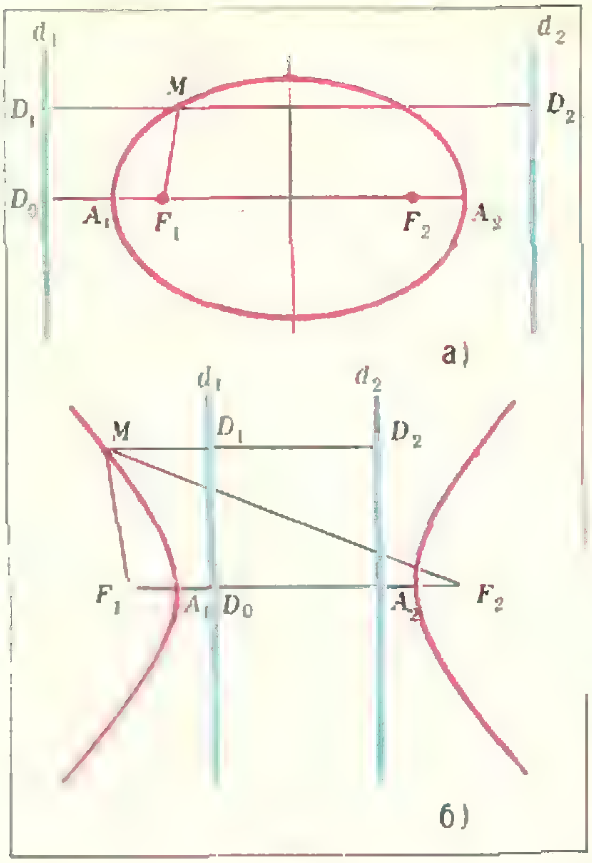


Рис. 6.

Для концов A_1A_2 большой оси эллипса (см. рис. 6, а) имеем по директориальному свойству

$$A_1D_0=\frac{A_1F_1}{\varepsilon} \text{ и } A_2D_0=\frac{A_2F_1}{\varepsilon}.$$

Вычитая первое равенство из второго, получаем

$$A_1A_2=\frac{A_2F_1-A_1F_1}{\varepsilon}=\frac{F_1F_2}{\varepsilon},$$

или, обозначая F_1F_2 через $2c$ (см. «Квант», 1975, № 1, с. 7), $\varepsilon=\frac{c}{a}$.

Такое же равенство справедливо и для гиперболы. Отсюда видно, что для эллипса ε меньше 1, а для гиперболы ε больше 1.

У окружности оба фокуса сливаются в одну точку (центр) и $c=0$, откуда вытекает, что эксцентриситет окружности равен нулю. Слово «эксцентриситет» происходит от латинских *ex* (вне) и *centrum* (центр); эксцентриситет показывает, насколько фокусы эллипса разошлись друг от друга по отношению к длине $2a$ его фокальной оси, то есть какова растянутость эллипса.

Происхождение названий эллипса и гиперболы. Кривые второго порядка

Назовем *главной хордой* эллипса, гиперболы, параболы ту хорду, которая проходит через фокус перпендикулярно к фокальной оси (так называется ось, проходящая через фокус кривой). У эллипса и гиперболы, в отличие от параболы, по две главные хорды. Длину половины главной хорды будем обозначать буквой p и называть *фокальным параметром* конического сечения *).

Для любой точки M конического сечения построим желтый прямоугольник $ABCD$ (высота которого равна главной хорде) и синий квадрат $NMEH$ (рис. 7, а, б, в). Как мы знаем **), для параболы эти прямоугольник и квадрат имеют одинаковую площадь.

Ниже мы увидим, что для эллипса квадрат имеет меньшую площадь, чем прямоугольник, то есть этот квадрат имеет недостаток (*elleipsis*). Для гиперболы же квадрат имеет бо́льшую площадь, чем прямоугольник, то есть имеет избыток (*hyperbole*). Этот факт, известный еще Аполлонию, послужил основой для названия обеих кривых.

Доказательство. Каноническое уравнение эллипса имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \qquad (1)$$

Если, однако, сдвинуть эллипс вправо на a единиц (так, чтобы в начале координат находился не центр, а левый конец фокальной оси эллипса), то в этом новом положении (синий эллипс на рис. 8,а) он будет иметь уже другое уравнение, которое полу-

---

*) Рекомендуем возобновить в памяти соответствующие сведения о главной хорде и фокальном параметре параболы («Квант», № 4, с. 12).

**) «Квант», № 4, с. 12.

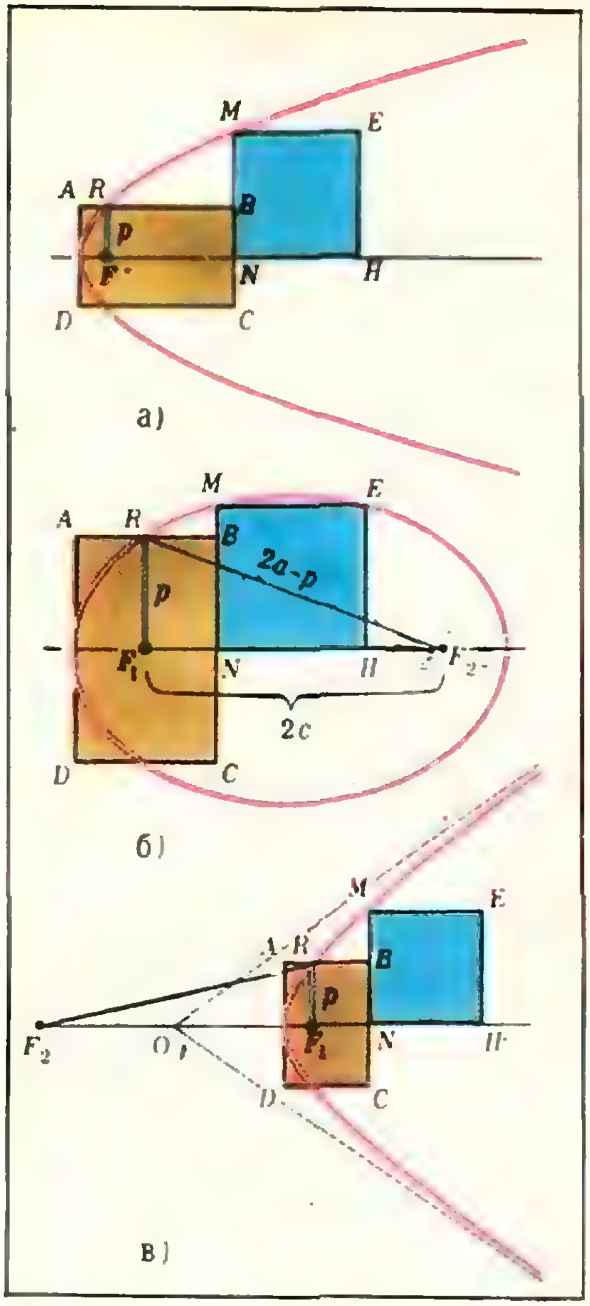

M
E
A R
B
p
F
N
H
D
C
а)
M
E
A
R
B
2a-p
p
F_1
N
H
F_2
2c
D
C
б)
M
E
A R
B
p
F_2
O
F_1
N
H
D
C
в)

Рис. 7.

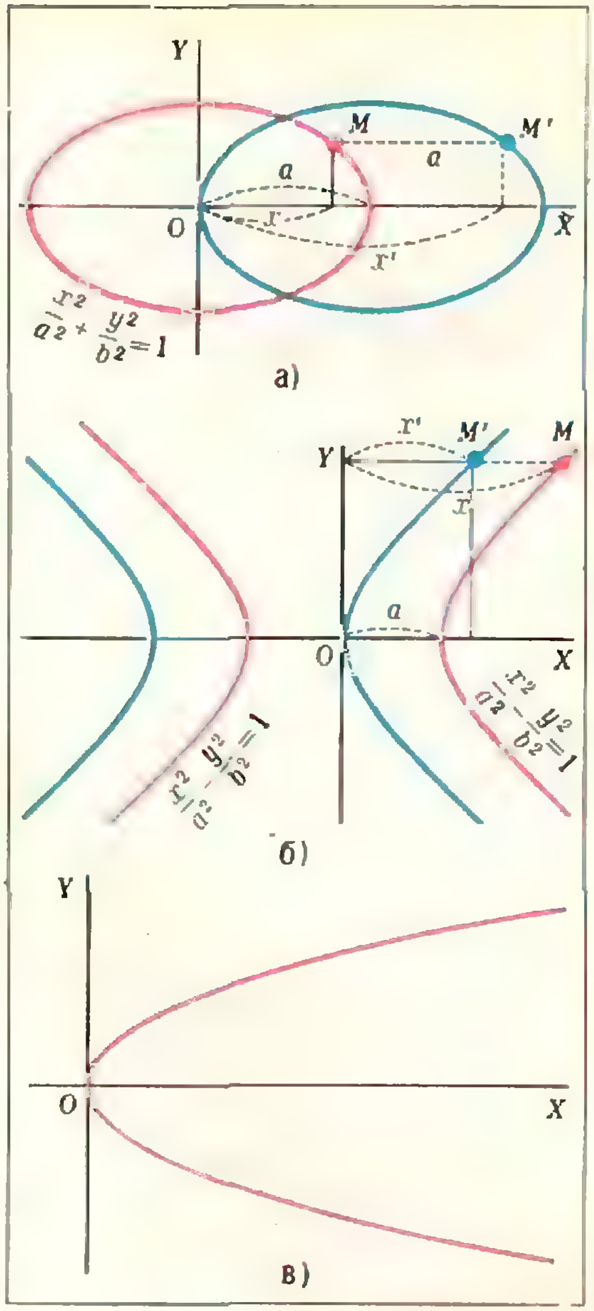

Y
M
M'
a
a
O
x
x'
X
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$
а)
x'
M'
M
Y
x
a
O
X
$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$
$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$
б)
Y
O
X
в)

Рис. 8.

чается из прежнего, если в нем x заменить на $x-a$:

$$\frac{(x-a)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

или

$$y^2=\frac{2b^2}{a}x-\frac{b^2}{a^2}x^2.$$

Заметив, что $p=\frac{b^2}{a}$ (это получается непосредственно вычислением; см. рис. 7,б) и $\frac{b^2}{a^2}=\frac{a^2-c^2}{a^2}=1-\varepsilon^2$, мы можем записать это уравнение так:

$$y^2=2px+(\varepsilon^2-1)x^2. \qquad (2)$$

Точно к такому же виду приводится уравнение гиперболы (здесь кривая сдвигается так, чтобы в начале координат оказался правый конец фокальной оси (см. рис. 8, б) и x заменяется на $x+a$).

Заметим, что и парабола (рис. 8, в), у которой $\varepsilon=1$, имеет то же уравнение:

$y^2=2px$ *). Таким образом, *все три кривые выражаются одним и тем же уравнением* (2). Оно называется *уравнением относительно вершины*, так как начало координат в этом случае находится в вершине кривой (рис. 9).

Второй член в правой части (2) отрицателен для эллипса, равен нулю для параболы и положителен для гиперболы. Сравнив рисунки 7 и 8, видим, что левая часть в (2) равна площади синего квадрата, а первый член правой части — площади красного прямоугольника. Это и доказывает утверждение, сформулированное выше. Разумеется, у Аполлония оно доказано иначе — не аналитически, а чисто геометрически.

Существенно, что уравнение конического сечения (2) — **второй** степени относительно входящих в него переменных. Это относится и к каноническим уравнениям всех трех кривых. Вообще, любая кривая, уравнение которой в прямоугольной системе координат имеет вторую степень, то есть

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+$$
$$+Dx+Ey+F=0,$$

является коническим сечением *). Поэтому конические сечения называются также *кривыми второго порядка*.

От эллипсов к гиперболам через параболу

Рассмотрим плоскость П, пересекающую конус по окружности, и возьмем в этой плоскости прямую l, касающуюся этой окружности. Если теперь начать поворачивать плоскость П вокруг прямой l, то она будет

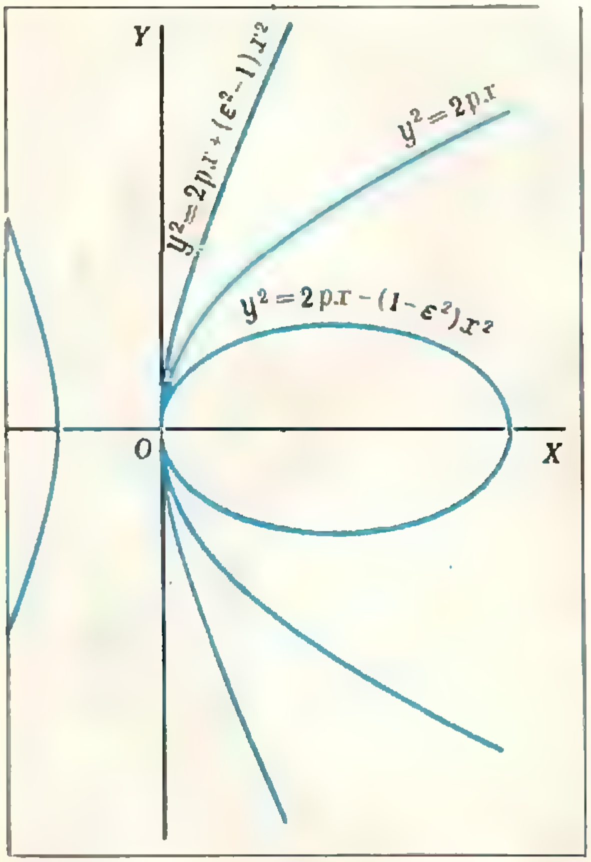

Y
$y^2=2px+(\varepsilon^2-1)x^2$
$y^2=2px$
$y^2=2px-(1-\varepsilon^2)x^2$
O
X

Рис. 9.

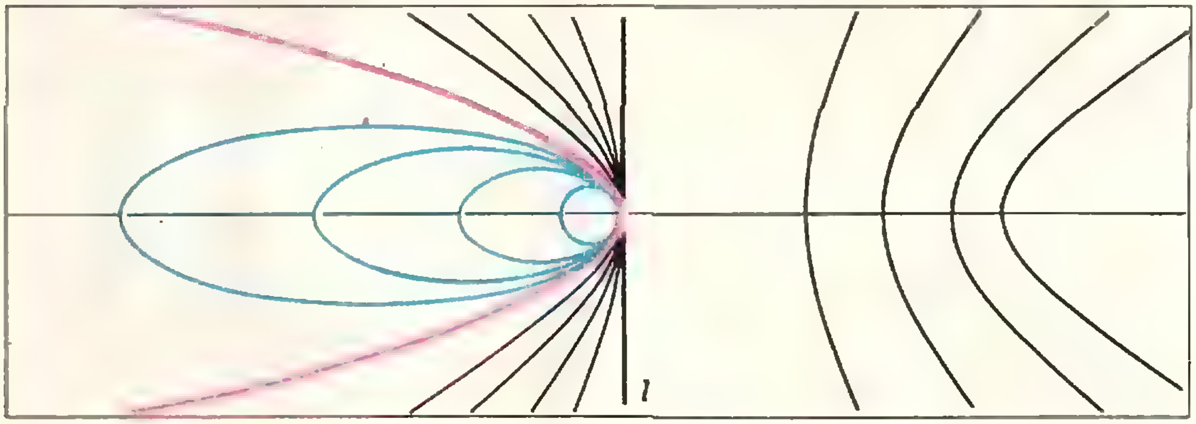


Рис. 10.

---

*) В «Кванте» № 4 (с. 13) уравнение параболы было получено в виде $x^2=2py$, а здесь мы пишем его так: $y^2=2px$. Дело в том, что оси координат мы здесь переставили (сравните рисунки 8 в, в этой статье и 6 в статье «Парабола» в «Кванте» № 4).

*) Правда, при такой формулировке приходится считать коническим сечением не только кривую линию, но и, например, пару пересекающихся прямых (уравнение $x^2-y^2=0$). Однако это вполне естественно, так как плоскость, проходящая через вершину конуса, может пересекать его по двум прямым, то есть по «вырожденному» коническому сечению.

пересекать конус по все более вытянутым эллипсам. Наконец (когда поворачивающаяся плоскость окажется параллельной одной из образующих конуса), сечение превратится в параболу, а затем (при дальнейшем вращении плоскости) оно будет представлять собой гиперболу *). На рисунке 10 показаны кривые, постепенно появляющиеся в поворачивающейся плоскости.

Из сказанного ясно, что парабола — это граничный случай между эллипсами и гиперболами. Для окружности ($\varepsilon=0$) второй фокус слит с первым. С увеличением эксцентриситета второй фокус удаляется от первого, но пока ε меньше 1, кривая остается эллипсом, постепенно растягивающимся. При $\varepsilon = 1$ эллипс деформируется в параболу (его второй фокус «уходит в бесконечность»), а дальше (при ε большем 1) второй фокус вновь появится на фокальной оси (с другой стороны, внутри второй ветви гиперболы).

Перемещая и поворачивая лампу, лучи которой ограничены круглым абажуром (рис. 11), мы можем получить контур в виде **любого** конического сечения, кроме гипербол с большим эксцентриситетом $\left(\varepsilon > \frac{1}{\cos\alpha}\right)$.

Оптические свойства конических сечений

На рисунке 12 изображена густая сеть из двух серий концентрических окружностей с центрами F_1 и F_2; разность радиусов двух соседних окружностей каждой серии равна d. Сеть разбивает плоскость на маленькие 4-угольники, которые можно считать ромбиками; противоположные стороны «параллельны», а обе «высоты» равны ($=d$). Если, начиная с любого узла M сети, двигаться по диагоналям этих 4-угольников, то траекторией движения в одном направлении будет эллипс, а в другом — одна ветвь гиперболы; вторая ветвь гиперболы получится, если двигаться из узла M', симметричного M. Фокусами обеих кривых будут F_1 и F_2.

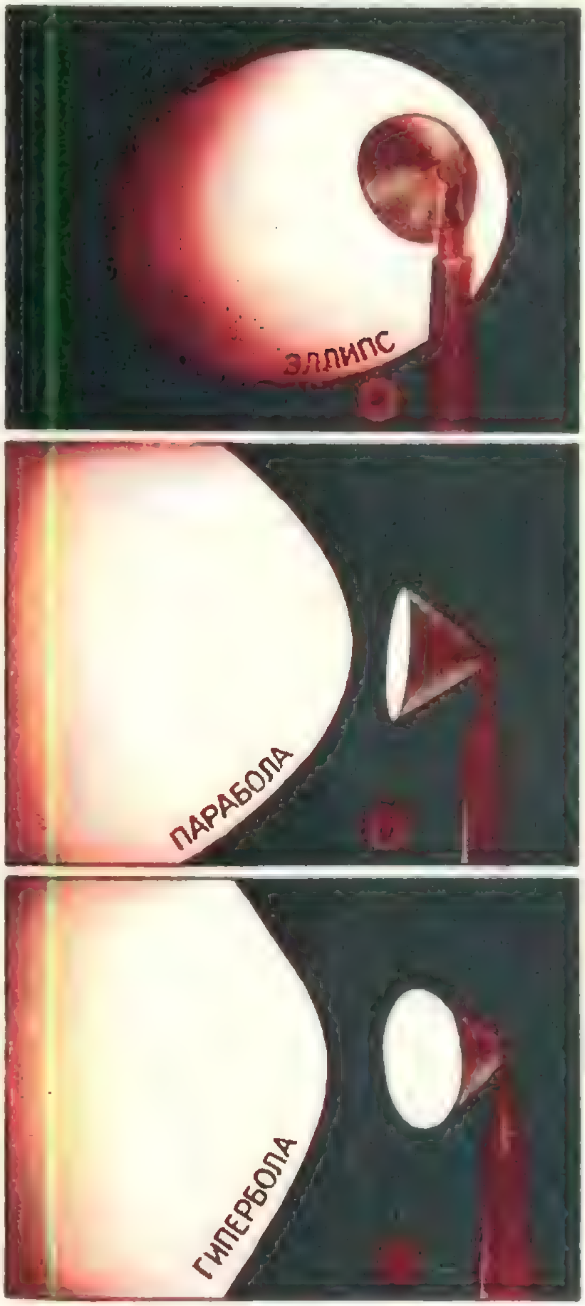


Рис. 11.

---

*) Несложные вычисления (мы их не приводим) показывают, что эксцентриситеты гипербол, которые можно получить при сечении данного кругового конуса плоскостью, не превосходят $1/\cos\alpha$, где α — угол между осью и образующей конуса. (Это вытекает из того факта, что угол между асимптотами гипербол, получившихся в сечении, не превосходит 2α.)

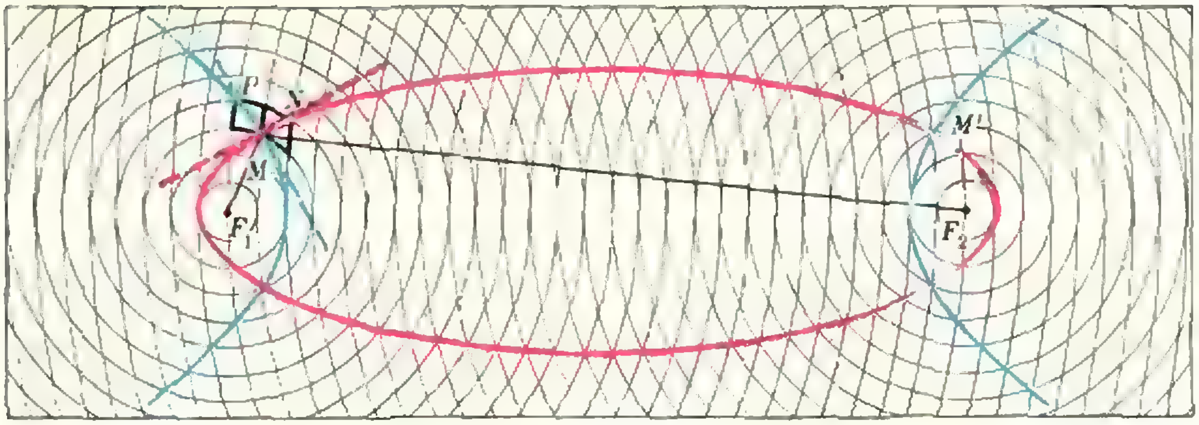


Рис. 12.

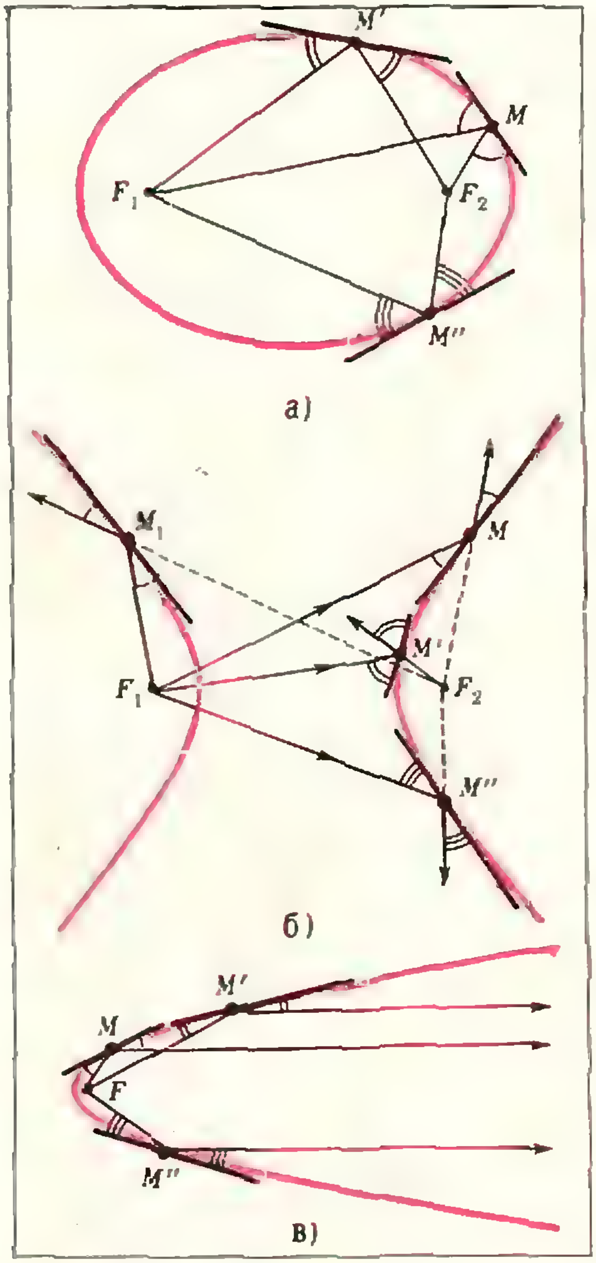


Рис. 13.

Это следует из фокальных свойств обеих кривых: для эллипса $F_1N = F_1M + d$, $F_2N = F_2M - d$ и $F_1N + F_2N = F_1M + F_2M$; аналогично и для гиперболы. Вот новый способ построения эллипса и гиперболы по фокусам и одной точке! Начинать можно с любого узла сети, и мы получаем два семейства «софокусных» эллипсов и гипербол. Это построение тем точнее, чем меньше d.

Диагонали ромба взаимно перпендикулярны, значит, каждая пара софокусных эллипса и гиперболы *пересекается под прямым углом* *). Диагональ ромба делит угол ромба пополам, значит, касательная к эллипсу *(гиперболе) является биссектрисой* каждого угла ромбической сети, внутри которого она проходит. Из того, что каждый радиус окружности пересекает ее под прямым углом, следует, что касательная MN в каждой точке M эллипса образует равные углы с прямыми F_1M и F_2M. Значит, по закону «угол падения равен углу отражения», луч F_1M, падающий из F_1 в точку M эллипса, отражается из него по прямой MF_2 (рис. 13, а). Это будет для каждой точки эллипса. Таким образом, *все лучи, выходящие из фокуса F_1, отражаясь от эллипса, соберутся в другом его фокусе F_2*. В этом и состоит *оптическое свойство*

---

*) Под углом между двумя кривыми понимают угол между касательными к ним, проведенными в точке их пересечения.

эллипса, отсюда и название *фокус* (латинское *focus* — очаг).

Для гиперболы оптическое свойство звучит так: *лучи, выходящие из одного фокуса, отражаясь от гиперболы, будут расходиться таким образом, что кажутся выходящими из второго фокуса* (рис. 13, б).

Случай параболы — промежуточный между эллипсом и гиперболой. Второй фокус «уходит в бесконечность» по фокальной оси, и *лучи, выходящие из единственного фокуса, отражаясь от параболы, пойдут параллельно оси* *) (рис. 13, в).

Некоторые другие свойства

В заключение приведем без доказательства еще несколько свойств конических сечений.

Свойство сопряженных диаметров, доказанное для эллипса **), с некоторыми вариациями переносится на параболу и гиперболу. У параболы множество середин параллельных хорд лежит на луче, параллельном оси симметрии параболы — каждый такой луч и является диаметром параболы. У одной ветви гиперболы середины параллельных хорд также лежат на луче. Прямая, на которой этот луч лежит, проходит через центр гиперболы и называется диаметральной. Исследуйте сами, где лежат середины параллельных хорд другого вида — отрезков, один конец которых лежит на одной, а другой — на другой ветви гиперболы.

Если взять на коническом сечении шесть последовательных точек A, B, C, D, E, F (ограничиваясь в случае гиперболы одной ветвью), то в полученном вписанном шестиугольнике $ABCDEF$ *три точки пересечения пар противоположных сторон* AB *и* DF, BC и EF, CD и FA *лежат на одной прямой* (теорема Паскаля). Могут оказаться исключения, когда имеется пара параллельных противоположных сторон или две такие пары (тогда и стороны третьей пары параллельны). Подумайте, что можно сказать о трех точках пересечения в этих случаях

Вот еще два интересных свойства — одно у эллипса, другое — у гиперболы.

Если отрезок AB постоянной длины скользит своими концами по двум взаимно перпендикулярным прямым, то любая точка M этого отрезка описывает эллипс с полуосями AM и BM *). Отрезок касательной к гиперболе, заключенный между ее асимптотами, делится в точке прикосновения пополам.

Заканчивая статью, мы не можем не упомянуть о *законе Кеплера* для движения небесных тел — планет, комет, спутников. Если материальная точка M движется в пространстве только под действием притяжения другой материальной точки C (которую будем считать неподвижной), причем сила притяжения подчиняется закону Ньютона $F = a/r^2$ (где r — расстояние между C и M, a — постоянная), то траектория движения является коническим сечением с фокусом в точке C (либо же точка M движется по прямой, проходящей через C). Кеплер пришел к этому закону эмпирически, изучая наблюдения Тихо Браге; математически закон был доказан впоследствии Ньютоном. Планеты и естественные их спутники движутся по эллипсам, кометы — по эллипсам, гиперболам и параболам **). Космическим кораблям можно придать любую из этих траекторий.

---

*) На этом свойстве параболы основано устройство прожекторов — у них внутренняя зеркальная поверхность получена вращением параболы вокруг ее оси («параболоид вращения»). Если источник света поместить в фокусе параболоида, то лучи отразятся от зеркала параллельным пучком.

**) См. «Квант» № 1 за этот год, с. 5.

*) Доказательство этого факта читатели «Кванта» могут найти в первой публикации статьи «Эллипс» («Квант», 1970, № 9).

**) Небольшая дуга сильно вытянутого эллипса, близкая к фокусу, плохо отличима от аналогичной дуги параболы и гиперболы ($\varepsilon\approx 1$, см. с. 37). Из-за этого возникают трудности при определении орбиты кометы—вернется она или не вернется?

ЛАБОРАТОРИЯ «КВАНТА»

Опыты со струей воды

М. П. Головей

Наука, изучающая законы равновесия и движения жидкостей и способы применения этих законов к решению различных практических задач, называется *гидравликой*. Трудно назвать область техники, где бы не применялись законы гидравлики. Они используются при строительстве гидроэлектростанций, мостов, водопроводов, каналов; они нужны для конструирования поливальных машин и дождевальных установок.

С различными гидравлическими устройствами мы встречаемся и дома: это водопровод, канализация, теплоснабжение. Истечение воды из крана, шланга, отверстия в сосуде — во всех этих, на первый взгляд, простых явлениях определить закономерности на так просто.

За примерами не надо далеко ходить. Как вы думаете, какую форму имеет поперечное сечение струи воды, вытекающей из отверстия в форме квадрата? А из отверстия в форме треугольника? круга? Не торопитесь с ответом. Попробуйте посмотреть на опыте, как вытекает вода из отверстий с различными сечениями, и вы получите совершенно неожиданный результат.

Оказывается, поперечное сечение струи, вытекающей через квадратное отверстие, имеет вид креста с четырьмя тонкими ребрами (рис. 1, *а*). Если отверстие треугольное, сечение струи приобретает форму креста с тремя тонкими ребрами (рис. 1, *б*), если круглое — форму эллипса (рис. 1, *в*). Форма сечения струи по мере удаления от стенки сосуда непрерывно меняется. На рисунке 1 показаны формы сечений струй на разных расстояниях от сосуда. Особенно заметные изменения происходят при квадратном и треугольном отверстиях. Так, поперечное сечение струи, выходящей из квадратного отверстия, сначала имеет форму восьмиугольника, а затем становится крестообразным. Это явление называется инверсией струи.

Все вы, наверное, видели, как вытекает струя воды из поливального шланга. В конце шланга обычно делают наконечник из куска трубы, слегка сплющенной с одной стороны. В этом случае струя летит дальше. Есть ли какая-нибудь закономерность в этом явлении? Оказывается, есть. Конические насадки с углом схождения $\beta \approx 13^\circ$ (рис. 2) дают в 1,3—1,4 раза больший рас-

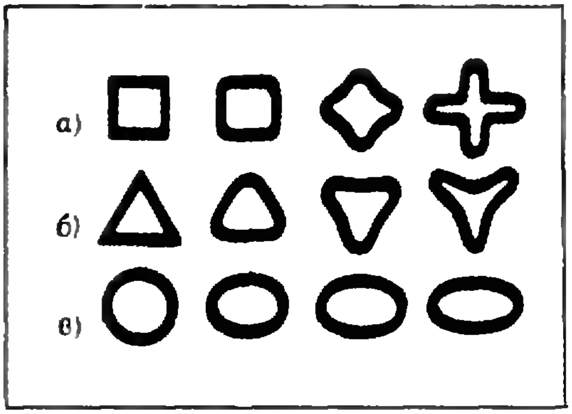


Рис. 1.

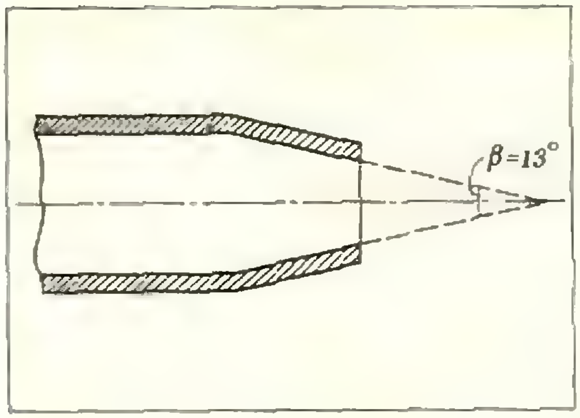


Рис. 2.

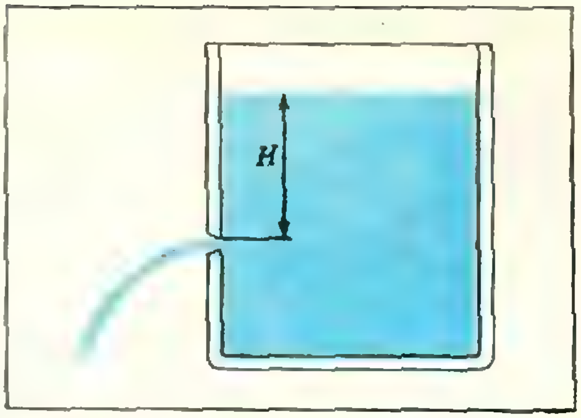


Рис. 3.

ход *) воды, чем цилиндрические (при одинаковых площадях выходных сечений). Это оптимальный угол для получения наибольшего расхода воды. Конические сходящиеся насадки дают сплошную струю с большими скоростями и поэтому широко применяются на практике в брандспойтах, соплах гидромониторов.

Обратимся теперь к истечению воды через отверстие в стенке сосуда.

Возьмем заполненный водой цилиндрический сосуд, в боковой стенке которого имеется малое отверстие площадью s_1 (рис. 3). Через это отверстие вода вытекает под давлением столба жидкости высоты H. Отверстие считается малым, если его размеры по крайней мере в десять раз меньше высоты столба H, создающего напор. При этом условии все точки малого отверстия находятся приблизительно на одной и той же глубине от поверхности жидкости, и скорости течения во всех точках можно считать одинаковыми.

Отверстием в тонкой стенке называется отверстие, края которого имеют достаточно острую кромку, чтобы толщина стенки не влияла на форму и условия истечения струи. Это условие выполняется в том случае, когда толщина кромки меньше трех диаметров отверстия.

От чего зависит скорость, с которой вытекает вода через малое отверстие в тонкой стенке сосуда? Чтобы ответить на этот вопрос, воспользуемся законом сохранения энергии.

Пусть за малый промежуток времени Δt из сосуда вытекло небольшое количество воды Δm. Потенциальная энергия воды в сосуде при этом уменьшилась на величину ΔmgH (время достаточно мало́, чтобы считать уровень H воды в сосуде не меняющимся). Это изменение потенциальной энергии равно кинетической энергии массы воды Δm, вытекающей из отверстия со скоростью v, то есть $\frac{\Delta mv^2}{2}=\Delta mgH$. Отсюда

$$v=\sqrt{2gH}.$$

Сколько времени будет вытекать вода из сосуда? Очевидно, это зависит от скорости истечения и от площади отверстия. Разберемся сначала со скоростью.

Как мы уже показали, $v=\sqrt{2gH}$. Но эту скорость можно считать постоянной лишь на протяжении малого промежутка времени (пока можно считать $H=\text{const}$). По мере истечения жидкости уровень понижается, и следовательно, скорость истечения уменьшается от $v_0=\sqrt{2gH}$ (в начальный момент времени $t=0$) до $v_T=0$ (T — время вытекания). Каков характер изменения скорости со временем? Пусть в начальный момент времени ($t_1=0$), когда открывают от-

---

*) Расходом называют количество воды, вытекающей в единицу времени.

верстие, высота уровня воды в сосуде над отверстием равна H. Начальная скорость истечения $v_1 = \sqrt{2gH}$. За малый промежуток времени Δt из сосуда вытекает масса воды $\Delta m = \rho v_1 s \Delta t$ (ρ — плотность жидкости; Δt столь мало́, что в течение этого времени скорость v_1 постоянна). За это время уровень воды в сосуде уменьшится на величину $\Delta h = \frac{\Delta m}{S}$ (S — площадь дна сосуда). Поэтому в следующий момент времени ($t_2 = \Delta t$) скорость истечения меньше v_1 и равна $v_1 - \Delta v = \sqrt{2g(H - \Delta h)}$. Возведем последнее равенство в квадрат:

$$v_1^2 - 2v_1\Delta v + (\Delta v)^2 = 2gH - 2g\Delta h.$$

Пренебрегая величиной $(\Delta v)^2$ и учитывая, что $v_1^2 = 2gH$, получаем

$$v_1\Delta v = g\rho v_1 \frac{s}{S}\Delta t, \quad \Delta v = g\rho \frac{s}{S}\Delta t.$$

Следовательно,

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = g\rho\frac{s}{S} = \text{const}$$

(разумеется, для заданных s, S и ρ). А это означает, что скорость истечения линейно зависит от времени. Поэтому можно считать, что в течение всего времени T, пока вытекает жидкость, скорость истечения равна среднему значению (за промежуток времени T), то есть равна

$$v_{\text{ср}} = \frac{v_1 + 0}{2} = \sqrt{\frac{gH}{2}}.$$

Теперь посмотрим, как влияет на время вытекания воды площадь отверстия. За единицу времени из сосуда должна вытекать масса жидкости $Q = \rho s v_{\text{ср}}$ (ρ — плотность жидкости). При этом мы считаем, что скорость в данный момент времени во всех точках отверстия направлена строго перпендикулярно к плоскости сечения отверстия. Однако, если внимательно приглядеться к струе, вытекающей из круглого малого отверстия в тонкой стенке, то можно заметить, что диаметр ее поперечного сечения меньше диаметра отверстия. Струя как бы сжимается. Сжатие струи происходит из-за того, что жидкость подтекает к отверстию со всех сторон и ее частицы, движущиеся к отверстию вдоль стенок сосуда, пройдя отверстие, продолжают сближаться с осью струи. Только на некотором расстоянии от кромки отверстия, равном примерно радиусу отверстия, траектории частиц становятся почти параллельными. Сжатие струи продолжается и дальше, но уже несравненно медленнее, незаметно для глаза. Сечение, при котором заканчивается резкое видимое сжатие струи, называется сжатым. Отношение площади сжатого сечения s_2 к площади сечения отверстия s_1 называется коэффициентом сжатия ε:

$$\varepsilon = s_2/s_1.$$

Поскольку расстояние между сечениями s_1 и s_2 мало (как мы уже говорили, оно равно́ примерно радиусу сечения s_1), то скорость воды во всех точках сечения s_2 практически равна $\sqrt{2gh}$ (h — высота уровня воды в сосуде в данный момент времени) и перпендикулярна к плоскости сечения. Следовательно, расход воды

$$Q = s_2 v_{\text{ср}} = \varepsilon s_1 v_{\text{ср}} = \varepsilon s_1 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2gH}$$

Теперь совсем просто подсчитать время, в течение которого вытекает вода из сосуда. Объем вытекающей воды $V = SH$, следовательно,

$$T = \frac{V}{Q} = \frac{SH}{\frac{1}{2}\varepsilon s_1\sqrt{2gH}} = \frac{S\sqrt{2gH}}{\varepsilon s_1\sqrt{g}}.$$

Это соотношение можно проверить на опыте. Для эксперимента возьмите сосуд с отверстием диаметром 2—3 *мм*. Можно воспользоваться металлической банкой с высокими стенками или цилиндрическим ведром. Отверстие должно находиться достаточно далеко от дна и от поверхности воды. Заметьте по часам время истечения жидкости и сравните его с расчетами, проведенными с $Q = s_1 v_{\text{ср}}$, где s_1 — площадь сечения отверстия. Очевидно, что отношение $T_{\text{эксп.}} : T_{\text{расч.}}$ равно ε. Вообще при истечении струи через малое отверстие в тонкой стенке $\varepsilon = 0{,}64 \div 0{,}60$. Укладывается ли ваш результат в эти пределы?

После того как мы разобрались в особенностях истечения струи воды из отверстия в стенке сосуда, обратимся к красивому и вместе с тем простому опыту, моделирующему основной элемент волоконной оптики — *световод*.

Обычно световод состоит из десятков или сотен тысяч тончайших (диаметром несколько микрон) стеклянных волокон. Длина их может достигать нескольких метров. Волокна укладывают в плотный жгут, наподобие многожильного провода, и заключают в защитную оболочку. Световые лучи попадают внутрь световода и распространяются по каждому волокну независимо от одного конца до другого.

Работа световода основана на явлении полного внутреннего отражения, заключающегося в том, что лучи света могут выходить из оптически более плотной среды в менее плотную только в том случае, если они падают на границу раздела сред под углами, меньшими предельного угла полного внутреннего отражения. Для границы раздела стекло — воздух этот угол равен 42°, для границы раздела вода — воздух 49°. Все лучи, составляющие с границей раздела угол, больший предельного, отражаются обратно в более плотную среду. Это явление происходит и в волокнах световодов, где луч, войдя в один конец волокна, многократно отражаясь, доходит до другого его конца.

Рассмотрим еще один опыт со струей воды. Для эксперимента необходим какой-нибудь сосуд со светонепроницаемыми стенками диаметром 10—20 *см* и высотой 20—40 *см*. Лучше всего воспользоваться жестяной банкой или цилиндрическим ведром. На расстоянии 30—40 *мм* от дна следует просверлить два отверстия, одно напротив другого (рис. 4). Диаметр одного отверстия — 2 *мм*, диаметр другого — 5—10 *мм*. Получающиеся по краям отверстий заусенцы обязательно зачистите наждачной бумагой или срежьте сверлом бо́льшего диаметра, иначе вытекающая струя получится неоднородной.

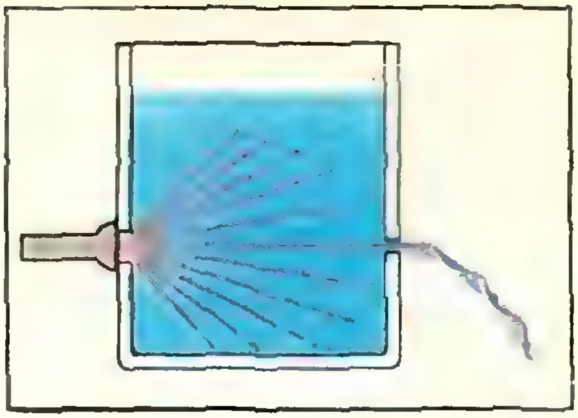


Рис. 4.

Большее отверстие заклейте прозрачным материалом, например, полиэтиленовой пленкой или целлофаном. Достаточно хорошо и герметичио можно заклеить отверстие даже резиновым клеем. Опыт лучше всего проводить в затемненной комнате. Заклеенное отверстие нужно освещать направленным источником света. Им может служить обычный карманный фонарь. Пока сосуд не заполнен водой, свет карманного фонаря проходит насквозь через оба отверстия. Если же заполнить сосуд водой, траектория луча света изогнется по форме вытекающей струи.

Дело в том, что, проходя через прозрачное окно, свет сквозь второе отверстие в стенке попадает внутрь струи, вытекающей из отверстия. На границу раздела вода — воздух лучи света попадают под углами, бо́льшими угла полного внутреннего отражения. Поэтому свет не может выйти через боковую поверхность и следует вдоль струи, которая уподобляется изогнутому световоду.

Выход в пространство

И. Ф. Шарыгин

Попробуйте решить следующую головоломку: из шести спичек сложить четыре правильных треугольника так, чтобы стороной каждого была целая спичка. Попытки решить ее к успеху как будто не приводят. Мало того, можно доказать, что такое построение не осуществимо на плоскости (попробуйте это сделать). Как же быть? Оказывается, нужно выйти в пространство — сложить из спичек правильный тетраэдр (рис.1). Невозможное на плоскости осуществимо в трехмерном пространстве!

Выход в пространство бывает полезен и при решении некоторых планиметрических задач. Классическим примером является теорема Дезарга. *Если два треугольника $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ расположены на плоскости так, что прямые A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 пересекаются в одной точке, то три точки пересечения прямых A_1B_1 и A_2B_2, B_1C_1 и B_2C_2, C_1A_1 и C_2A_2 расположены на одной прямой* (рис. 2). Утверждение теоремы становится очевидным, если увидеть на рисунке 2 пространственную фигуру, а именно — трехгранный угол, пересеченный двумя плоскостями: одна плоскость пересекает ребра трехгранного угла в точках A_1, B_1 и C_1, а другая в точках A_2, B_2 и C_2. Три точки пересечения соответствующих сторон треугольников $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ принадлежат линии пересечения этих плоскостей и, значит, лежат на одной прямой.

С помощью выхода в пространство изящно доказывается и теорема Брианшона. *Диагонали, соединяющие противоположные вершины описанного шестиугольника, пересекаются в одной точке.*

Доказательство. Пусть $ABCDEF$ — плоский шестиугольник, описанный около окружности. Возьмем произвольный пространственный шестиугольник $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ (рис. 3), отличный от $ABCDEF$, про-

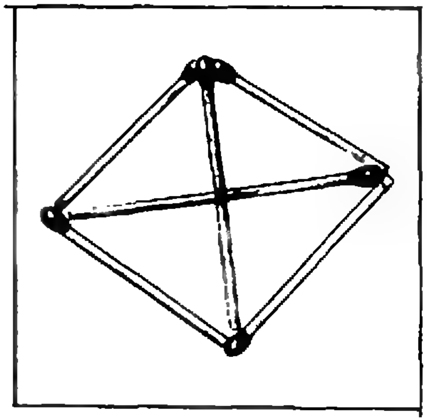


Рис. 1.

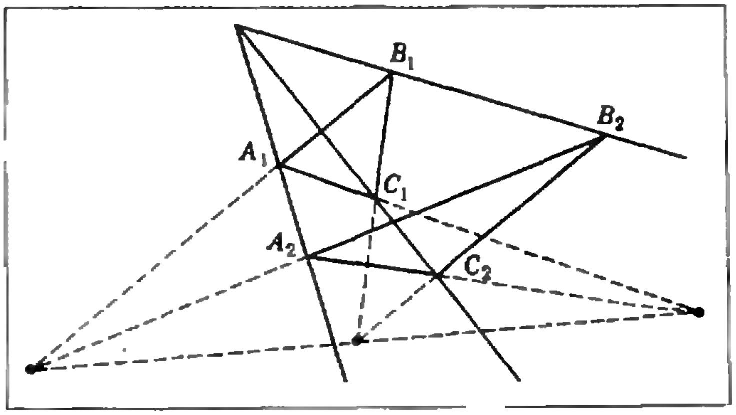


Рис. 2.

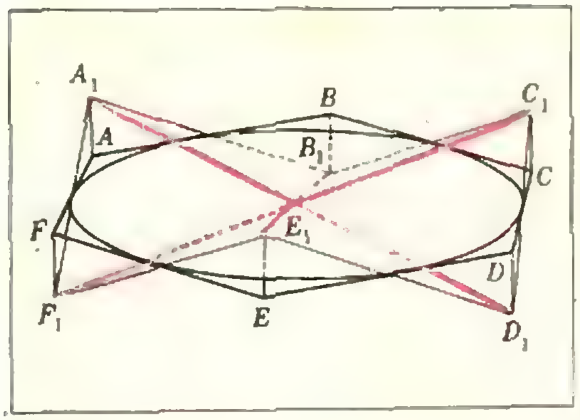


Рис. 3.

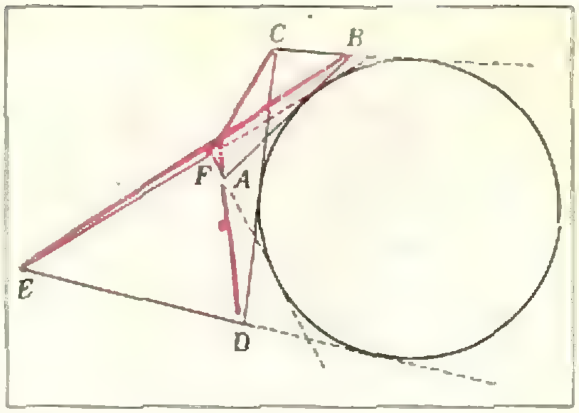


Рис. 4.

екция которого на плоскость p есть шестиугольник $ABCDEF$ и соответствующие стороны которого проходят через точки касания шестиугольника $ABCDEF$ с окружностью. Для доказательства существования такого шестиугольника $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ достаточно одну вершину, например, A_1, взять произвольно на перпендикуляре к плоскости p, восстановленном в точке A; тогда остальные вершины определяются однозначно. В самом деле, пусть a, b, c, d, e, f — длины касательных к окружности, проведенных соответственно через точки A, B, C, D, E, F и h — расстояние от A_1 до плоскости шестиугольника $ABCDEF$. Тогда B_1 находится по другую сторону от плоскости, по сравнению с A_1 на расстоянии hb/a, C_1 по ту же сторону плоскости, что и A_1, на расстоянии $\frac{hb}{a}\cdot\frac{c}{b}=\frac{hc}{a}$ от плоскости и т. д. Наконец, найдем, что F_1 лежит по другую сторону от плоскости, нежели A_1, на расстоянии hf/a, и, значит A_1 и F_1 лежат на прямой, проходящей через точку касания AF с окружностью. Любые две противоположные стороны шестиугольника $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ расположены в одной плоскости (докажите самостоятельно). Следовательно, любые две диагонали, соединяющие противоположные вершины шестиугольника $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ пересекаются, а отсюда и все три диагонали шестиугольника $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ (они *не лежат* в одной плоскости), пересекаются в одной точке. Поскольку шестиугольник $ABCDEF$ — проекция шестиугольника $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$, теорема доказана.

Заметим, что аналогично можно доказать и более общий факт. *Если прямые AB, BC, CD, DE, EF и FA касаются одной окружности, то прямые AD, BE и CF пересекаются в одной точке или параллельны.* Один из возможных случаев расположения точек A, B, C, D, E, F показан на рисунке 4.

Только что доказанная теорема Брианшона оказывается справедливой для шестиугольника, описанного около произвольного конического сечения (эллипса, параболы, гиперболы), поскольку произвольное коническое сечение можно спроектировать относительно некоторой точки на другую плоскость так, что его проекция будет окружностью. При этом прямые, касающиеся конического сечения, перейдут в прямые, касающиеся окружности.

Вот более сложный пример. *Докажите, что с помощью одной линейки нельзя найти центр окружности.*

Пусть данная окружность находится в плоскости α. Если мы докажем, что существует такая плоскость β и точка O, что проекцией данной окружности относительно точки O на плоскость β будет окружность, но при этом центр первой окружности переходит в точку, отличную от центра второй окружности, то наша за-

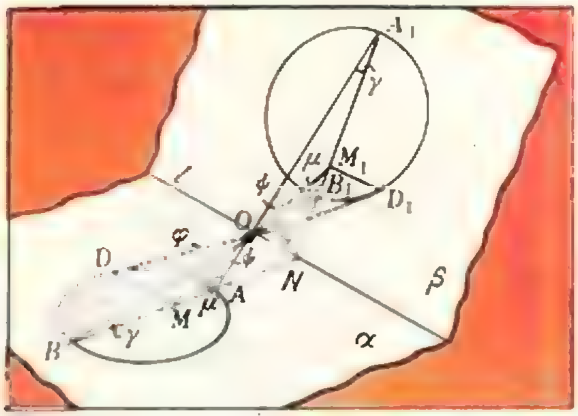


Рис. 5.

дача будет решена (рис. 5). Действительно, любому построению с помощью одной линейки в плоскости α соответствует при проектировании построение с помощью одной линейки в плоскости β.

В качестве плоскости β возьмем произвольную плоскость, пересекающую плоскость α по прямой l, не проходящей через центр данной окружности. Пусть AB — диаметр данной окружности, перпендикулярный к l, а N — точка пересечения прямых AB и l. Восставим из точки N перпендикуляр к l, лежащий в плоскости β, и возьмем на нем точки A_1 и B_1 так, что $A_1N = BN$, $B_1N = AN$. В качестве точки O — центра проекции — возьмем точку пересечения прямых AA_1 и BB_1. Очевидно, середина отрезка AB проектируется в точку, отличную от середины отрезка A_1B_1.

Возьмем произвольную точку D на данной окружности $DM \perp AB$. Проекцией DM будет $D_1M_1 \perp A_1B_1$. Докажем, что D_1 лежит на окружности, построенной на A_1B_1 как на диаметре. Воспользуемся тем, что $M_1D_1 \cdot MO = MD \cdot M_1O$ $(\triangle DMO \sim \triangle D_1M_1O)$ и $MD^2 = BM \cdot MA$. Нам нужно доказать, что $M_1D_1^2 = B_1M_1 \cdot M_1A_1$, или, используя два предыдущих равенства, получить, что

$$\frac{BM \cdot MA}{MO^2} = \frac{B_1M_1 \cdot M_1A_1}{M_1O^2},$$

$$\frac{BM}{MO} \cdot \frac{MA}{MO} = \frac{B_1M_1}{M_1O} \cdot \frac{M_1A_1}{M_1O}.$$

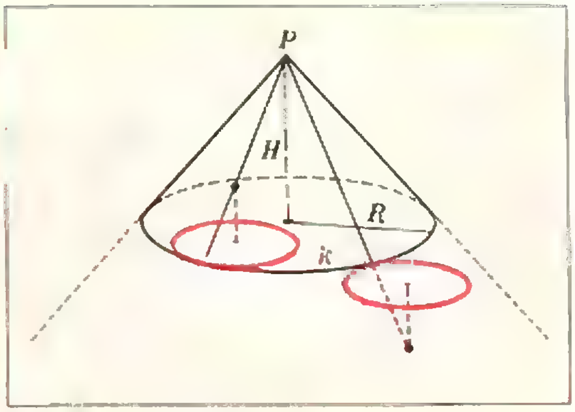


Рис. 6.

Заменяя в последнем равенстве отношения отрезков отношением синусов противоположных углов соответствующих треугольников, получим очевидное равенство

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\gamma} \frac{\sin\psi}{\sin\mu} = \frac{\sin\varphi}{\sin\mu} \cdot \frac{\sin\psi}{\sin\gamma}.$$

Одной из самых красивых и неожиданных иллюстраций к теме «Выход в пространство» служит, пожалуй, решение этим методом известной задачи Аполлония. *Построить окружность, касательную к трем данным окружностям.* Поставим в соответствие каждой окружности в данной плоскости две точки пространства, расположенные по разные стороны от плоскости, удаленные от этой плоскости на расстояние, равное радиусу окружности, и такие, что проекция каждой из них на плоскость есть центр окружности. Обратно: каждой точке пространства соответствует окружность в нашей плоскости, центр которой совпадает с проекцией точки на плоскость, а радиус равен расстоянию от точки до плоскости. Прежде чем перейти к решению задачи Аполлония, обратим внимание на следующее обстоятельство: если P — одна из двух точек, соответствующих окружности k, то любой точке, находящейся на конической поверхности, вершиной которой является точка P, а направляющей — окружность k (рассматриваются обе полы этой поверхности), соответствует окружность, касающаяся окружности k (рис. 6).

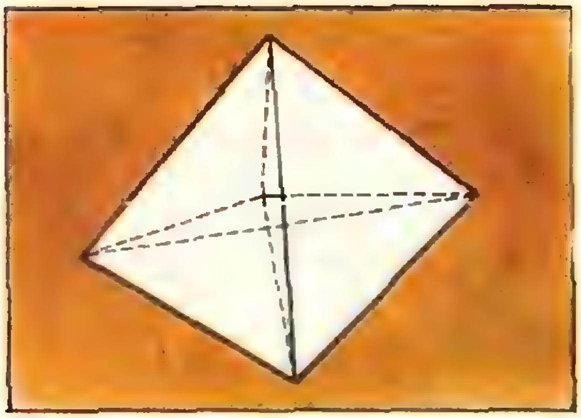


Рис. 7.

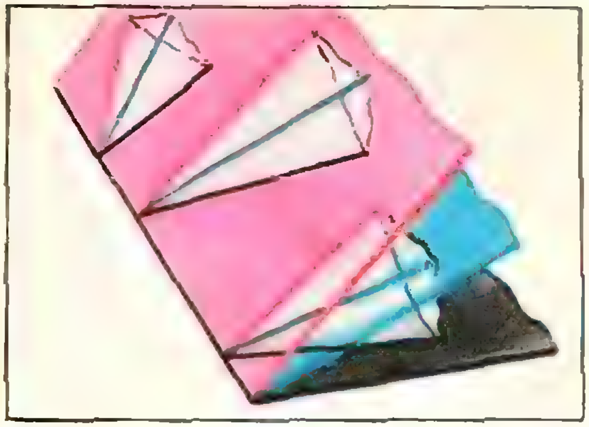


Рис. 8.

Пусть теперь даны три окружности на плоскости. Построим для каждой указанным выше способом одну из двух конических поверхностей. Точке пересечения этих трех поверхностей соответствует окружность, касающаяся трех данных. Беря различные расположения точек, соответствующих окружностям, можно получить все решения нашей задачи.

Мы привели несколько примеров, когда помогает трехмерное пространство. А может ли помочь четырехмерное пространство? Конечно, да! Например, с его помощью можно решить такую головоломку: из десяти спичек сложить десять правильных треугольников так, чтобы сторона каждого треугольника равнялась целой спичке.

Решение. Нужно выйти в четырехмерное пространство и сложить в нем многогранник, аналогичный тетраэдру. Такие многогранники называются *симплексами*. Симплекс на плоскости — это треугольник, в трехмерном пространстве — тетраэдр; что представляет собой симплекс в четырехмерном пространстве, можно понять из рисунка 7. Этот пример, конечно, серьезен лишь наполовину, а вот уже вполне серьезный пример. Пусть три плоскости пересекаются по одной прямой. Рассмотрим три трехгранных угла, вершины которых расположены на этой прямой, а ребра лежат в данных плоскостях (предполагаем, что соответствующие ребра, то есть ребра, расположенные в одной плоскости, не пересекаются в одной точке). Тогда *три точки пересечения соответствующих граней этих трехгранных углов лежат на одной прямой* (рис. 8). Поскольку для доказательства этой теоремы мы хотим «выйти» в четырехмерное пространство, расскажем сначала о некоторых свойствах этого пространства.

Простейшими фигурами четырехмерного пространства будут: точка, прямая, плоскость и трехмерное многообразие, которое мы будем называть гиперплоскостью. Первые три фигуры — это наши старые знакомые из трехмерного пространства. Правда, некоторые утверждения, связанные с ними, нуждаются в перефразировке. Например, вместо следующей аксиомы трехмерного пространства: если две различные плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой, — следует ввести аксиому: если две различные плоскости, принадлежащие одной гиперплоскости, имеют общую точку, то они пересекаются по прямой. Введение нового геометрического образа — гиперплоскости — заставляет ввести связанную с ним группу аксиом, аналогично тому, как при переходе от геометрии плоскости, — планиметрии, к геометрии трехмерного пространства, — стереометрии, *вводится группа аксиом (вспомните, каких?)*, выражающих основные свойства плоскостей в пространстве. Эта группа состоит из следующих трех аксиом:

1. Какова бы ни была гиперплоскость, существуют точки, ей принадлежащие, и точки, ей не принадлежащие.

2. Если две различные гиперплоскости имеют общую точку, то они пересекаются по плоскости, то есть существует плоскость, принадлежащая каждой из гиперплоскостей.

3. Если прямая, не принадлежащая плоскости, имеет с ней общую точку, то су-

ществует единственная гиперплоскость, содержащая эту прямую и эту плоскость.

Из этих аксиом непосредственно следует, что четыре точки, не принадлежащие одной плоскости, определяют гиперплоскость; точно также три прямые, не принадлежащие одной плоскости, но имеющие общую точку или две различные плоскости, имеющие общую прямую, определяют гиперплоскость. Мы не будем доказывать эти утверждения; попытайтесь сделать это самостоятельно.

Для дальнейших рассуждений нам понадобится следующий факт, справедливый в четырехмерном пространстве: три различные гиперплоскости, имеющие общую точку, имеют общую прямую. В самом деле, по аксиоме 2, любые две из трех гиперплоскостей имеют общую плоскость. Возьмем две плоскости, по которым пересекается какая-то из трех гиперплоскостей с двумя другими. Эти две плоскости, принадлежащие одной гиперплоскости — трехмерному многообразию, имеют общую точку, и, значит, пересекаются по прямой или совпадают.

Перейдем теперь к доказательству нашего утверждения. Если бы три плоскости, о которых говорится в условии, были расположены в четырехмерном пространстве, то утверждение было бы очевидным. Действительно, каждый трегранный угол определяет гиперплоскость. Две гиперплоскости пересекаются по плоскости. Эта плоскость не принадлежит третьей гиперплоскости (по условию, эти гиперплоскости пересекают одну из данных плоскостей по трем прямым, не проходящим через одну точку), и, следовательно, пересекается с ними по прямой линии. Любые три соответствующие грани трехгранных углов лежат в одной гиперплоскости, определяемой двумя плоскостями, на которых расположены соответствующие ребра, и поэтому каждая тройка соответствующих граней имеет общую точку. Три эти точки принадлежат трем гиперплоскостям, определяемым трехгранными углами, и, как было доказано, лежат на одной прямой. Теперь для завершения доказательства достаточно «увидеть» в данном условии задачи проекцию соответствующей четырехмерной конфигурации плоскостей и трехгранных углов.

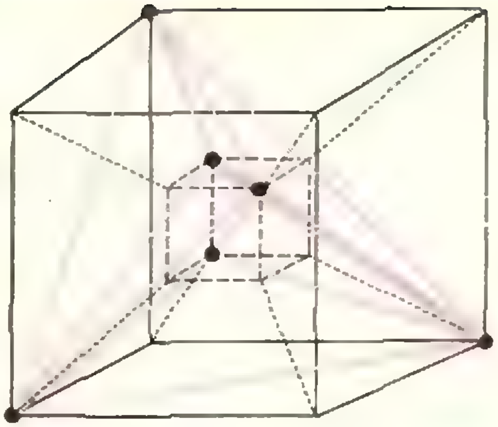


Рис. 9.

В заключение мне бы хотелось предостеречь читателя: не следует чрезмерно доверять своей «трехмерной интуиции», когда речь идет о четырехмерном пространстве.

Как вы думаете, сколько вершин может иметь выпуклый многогранник, для которого каждый отрезок, соединяющий любые две его вершины, является ребром? На плоскости таким свойством обладает только треугольник, в пространстве — тетраэдр. В четырехмерном же пространстве существуют такие многогранники со сколь угодно большим числом вершин (см., например, рис. 9).

Упражнения

1. По четырем прямым плоскости с постоянными скоростями идут четыре пешехода A, B, C, D. Известно, что пешеходы A, B и C встречаются друг с другом, пешеход D встречается с A и B. Докажите, что пешеходы C и D встречаются.

2. На плоскости даны три непересекающиеся окружности. Рассмотрим шесть точек, каждая из которых является точкой пересечения общих внутренних или общих внешних касательных к каким-то двум из данных окружностей. Докажите, что эти шесть точек лежат на четырех прямых, по три на каждой.

3. Даны три параллельные прямые и три точки на плоскости. Постройте треугольник, вершины которого лежат на данных прямых, а стороны проходят через данные точки.

4. Три точки A, B и C, лежат на одной прямой. Возьмем произвольную окружность, проходящую через A и B, и проведем к ней из C две касательные — CM и CN. Докажите, что точка пересечения прямых MN и AB постоянна.

5. Пусть A — данная точка внутри данной окружности, BC — произвольная хорда, проходящая через A. Касательные к окружности в точках B и C пересекаются в точке M. Найдите геометрическое место точек M.

6. Покажите, что в четырехмерном пространстве две плоскости могут пересекаться в одной точке.

задачник Кванта

Решения задач из этого номера можно посылать не позднее 1 июля 1975 г. по адресу: 117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15, издательство «Наука», журнал «Квант». После адреса на конверте напишите, решения каких задач вы посылаете, например: «Задачник «Кванта», М321, М322» или «...Ф333». Решения задач по каждому из предметов (математике и физике), а также новые задачи просьба присылать в отдельных конвертах. Задачи из разных номеров журнала присылайте также в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки ваших решений). Условия оригинальных задач, предлагаемых для публикации, присылайте в двух экземплярах вместе с вашими решениями этих задач (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»). После формулировки задачи мы обычно указываем, кто предложил нам эту задачу. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Наиболее трудные задачи отмечены звездочкой.

Задачи

М321—М325; Ф333—337

М321. Имеется прямоугольный стол площади 1. Докажите, что для любого $\varepsilon>0$ можно указать систему прямоугольных салфеток, покрывающих этот стол (края салфеток параллельны краям стола), такую что любая ее подсистема, состоящая из неперекрывающихся салфеток, имеет площадь, меньшую ε.

А. В. Браилов

М322. а) Фигура, состоящая более чем из одной точки, является пересечением N кругов. Докажите, что границу этой фигуры можно представить в виде объединения $2N-2$ дуг окружностей.

б) В алфавите N букв. Несколько букв выписано по окружности так, что никакая буква не встречается два раза подряд и для любых двух различных букв a, b можно провести прямую так, что все буквы a будут по одну сторону от прямой, а буквы b — по другую (рис. 1). Докажите, что выписано не более $2N-2$ букв.

С. В. Фомин

М323*. Докажите, что любую функцию, определенную на всей числовой прямой, можно представить в виде суммы двух функций, график каждой из которых имеет центр симметрии.

В. А. Сергеев

М324. Имеется несколько кучек камней. Двое играют в игру, ход которой

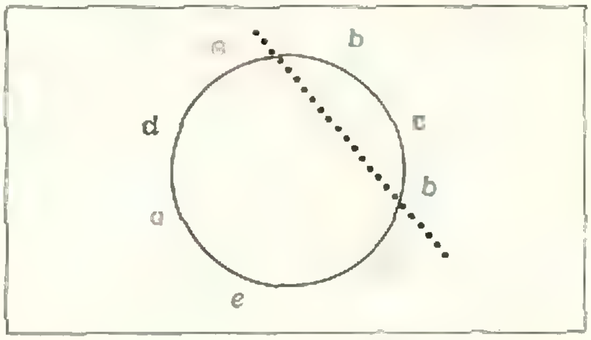


Рис. 1.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
……

Рис. 2.

состоит в том, что игрок разбивает каждую кучку, состоящую более чем из одного камня, на две меньшие кучки. Ходы делаются поочередно до тех пор, пока во всех кучках не останется по одному камню. Победителем считается игрок, сделавший последний ход. Как должен играть начинающий, если сначала в каждой кучке было от 80 до 120 камней?

С. В. Фомин

М325. В числовом треугольнике верхнее число равно 1 и крайние числа в каждой строке — тоже 1, а каждое из остальных чисел не меньше суммы двух чисел, стоящих над ним (в частности, этому условию удовлетворяет «треугольник Паскаля», изображенный на рис. 2). Пусть натуральное число a, большее 1, встречается в этом треугольнике k раз. Докажите, что $2^k < a^2$.

Ф333. На непроводящем диске радиуса R закреплена по хорде проволока длиной l. Диск вращается с постоянной угловой скоростью ω. Перпендикулярно к диску направлено магнитное поле с индукцией B (рис. 3). Найти разность потенциалов между серединой и концом проволоки.

Б. Б. Буховцев

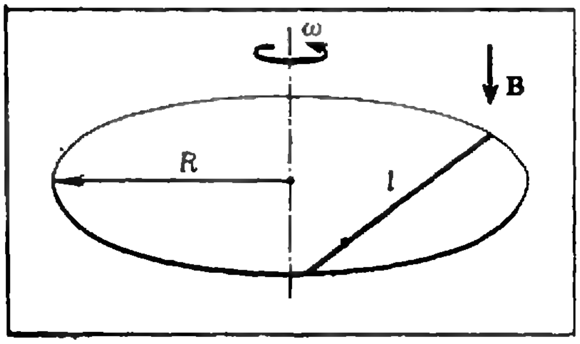


Рис. 3.

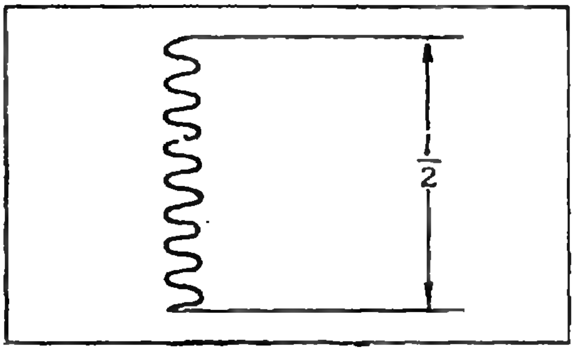


Рис.4

Ф334. Бусинка соскальзывает без трения по вертикально расположенной проволоке длины l, которая изогнута в гармошку длины $\frac{l}{2}$ (рис. 4). Во сколько раз время соскальзывания бусинки больше времени ее падения с высоты l? Амплитуда перегибов проволоки много меньше ее длины. Размеры бусинки пренебрежимо малы по сравнению с длиной «колена» гармошки.

Б. Н. Брейзман

Ф335. Цилиндрический сосуд радиуса R, ось которого составляет угол α с вертикалью, заполнен водой. В цилиндр опускают хорошо притертый поршень, материал которого пропускает воздух, но непроницаем для воды. При каком минимальном весе поршня вся его нижняя поверхность будет касаться воды?

В. В. Мирнов

Ф336. Цилиндрическая чашка со ртутью вращается вокруг вертикальной оси с угловой скоростью ω. При этом поверхность ртути образует параболическое зеркало. Определить фокусное расстояние этого зеркала. Плотность ртути ρ, ускорение свободного падения g.

Ф337. При наблюдении в телескоп яркие звезды видны даже днем. Объясните, почему.

Решения задач

М286 — М290; Ф296 — Ф298

М286. *На плоскости расположено N точек. Отметим все середины отрезков с концами в этих точках. Какое наименьшее количество точек плоскости может оказаться отмеченным?*

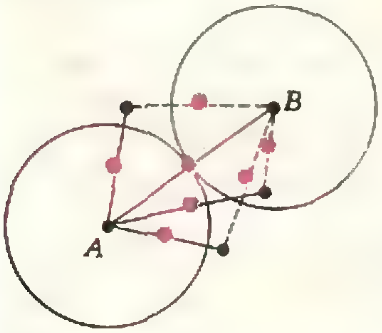


Рис. 1.

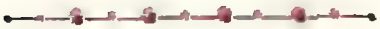


Рис. 2.

Рассмотрим всевозможные расстояния между заданными N точками и выберем среди этих расстояний наибольшее — пусть это расстояние между какими-то двумя точками A и B. Соединим точку A с остальными $N-1$ точками; получим $N-1$ отрезков. Середины этих отрезков различны и все лежат внутри или на границе круга с центром в точке A радиуса $\frac{1}{2}|AB|$ (рис. 1).

Аналогично, соединив точку B с оставшимися $N-1$ точками, получим $N-1$ отмеченных точек (середин), расположенных внутри или на границе круга того же радиуса с центром в точке B.

Построенные два круга имеют только одну общую точку — середину отрезка AB. Следовательно, всегда имеется по крайней мере $2(N-1)-1$ (так как середину отрезка AB мы учитываем дважды) отмеченных середин, то есть не менее $(2N-3)$ отмеченных точек.

Покажем, что $2N-3$ — это наименьшее число отмеченных точек. Пусть заданные N точек лежат на одной прямой, причем расстояния между соседними точками одинаковы (рис. 2). Легко видеть, что в этом случае число отмеченных точек — середин (на рисунке 2 это красные точки) равно $(N-2)+N-1=2N-3$. Тем самым все доказано.

В заключение мы предлагаем читателям подумать над следующей задачей. При каких N можно расположить на плоскости N точек так, чтобы они не лежали на одной прямой и чтобы при этом количество отмеченных середин отрезков с концами в этих точках равнялось $2N-3$?

С. В. Конягин

◆

М287. *Существует ли такая последовательность натуральных чисел, что любое натуральное число 1, 2, 3,… можно представить в виде разности двух чисел этой последовательности единственным способом?*

Такая последовательность существует. Объясним коротко, как ее построить.

Предположим, что мы построили конечную последовательность, обладающую следующими свойствами:

1) все попарные разности между членами этой последовательности различны;

2) числа $1, 2, \ldots, k$ можно представить в виде разности двух ее членов;

3) число $k+1$ нельзя представить в виде разности двух ее членов.

Пусть максимальный член этой последовательности равен M. «Допишем» теперь эту последовательность: добавим к ней числа $2M$ и $2M+k+1$. Проверьте сами, что новая последовательность удовлетворяет свойствам 1,2 (с заменой k на $k+i$, где i — некоторое натуральное число, зависящее от первоначально построенной последовательности, $i \geq 1$) и свойству 3 (с заменой числа $k+1$ на число $k+i+1$). Применяя описанное «дописывание», например, к числам 1,2, получим бесконечную последовательность, удовлетворяющую условиям задачи.

Л. Г. Лиманов

М288. *На конгрессе собрались ученые, среди которых есть друзья. Оказалось, что никакие двое ученых, имеющие на конгрессе равное число друзей, не имеют общих друзей. Докажите, что найдется ученый, у которого ровно один друг.*

Возьмем ученого A, число друзей у которого максимально (если таких ученых несколько, возьмем любого из них); обозначим это число через N. Если ни один из N друзей ученого A не имеет ровно одного друга, то так как ученый A имеет максимальное число друзей, каждый из его друзей может иметь $2, 3, \ldots, N$ друзей — всего $N-1$ возможностей. Поскольку же число друзей ученого A равно N, то, значит, двое из друзей ученого A имеют равное число друзей и, кроме того, общего друга — ученого A. Но это противоречит условию задачи, и, следовательно, хотя бы один из ученых (друзей ученого A) имеет *ровно одного* друга.

С. Ландо

◆

М289. *N гирь, каждая из которых весит целое число граммов, разложены на K равных по весу куч. Докажите, что можно не менее чем K разными способами убрать одну из гирь так, что оставшиеся $(N-1)$ гири уже нельзя разложить на K равных по весу куч.*

Возьмем две коробки и разложим в них наши гири так, чтобы в первой коробке оказалось менее K гирь. Раскладывать же гири будем следующим образом.

Сначала возьмем гири, веса которых не делятся на K. Если таких гирь меньше K, то положим их в первую коробку и перейдем к следующему шагу. Если же таких гирь окажется больше K, то положим все гири во вторую коробку.

В первом случае возьмем те гири, веса которых делятся на K, но не делятся на K^2. Если они уместятся в первой коробке, то положим их туда; если же нет, то положим все гири, не лежащие в первой коробке, во вторую.

Если опять будет иметь место первый случай, возьмем затем те гири, веса которых делятся на K^2, но не делятся на K^3 и так далее. Так как всего гирь не меньше K штук, то часть гирь обязательно попадет во вторую коробку. Пусть первой группой гирь, не поместившихся в первой коробке, будут гири, веса которых делятся на K^r, но не делятся на K^{r+1}. Во второй коробке окажутся те гири, веса которых делятся на K^r, а в первой — те, веса которых не делятся на K^r.

По условию задачи, гири можно разложить на K равных по весу групп. Поскольку в первой коробке меньше K гирь, в ней никак не могут быть представлены все K групп, и значит, существует группа, все гири из которых оказались во второй коробке. Следовательно, суммарный вес этой (а значит, и каждой) группы делится на K^r. Так как всего у нас K равных по весу групп, то суммарный вес гирь делится на K^{r+1}.

Предположим теперь, что мы убрали какую-нибудь гирю, и оставшиеся гири смогли разделить на K равных по весу групп. Как и раньше, получим, что сумма весов оставшихся гирь делится на K^{r+1}.

Вес гири, которую мы убрали, равен разности суммарных весов всех гирь и оставшихся гирь; следовательно, вес этой гири делится на K^{r+1} (заметим, что r может оказаться равным нулю; это соответствует тому, что все гири попадают во вторую коробку, а первая остается пустой). Значит, если бы мы убрали гирю, вес которой не делится на K^{r+1}, то оставшиеся гири нельзя было бы разложить на K равных по весу групп. Но в силу выбора числа r гирь, веса которых не делятся на K^{r+1}, не меньше K, так как иначе они все были бы помещены в первую коробку. Тем самым все доказано.

С. В. Конягин.

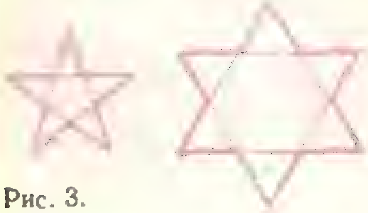


Рис. 3.

◆

М290. *Для каких n существует такая замкнутая непересекающаяся ломаная из n звеньев, что любая прямая, содержащая одно из звеньев этой ломаной, содержит еще хотя бы одно ее звено?*

Заметим сразу, что число звеньев n должно быть достаточно большим, во всяком случае, $n > 8$. Докажем вначале (учитывая уже сделанное замечание), что любая несамопересекающаяся замкнутая ломаная с нечетным числом звеньев, не превышающим 13, обладает тем свойством, что всегда найдется прямая, содержащая ровно одно звено этой ломаной. Предположим противное, то есть что для такой

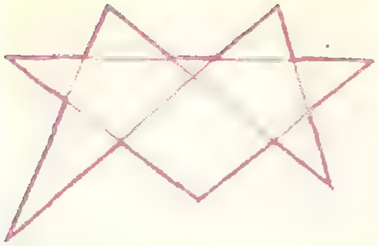


Рис. 4.

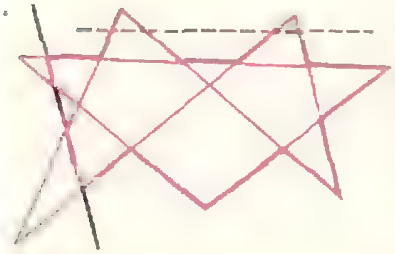


Рис. 5.

ломаной ($n = 2k + 1$, $n \leqslant 13$) не существует прямой, содержащей ровно одно звено. Тогда на одной из прямых должны лежать по крайней мере три звена нашей ломаной. У этих трех звеньев шесть концов, и из каждого конца выходит звено ломаной, то есть всего шесть новых звеньев, причем никакие два из этих звеньев не лежат на одной прямой. Поэтому каждая прямая, содержащая одно из этих шести звеньев ломаной, должна в силу сделанного предположения содержать по крайней мере еще одно звено, отличное от уже рассмотренных ранее ($3 + 6$ звеньев); значит, рассматриваемая ломаная должна иметь еще по крайней мере шесть звеньев. Получаем, что число звеньев у такой ломаной должно быть не меньше, чем $3 + 6 + 6 = 15$ — противоречие.

Покажем теперь, что для любого четного $n \geqslant 10$ и нечетного $n \geqslant 15$ ломаная, о которой говорится в задаче, существует. Для четных $n \geqslant 10$ это хорошо всем известные $\frac{n}{2}$-конечные звезды (рисунок 3; на этом рисунке $n = 10$ и $n = 12$). Несамопересекающуюся замкнутую ломаную с нечетным числом звеньев, бо́льшим 13, обладающую указанным свойством, построить сложнее. Ломаная из 15-ти звеньев изображена на рисунке 4. Отрезая от нее последовательно прямой по два угла, получим ломаную с 17-ю звеньями, 19-ю, и так далее (рис. 5).

С. Ландо

◆

Ф296. *Каждый из k различных конденсаторов с емкостями C_1, C_2, …, C_k заряжен до разности потенциалов U. Затем все конденсаторы соединены последовательно разноименными полюсами в замкнутую цепь. Найти напряжение на каждом конденсаторе в этой цепи.*

До соединения конденсаторов в цепь их заряды были

$$q_1 = C_1U, \quad q_2 = C_2U, \quad \ldots, \quad q_i = C_iU, \quad \ldots, \quad q_k = C_kU.$$

Обозначим заряды конденсаторов после соединения в цепь соответственно через q'_1, q'_2, …, q'_k. Распределение зарядов на пластинах конденсаторов будет таким, как показано на рисунке 6. Из закона сохранения заряда следует, что сумма зарядов соединенных друг с другом пластин соседних конденсаторов (один из таких участков цепи выделен на рисунке 6 пунктирной линией) должна быть равна суммарному заряду, который был на этих пластинах до соединения конденсаторов. То есть (с учетом знаков зарядов)

$$\begin{aligned} q'_2 - q'_1 &= q_2 - q_1 = (C_2 - C_1)U, \\ q'_3 - q'_2 &= q_3 - q_2 = (C_3 - C_2)U, \qquad (*) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ q'_k - q'_{k-1} &= q_k - q_{k-1} = (C_k - C_{k-1})U. \end{aligned}$$

Кроме того, работа по перенесению заряда вдоль замкнутого контура в электростатическом поле равна нулю, поэтому равна нулю сумма напряжений на отдельных конденсаторах: $U_1 + U_2 + \ldots + U_k = 0$, или

$$\frac{q'_1}{C_1} + \frac{q'_2}{C_2} + \ldots + \frac{q'_k}{C_k} = 0. \qquad (**)$$

Из системы уравнений (*) и (**) определим новые заряды конденсаторов, а потом и напряжения на них. Прежде всего, выразим все заряды через заряд q'_1 первого конденсатора. Из первого уравнения системы (*) следует, что $q'_2 = q'_1 + (C_2 - C_1)U$. Сложив первое и второе уравнения системы (*), получим $q'_3 = q'_1 + (C_3 - C_1)U$.

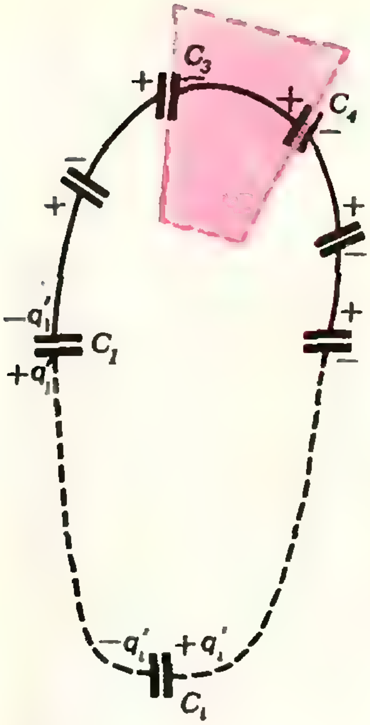


Рис. 6.

Аналогично, для заряда i-го конденсатора получим

$$q_i' = q_1' + (C_i - C_1)\,U.$$

Подставим полученные выражения в уравнение (**):

$$\frac{q_1'}{C_1} + \left[\frac{q_1'}{C_2} + \left(1 - \frac{C_1}{C_2}\right)U\right] + \ldots + \left[\frac{q_1'}{C_k} + \left(1 - \frac{C_1}{C_k}\right)U\right] = 0,$$

или

$$q_1'\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots + \frac{1}{C_k}\right) + kU - C_1U\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots + \frac{1}{C_k}\right) = 0.$$

Отсюда $q_1' = (C_1 - kC_0)\,U$, где C_0 — емкость батареи последовательно соединенных конденсаторов:

$$\frac{1}{C_0} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots + \frac{1}{C_k}.$$

Так как $q_i' = q_1' + (C_i - C_1)\,U$, то

$$q_i' = (C_1 - kC_0)\,U + (C_i - C_1)\,U = (C_i - kC_0)\,U.$$

Это означает, что напряжение на i-м конденсаторе равно

$$U_i' = \frac{q_i'}{C_i} = \left(1 - k\,\frac{C_0}{C_i}\right)U.$$

Ф297. *Коническая пробка перекрывает сразу два отверстия в плоском сосуде, заполненном жидкостью при давлении р. Радиусы отверстий R и r. Определить суммарную силу, действующую на пробку со стороны жидкости. Поле тяжести не учитывать.*

◆

На каждый малый элемент боковой поверхности пробки с площадью Δs_i действует сила давления жидкости $\Delta F_i = p\Delta s_i$, направленная перпендикулярно к боковой поверхности пробки (рис. 7). Из симметрии ясно, что горизонтальные составляющие таких сил, действующих на различные малые элементы поверхности пробки, складываясь, взаимно уничтожат друг друга. Поэтому равнодействующая сил давления вертикальна и равна сумме вертикальных составляющих этих сил. То есть

$$F = \Sigma F_i \sin\alpha = \Sigma\, p\Delta s_i \sin\alpha = p\,\Sigma\Delta s_i \sin\alpha.$$

Произведение $\Delta s_i \sin\alpha$ — это проекция площади элемента на плоскость, параллельную стенкам сосуда. Следовательно, сумма $\Sigma\Delta s_i \sin\alpha$ равна площади проекции боковой поверхности пробки на эту плоскость, т. е. $\pi(R^2 - r^2)$. Поэтому

$$F = p\,\pi\,(R^2 - r^2).$$

Приведем еще одно решение этой задачи. Рассмотрим аналогичный данному в задаче плоский сосуд, но без отверстий. Выделим в этом сосуде объем жидкости, равный объему пробки между стенками сосуда (рис. 8). Так как выделенный объем жидкости находится в равновесии, то равнодействующая всех сил, действующих на него, равна нулю. Какие же силы действуют на выделенный объем жидкости? Это силы реакции со стороны стенок сосуда, равные по абсолютной величине $N_1 = p\pi R^2$ и $N_2 = p\pi r^2$, и равнодействующая F

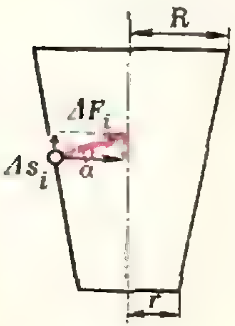


Рис. 7.

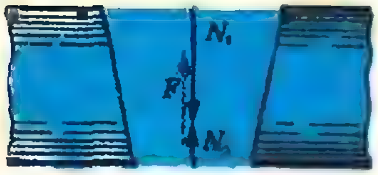


Рис. 8.

сил давления со стороны окружающей жидкости, направленная вертикально вверх. Так как $N_1 - N_2 - F = 0$, то

$$F = N_1 - N_2 = \pi p\,(R^2 - r^2).$$

Очевидно, что на пробку со стороны жидкости действует точно такая же сила.

◆

Ф298. *Внутри фотоаппарата перпендикулярно к фотопластинке расположено плоское зеркало, длина которого DB равна половине фокусного расстояния объектива (рис. 9). Изображение A звезды Вега находится от центра фотопластинки на расстоянии, вдвое меньшем радиуса объектива. Во сколько раз освещенность «отраженного изображения» C звезды Вега меньше освещенности ее изображения A в присутствии зеркала?*

Найдем отношение световых потоков, идущих от далекой звезды и попадающих на фотопластинку в точки A и C (рис. 9). В точке A собираются те лучи, которые проходят через линзу объектива ниже точки G — точки пересечения прямой AD с линзой. Лучи, идущие выше точки G, попадают на зеркало и, отражаясь от него, собираются в точке C.

Рассмотрим сечение линзы объектива плоскостью, перпендикулярной к падающему пучку лучей (рис. 10). Прямая EK делит линзу на два сегмента, через которые лучи попадают в точку A или в точку C. Так как линза равномерно освещена светом звезды, то отношение световых потоков равно отношению площадей соответствующих сегментов. Найдем это отношение.

Фотопластинка расположена в фокальной плоскости объектива, длина зеркала равна половине фокусного расстояния объектива, поэтому $DB = OD$ (см. рис. 9) и $\Delta GDO = \Delta ADB$. Следовательно, $GO = AB = R/2$, где R — радиус объектива. Тогда (см. рис. 10) $\sphericalangle GKO = 30°$, $\sphericalangle KOG = 60°$ и $\sphericalangle EOK = 120°$. Выразим теперь площади сегментов S_1 и S_2 через площади соответствующих секторов и треугольника EOK:

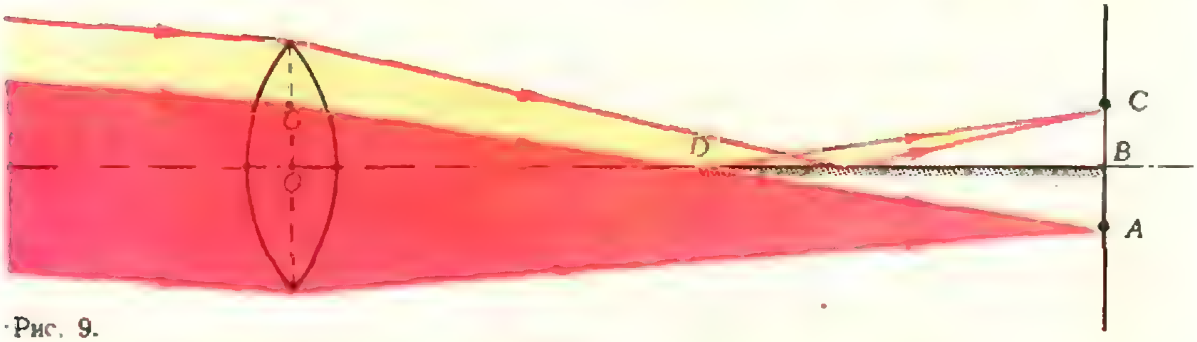


Рис. 9.

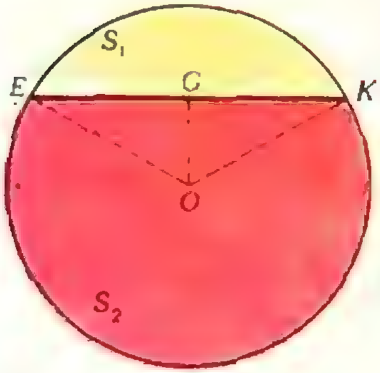


Рис. 10.

$$S_1 = \frac{\pi R^2}{360}120 - R^2\frac{\sqrt{3}}{4} \quad \text{и} \quad S_2 = \frac{\pi R^2}{360}240 + R^2\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Отношение S_1/S_2 равно

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\pi R^2/3 - R^2\sqrt{3}/4}{2\pi R^2/3 + R^2\sqrt{3}/4} = \frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{8\pi + 3\sqrt{3}} \approx 0{,}25.$$

И. Ш. Слободецкий

В этом номере мы публикуем фамилии тех, кто прислал правильные решения задач М276 — М285; Ф293 — Ф302. Жирные цифры после фамилии — последние цифры номера решенной задачи.

Математика

Большинство читателей, приславших нам письма, успешно справилось с задачами **М276, М281, М282**. Остальные задачи решили: *Д. Азов* (Челябинск) 77, 79, 84, 85; *А. Александрин* (Валуйки Белгородской обл.) 84; *В. Басманов* (Воронеж) 77, 84; *А. Блох* (Харьков) 77, 78, 84; *К. Бобрович* (Могилев) 85; *А. Богорад* (Ленинград) 85; *И. Бродская* (Москва) 85; *Л. Бродский* (Москва) 77, 84; *И. Вандакуров* (Ленинград) 77; *Р. Вассерман* (Одесса) 84, 85; *В. Винокуров* (Москва) 77, 84; *В. Витюков* (Орел) 84; *А. Ворович* (Москва) 77; *Л.* и *М. Гандельсман* (Ленинград) 77; *Е. Горбатый* (Одесса) 77, 84; *С. Горишний* (Таганрог) 78, 84; *С. Гродский* (Корсунь-Шевченковский) 77; *В. Гусейнов* (Нахичевань) 77, 78а, 84; *А. Диденко* (Краснодар) 84; *Э. Дяченко* (Киев) 77; *В. Ерпылев* (Ашхабад) 77, 78б, 84; *Я. Захаревич* (Ташкент) 78а; *Д. Зелевинский* (Москва) 84, 85; *С. Золотарев* (Москва) 77, 78, 84; *В. Калабин* (Москва) 85; *И. Калика* (Киев) 84; *А. Камалян* (Иджеван Арм. ССР) 77, 84; *П. Кирсанов* (Москва) 77; *В. Клочков* (Челябинск) 77, 84; *С. Коршунов* (Монино Московской обл.) 78, 84, 85; *Д. Костюк* (Москва) 84; *А. Косульников* (Москва) 77; *Т. Кулиев* (Баку) 77; *Е. Ландман* (Ленинград) 77, 84; *А. Лейдерман* (Могилев-Подольский Винницкой обл.) 78, 84; *В. Липкин* (Москва) 84; *С. Лифиц* (Харьков) 84; *М. Любич* (Харьков) 77, 84; *И. Морозов* (Горький) 77, 78; *В. Нейман* (Ленинград) 79; *Н. Нецветаев* (Ленинград) 77, 78, 80; *А. Паламарчук* (Бровары Киевской обл) 84; *И. Панин* (Ленинград) 77, 80, 84; *Б. Певзнер* (Москва) 77, 78а; *А. Плахов* (Москва) 77, 78, 84; *Р. Портной* (Черновцы) 77, 78а; *С. Пославский* (Харьков) 78а, 84; *Д. Поцхишвили* (Тбилиси) 77; *Ю. Пошехонов* (Энгельс Саратовской обл.) 84; *М. Райтер* (Ленинград) 77; *В. Романов* (Димитровград) 77, 78, 84; *Л. Рубинштейн* (Калининград) 84; *Ю. Скрынников* (Рустави) 84; *С. Соловьев* (Орел) 84; *А. Соломахов* (Москва) 84; *Б. Соломяк* (Ленинград) 84, 85; *В. Тарасов* (Ленинград) 84; *С. Трегуб* (Ташкент) 84; *А. Туровский* (Псков) 79, 84; *Ю. Философов* (Саратов) 77; *С. Финашин* (Ленинград) 84, 85; *И. Фомина* (Харьков) 77; *В. Харатоник* (Польша) 84; *А. Хомич* (Брест) 84; *И. Цукерман* (Ленинград) 77, 78, 80, 84, 85; *М. Чеповецкий* (Ленинград) 84; *А. Черебатов* (Омск) 77, 84; *В. Чурук* (Минск) 84; *Г. Шмелев* (Ярославль) 77, 80, 84, 85; *В. Шпильрайн* (Москва) 84; *А. Шульман* (Киев) 84; *М. Щербина* (Харьков) 84; *М. Юмашев* (Железнодорожный Московской обл.) 77; *И. Юнус* (Харьков) 77, 80; *В. Ясинский* (с. Мазуровка Винницкой обл.) 77; *Б. Яцало* (с. Морочно) 77, 78а, 84.

Физика

Почти все читатели справились с задачами **Ф293, Ф297** и **Ф302**. Правильные решения остальных задач прислали: *Х. Абдуллин* (Алма-Ата) 5; *Г. Айзин* (Брест) 4, 9, 0; *А. Алексеев* (ст. Выселки Краснодарского кр.) 0; *А. Алексеев* (Смоленск) 5; *К. Андроник* (Кишинев) 4, 6, 9; *И. Астров* (Таллин) 4; *А. Баклай* (Пинск) 4; *Р. Басыров* (д. Н. Каракитяны ТАССР) 0; *Ю. Богомолов* (Казань) 4, 6, 9, 0; *И. Борисов* (Одесса) 5; *В. Борю* (Запорожье) 6, 9; *И. Винокуров* (Москва) 9; *О. Вишнепольский* (Рига) 4; *И. Долинников* (Волгоград) 0; *М. Гедалин* (Тбилиси) 4; *А. Говяда* (Киев) 8, 9, 0; *О. Годин* (Симферополь) 9, 0; *А. Гончаров* (Воронеж) 6; *С. Горишний* (Таганрог) 8, 9, 0, 1; *Г. Горлачев* (Белорецк) 9; *С. Гранин* (Таллин) 5; *С. Гродский* (Корсунь-Шевченковский) 9; *В. Гуров* (п. Листвянка Рязанской обл.) 9; *В. Дементьев* (Кировск) 4; *Е. Демихов* (Усмань) 4; *У. Джуманиязов* (Хазараспский р-н Хорезмской обл.) 4; *Ю. Докучаев* (Ленинград) 4, 5, 8, 9, 0, 1; *Е. Жуков* (с. Волгодоновка Целиноградской обл.) 4, 9; *И. Заверткин* (Орск) 0; *В. Иващук* (Киев) 4—6, 9, 0; *С. Керем* (Рига) 4; *С. Карташова* (Светлоград) 5; *Б. Кацман* (Мытищи) 5, 8; *А. Клочко* (Жуковский) 5; *Н. Кобылецкий* (Баку) 9; *Я. Коган* (Глазов) 4, 0, 1; *А. Козел* (Москва) 5; *Н. Конев* (Каменск-Шахтинский) 5; *А. Копнов* (Новочеркасск) 5; *В. Контарин* (Таллин) 9; *С. Копыловский* (п. Знобь-Новгородское Сумской обл.) 4—6, 0; *Д. Корин* (Киев) 4, 0; *Ю. Коровин* (Курск) 5, 9, 0; *С. Коршунов* (п. Монино Московской обл.) 4—6; *М. Кроль* (Павловский Посад) 5; *А. Крохин* (Харьков) 4, 5, 8, 0; *С. Левитин* (Днепропетровск) 4; *Ю. Ленгев* (Алма-Ата) 5, 9, 0; *В. Мадгазин* (Ташкент) 5; *А. Майоров* (Ярославль) 4; *С. Матвеенко* (Москва) 4—6, 0; *С. Мельник* (Харьков) 4—6, 9, 0; *А. Мищин* (Ленинград) 4; *В. Моисеев* (Астрахань) 5; *Р. Мусалимов* (Байрам-Али) 5, 0; *И. Никитин* (Ленинград) 5; *Ю. Онищенко* (Люберцы) 9, 0; *С. Онучин* (Пермь) 8; *Б. Очиров* (Новосибирск) 9, 0; *П. Паровичников* (Обнинск) 4; *В. Пахомов* (Днепропетровск) 4; *В. Пиотух* (Севастополь) 8, 9; *А. Поблагуев* (Винница) 4, 6; *М. Половинник* (Мена) 9; *А. Полянский* (Челябинск) 4; *А. Пресман* (Москва) 9; *С. Рашкеев* (Солнечногорск) 9; *Р. Ризнычук* (Львов) 9; *М. Розман* (Псков) 4, 9; *А. Рудерман* (Ленинград) 6; *Т. Саргазаков* (Фрунзе) 9; *В. Серебрянный* (Харьков) 9; *Р. Сирота* (Харьков) 4, 9, 0; *И. Соколов* (Москва) 9; *О. Стехин* (Васильков) 4; *В. Тарасов* (Ленинград) 9; *Г. Танчишвили* (Тбилиси) 9; *Н. Федин* (Омск) 4, 5; *П. Фоменко* (Днепропетровск) 4, 8; *А. Хомич* (Брест) 4, 6; *Л. Цимринг* (Горький) 8, 9; *Г. Ципурский* (Сухуми) 4; *Ю. Черныш* (Минск) 4—6, 8; *Е. Шафирович* (Ногинск) 4; *С. Шихарев* (ст. Раевская Краснодарского края) 9; *Г. Шмелев* (Ярославль) 9; *О. Щербаков* (Лида) 4, 9.

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

Институт начинается со школы

К. И. Кашин

Раз уж вы взяли в руки «Квант», то, наверное, решили после окончания школы идти учиться в такое высшее учебное заведение, где один из самых важных предметов — математика. Если это так, то все, что написано в этой небольшой статье,— для вас.

Заканчивая среднюю школу, вы с трудом вспоминаете, как были первоклассником. Вы выросли, созрели и смотрите на нынешних первоклашек несколько иронически (если, конечно, вы не будущий педагог). Ведь они еще не умеют мыслить логически, отвлеченно, да и решать сколько-нибудь сложные задачи им не под силу. Они только слушают, запоминают и рассказывают, причем рассказывают плохо. Вы, конечно, умеете пересказывать гораздо более сложные вещи, потому что вы умеете логически мыслить, доказывать, преобразовывать данные. А они, первоклассники, умеют только слушаться и подражать. Для них все внове, они ко всему еще только присматриваются. Ведь так?

А теперь присмотритесь к себе — будущему студенту технического вуза. Очень скоро вы вновь станете первокласс..., то есть, я хотел сказать, — первокурсником. Вы тоже будете примериваться и присматриваться к преподавателям, стараясь понять, чего они хотят от вас. А хотят они, раз уж вы научились хорошо логически мыслить, дать вам за пять лет знаний во много раз больше, чем в школе вы получили за десять. И знания эти качественно другие — они готовят вас к самостоятельной деятельности.

В институтский учебный процесс входят следующие элементы: лекции; практические занятия; лабораторные занятия; консультации преподавателей, читающих лекции и ведущих практические занятия; выполнение домашних заданий; выполнение контрольных работ; зачеты; экзамены. И все эти элементы учебного процесса требуют самостоятельности.

Начнем по порядку, с лекций. Работа студента на лекции делится на три стадии:

1) слушать лекцию;

2) пересказывать для себя мысли, высказанные лектором (стадия эта необходима и потому, что способствует более глубокому пониманию излагаемого материала, и потому, что записать за лектором все, что он говорит, студент попросту не успеет);

3) записывать краткий пересказ (составлять конспект).

Как свидетельствует практика, весьма и весьма значительная часть студентов первых курсов не умеет составлять конспекты лекций. А ведь составление конспекта — очень важная часть работы. От того, как вы с нею справитесь, зависит многое. Если конспект составлен плохо, то вполне может случиться, что студент из-за нехватки времени на осмысление записей пойдет на экзамен с подготовкой, не гарантирующей благоприятный исход.

Если же конспект составлен хорошо, то во многих случаях оказывается достаточным просмотреть его (даже не заглядывая в учебник), чтобы благополучно сдать экзамен. В других случаях он явится путеводителем по любому учебнику, даже если учебник написан не по программе вашего института.

Так что, если вы хотите в институте сберечь время для занятий своим любимым предметом — математикой, то обязательно научитесь составлять конспекты.

Я не стану учить вас решать задачи, а именно решением задач занимаются на практических занятиях. В «Кванте» вы встречаете много хороших задач, составленных специально для того, чтобы вы получили представление о самостоятельной исследовательской работе. Сравните по полноте ваши собственные решения с теми, которые приведены в журнале. Привыкайте завершать начатое. В институте вам эта привычка очень пригодится.

Лабораторные занятия по математике обычно связаны с выполнением работ на электронных или клавишных вычислительных машинах. Очень может быть, что в вашей школе таких машин нет, а где их искать, вы не знаете.

Однако вы не первоклассник, которого всему учат учителя. Если вы намерены всерьез в будущем заниматься прикладной математикой, вам нужно проявить инициативу, побывать на выставках, где экспонируются ЭВМ, или в научно-исследовательском институте или проектном бюро, где на этих машинах работают, и постараться разобраться, что такое ЭВМ. Здесь вам могут помочь «дни открытых дверей», проводимые весной во многих вузах. В эти дни школьников — будущих студентов — знакомят с институтом.

Зачем нужны в институте консультации? Конечно, не только для того, чтобы преподаватель давал вам советы. Преподаватель советовать умеет, а вот умеете ли вы задавать вопросы? Задавать вопросы очень важно, чтобы проверить, все ли вами понято правильно, нет ли какой-нибудь тонкости, которая ускользнула от вашего внимания. Не надейтесь скромно, что «ваш» вопрос зададут соседи по студенческой скамье, такая скромность не украшает! Хорошо еще, если ваши соседи не поняли того же, чего не поняли вы. А если они не обратили внимания на рассмотренную вами тонкость, то своим молчанием вы оказываете им плохую услугу. Так что лучше, если вы научитесь задавать вопросы уже сейчас, в школе.

Работа на лекциях, на лабораторных занятиях и на консультациях — только часть обучения. Ведь знания, которые вы получаете, нужно пережить, прочувствовать. Это происходит обычно во время выполнения домашних заданий.

Можно надеяться, что в школе во время контрольных работ (а выполняете вы их, конечно, самостоятельно) вы научились трудиться спокойно, внимательно, «спеша медленно» и распределяя время на использование черновика и оформление чистовика. Если это так, то приобретенная привычка вам очень пригодится в институте.

Зачет — это экзамен, на котором ставится одна из двух оценок: «зачет», «незачет». Многие из вас еще не знают, как он выглядит. Сейчас вам достаточно знать, что зачет есть нечто, что почти гарантируется успешным выполнением контрольных работ.

Последний момент учебного процесса — экзамен. Вы его достойно выдержите, если хорошо знаете предмет и серьезно относитесь к указанным моментам учебного процесса.

Знание предмета, приобретенное в средней школе, конечно, тоже вам существенно поможет, но это тема для другого разговора. Сейчас важно, чтобы вы подготовились не только к более интенсивному потоку знаний, который хлынет на вас сразу же, как только вы поступите в институт, но и к учебному процессу, чтобы вы не оказались вновь в роли первоклассника.

Как приступить к решению задачи по физике?

Г. И. Розенблат

Решение физической задачи — весьма сложный процесс. Он требует от решающего глубокого знания физики, умения анализировать задачу и правильно применять для ее решения законы физики и их следствия. Часто бывает полезно привлекать для решения данной задачи опыт прежних решений, проводить аналогии, делать упрощения и т. п.

Трудно (или даже невозможно) разработать универсальные приемы для решения любой физической задачи. Однако можно предложить некоторые общие правила, обеспечивающие наиболее важную часть решения, а именно: *отбор тех законов, которые можно применять для решения.* Об этих правилах, применительно к механическим задачам, и пойдет речь в статье.

При решении задачи учащиеся нередко выбирают тот или иной закон на том основании, что в его формулу входят величины, имеющиеся в условии задачи. Такой подход может привести к серьезным ошибкам. Дело в том, что каждый физический закон имеет определенные границы и условия применимости, то есть его можно применять не всегда. Так, например, закон сохранения импульса можно применять только в том случае, если выполняются одновременно два условия: система отсчета является инерциальной и исследуемая система тел замкнута. Если хотя бы одно из этих условий не соблюдено, закон сохранения импульса использовать для решения задачи нельзя. Таким образом, прежде чем применять какой-либо закон, необходимо проверить, выполняются ли условия его применимости. Причем для каждого закона можно установить определенную последовательность вопросов, на которые нужно ответить, то есть построить «алгоритм распознавания» *). Так, для закона сохранения импульса последовательность вопросов должна быть такой:

1. Является ли система отсчета *инерциальной?*
2. Является ли исследуемая система тел *замкнутой?*

Если система отсчета не инерциальная, закон сохранения импульса не выполняется, даже если рассматриваемая система тел замкнута. Так что порядок вопросов должен быть именно таким.

Приступая к решению конкретной задачи, разумно прежде всего выяснить, какие из *основных* законов физики можно применить. Для механических процессов и явлений это — законы сохранения энергии и импульса, законы Ньютона и т. п. Оказывается, отобрать пригодные для решения задачи законы можно, анализируя условия выполнимости этих законов. При этом порядок постановки вопросов опять-таки должен быть вполне определенным — от наиболее широких границ применимости к наиболее узким. Он может быть, например, таким:

1. Является ли система отсчета *инерциальной?*
2. Можно ли применять законы *классической* механики?
3. Можно ли исследуемые тела считать *материальными точками?*
4. Является ли рассматриваемая система *замкнутой?*
5. Являются ли внутренние силы системы *потенциальными?*
6. Какие *частные* законы механики можно использовать?

---

*) Алгоритмом называется совокупность действий, выполняемых в строго установленном порядке для решения задач определенного типа.

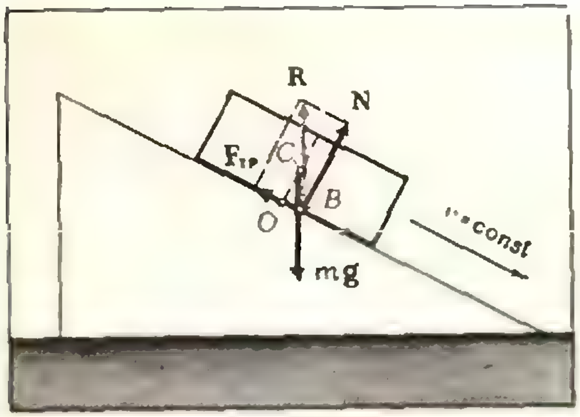


Рис. 1.

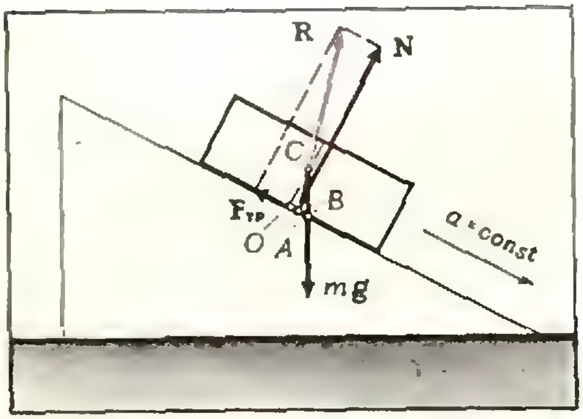


Рис. 2.

Поясним на конкретных задачах, как пользоваться таким «планом» решения задачи.

Задача 1. *Брусок высотой h скользит ускоренно вниз по склону горы. Какая половина бруска, правая или левая, сильнее давит на гору, если поверхность горы шероховатая?*

Анализ. 1) Система отсчета связана с Землей, то есть является практически инерциальной. 2) Скорость бруска, по-видимому, гораздо меньше скорости света в вакууме, а сам брусок является макроскопическим телом — можно применять законы классической механики. 3) Брусок, конечно, нельзя считать материальной точкой в данной задаче, так как в условии говорится о его размерах и рассматривается давление его отдельных частей, — нужно применять законы динамики и кинематики для протяженных тел, в данном случае — для твердого тела. 4) Система тел Земля — брусок замкнута, можно применять закон сохранения импульса. 5) Внутренние силы в системе — силы трения — не являются потенциальными, поэтому закон сохранения механической энергии применять нельзя.

Таким образом, мы установили, какими законами *можно* пользоваться при решении этой задачи. Но это не означает, что все эти законы *нужно* применять. Ни один из законов сохранения не имеет отношения к давлению частей бруска, поэтому следует попытаться решить задачу, используя законы динамики и кинематики твердого тела.

Решение. Брусок движется поступательно, следовательно, равнодействующая всех действующих на него сил проходит через центр масс бруска. На брусок действует сила тяжести $m\mathbf{g}$, приложенная в центре масс, сила трения $\mathbf{F}_{тр}$, направленная вверх вдоль наклонной плоскости, и сила реакции опоры $\mathbf{N}$, перпендикулярная к плоскости. Равнодействующая $\mathbf{R}$ двух последних сил, приложенных к основанию бруска, также должна проходить через его центр масс.

Если брусок движется равномерно, то сумма всех сил равна нулю, то есть сила $\mathbf{R}$ равна по величине силе тяжести бруска и направлена с ней по одной прямой (рис. 1). Следовательно, сила $\mathbf{R}$, а значит, и сила $\mathbf{N}$, приложены в точке B, которая лежит ниже точки O — середины основания бруска. Согласно третьему закону Ньютона сила давления бруска на гору тоже приложена в точке B. Это означает, что правая часть бруска давит сильнее, чем левая.

Если брусок скользит с ускорением, то равнодействующая всех сил направлена так же, как ускорение, то есть вниз по наклонной плоскости. Значит, сила $\mathbf{R}$ в этом случае отклонена от вертикали вправо на некоторый угол (рис. 2). Проведем через центр масс примерное направление действия этой силы; оно пересечет плоскость в точке A, которая, так же как и точка B, расположена ниже точки O. Следовательно, и в этом случае давление на гору правой половины бруска больше, чем левой.

Задача 2 (подобная задаче Ф278). *Спутник Земли движется по круговой орбите радиуса R_1. Его хотят перевести на эллиптическую орбиту с максимальным удалением от центра Земли R_2 и минимальным R_1. Насколько для этого необходимо изменить скорость спутника? Каким будет период обращения?*

Анализ. 1), 2) — ответы такие же, как в задаче 1. 3) Спутник можно считать материальной точкой — можно применять законы Ньютона и уравнения кинематики точки. 4) Система тел Земля — спутник замкнута (пренебрегаем взаимодействием с другими космическими телами) — можно применять закон сохранения импульса. 5) Между телами выбранной системы действуют только силы притяжения, которые являются потенциальными,— можно применять закон сохранения механической энергии. 6) Кроме того, движение спутника подчиняется законам Кеплера.

Решение. Рассмотрим сначала спутник на круговой орбите. Законы сохранения не позволяют найти скорость спутника, так как на круговой орбите все состояния спутника равноправны. Поэтому можно пробовать применять законы Ньютона и уравнения кинематики точки:

$$F = ma, \text{ где } F = \gamma \frac{mM}{R_1^2}$$

(m — масса спутника, M — масса Земли);

$$a = \frac{v_1^2}{R_1}, \qquad T = \frac{2\pi R_1}{v_1}$$

(v_1 — скорость спутника на круговой орбите). Тогда

$$v_1 = \sqrt{\frac{\gamma M}{R_1}} \text{ и } T_1 = \frac{2\pi R_1}{v_1}.$$

При движении спутника по эллиптической орбите, наоборот, законы Ньютона оказываются неудобными для решения, так как сила тяготения в разных точках орбиты различна. Попробуем применить закон сохранения механической энергии и второй закон Кеплера:

$$\frac{mv_1'^2}{2} - \gamma \frac{mM}{R_1} = \frac{mv_2^2}{2} - \gamma \frac{mM}{R_2},$$

$$v_1' R_1 = v_2 R_2$$

(v_1' — скорость спутника на эллиптической орбите в перигее). Отсюда

$$v_1' = \sqrt{\frac{2\gamma M R_2}{(R_1 + R_2) R_1}} = v_1 \sqrt{2 \frac{R_2}{R_1 + R_2}}.$$

Искомое увеличение скорости равно $\Delta v_1 = v_1' - v_1$. Период обращения можно найти с помощью третьего закона Кеплера

$$\frac{T_2^2}{T_1^2} = \frac{(R_1 + R_2)^3}{2^3 R_1^3},$$

где $\frac{R_1 + R_2}{2}$ — большая полуось эллиптической орбиты.

Итак, окончательно,

$$\Delta v_1 = \sqrt{\frac{\gamma M}{R_1}} \left(\sqrt{\frac{2R_2}{R_1 + R_2}} - 1 \right),$$

$$T_2 = \pi (R_1 + R_2) \sqrt{\frac{R_1 + R_2}{2\gamma M}}.$$

Задача 3 (Ф282). *Найти частоту «симметричных» колебаний системы, показанной на рисунке 3. Массы всех шаров m, коэффициенты упругости пружинок k.*

Анализ. 1), 2) — ответы такие же, как в задаче 1. 3) Всю систему нельзя считать материальной точкой (исследуется движение ее частей друг относительно друга). Но каждый шар в отдельности можно считать точкой и применять законы Ньютона и уравнения кинематики точки. 4) Исследуемая система тел является замкнутой — можно применять закон сохранения импульса. 5) Между телами системы действуют потенциальные силы — силы упругости пружинок —

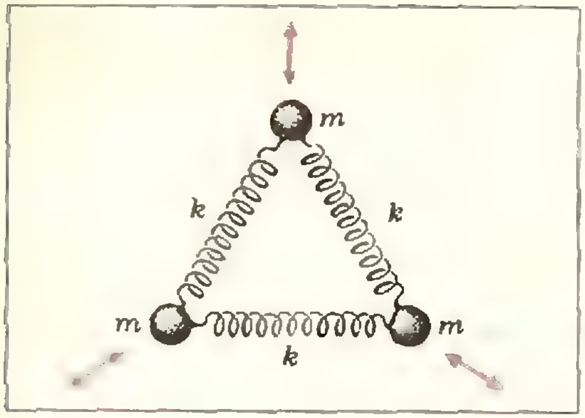


Рис. 3.

можно применять закон сохранения механической энергии. б) Поскольку речь идет о колебаниях, можно применять законы колебаний, в частности, гармонических колебаний (если ограничиться рассмотрением малых амплитуд). Так как в систему входят пружинки, можно использовать сведения о них: прежде всего, закон Гука. Можно также воспользоваться тем, что система симметрична.

Для решения задачи можно использовать законы колебаний совместно с законами Ньютона или с законом сохранения механической энергии.

Решение. Первый способ. Пусть в некоторый момент смещение каждого шара равно x; тогда удлинение каждой пружинки будет равно $x\sqrt{3}$, а сила упругости одной пружинки (по закону Гука) — $kx\sqrt{3}$. Равнодействующая сил упругости двух пружинок, действующих на каждый шар, равна $3kx$. Согласно второму закону Ньютона для этого шара (направим ось x по направлению смещения шара)

$$a_x = \frac{F_x}{m} = -\frac{3kx}{m} = -\frac{3k}{m}x.$$

Сравним полученную формулу с уравнением гармонических колебаний:

$$a_x = -\omega^2 x.$$

Отсюда циклическая частота

$$\omega = \sqrt{\frac{3k}{m}}.$$

Второй способ. Запишем закон сохранения энергии:

$$E_1 = E_2.$$

В положении равновесия скорость шаров максимальна, а пружинки не деформированы, то есть $E_1 = K_1 = \frac{3mv_0^2}{2}$ (v_0 — амплитуда скорости). В крайнем положении скорость шаров равна нулю, а смещение максимально и равно амплитуде колебаний A. При этом удлинение каждой пружинки равно $A\sqrt{3}$, поэтому $E_2 = \Pi_2 = 3\frac{k(A\sqrt{3})^2}{2}$. Тогда

$$\frac{3mv_0^2}{2} = 3\frac{k(A\sqrt{3})^2}{2} \text{ и } v_0 = \sqrt{\frac{3k}{m}}A.$$

Используя известное выражение для максимальной скорости гармонических колебаний $v_0 = \omega A$, получим то же выражение для циклической частоты, что и при первом способе решения.

Упражнения

В приведенных ниже задачах установите, какие из основных законов механики *можно* применять в исследуемой ситуации, а также, какие из этих законов *нужно* применить для решения.

1. Самолет массой $m = 2{,}5$ т с выключенным мотором спускается, планируя, с высоты $h_1 = 2$ км до высоты $h_2 = 1$ км, пролетев при этом с постоянной скоростью $v = 144$ км/ч расстояние $l = 10$ км. Какую мощность N должен развить мотор самолета, чтобы он смог подняться до высоты h_1, пролетев расстояние l с той же скоростью?

2 (Ф228). На конце доски длины L и массы M находится короткий брусок массы m. Доска может скользить без трения по горизонтальной плоскости. Коэффициент трения скольжения бруска по поверхности доски равен μ. Какую скорость v_0 нужно толчком сообщить доске, чтобы она выскользнула из-под бруска?

3. С горки высотой H съехали санки массы m и остановились, пройдя некоторое расстояние. Какую работу нужно совершить, чтобы поднять санки по тому же пути до первоначальной высоты?

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

(механико-математический факультет,
физический факультет, факультет
вычислительной математики и кибернетики)

Подробно об этих факультетах МГУ мы рассказывали в «Кванте», 1973, № 4. Здесь мы помещаем варианты письменного экзамена по математике, предлагавшиеся поступавшим на эти факультеты в 1974 году, и задачи, предлагавшиеся на устном экзамене по физике.

Математика

Механико-математический факультет

Вариант 1

1. Решить уравнение:

$$\sqrt{1+\sin x}+\cos x=0.$$

2. Решить неравенство:

$$\sqrt{1-\log_5(x^2-2x+2)}<$$
$$<\log_5(5x^2-10x+10).$$

3. Вокруг треугольника ABC описана окружность. Медиана AD продолжена до пересечения с этой окружностью в точке E. Известно, что $AB+AD=DE$, угол $BAD=60°$ и $AE=6$. Найти площадь треугольника ABC.

4. В треугольной пирамиде $ABCD$ ребро $DC=9$, ребро $DB=AD$, а ребро AC перпендикулярно к грани ABD. Сфера радиуса 2 касается грани ABC, ребра DC, а также грани DAB в точке пересечения ее медиан. Найти объем пирамиды.

5. Найти все действительные значения α, для каждого из которых существуют четыре целых числа (x, y, u, v), удовлетворяющие равенствам:

$$x^2+y^2=(111-\alpha)(\alpha-89),$$
$$50(u^2-v^2)=\alpha(15u+5v-\alpha).$$

Вариант 2

1. Решить уравнение:

$$\sqrt{2\sin 2x}+2\sin x=0.$$

2. Решить неравенство:

$$\sqrt{1+\log_2(7x^2+14x+8)}\leqslant$$
$$\leqslant 1+\log_8(7x^2+14x+8).$$

3. Вокруг треугольника ABC описана окружность. Через точку B проведена касательная к этой окружности до пересечения с продолжением стороны CA в точке D. Известно, что $AB+AD=AC$, отрезок $CD=3$, угол $BAC=60°$. Найти периметр треугольника ABC.

4. В основании треугольной пирамиды $ABCD$ лежит треугольник ABC, в котором угол $BAC=60°$, а угол ACB прямой. Грань BCD образует угол в 60° с гранью ABC. Ребро $BD=2$. Сфера касается ребер AB, AC и грани BCD. Центр сферы — точка O — лежит на основании пирамиды и отрезок OD перпендикулярен к плоскости основания пирамиды $ABCD$. Найти длину ребра AC.

5. Найти все действительные значения α, для каждого из которых существуют четыре натуральных числа (x, y, u, v), удовлетворяющие равенствам:

$$(x+y)(x+y+20)=(140-\alpha)(\alpha-80),$$
$$\alpha(8u^2+2v^2-\alpha)=(4u^2-v^2)^2.$$

Физический факультет

Вариант 1

1. Решить уравнение:

$$\sqrt{3}-\operatorname{tg}x=\operatorname{tg}\left(\frac{4\pi}{3}-x\right).$$

2. Решить неравенство:

$$x^2-2|x+1|<0.$$

3. Решить уравнение:

$$2\sqrt[3]{2\log_{16}^2 x-\sqrt[3]{\log_2 x}}-6=0.$$

4. Два одинаковых правильных треугольника ABC и CDE со стороной 1 распо-

ложены на плоскости так, что имеют только одну общую точку C, и угол BCD меньше, чем $\frac{\pi}{3}$. Точка K — середина AC, точка L — середина CE, точка M — середина отрезка прямой BD. Площадь треугольника KLM равна $\frac{\sqrt{3}}{5}$. Найти длину отрезка BD.

5. Даны две треугольные пирамиды $SABC$ и $NKLM$, все ребра которых равны a. Эти пирамиды имеют общую высоту SN (S — центр грани KLM и N — центр грани ABC). Кроме того, $KL \parallel BC$ и пирамиды расположены так, что плоскость, проходящая через KL и BC, пересекает отрезок SN. Найти объем общей части пирамид $SABC$ и $NKLM$.

Вариант 2

1 Решить уравнение:

$$\sin x + \cos x - 1 = \operatorname{ctg}\frac{x}{2}(\cos x - 1).$$

2. Решить неравенство:

$$(|x| - 1)^2 > 2.$$

3. Решить уравнение:

$$\frac{3}{4}\log^3_{\sqrt{3}} x - 30\sqrt{\log^3_3 x} + 36 = 0.$$

4. Из точки K, расположенной вне окружности с центром O, проведены к этой окружности две касательные, MK и NK (M и N — точки касания). На хорде MN взята точка C ($MC < CN$). Через точку C перпендикулярно к отрезку OC проведена прямая, пересекающая отрезок NK в точке B. Известно, что радиус окружности равен R, $\angle MKN = \alpha$, $MC = b$. Найти длину отрезка CB.

5. В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит прямоугольный равнобедренный треугольник ABC. Точка D — середина гипотенузы AB, SD — высота пирамиды, $SD = DC = a$. Через точку S проведена плоскость, перпендикулярная к SD, и в этой плоскости построен прямоугольный треугольник SEF так, что точка S — вершина прямого угла, $SE = SF = a\sqrt{2}$, а $EF \parallel AB$. Кроме того, треугольник SEF расположен так, что плоскость, проходящая через EF и AB, пересекает ребро SC. Найти объем общей части пирамид $SABC$ и $SDEF$.

Факультет вычислительной математики и кибернетики

Вариант 1

1. Найти все решения уравнения $\sqrt{\sin(1-x)} = \sqrt{\cos x}$, удовлетворяющие условию $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.

2. Найти все действительные значения a, при которых каждое решение неравенства $\log_{\frac{1}{2}} x^2 \geqslant \log_{\frac{1}{2}}(x+2)$ является решением неравенства $49x^2 - 4a^4 \leqslant 0$.

3. Найти все значения x, удовлетворяющие одновременно следующим условиям:

$$\begin{cases} |x-2| + |x-3| = 1, \\ 813x - 974 \leqslant 163x^2. \end{cases}$$

4. Имеются три несообщающихся между собой резервуара, причем объем третьего не меньше объема второго. Первый резервуар имеет объем v и может быть заполнен первым шлангом за 3 часа, вторым шлангом — за 4 часа, третьим шлангом — за 5 часов. К каждому из резервуаров может быть подключен любой из этих трех шлангов. После того как произведено подключение к каждому из резервуаров по одному шлангу каким-либо способом, все шланги одновременно включаются. Как только какой-то резервуар наполнится, соответствующий шланг отключается и не может быть подключен в дальнейшем к другому резервуару. Заполнение считается оконченным, если наполнены все три резервуара. При самом быстром способе подключения заполнение окончится через 6 часов. Если бы резервуары сообщались, заполнение окончилось бы через 4 часа. Найти объемы второго и третьего резервуаров.

5. В треугольной пирамиде $SABC$ суммы трех плоских углов при каждой вершине B и C равны 180° и $SA = BC$. Найти объем пирамиды, если площадь грани SBC равна 100 $см^2$, а расстояние от центра описанного шара до плоскости основания ABC равно 3 $см$.

Вариант 2

1. Найти все решения уравнения

$$\sqrt{\sin x} = \sqrt{\cos(2+x)},$$

удовлетворяющие условию $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.

2. Найти все действительные значения a, при которых каждое решение неравенства

$$(0{,}5)^{\frac{1}{2(x-1)^2}} \leqslant (0{,}25)^{\frac{1}{(3-x)^2}}$$

является решением неравенства

$$16a^4x^2 - 9 \leqslant 0.$$

3. Найти все значения x, удовлетворяющие одновременно следующим условиям:

$$\begin{cases} |x+5| = |x+2| + 3, \\ 1114 + 279x \leqslant 139x^2. \end{cases}$$

4. В порту для загрузки танкеров имеется три трубопровода. По первому из них закачивается в час 300 тонн нефти, по второму 400 тонн, по третьему — 500 тонн. Нужно загрузить два танкера. Если загрузку проводить первыми двумя трубопроводами, подключив к одному из танкеров первый трубопровод, а к другому танкеру — второй трубопровод, то загрузка обоих танкеров при наиболее быстром из двух возможных способов подключения займет 12 часов. При этом какой-то из танкеров, может быть, окажется заполненным раньше и тогда подключенный

к нему трубопровод отключается и в дальнейшей загрузке не используется. Если бы вместимость меньшего по объему танкера была вдвое больше, чем на самом деле, и загрузка производилась бы вторым и третьим трубопроводами, то при быстрейшем способе подключения загрузка заняла бы 14 часов. Определить, сколько тонн нефти вмещает каждый из танкеров.

5. В треугольной пирамиде $SABC$ суммы трех плоских углов при каждой вершине A, B и C равны 180°. Найти расстояние между скрещивающимися ребрами SA и BC если $BC = 4$ *см*, $AC = 5$ *см*, $AB = 6$ *см*

Физика

Механико-математический факультет и факультет вычислительной математики и кибернетики

1. На концах легкого стержня длиной $l = 20$ *см* помещены два шарика, первый из свинца ($\rho_1 = 11{,}3\ г/см^3$), а второй из алюминия ($\rho_2 = 2{,}7\ г/см^3$). Стержень шарнирно закреплен посередине и опущен в воду, где он находится в равновесии. На сколько нужно передвинуть по стержню второй шарик, чтобы равновесие восстановилось в воздухе?

2. Шарик массы $m = 200$ *г* может скользить без трения по горизонтальному стержню, вращающемуся вокруг вертикальной оси с угловой скоростью $\omega = 2\ c^{-1}$. К шарику прикреплена пружина, другой конец которой закреплен на оси. Длина пружины в недеформированном состоянии $l = 20$ *см*. Определить абсолютное удлинение пружины Δl. Жесткость пружины $k = 4$ *н/м*.

3. Свинцовая пуля массы $m = 10$ *г*, летящая горизонтально со скоростью $v_0 = 400$ *м/с*, попадает в кусок свинца массы $M = 1990$ *г* и застревает в нем. Свинец лежит на гладкой горизонтальной поверхности. Найти, на сколько градусов Δt нагреется свинец. Передачу тепла окружающим телам не учитывать. Теплоемкость свинца $c = 1{,}2 \cdot 10^2$ *дж/кг·град*.

4. Цилиндрический сосуд высотой $l = 40$ *см* разделен на две части невесомым тонким поршнем, скользящим без трения. Поршень находится на высоте $h = 26{,}7$ *см* над дном цилиндра. Под поршнем находится водород, а над ним газ с неизвестной молекулярной массой μ. Узнать μ газа, если его масса равна массе водорода.

5. Пять конденсаторов объединены в цепь, показанную на рисунке 1. Емкости конденсаторов 1, 2, 3 одинаковы и равны: $C_1 = C_2 = C_3 = 2$ *мкф*. Емкости конденсаторов C_4 и C_5 равны 4 *мкф*. К точкам A и B приложено напряжение $u = 100$ *в*. Определить заряды q_4 и q_5 на четвертом и пятом конденсаторах.

6. Проводник длины $l = 0{,}1$ *м* может без трения скользить по двум проводящим параллельным рейкам, соединенным сопротивлением $R = 0{,}1$ *ом*, в однородном магнитном поле, индукция которого $B = 0{,}05$ *тл* перпендикулярна к плоскости реек. Какую силу нужно приложить к проводнику, чтобы он двигался равномерно со скоростью $v = 1$ *м/с*?

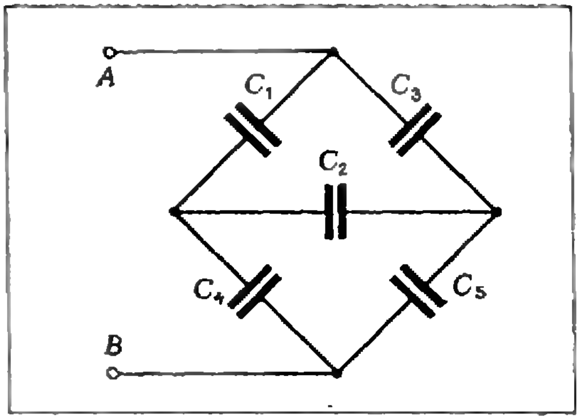


Рис. 1.

7. Размеры изображения предмета в вогнутом зеркале в $m = 2$ раза меньше, чем размеры самого предмета. Расстояние между предметом и изображением $d = 15$ *см*. Чему равен радиус кривизны зеркала?

Физический факультет

1. Космический корабль находится на расстоянии $h = 20\,000$ *км* от поверхности Земли и в системе координат, связанной с Землей, имеет скорость $v_1 = 6$ *км/с*, направленную по радиусу от центра Земли. Двигатели не работают. Упадет ли корабль на Землю или улетит в космическое пространство? Влиянием Солнца, Луны и планет пренебречь. Радиус Земли равен $R_0 = 6400$ *км*, $g_0 = 10$ *м/с²*. Что произойдет, если при тех же условиях скорость корабля $v_2 = 5$ *км/с* или $v_3 = 4$ *км/с*?

2. Три одинаковых тела начинают скользить по абсолютно гладкой неподвижной шаровой поверхности радиуса R из положения, когда третье тело находится на полюсе шара. Тела соединены невесомыми и нерастяжимыми нитями одинаковой длины $l \ll R$.

а) Определить начальное ускорение и этой системы тел.

б) Определить, при каком минимальном коэффициенте трения k между телами и шаровой поверхностью тела не сдвинутся с места.

3. Цилиндрический стакан плавает в воде так, что его края находятся у поверхности, когда он наполовину заполнен водой. Вынув стакан и вылив из него воду, погружают его вверх дном на такую глубину h, где он находится в равновесии (неустойчивом) — не всплывает и не тонет. Определить глубину h, отсчитывая ее от уровня воды в стакане. Атмосферное давление $p_0 = 10^5$ *н/м²*. Толщиной дна и стенок стакана пренебречь. $g = 10$ *м/с²*.

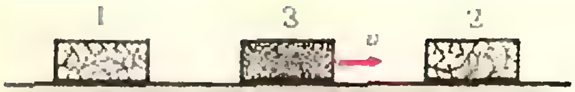


Рис. 2.

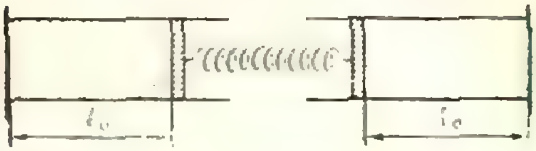


Рис. 3.

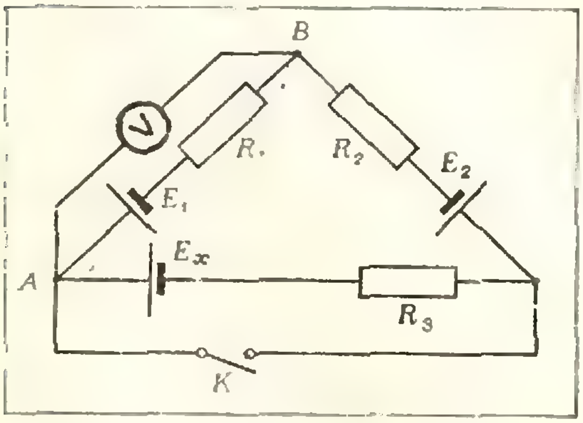


Рис. 4.

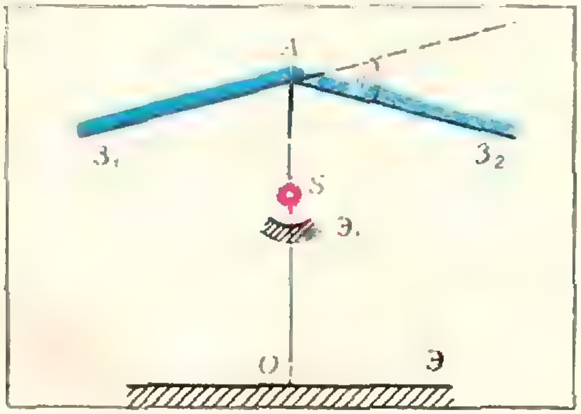


Рис. 5.

4. На абсолютно гладкой поверхности неподвижно лежат две одинаковые шайбы 1 и 2 массой M каждая. Между ними на линии, соединяющей центры этих шайб, имеется шайба 3 массой $M/4$ (тех же размеров), которая движется со скоростью v в направлении второй шайбы (рис. 2). Считая столкновения шайб абсолютно упругими, определить по величине и направлению скорости всех трех шайб после того, как столкновения прекратятся.

5. Между поршнями двух одинаковых неподвижных цилиндров, заполненных одинаковым газом, вставлена пружина (рис. 3). В исходном состоянии расстояние между поршнями и дном цилиндров равно l_0, начальная температура T_1. Затем газ в обоих цилиндрах был нагрет до температуры T_2, при этом давление в них возросло в n раз.

Найти, насколько изменилась длина пружины.

6. В сосуд объемом $V = 10$ *л*, наполненный воздухом при давлении $p_0 = 1$ *ат* и температуре $t_0 = 0$ °C, накачивают дополнительно массу $m = 4$ *г* азота при температуре 0 °C. Сосуд закрывают и нагревают до температуры $t_1 = 100$ °C. Определить давление p_x смеси газов в сосуде при этой температуре. Для азота $\mu = 28$.

7. Имеются два точечных заряда: отрицательный $-q$ с массой m и положительный $+Q$ с массой M. На каком расстоянии друг от друга должны быть расположены заряды, чтобы во внешнем однородном электрическом поле с напряженностью E они ускорялись как одно целое (т. е. не изменяя взаимного расположения)?

8. Электрическая цепь состоит из батарей с э. д. с. E_1 и E_2, сопротивлений R_1, R_2 и R_3 и неизвестной батареи E_x, включенных, как показано на рисунке 4. К участку AB подключен вольтметр V с большим внутренним сопротивлением. Определить, при каком значении э. д. с. E_x неизвестной батареи показания вольтметра не изменяются при замыкании ключа K. Внутренним сопротивлением батарей пренебречь.

9. Узкая светящаяся щель S расположена параллельно ребру малого (несколько минут) двугранного угла φ, образованного плоскими зеркалами $З_1$ и $З_2$, на расстоянии $AS = r$ от этого угла (рис. 5). На расстоянии $AO = L \gg r$ от ребра угла помещен экран Э. Определить угол 2α, под которым выходят из щели лучи, сходящиеся после отражения в центре экрана (точка O). Дополнительный экран $Э_1$ закрывает прямой пучок лучей от источника S.

10. Человек смотрит в вогнутое сферическое зеркало и видит прямое изображение своего глаза. Угловой размер этого изображения в $N = 1{,}8$ раза больше, чем угловой размер изображения, которое получилось бы в плоском зеркале, помещенном на таком же расстоянии $a = 24$ *см*. Определить радиус кривизны R вогнутого зеркала.

11. В воздухе длина волны монохроматического света $\lambda_0 = 6000$ Å. При переходе в стекло длина волны меняется и становится равной $\lambda_1 = 4200$ Å. Под каким углом φ свет падает на плоскую границу раздела воздух — стекло, если отраженный и преломленный лучи образуют прямой угол?

Ж. М. Михайлов,
В. Н. Слудский,
А. В. Устинова

ИНФОРМАЦИЯ

ФАЛТ — что это такое?

Редакция получает много писем с просьбой рассказать об институтах, готовящих специалистов для различных областей науки и техники, где необходимы фундаментальные знания математики и физики.

Многих наших читателей интересует Московский физико-технический институт. В 1972 году в нашем журнале была напечатана статья, в которой рассказывалось об МФТИ («Квант», 1972, № 6). В этом институте семь факультетов. Сегодня мы публикуем рассказ о факультете аэромеханики и летательной техники. Этот материал подготовил доцент факультета А. Л. Стасенко.

Московский ордена Трудового Красного Знамени физико-технический институт готовит научных работников по новейшей технике и современной физике для институтов Академии наук СССР, отраслевых научно-исследовательских институтов и конструкторских бюро.

Уже со второго года обучения студенты МФТИ постепенно включаются в работу коллективов ученых, а дипломные работы студентов, как правило, входят в план научно-исследовательских работ соответствующей лаборатории или института. Понятно, что очень важно приблизить студента к базовому институту даже территориально. Здесь мы расскажем об одном из факультетов МФТИ — факультете аэромеханики и летательной техники (ФАЛТ), — где эта проблема решена, пожалуй, идеально.

Первое слово предоставляем декану факультета профессору Л. А. Симонову:

«Наш факультет был организован в 1965 году. Для него был построен специальный учебный корпус и общежитие для студентов.

Летательная техника за последние 25 лет прошла путь от поршневой до сверхзвуковой реактивной авиации, до ракетной техники. Авиация заняла ведущее положение в пассажирском и грузовом транспорте, и надо ожидать ее дальнейшего развития.

Предстоит освоение полета на скоростях, превышающих достигнутые сверхзвуковые скорости, вплоть до орбитальной скорости полета, с использованием воздушной среды на всех высотах.

Методы решения научных проблем летательной техники могут быть теоретическими и экспериментальными.

Выпускник ФАЛТ должен владеть обоими методами — и теорией, и экспериментом.

ФАЛТ дает сведения на современном уровне об аэродинамике, газодинамике, механике полета, прочности применительно к летательным аппаратам различного типа и к их силовым установкам».

А вот что рассказывают руководители ведущих кафедр института.

Заведующий кафедрой аэрогидродинамики профессор В. В. Сычев:

«Предметом изучения аэрогидродинамики является движение жидкостей и газов. Человек всегда искал объяснений наблюдаемым закономерностям в течениях рек, полете птиц, порывах ветра и волнении моря. Но, пожалуй, только попытки создания первых летательных аппаратов тяжелее воздуха со всей остротой поставили вопросы о необходимости систематических исследований в этой области с целью создания строгой математической теории, объясняющей возникновение подъемной силы и гидродинамического сопротивления.

Теоретические исследования в области механики жидкостей и газов опираются на многие разделы математики. Некоторые из них вообще возникли на «гидродинамической» почве — это, например, векторный и тензорный анализ, ряд разделов теории функции комплексного переменного и, особенно, методы исследования и решения нелинейных уравнений с частными производными, так как с последними (кроме общей теории относительности) имеет дело только механика жидкостей и газов».

Заведующий кафедрой механики полета, профессор, член-корреспондент АН СССР Г. С. Бюшгенс:

«На кафедре механики полета готовят специалистов трех профилей.

1. Аэродинамика летательных аппаратов. Задача исследователей этой специальности — разработка проблем аэродинамики крыльев и других элементов летательного аппарата, отработка аэродинамики аппарата в целом; разработка

Был бы двигатель . . .

методов расчета аэродинамических характеристик, выбор основных параметров самолетов, ракет, орбитальных и космических аппаратов.

2. **Динамика летательных аппаратов.** Задача исследователей — проблемы динамики, в первую очередь устойчивость, управляемость движений; изучение траекторий — их оптимизация. Разработка принципов автоматического управления летательного аппарата.

3. **Оптимизация летательных аппаратов.** Задача исследователей в этой области — разработка методов поиска оптимальных решений при создании летательного аппарата.

Цифровые вычислительные машины открыли в этом отношении большие возможности, и разработка необходимых алгоритмов поиска оптимальных решений — здесь одна из главных задач.

Кафедра механики полета уделяет большое внимание методике и практике экспериментальных исследований, а также методологии использования их результатов».

Заведующий кафедрой авиационной автоматики и автометрии профессор М. А. Тайц:

«Создаваемые в настоящее время системы автоматического управления самолетов и других летательных аппаратов — это сложнейшие комплексы, включающие бортовые и наземные системы управления. При их создании используются новейшие достижения электроники и других областей науки и техники. Взаимодействие этих систем должно в ряде случаев обеспечивать практически полностью автоматизированное решение всех задач, возлагаемых на летательные аппараты. Создание и отработка этих систем немыслимы без глубоких теоретических исследований в различных областях науки и широких экспериментальных исследований.

У природы стоит поучиться.

Вторым важным направлением нашей работы является автометрия — сравнительно молодая отрасль науки, изучающая основы построения современных измерительных систем для сбора, переработки, хранения и выдачи информации».

Заведующий кафедрой общей физики ФАЛТ профессор В. Н. Жигулев:

«Физика на физтехе — главный предмет! Единство физики и техники для современной науки и производства очень четко отражено на физтехе.

Современная летательная авиационная и ракетная техника использует новейшие физические достижения. Поэтому будущий специалист, выпускник ФАЛТ, должен обладать широким объемом физических знаний.

На первом курсе студенты ФАЛТ изучают механику, куда включены вопросы специальной теории относительности, релятивистской динамики и теории поля, молекулярную физику и термодинамику, где рассматриваются основы статистической физики и физической кинетики. На втором курсе параллельно изучаются курсы «Колебания и волны» и «Электричество и магнетизм». Раздел «Колебания и волны» в курсе общей физики является оригинальным, здесь изучаются физические явления и процессы, родственные в смысле физической (колебательной и волновой) формы движения. Заключительный раздел «Квантовая физика» представляет собой годовой курс, охватывающий вторую половину второго курса и первую половину третьего курса. Здесь студенты изучают основные положения современной теории атома и ядра, а также физики твердого тела, квантовой статистики и физики излучения.

Заместитель заведующего кафедрой высшей математики МФТИ доцент В. М. Шалов:

«Студенты МФТИ изучают следующие обязательные математические дисциплины: математический анализ, аналитическую геометрию, основы линейной алгебры, дифференциальные уравнения, уравнения математической физики, теорию функций комплексного переменного, теорию вероятностей.

Кроме того, на III—IV курсах студенты всех факультетов изучают основы вычислительной математики и программирование. Все студенты проходят практику на современных ЭВМ, изучают алгоритмические языки «АЛГОЛ» и «ФОРТРАН».

Проверим прочность.

Для студентов старших курсов и аспирантов МФТИ читается также свыше 20 специальных математических курсов, среди которых обучающийся может выбрать себе спецкурс по желанию, в соответствии с задачами своей будущей специальности и своими научными интересами.

Кафедра высшей математики МФТИ работает в тесном контакте с Математическим институтом имени В. А. Стеклова АН СССР, с Вычислительным центром АН СССР. Это ведущие научные центры страны, и в них студенты соответствующих специальностей МФТИ слушают лекции крупных ученых, проходят практику».

В заключение — несколько слов заместителя секретаря партбюро ФАЛТ А. В. Гусева:

«С момента образования факультета комсомольцы ФАЛТ были его активными строителями, при их непосредственном участии факультет стал неотъемлемой частью физтеха.

Сделано немало, но сколько еще предстоит! И везде, во всех делах нам нужны горячие комсомольские сердца и умелые руки молодых. Именно вам предстоит завтра продолжать и приумножать то хорошее, что имеем мы сегодня. И нам сегодня совсем не безразлично, кто же будет на физтехе завтра. Поэтому не теряй времени, незнакомый друг! До встречи на физтехе. До встречи на ФАЛТ».

Адрес института и приемной комиссии: г. Долгопрудный Московской области, МФТИ.

Проезд электропоездом до станции Долгопрудная или Новодачная Северной ж. д. (с Савеловского вокзала).

Телефоны приемной комиссии: 216-67-40 (прямой) или (через коммутатор) 216-00-05, доб. 2-17.

А. Л. Стасенко

ШКОЛА-ИНТЕРНАТ ПРИ ЛЕНИНГРАДСКОМ ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ ИМ. А. А. ЖДАНОВА

Вот уже более 11 лет работают специализированные школы-интернаты при Московском, Ленинградском, Новосибирском и Киевском университетах. В этих школах учатся старшеклассники (8—10 классы), проявившие интерес и склонности к изучению математики, физики, химии, биологии.

Расскажем более подробно про школу-интернат при Ленинградском университете. В нее принимаются учащиеся, окончившие седьмой или восьмой класс, проживающие в Архангельской, Вологодской, Калининградской, Кировской, Ленинградской, Мурманской, Новгородской и Псковской областях, Карельской и Коми АССР, Латвийской, Литовской и Эстонской ССР.

Собеседование с желающими поступить в школу-интернат проводится на областных, зональных, республиканских и Всесоюзных олимпиадах. Кроме того, в июне в каждом областном и республиканском центре проводятся экзамены по профилирующим предметам для всех желающих поступить в школу-интернат. Сроки этих экзаменов можно узнать в областном отделе народного образования или Министерстве просвещения соответствующей республики.

Подавляющее большинство выпускников школы-интерната продолжают образование в Ленинградском университете.

Большое внимание уделяется различным олимпиадам. В проведении олимпиад уже сложилась определенная традиция. Мы проводим олимпиады новичков, I тур общешкольных олимпиад, в которых участвуют все ученики школы-интерната, II тур, задачи которого по уровню трудности близки к задачам Всесоюзных олимпиад.

Учащиеся школы-интерната успешно выступают на Всесоюзных олимпиадах. Достаточно сказать, что они более шестидесяти раз становились победителями и призерами этих олимпиад. Пятнадцать раз учащиеся школы-интерната становились победителями и призерами Международных олимпиад.

Приглашаем всех любителей математики и физики в нашу школу!

Наш адрес: 197228, г. Ленинград, ул. Савушкина, дом 61, ФМШ при ЛГУ.

А. А. Быков, Ю. И. Ионин

«Квант» для младших школьников

Задачи

1. Ира, Таня, Коля и Леня собирали грибы. Таня собрала больше всех, Ира — не меньше всех.

Верно ли, что девочки собрали грибов больше, чем мальчики?

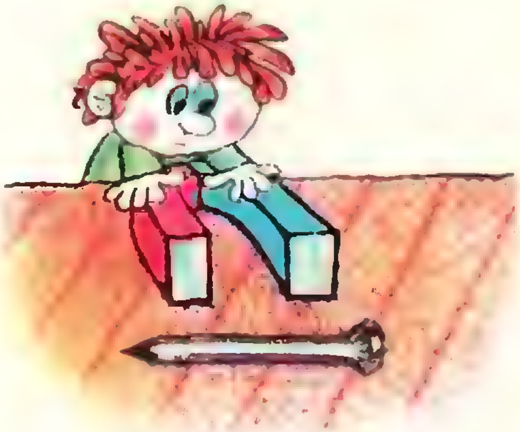
2. В сосуд, в котором находится 50 *г* льда при температуре $-10°C$, наливают 100 *г* воды, температура которой $+10°C$. Какой станет температура воды в сосуде? Теплоемкостью и теплопроводностью сосуда пренебречь.

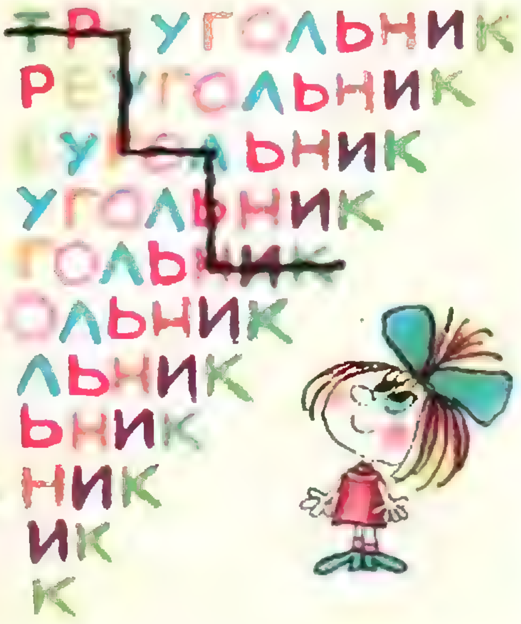
3. Доказать, что $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ делится на 10 тогда и только тогда, когда n не делится на 4.

4. На столе лежит гвоздь с маленькой тяжелой шляпкой. Как надо подвигать к нему подковообразный магнит, чтобы шляпка и острие прилипли к магниту одновременно?

5. Сколькими способами, продвигаясь от буквы к букве, можно прочитать слово «Треугольник»? На рисунке показан один из маршрутов. Сможете ли вы сосчитать все возможные пути?

Рисунки Э. Назарова





ПРО СЧЕТЫ

О. П. ЧОПЕНКО

Как вы думаете, сколько лет счетам? 100? 200? 300? Оказывается, намного больше! Прародитель счетов — он называется *абак* — был известен еще в Древней Греции. Правда, это были далеко не привычные нам счеты, а обыкновенная доска, посыпанная тонким слоем темного песка, на котором можно чертить пальцем или заостренной палочкой. По преданию, Архимед был убит римским солдатом, когда он занимался расчетами на такой «песочной доске».

Более поздним видом счетов, известным уже в IV веке до н. э., была «счетная доска» (такими досками пользовались и в эпоху Возрождения). Впрочем, есть основания предполагать, что такие доски были известны и раньше и что ими пользовались в XVIII веке до н. э. в Вавилоне. Сохранилось несколько изображений счетной доски, и одна греческая счетная доска была найдена на острове Саламин (рис. 1). Счетная доска — это прямоугольник, расчерченный параллельными линиями, представляющими разряды числовой системы, как правило, десятичной. Линии чертили на пергаменте, вырезали на дереве, гравировали на мраморе, а иногда даже вышивали на сукне. По этим линиям передвигали незакрепленные фишки, и таким образом производили простые вычисления. Фишками могла быть круглая галька или что-нибудь похожее, и от латинского слова *calculus* — галька — возникло слово *калькуляция* (вычисление стоимости товара, подсчет издержек и т. п.).

Счетная доска замечательна не только тем, что с ее помощью можно было производить арифметические операции. Не менее замечательно то, что на счетной доске числа делили на разряды и производили с ними операции так же, как мы производим их сейчас. В то же время, когда нужно было производить вычисления на бумаге, вернее, на пергаменте или папирусе, эти же вычисления производились с числами, записанными чрезвычайно неудобным образом. Попробуйте, например, сложить два боль-

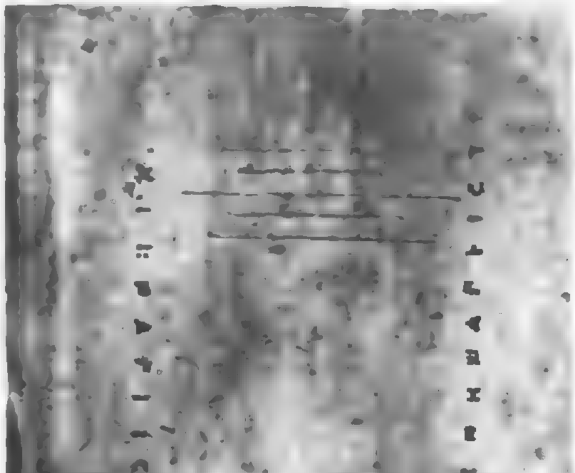


Рис. 1.

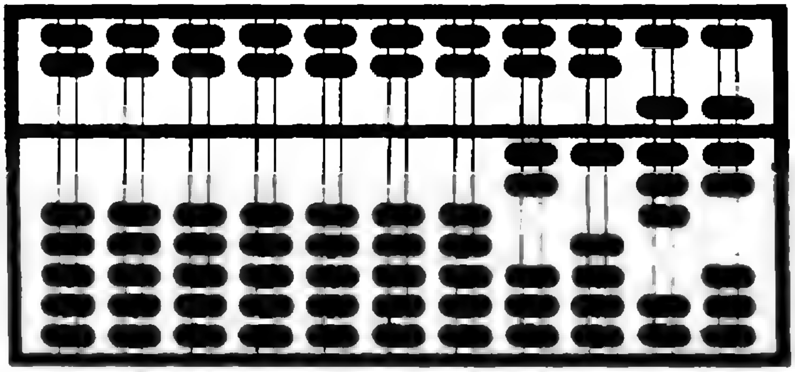


Рис. 2. Суан пэн
Отложено число 2187.

них числа, записанных римскими цифрами. Вы сразу убедитесь, что это намного труднее, чем сложить числа в обычной записи. А умножение и деление становятся просто непосильными операциями! Именно поэтому более XV веков в Европе почти все вычисления делались на счетах. Таким образом, одновременно существовали два способа обозначения чисел — один, крайне громоздкий и неудобный, применявшийся при записи чисел, и второй, вполне удобный и практичный, применявшийся при подсчетах. Этот второй способ, по сути дела, не отличается от привычного для нас современного способа записи. По-видимому, не счеты возникли после изобретения позиционной системы счисления, а позиционная система возникла благодаря счетам.

Первым, кто ввел в Европе индоарабскую систему обозначения чисел, был Леонардо из Пизы, известный под именем Фибоначчи. Он изложил ее в своей прекрасной книге «*Liber Abaci*» (1202 год). Распространение арабских цифр в Европе привело к появлению *алгористов* — вычислителей, которые полностью отказались от римской системы обозначения чисел ради более совершенной индо-арабской системы. Название *алгорист* происходит от имени арабского математика IX века Аль-Хорезми и является предшественником современного слова *алгоритм*. *Абакисты*, которые придерживались в письменных вычислениях римских цифр, и считали в основном на счетах, и алгористы часто состязались между собой в скорости вычислений. На рисунке, взятом из изданной в 1504 году книги «*Margarita philosophica*» (см. вторую страницу обложки), вы видите такое состязание.

Оптовые торговцы вскоре обнаружили, что новые цифры чрезвычайно удобны для ведения счетов. Однако в некоторых европейских странах пользоваться ими было запрещено законом, так что применять арабские цифры можно было лишь подпольно. Например, в 1299 году во Флоренции появляется указ, запрещающий употреблять арабские цифры, и даже в 1594 году в Антвéрпене купцам не разрешают писать арабские цифры в контрактах и векселях. С цифрами велась борьба даже в некоторых арабских странах. Новая система записи чисел окончательно победила лишь в XVI—XVII веках, когда началось массовое производство бумаги, а вскоре арабские цифры приобрели стандартное начертание благодаря книгопечатанию.

Но вернемся к счетам. Современные счеты — это, по существу, видоизмененная счетная доска, на которой фишки скользят по проволоке или стержням. В настоящее время используются три вида счетов: китайский *суан пэн*, японский *соробан* и русские *счеты*.

У китайского суан пэна (рис. 2) косточки скользят почти без трения по бамбуковым стержням. На каждом стержне помещается пять бусин (единиц) под разделителем и две (пятерки) — над разделителем. На рисунке 3 вы видите китайский иеро-

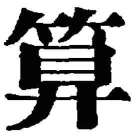


Рис. 3.

глиф «суан» — «исчислять». Он изображает счеты, которые держат два иероглифа «рука» над иероглифом «бамбук».

Происхождение суан пэна неизвестно. Его точное описание восходит к XVI веку, но он, несомненно, появился на много столетий раньше.

Японский соробан (рис. 4) также восходит к XVI веку, когда он, по всей вероятности, был заимствован из Китая. Косточки у него с заостренными краями: два конуса, соединенные в основаниях. На каждом стержне имеется лишь одна косточка (пятерка) над разделителем (эту область японцы называют *небом*), и только четыре косточки (единицы) внизу — на *земле*. Устройство первоначально имело пять косточек внизу, как на китайском суан пэне, но пятую выбросили около 1920 года.

В Японии до сих пор проводят ежегодные состязания в счете на соробане. Нередко проводились состязания между японскими или китайскими вычислителями на счетах и американскими — на арифмометре. Самое известное подобное состязание состоялось в 1946 году, когда рядовой Томас Вуд померялся силами с Киоси Мацузаки. Оказалось, что Мацузаки выполнил все расчеты, кроме умножения огромных чисел, быстрее.

Русские счеты резко отличаются от восточных. Возможно, они позаимствованы у арабов. До сих пор такие же счеты используются кое-где в Индии и на Ближнем Востоке, где турки называют их *кульба*, а армяне — *хореб*. Стержни с четырьмя косточками, которые вы видите на рисунке 5, используются для подсчета дробных частей рублей и копеек.

Лучше всего счеты приспособлены для сложения и вычитания. Умножение и деление на счетах осуществляется с помощью многократного повторения этих операций. Сложение и вычитание на счетах делается так же, как на бумаге при выполнении операций столбиком. Чтобы быстро считать на счетах, движения пальцев должны быть совершенно автоматическими: останавливаться и соображать нельзя! Если хорошо изучить движения пальцев, нужные для сложения, то движения, нужные для вычитания, можно не разучивать. Дело вот в чем. Пусть, например, нужно вычесть 9 213 из 456 789:

$$456\,789 - 9\,213 =$$
$$456\,789 + 786 - 9\,999 =$$
$$456\,789 + 786 + 1 - 10\,000.$$

Таким образом, мы свели вычитание к сложению и вычитанию некоторой степени десяти. (Разберитесь

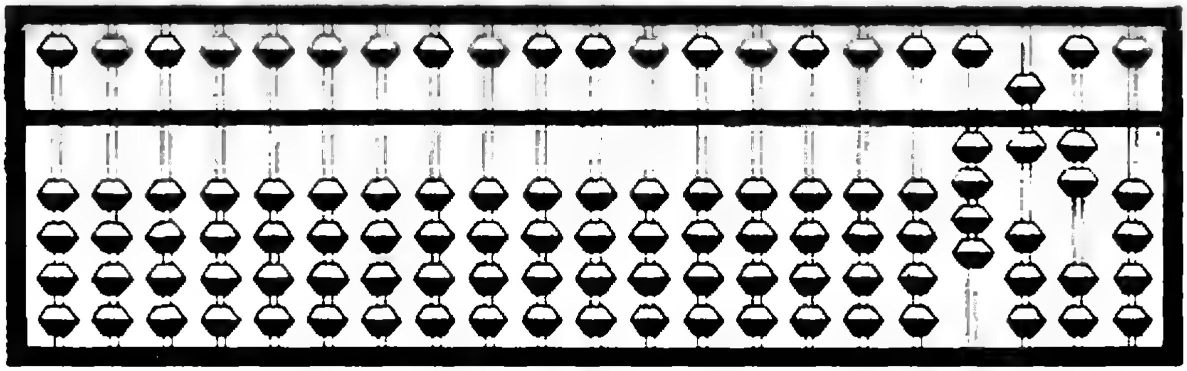


Рис. 4. Соробан. Отложено число 4620.

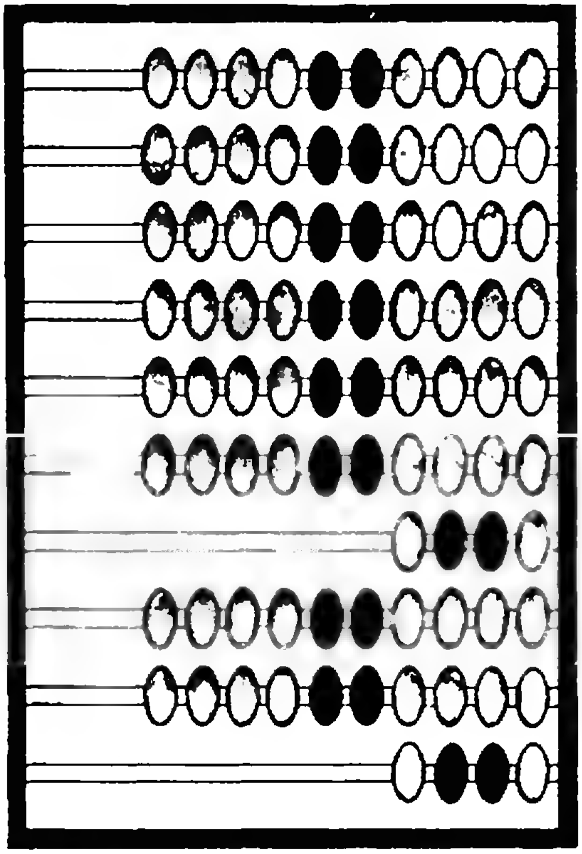


Рис 5

самостоятельно, как следует действовать в случае произвольных чисел.)

Этот метод называется методом вычитания путем добавления дополнений. Он используется и в быстродействующих ЭВМ. Здесь его применять особенно просто, поскольку машины работают в двоичной системе счисления. Применим этот метод и в числовой системе с любым основанием. Постарайтесь понять, как он будет выглядеть в случае системы с основанием q. (Разумеется, это задание относится только к тем, кто знает, что такое система с основанием q. Если вы этого не знаете, советуем вам прочитать статью «Системы счисления», напечатанную в «Кванте» № 6 за 1970 год.) Кстати говоря, на счетах тоже можно производить операции с числами, записанными и не в десятичной системе. Например, при подсчетах с двоичными числами нужно пользоваться самой левой косточкой в каждом ряду, с троичными — двумя левыми косточками и так далее. При работе с десятичными числами можно обойтись девятью косточками, а все десять косточек нужны только для одиннадцатиричной системы счисления.

Отличное практическое упражнение в сложении на счетах связано с таким числовым фокусом. Вы пишете «волшебное» число 12 345 679 и просите кого-нибудь из присутствующих назвать любую цифру. Допустим, названа цифра 7. Тогда вы предлагаете умножить волшебное число на 63. Оказывается — надо полагать, к всеобщему развлечению,— что произведение состоит из одних семерок (чтобы определить множитель, нужно попросту умножить названное число на 9).

Вот как можно использовать это «волшебное» число для упражнения на счетах. Положите на счетах 12 345 679 и прибавьте к нему это же число восемь раз. Если вы не допустили ошибок при этих сложениях, то вы получите на счетах число, состоящее из одних единиц. Сложите «волшебное» число еще девять раз и получите число из двоек, еще девять раз — из троек. Наконец, после 80 сложений вы должны получить число из одних девяток. Это упражнение замечательно тем, что с его помощью легко проверить точность работы на каждом из девяти этапов.

Кроме 12 345 679 есть еще бесконечное множество «волшебных» чисел. Например, $37 \times 3 \times d$, где d — однозначное число, состоит из одних d. Наименьшее волшебное число для семи — 15 873; для 13 — 8 547, для 99 — 1 122 334 455 667 789. Найдите самостоятельно наименьшее «волшебное» число для 17. Постарайтесь разобраться, для каких чисел можно указать «волшебное» число, а для каких — нельзя.

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

К статье «Как приступить к решению задачи по физике?»

1. $N = 2mgv\frac{h_1 - h_2}{l} = 200$ *квт*. Можно использовать законы Ньютона и уравнения кинематики точки, а также закон сохранения энергии для неконсервативных систем. Соответственно возможны два способа решения.

2. $v_0 > \sqrt{2\mu gL\left(1 + \frac{m}{M}\right)}$. Можно использовать: а) законы Ньютона и уравнения кинематики точки для доски и бруска в отдельности, б) закон сохранения импульса для системы доска — брусок, в) закон сохранения энергии для неконсервативных систем. Возможны два способа решения: первый с использованием законов а) и б), а второй — законов б) и в).

3. $A = 2\,mgH$. В исследуемой ситуации можно использовать законы Ньютона и кинематику точки, а также закон сохранения энергии для неконсервативных систем. Поскольку профиль горки неизвестен, записать законы Ньютона нельзя. Для решения следует применить закон сохранения энергии.

К статье «Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова»

Математика

Механико-математический факультет

Вариант 1

1. $x = \pi + 2\pi n;\ x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k$,

где n, k — любые целые числа.

Указание. Не забудьте, что $\cos x \leqslant 0$.

2. $-1 \leqslant x < 1;\ 1 < x \leqslant 3$.

3. $S_{ABC} = \frac{9\sqrt{3}}{4}$. Указание. Легко получить систему уравнений:

$$\begin{cases} AB + AD = DE, \\ AD \cdot DE = BD^2, \end{cases}$$

где BD^2 можно выразить по теореме косинусов из $\triangle ABD$.

4. $V_{ABCD} = 36$.

Указание. Пусть O — центр сферы, M, L, K — точки ее касания граней ABC, ABD и ребра CD соответственно, P — точка пересечения плоскости OML с ребром AB. Тогда $OMPL$ — квадрат со стороной 2 (докажите!), поэтому $DL = 2LP = 4$ и $KD = DL = 4$ как касательные, проведенные из точки D к сфере. Аналогично $CK = CM = 5$. Пусть N — точка пересечения ребра AC с прямой, проходящей через M параллельно AB. Обозначив AC через x, выразив через x отрезки NC и NM и написав теорему Пифагора для треугольника NCM, найдем, что $AC = 6$, $AB = 6$.

5. $\alpha = 100$. Указание. Из первого равенства получаем: $89 \leqslant \alpha \leqslant 111$. Найдя α из второго равенства, докажем, что α — целое число, кратное 5.

Вариант 2

1. $x = \pi n;\ x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k$, где n, k — любые целые числа.

2. $x \leqslant -2;\ x = -1;\ x \geqslant 0$.

3. $P_{ABC} = 3 + \sqrt{3}$.

Указание. $\triangle ABD \backsim \triangle BCD$.

4. $AC = \frac{5}{4}$.

Указание. Пусть K и M — точки касания сферы с ребром AC и гранью BCD соответственно, и пусть радиус сферы равен r. Так как AO — биссектриса угла BAC, то $AK = r\sqrt{3}$. Пусть $OP \perp BC$ (точка P лежит на BC), тогда точки D, M и P лежат на одной прямой и $DP \perp BC$, $\angle DPO = 60^\circ$. Так как $OM = r$, из $\triangle ODP$ легко выразить через r OP и DP, а затем и BP. После этого из $\triangle DPB$ находим $r = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

5. $\alpha = 100$.

Физический факультет

Вариант 1

1. $x = \frac{2\pi}{3} \pm \frac{\pi}{3} + \pi n$, где n — любое целое число.

2. $1 - \sqrt{3} < x < 1 + \sqrt{3}$.

3. $x = 2^{-8};\ x = 2^{27}$.

4. $BD = \frac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{5}}$.

Указание. Обозначив $\angle EAC$ через φ, легко выразить через φ отрезок KL и высоту в $\triangle KML$, а затем и его площадь, равную $\frac{\sqrt{3}}{5}$, откуда $\cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$.

5. $\frac{a^2\sqrt{2}}{54}$. Указание. Если спроектировать основания пирамид на плоскость одного из них, получатся два правильных треугольника с общим центром, повернутые вокруг него друг относительно друга на 60° (см. рис. 1). Легко понять, что боковые ребра каждой из пирамид «протыкают» боковые грани другой в центрах этих граней. Поэтому общая часть пирамид состоит из двух пирамид, все ребра которых равны $\frac{a}{3}$, и тела, изображенного на рисунке 2. Это тело состоит из двух правильных четырехугольных пирамид, все ребра которых также равны $\frac{a}{3}$. На рисунке 2 O_1, O_2, O_3 — центры граней ASC, BSC и ASB соответственно; P_1, P_2, P_3 — центры граней LNK, KNM и MNL соответственно; общее основание указанных пирамид заштриховано. Эти пирамиды составляют правильный октаэдр со стороной $\frac{a}{3}$.

Вариант 2

1. $x = 2\,\mathrm{arctg}\,2 + 2\pi n$, где n — любое целое число.

2. $x > 1 + \sqrt{2}$; $x < -1 - \sqrt{2}$.

3. $x = 3^{\sqrt[3]{4}}$; $x = 3^{\sqrt[3]{9}}$.

4. $BC = \sqrt{R^2 + b^2 - 2bR\cos\frac{\alpha}{2}}\cdot\mathrm{ctg}\,\frac{\alpha}{2}$.

Указание. Заметив, что KO — биссектриса угла MKN и что $\angle OMN = \angle MNO = \frac{\alpha}{2}$, из $\triangle OMC$ найдем OC. Около четырехугольника $BCON$ можно описать окружность, поэтому $\angle CBO = \angle CNO = \frac{\alpha}{2}$. Теперь из прямоугольного треугольника BCO легко найти ответ.

5. $\frac{a^3}{18}$.

Факультет вычислительной математики и кибернетики

Вариант 1

1. $x = \frac{7\pi}{4} + \frac{1}{2}$. Указание. Возведя обе части уравнения в квадрат, получаем после преобразований, что

$$x = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} - \pi n, \qquad (1)$$

где n — любое целое число. Условию $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ удовлетворяют лишь

$$x_1 = \frac{1}{2} + \frac{3\pi}{4} \text{ и } x_2 = \frac{7\pi}{4} + \frac{1}{2},$$

получающиеся из (1) при $n = -1$ и $n = -2$ соответственно. Но $\cos x_1 < 0$, что не удовлетворяет условию.

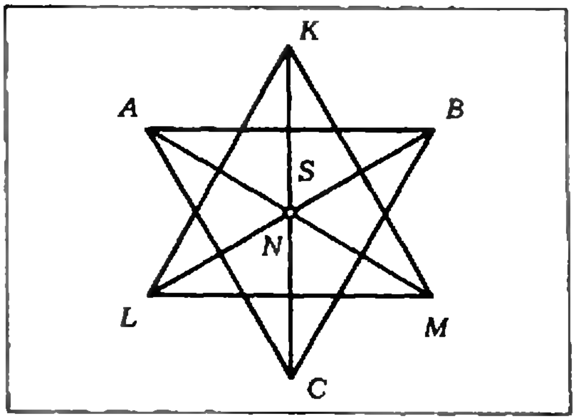


Рис. 1.

2. $|a| \geqslant \sqrt{7}$ (иначе, $a \geqslant \sqrt{7}$, $a \leqslant -\sqrt{7}$). Указание. Решения первого неравенства $-1 \leqslant x < 0$, $0 < x \leqslant 2$, второго $|x| \leqslant \frac{2}{7}a^2$. Условие выполнено, если $\frac{2}{7}a^2 \geqslant 2$.

3. $x = 2$; $\frac{487}{163} \leqslant x \leqslant 3$. Указание. Решения уравнения: $2 \leqslant x \leqslant 3$, решения неравенства: $x \leqslant 2$; $x \geqslant \frac{487}{163}$, причем $\frac{487}{163} < 3$.

4. $\frac{2}{15}v$; $2v$. Указание. Пусть объем второго резервуара равен x, объем третьего — y. Легко найти, что $x + y = \frac{32}{15}v$. Дальше надо провести перебор возможных случаев, учитывая, что $x \leqslant y$ и что 6 часов — время наполнения при *быстрейшем* способе подключения.

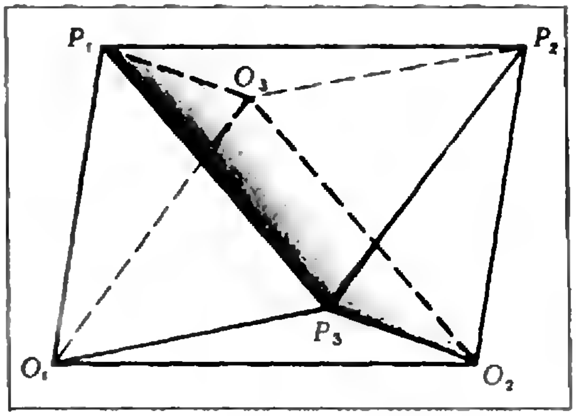


Рис. 2.

5. $V_{SABC} = 400$ *см*^{3}. Указание. Из условия следует: а) все грани пирамиды равны; б) центр описанного около пирамиды шара совпадает с центром вписанного шара (см. «Квант», 1970, № 10, с. 42). Отсюда следует, что радиус вписанного шара равен 3 *см*. Соединив центр шара с вершинами пирамиды, разобьем данную пирамиду на четыре равновеликие пирамиды с высотой 3 *см* и площадью основания 100 *см*^{2}.

Вариант 2

1. $x = \frac{5\pi}{4} - 1$.

2. $|a| \leqslant \frac{3}{2\sqrt{5}}$.

3. $x = -2$; $x \geqslant \frac{557}{139}$.

4. 3500 *т*; 4800 *т*.

5. $\sqrt{\frac{61}{2}}$.

Указание. Из условия задачи следует: а) все грани пирамиды равны; б) проекция пирамиды на плоскость, параллельную ребрам AS и BC — прямоугольник. С помощью б) легко доказать, что отрезок, соединяющий середины ребер AS и BC, перпендикулярен к этим ребрам.

Физика

Механико-математический факультет и факультет вычислительной математики и кибернетики

1. $x = \frac{l\rho_0(\rho_1 - \rho_2)}{2\rho_2(\rho_1 - \rho_0)} = 3{,}1$ *см* (ρ_0 — плотность воды).

2. $M = \frac{m\omega^2 l}{k - m\omega^2} = 5$ *см*.

3. $M = \frac{v_0^2}{2c}\frac{Mm}{(M + m)^2} = 3{,}3$ С.

4. $\mu = \frac{h}{l - h}\mu_{H_2} = 4$.

5. $q_4 = q_5 = \frac{uC_1C_4}{C_1 + C_4} = 1{,}33 \cdot 10^{-1}$ *к*.

6. $F = IBl = \frac{vB^2l^2}{R} = 2{,}5 \cdot 10^{-1}$ *н*.

7. $R = \frac{2dm}{m^2 - 1} = 20$ *см*.

Физический факультет

1. Если кинетическая энергия корабля больше его потенциальной энергии, то корабль улетит. При $v_1 = 6$ *км/с* корабль улетит, при $v_2 = 5$ *км/с* и $v_3 = 4$ *км/с* — упадет на Землю.

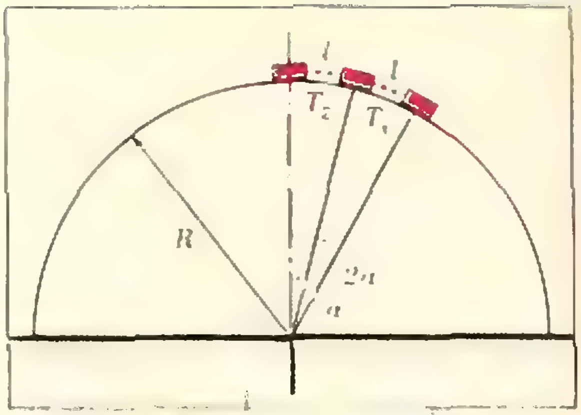


Рис. 3.

2. Так как $l \ll R$ (рис. 3), то

$$\operatorname{tg}\alpha \approx \sin\alpha \approx \alpha \approx \frac{l}{R}, \quad 2\alpha = \frac{2l}{R}, \quad \cos 2\alpha \approx 1.$$

$$\text{а) } a = g\alpha = g\frac{l}{R}, \quad \text{б) } k \geqslant \alpha = \frac{l}{R}.$$

3. $h = \frac{p_0}{\rho g} = 10$ *м*.

4. Записав закон сохранения энергии и закон сохранения количества движения для соударения шайб 3 и 2, и затем для соударения шайб 3 и 1, можно найти:

$$v_1 = -\frac{6}{25}v; \quad v_2 = \frac{2}{5}v; \quad v_3 = \frac{9}{25}v.$$

5. $M = 2l_0\frac{T_2 - nT_1}{nT_1}$.

6. $p_x = \frac{p_0T_1}{T_0}\left(1 + \frac{V_0}{V}\right) = 1{,}8$ *ат*.

7. Ускорение зарядов определяется силой, действующей на них со стороны поля, и силой Кулона. Из уравнений движения для каждого заряда получим

$$d = \sqrt{\frac{(M + m)qQ}{4\pi\varepsilon_0 E(mQ + Mq)}}.$$

8. Ток на участке AB не должен изменяться, поэтому $E_x = \frac{(E_2 - E_1)R_1}{R_1 + R_2}$.

9. Так как изображения источника S' и S'' (рис. 4) находятся за зеркалом на одинаковом расстоянии, равном расстоянию от источника до зеркала, то точки S, S' и S'' лежат на одной окружности радиуса r с центром в точке A. Все углы малы, поэтому дуги можно заменить хордами. Тогда $P_1P_2 = r \cdot 2\alpha = L \cdot 2\omega$ (см. рис. 4),

$$2\omega = \frac{2l}{L + r}, \quad 2\varphi = \frac{2l}{r}, \quad 2\alpha = 2\varphi\frac{L}{L + r}.$$

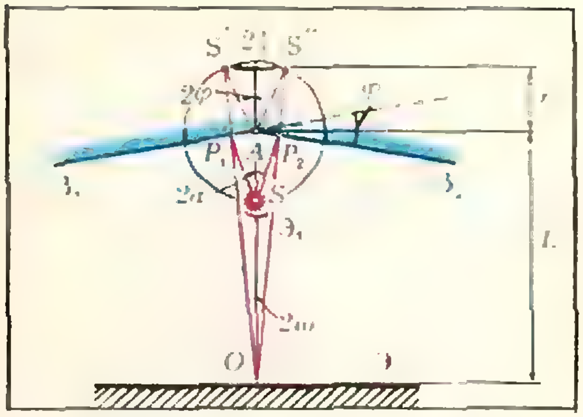


Рис. 4.

10. Построим изображение предмета в плоском и сферическом зеркалах (рис. 5):

$$\frac{\operatorname{tg}\varphi_2}{\operatorname{tg}\varphi_1} = N = 1{,}8, \quad \operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{y_1}{2a},$$

$$\operatorname{tg}\varphi_2 = \frac{y_2}{a+b}, \quad \frac{y_2}{y_1} = \frac{y_2}{y_0} = \frac{b}{a}.$$

Из этих уравнений получаем $b = 9a$. Но

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{2}{R}.$$

Отсюда

$$R = \frac{9a^2 \cdot 2}{8a} \approx 54 \text{ см}.$$

11. При переходе световой волны из одной среды в другую частота ν сохраняется, а длина волны λ и скорость распространения света изменяются: $\lambda_0 = \frac{c}{\nu}$, $\lambda_1 = \frac{v}{\nu} = \frac{c}{n\nu}$ (n — показатель преломления стекла). Отсюда $n = \frac{\lambda_0}{\lambda_1} = 1{,}43$.

Угол падения φ и угол преломления ψ связаны соотношением $\frac{\sin\varphi}{\sin\psi} = n$. По условию $\varphi + \psi = \frac{\pi}{2}$. Таким образом,

$$\operatorname{tg}\varphi = n = 1{,}43, \qquad \varphi \approx 54^\circ 30'.$$

К задачам «Квант» для младших школьников»

(*См. «Квант», 1975, № 4*)

1. Митя купил чешские марки, Толя и Петя — советские, Саша — болгарские.

2. Чтобы «прорвать» поверхность воды, надо преодолеть силу поверхностного натяжения. Давление много больше, когда ныряльщик «входит» в воду головой (площадь поверхности меньше).

3. Указание. Воспользовавшись признаками деления числа на 9 и на 5, показать, что достаточно рассмотреть набор чисел (1, 2, ..., 10).

4. Вода в сосуде остынет быстрее, если лед лежит сверху на крышке.

5. 12 лет.

Итоги турнира

(*см. «Квант», 1975, № 3, 2-я с. обл.*)

1) Начнем с позиции из партии № 2 — № 1. Белые могут в пять ходов съесть пешку a7, но если они действуют прямолинейно, то партия заканчивается вничью: 1.Kpe7 Kpc3 2. Kpd7 Kpd4 3. Kpc7 Kpd5 4. Kpb7 Kpd6 5. Kp:a7 Kpc7! и белый король в капкане. В распоряжении белого короля имеется 30 маршрутов, заканчивающихся взятием пешки, но лишь один из них ведет к победе! **1. Kpe6**! **Kpc3 2. Kpd5**! Белый король, как говорят шахматисты, «отталкивает плечом» своего оппонента **2...Kpd3** (вынужденная потеря темпа) **3. Kpc6 Kpd4 4. Kpb7 Kpd5 5. Kp:a7 Kpc6 6. Kpb8** и т. д. Эту партию № 2 выиграл благодаря тому, что был лучше знаком с геометрией шахматной доски.

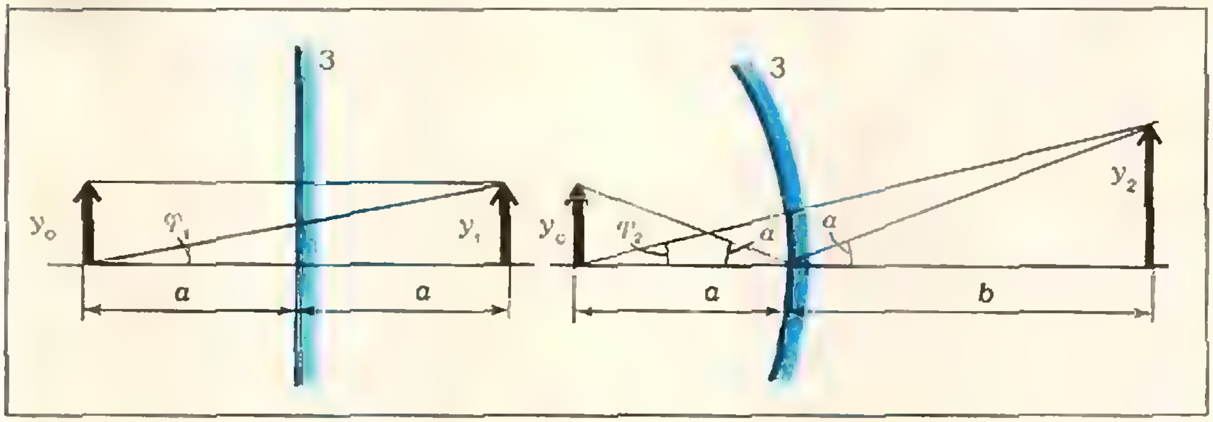
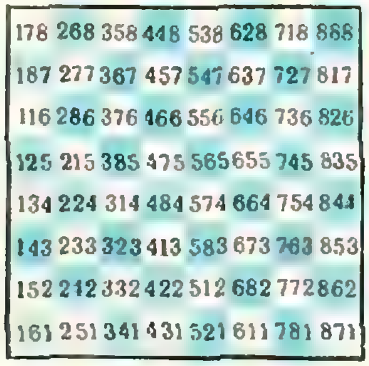


Рис. 5.

2) В партии № 3 — № 2 возникла удивительная позиция, в которой одна белая пешка справляется со всей армией неприятельских фигур. **1. Кр:d1 Фh1** (выбора нет) **2. а3!!** Почему не 2.а4? Хитрость раскроется позднее. **2...Фh2 3. а4 Фh1 4. а5 Фh2 5. а6 Фh1 6. а7 Фh2 7.а8 К!!** Теперь конь съедает обе пешки «f», а затем берет ладью g3 с матом (в этот момент черный ферзь стоит на h1). Итак, при ферзе на белом поле h1 конь объявляет мат с черного поля g3. Поскольку в данном окончании ферзь на каждом ходу меняет цвет поля, а конь всегда обладает этим свойством (см. по этому поводу «Квант», 1971, № 9), то и в момент появления коня поля, на которых стоят ферзь и конь, должны иметь разные цвета. Вот почему на первом ходу белые двинули пешку всего на одно поле!

3) Как мы видим, судьба турнира решалась в партии № 1 — № 3. Имея лишнюю пешку, белые не сомневались в победе. Однако партия, к их удивлению, вскоре закончилась вничью. Возможно, если бы № 1 знал о существовании математического «правила пяти», то он не пошел бы на данную позицию, а предпочел другой план. Для подобных ладейных окончаний с отрезанным королем слабейшей стороны «правило пяти» заключается в следующем. Если номер горизонтали, на которой находится пешка, и число вертикалей, отделяющих ее от неприятельского короля, в сумме не превосходят пяти, то партия заканчивается вничью. Если эта сумма больше пяти, то спасения нет. В нашем случае указанная сумма равна 5, позиция ничейная!



178	268	358	448	538	628	718	888
187	277	367	457	547	637	727	817
116	286	376	466	556	646	736	826
125	215	385	475	565	655	745	835
134	224	314	484	574	664	754	844
143	233	323	413	583	673	763	853
152	242	332	422	512	682	772	862
161	251	341	431	521	611	781	871

Рис. 6.

Итак, результаты турнира таковы: первое место заслуженно занял математик № 3 (он лучше освоил математические свойства шахматной доски), на втором месте № 2 и на третьем № 1.

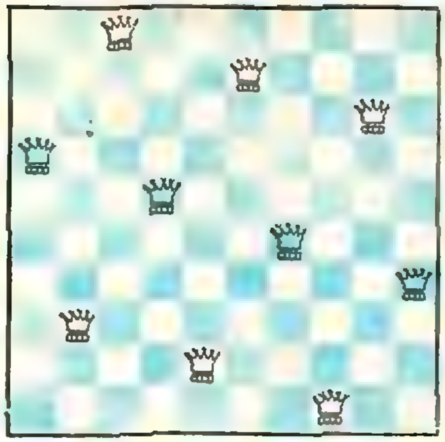


Рис. 7.

К статье «Математические игры на шахматной доске»

(см. «Квант», 1975, № 4)

1. Белые проигрывают (а в поддавки — выигрывают) независимо от очереди хода.

а) **1. d8K!**, и этот конь быстро приносит себя в жертву;

б) на любой ход черного коня следует d8C!, и слон вскоре становится под удар коня.

2. 1. Кре4! Фd8! (иначе белый король уже на втором ходу встанет под бой) **2. Крd4!**, и следующим ходом король кончает самоубийством.

4. В таблице на рисунке 6 первая и третья цифры на полях — номера вертикалей и горизонталей, проходящих через них, вторая цифра — номер диагонали, параллельной линии h1 — a8. Если ферзи не угрожают друг другу, то на восьми полях, занятых ими, все левые цифры различны и, значит, образуют полный набор чисел 1,2,...,8. То же самое касается вторых и третьих цифр. Из этого следует, что сумма всех 24 цифр, записанных на полях с ферзями, равна $(1+2+\ldots+8)\cdot 3=108$. Из рисунка видно, что сумма цифр каждого поля делится на 8, то есть найденная сумма также должна делиться на 8. Однако 108 на 8 не делится — противоречие!

5. Одна из расстановок показана на рисунке 7 (вместо магараджей здесь изображены обычные ферзи). Заметим, что всего существует 4 искомые расстановки, остальные три получаются из данной при помощи двух поворотов доски, и также одного отражения.

Корректор Е. В. Сидоркина

117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15,
«Квант», тел. 234-08-11. Сдано в набор 15/II 1975 г.
Подписано в печать 1/IV 1975 г
Бумага 70×100¹/₁₆. Физ. печ. л. 5
Усл. печ. л. 6,50. Уч.-изд. л. 7,24. Тираж 368 680 экз.
Т-06531 Цена 30 коп. Заказ 276

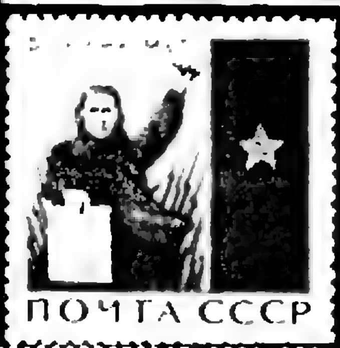
Чеховский полиграфический комбинат
Союзполиграфпрома
при Государственном комитете Совета Министров
СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли, г. Чехов Московской области

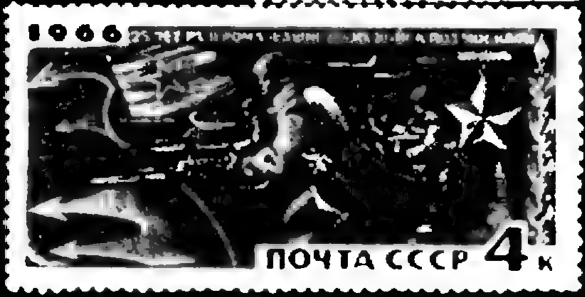
Рукописи не возвращаются

XXX лет победы над гитлеровским фашизмом

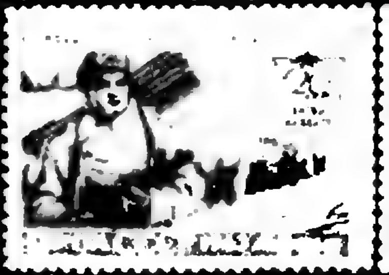
В мае 1945 г. победоносно закончилась Великая Отечественная война советского народа против гитлеровской Германии.
Ценой 20 миллионов жизней наш народ не только отстоял завоевания Великого Октября, но и освободил народы Европы от фашизма.
В нашей стране выпущено около трехсот марок и блоков, рассказывающих о подвиге советского народа в Великой Отечественной войне. Часть из них вышла в годы войны. Они были посвящены героическим подвигам наших воинов, партизан и тех, кто самоотверженным трудом в тылу создавал оружие и снабжал фронт всем необходимым. Однако бо́льшая часть таких марок была выпущена уже после окончания войны. Они выпускались к различным юбилейным датам. Некоторые из этих марок мы воспроизводим на приведенных здесь фотографиях.

Вверху вы видите марку с известным плакатом военных лет художника И. Тоидзе «Родина-мать зовет», призывающим вступать в народное ополчение.
Крупные военные поражения потерпели гитлеровские войска в битвах под Москвой, под Сталинградом и под Орлом и Курском.

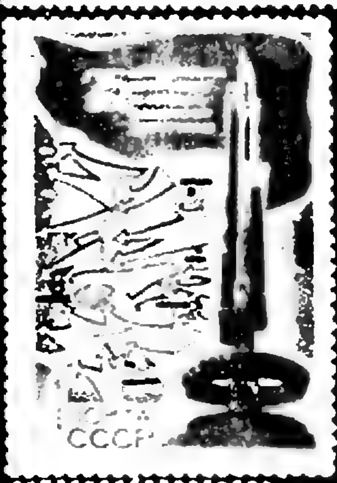


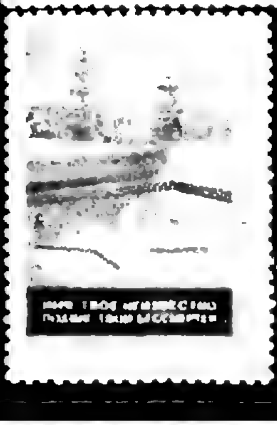


Мы воспроизводим здесь марки, выпущенные к 25-летию разгрома гитлеровских полчищ под Москвой и 20-летию победы наших войск под Сталинградом и на Курской дуге. Здесь же приведена марка, посвященная одной из наиболее крупных операций заключительного этапа войны—операции «Багратион», в результате которой была освобождена Белоруссия и наши войска вышли к границам Восточной Пруссии. На марке изображен памятник: четыре штыка, символизирующие четыре фронта, в результате совместных действий которых была проведена операция. На заднем плане — карта с изображением направлений главных ударов советских войск.
На фото также приведена марка, выпущенная в декабре 1967 г., с изображением памятника — Неизвестному солдату — памятника всем павшим в Великой Отечественной войне. 8 мая 1967 года, в канун праздника Победы на могиле Неизвестного солдата был зажжен Вечный огонь славы от факела, доставленного из Ленинграда с Марсова поля, где похоронены борцы Великого Октября.

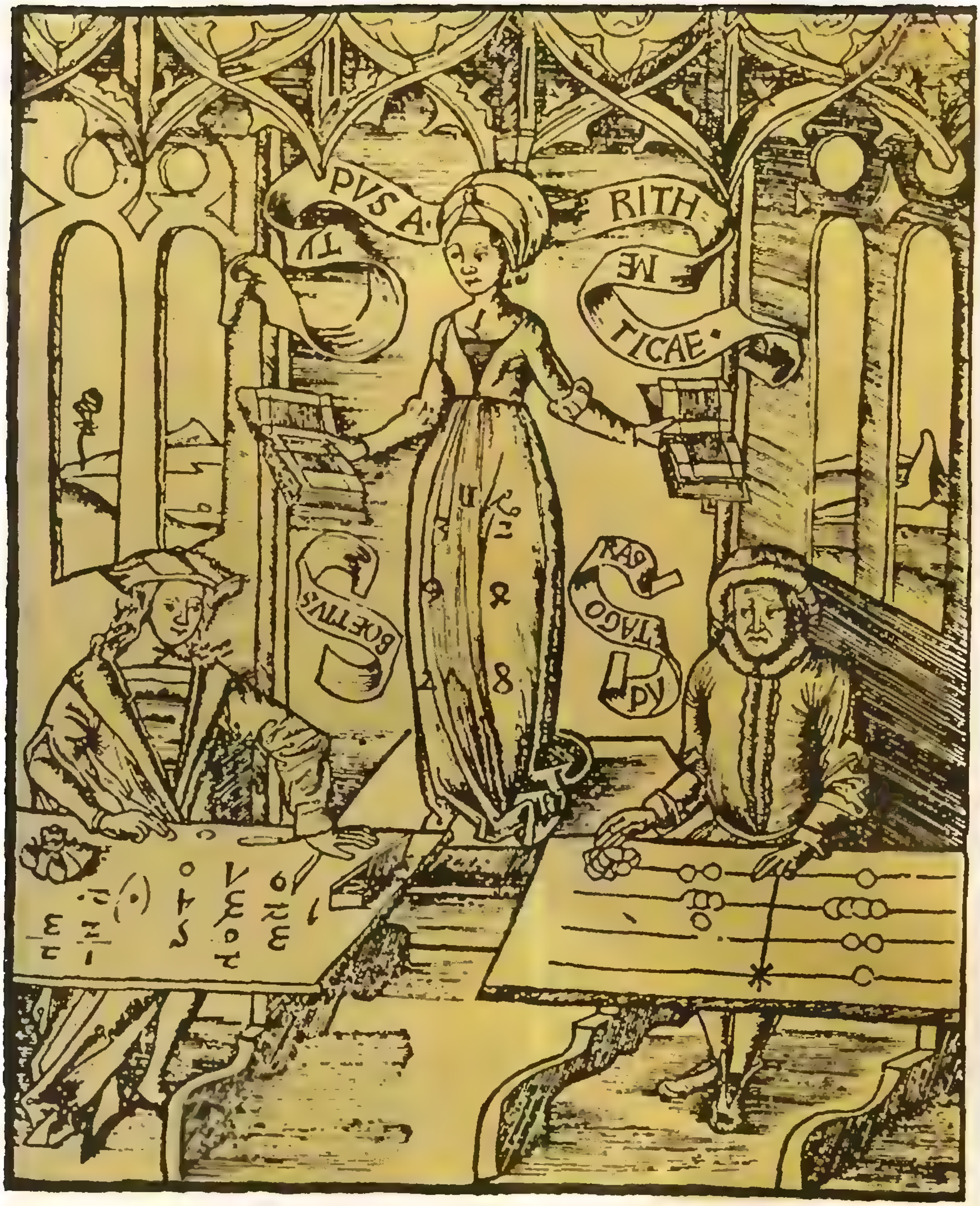


ВЕЛИКАЯ ОТЕЧЕСТВЕННАЯ ВОЙНА 1941-1945
4 к





А. В. Алтынкин


TV PVS A·
RITH ME TICAE·
BOETIVS
PY TAGO RAS

На этом рисунке, взятом из изданной в 1504 году книги «Margarita philosophica» Георга Рейша, вы видите состязание между «абакистом» и «алгористом». О том, кто такие «абакисты» и «алгористы», вы можете узнать из статьи «Про счеты».

Индекс 70465

5

К нашим читателям

Продолжается подписка на 1975 год на научно-популярный физико-математический журнал «Квант».

«Квант» адресован всем школьникам 6—10 классов, которые любят математику и физику, любят решать задачи.

Наш журнал полезен и тем школьникам, которые еще не увлеклись физикой или математикой, но хотели бы получше познакомиться с этими науками.

Сейчас происходит коренная переработка школьных программ по математике и физике. «Квант» активно участвует в этой работе. В 1975 году на страницах журнала будут систематически публиковаться статьи, разъясняющие материал новых программ.

Много материалов будет опубликовано для школьников 10 классов, готовящихся к поступлению в институт.

В 1975 году «Квант» будет продолжать печатать статьи для младших школьников. Объем этих публикаций будет существенно расширен.

«Квант» полезен также и преподавателям. Материалы, публикуемые в «Кванте», могут быть использованы на занятиях математических и физических кружков и на факультативных занятиях.

Читайте в «Кванте» в 1975 г.

Статьи, посвященные опытам, которые можно провести как с моделями как физического, так и математического происхождения.

Большое количество статей будет посвящено новой программе в школе. Так, в статьях А. Г. Мордковича школьники познакомятся с понятием производной и ее применением при решении задач.

Вот уже пятый год раздел журнала «Задачник Кванта» учит школьников решать задачи повышенной трудности по математике и физике. В работе этого раздела принимают участие школьники из городов и сел. Читатели, регулярно присылающие правильные решения, получают право участия в областных олимпиадах. Редакция консультирует школьников, присылающих решения задач.

Для поступающих в вузы в 1975 году будут опубликованы статьи на следующие темы. Математика: тождественные преобразования иррациональных уравнений; проверка решений; уравнения с параметрами; доказательство неравенств; использование монотонности функций при решении уравнений и неравенств; решение тригонометрических уравнений; решение задач на тела вращения; прямоугольная проекция при решении стереометрических задач; «скрытые» данные в условии задачи.

Физика: законы идеальных газов, электрический ток, линии передач; трансформаторы; построение изображений (пластинка, линза, зеркало); оптические приборы; глаз; интерференция.

Мы будем продолжать знакомить наших читателей с новыми книгами, представляющими для них интерес, рассказывать о работе физико-математических школ, об олимпиадах, о работе различных вузов со школьниками и т. д.

Подписка на «Квант» принимается без ограничения в пунктах приема подписки «Союзпечать», отделениями связи, на почтамтах. При подписке ссылайтесь на наш индекс 70465. Цена номера 30 коп.

НОМЕР
6

Основан в 1970 году.
КВАНТ
1975
6

Научно-популярный
физико-математический
журнал
Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической
литературы

Главный редактор
академик И. К. Кикоин

Первый заместитель
главного редактора
академик А. Н. Колмогоров

Редакционная коллегия:

М. И. Башмаков,
С. Т. Беляев,
В. Г. Болтянский,
Н. Б. Васильев,
Ю. Н. Ефремов,
В. Г. Зубов,
П. Л. Капица,
В. А. Кириллин,
главный художник
А. И. Климанов,
С. М. Козел,
зам. главного редактора
В. А. Лешковцев,
Л. Г. Макар-Лиманов,
А. И. Маркушевич,
Н. А. Патрикеева,
И. С. Петраков,
Н. Х. Розов,
А. П. Савин,
И. Ш. Слободецкий,
зам. главного редактора
М. Л. Смолянский,
Я. А. Смородинский,
В. А. Фабрикант,
А. Т. Цветков,
М. П. Шаскольская,
С. И. Шварцбурд,
А. И. Ширшов.

Редакция:

В. Н. Березин,
А. Н. Виленкин,
И. Н. Клумова,
художественный редактор
Т. М. Макарова,
Н. А. Минц,
Т. С. Петрова,
В. А. Тихомирова,
зав. редакцией
Л. В. Чернова

В НОМЕРЕ:

2 *В. Д. Нильме.* Циркулем и линейкой

10 *Б. Г. Ерозолимский.* Бета-превращения ядер и свойства нейтрино

Лаборатория «Кванта»

18 *Н. М. Ростовцев.* Как можно измерить толщину зеркального слоя?

21 *В. Н. Березин.* Одиннадцать кругов

Задачник «Кванта»

22 Задачи М326—М330; Ф338—Ф342
24 Решения задач М292—М295; Ф300—Ф302

Практикум абитуриента

31 *Л. Е. Садовский.* Прикладная математика и математики

39 *А. Я. Яковлев.* Абитуриент-1975

43 *В. Н. Слудский.* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

44 *И. А. Молотков, В. Ф. Осипов, С. Ю. Славянов, П. Е. Товстик.* Ленинградский государственный университет им. А. А. Жданова

Рецензии, библиография

50 *Е. П. Левитан.* Как создавалась современная физика звезд и галактик

51 *Т. С. Петрова, М. Л. Смолянский.* Новые книги

«Квант» для младших школьников

54 Задачи
55 *Е. Я. Гик.* Шахматно-математические задачи С. Лойда

59 **Ответы, указания, решения**

Смесь *(с. 9, 17, 20, 42)*

1-я с. обл. — геометрический орнамент, сконструированный из двух семейств подобных парабол и семейства подобных квадратов. Его удается правильно раскрасить в два цвета. Подумайте над тем, какие орнаменты допускают подобную раскраску.
4-я с. обл. — рисунок к заметке «Одиннадцать кругов» (см. с. 21).

© *Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», «Квант», 1975 год*

Е. Л. Нильме

Циркулем и линейкой

Легко указать задачи на построение, не имеющие решения. Нельзя, например, провести касательную из данной точки к данной окружности, если точка лежит внутри окружности. Значительно интереснее случай, когда фигура, которую нужно построить, заведомо *существует*, но ее построение нельзя провести с помощью выбранных инструментов. Многие из вас, наверно, слышали, что две древние задачи: о трисекции угла и об удвоении куба — *неразрешимы* в циркулем и линейкой. Что означают эти слова, какие построения можно и какие нельзя провести циркулем и линейкой — вот о чем рассказывается в этой статье.

1. Решение задачи о трисекции угла циркулем и линейкой

Пусть на рисунке 1 отрезок AB равен радиусу окружности: $AB = OB = OC = OD$.

Тогда $\angle BAO = \angle BOA = \alpha$, $\angle CBO = \angle BCO = 2\alpha$ ($\angle CBO$ — внешний угол $\triangle ABO$), $\angle COD = 3\alpha$ (как внешний угол $\triangle ACO$). Отсюда вытекает следующий простой способ деления произвольного угла на три равные части.

Сделаем на линейке две отметки A и B. Радиусом AB опишем окружность с центром в вершине O данного угла (который нужно разделить на три равные части). Точки пересечения ее со сторонами угла обозначим через C и D. Будем двигать линейку так, чтобы ее край все время проходил через точку C, а точка A скользила по прямой OD, пока точка B не попадает на окружность. Когда это произойдет, мы получим расположение, изображенное на рисунке 1, так что $\angle BAO$ окажется равным трети $\angle COD$.

Описанное построение может создать впечатление, что задача о трисекции угла (о делении угла на три равные части) решается с помощью циркуля и линейки. Чтобы объяснить, что нас не устраивает в этом построении, обсудим решение следующей физической задачи.

Как, находясь на крыше многоэтажного дома, измерить его высоту с помощью барометра и часов?

Решение. Надо сбросить барометр с крыши, засечь время падения t и вычислить высоту дома h по формуле $h = \frac{gt^2}{2}$, где g — ускорение свободного падения.

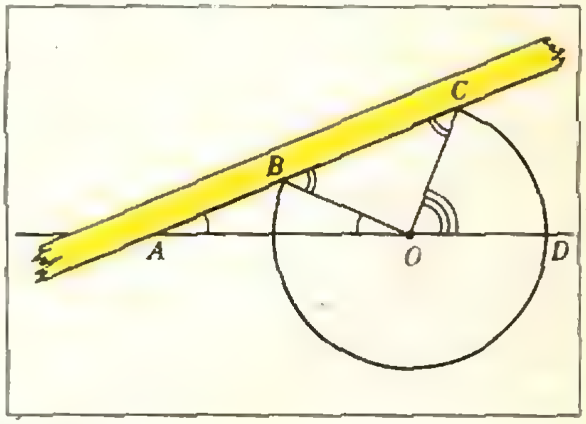


Рис. 1.

Недостаток обоих решений в том, что инструменты используются «не по правилам».

2. Что же разрешается делать циркулем и линейкой?

Линейкой разрешается проводить прямые, проходящие через две данные (или ранее построенные) точки, а циркулем — окружности с данными (или построенными) центром и радиусом *).

На первый взгляд, ответ — четкий и недвусмысленный. Во всяком случае, он запрещает делать на линейке отметки и двигать ее по плоскости. Тем самым он запрещает построение из п. 1 или, например, такое построение проходящей через точку A касательной к окружности S (A вне S): будем двигать линейку так, чтобы она все время касалась S; когда ее край пройдет через точку A, проведем касательную.

Однако и здесь таятся подводные камни. Что значит, например, что проведена прямая? Значит ли это, что даны все ее точки?

Чтобы ответить на этот вопрос, рассмотрим задачу об удвоении куба.

Зная ребро куба, построить ребро другого куба, имеющего вдвое больший объем.

Нам дан отрезок AB (ребро куба). Проведем через A и B прямую. Если считать, что все ее точки даны, то дана и такая ее точка C, что $AC=AB\sqrt[3]{2}$ и искомое ребро AC «построено». Из разобранного примера видно, что нужны дальнейшие уточнения. Нужно четко выяснить, что означают слова «дана точка» и «дана прямая».

3. Элементарные построения

Перечислим, какие элементарные построения можно проводить циркулем и линейкой, когда на плоскости проведено конечное число прямых и окружностей и отмечено конечное число точек.

α. Если отмечены точки A и B (и A не совпадает с B), то можно провести прямую AB.

β. Если отмечены точки O, A и B (и A не совпадает с B), то можно провести окружность с центром O и радиусом AB.

γ. Если проведены две окружности (или две прямые, или прямая и окружность) и если они пересекаются или касаются (но не совпадают!), то можно отметить любую из их общих точек.

Упражнение 1. Пусть на плоскости проведена прямая l и на ней отмечена точка A. Можно ли с помощью конечного числа элементарных построений α, β и γ провести через точку A прямую p, перпендикулярную к l?

4. Как формулировать задачи на построение?

Пусть на плоскости проведено конечное число прямых и окружностей и отмечено конечное число точек — совокупность этих линий и точек будем называть *конфигурацией*. Скажем, что *точку A можно построить (циркулем и линейкой), исходя из данной конфигурации*, если можно сделать конечное число элементарных построений α, β и γ, так что в результате точка A окажется отмеченной.

Всякую геометрическую задачу на построение можно сформулировать так.

Дана некоторая конфигурация. Построить, исходя из нее, точки $A_1,\ldots, A_k$, удовлетворяющие некоторым условиям.

Примеры. А. Задача «построить прямую, равноудаленную от двух данных точек и данной окружности» в этих терминах формулируется так.

Исходная конфигурация: проведена окружность S и отмечены точки A и B. Построить точки A_1 и A_2 так, чтобы A_1 не совпадала с A_2 и прямая A_1A_2 была равноудалена от A, B и S.

В. Задача «Дан $\triangle ABC$. Построить вневписанную окружность, касающуюся стороны BC» формулируется так.

Отмечены точки A, B и C. Построить точки O и D, удовлетворяющие следующим условиям: O удалена от прямых AB, AC и BC на одно и то же расстояние, равное OD и лежит вне $\triangle ABC$; D лежит на отрезке BC.

---

*) О построениях циркулем мы уже писали (см. «Квант», 1974, № 10).

C. Задача «Построить $\triangle ABC$ по трем биссектрисам» формулируется так.

Проведена прямая l, на ней отмечены точки O, D, E и F. Построить точки A, B и C так, чтобы в $\triangle ABC$ биссектрисы b_A, b_B и b_C равнялись соответственно OD, OE и OF.

5. О «произвольных точках»

Если вы сумели построить циркулем и линейкой прямую p из упражнения 1, то, значит, вы невнимательно прочитали п. 3: к исходной конфигурации $\{l, A\}$ нельзя применить ни одно из элементарных построений, так как α и β требуют, чтобы в конфигурации были отмечены хотя бы две различные точки, а γ — чтобы было проведено хотя бы две различные линии.

Для того чтобы можно было начать работу, мы потребуем, чтобы в исходной конфигурации всегда было отмечено не менее двух различных точек. После этого упражнение 1 переформулируется так.

Упражнение 2. Пусть на плоскости проведена прямая l и на ней отмечена точка A. Кроме того, пусть на плоскости отмечена еще одна точка B (отличная от A). Постройте прямую p, проходящую через A и перпендикулярную к l.

Упражнение 3. Пусть в исходной конфигурации отмечены хотя бы две различные точки. Докажите, что тогда можно — многократно используя элементарные построения α, β и γ — отметить точку,

a) заведомо принадлежащую некоторой из проведенных линий — или даже любому фиксированному отрезку (или дуге) этой линии,

b) заведомо не принадлежащую ни одной из линий исходной конфигурации,

c) заведомо принадлежащую (или не принадлежащую) какой-либо фигуре, образованной проведенными линиями (кругу, треугольнику и т. п.).

Обычно в задачах на построение встречаются построения следующего типа: «отметим произвольную точку на дуге EF» или «отметим произвольную точку вне $\triangle ABC$». Упражнение 3 показывает, что любое такое построение можно заменить комбинацией элементарных построений α, β и γ.

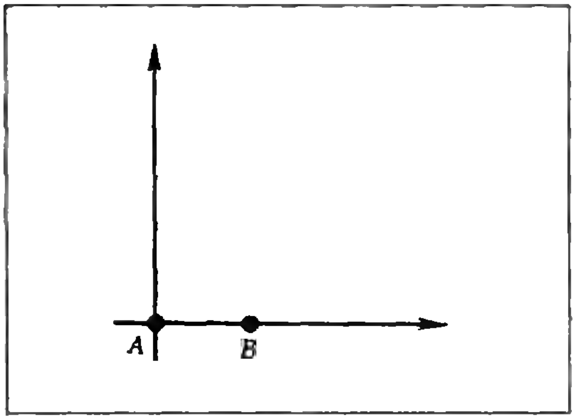


Рис. 2.

6. Перевод на язык алгебры

Основная цель этой статьи — исследовать, какие задачи на построение *разрешимы* (требуемое построение можно провести циркулем и линейкой), а какие *неразрешимы*. Для этого исследования значительно удобнее алгебраический язык: всякая конфигурация описывается конечным набором чисел (которые мы будем называть *параметрами конфигурации*), и задача на построение точек $A_1, \ldots, A_k$ заменяется алгебраической задачей вычисления их координат по параметрам исходной конфигурации.

Укажем, как выбираются параметры конфигурации. Возьмем в заданной конфигурации две различные отмеченные точки A и B и введем систему координат так, как показано на рисунке 2: AB — единица длины, A — начало координат, B имеет координаты $(1, 0)$. В число параметров включим

1) координаты x_0, y_0 любой отмеченной точки,

2) числа k и b — для любой проведенной прямой, задаваемой уравнением $y = kx + b$, или число a — для прямой $x = a$,

3) координаты центра x_0, y_0 и радиус r — для любой проведенной окружности.

Сформулируем основную теорему (ее доказательство будет дано в п. 8), которая показывает, какие алгебраические действия соответствуют элементарным построениям α, β и γ.

Определение. Сложение, вычитание, умножение и деление чисел, а также извлечение квадратного корня из положительного числа будем называть *основными действиями*.

Теорема 1. *Если исходная конфигурация имеет параметры $p_1, \ldots, p_n$, то точку (x, y) можно построить тогда и только тогда, когда x и y выражаются через $p_1, \ldots, p_n$ с помощью конечного числа основных действий.*

Замечание. Иногда задачи на построение удобно формулировать так.

Даны отрезки с длинами $d_1, \ldots, d_n$. Построить отрезок длины x. К таким задачам удобнее применять не теорему 1, а следующую теорему.

Теорема 1′. *Пусть даны отрезки, длины которых выражаются числами $d_1, \ldots, d_n$, и пусть среди них есть единичный отрезок. Тогда циркулем и линейкой можно построить отрезок длины x (то есть построить две точки на расстоянии x) в том и только том случае, когда x выражается через $d_1, \ldots, d_n$ с помощью конечного числа основных действий.*

Упражнение 4. Выведите теорему 1′ из теоремы 1.

Упражнение 5. В теореме 1′ сказано, что одно из чисел $d_1, \ldots, d_n$ равно 1. Покажите, что без этого условия теорема 1′, вообще говоря, неверна.

7. Неразрешимость задач об удвоении куба и о трисекции угла

Согласно теореме 1′ вопрос разрешимости задачи об удвоении куба (см. п. 2) можно сформулировать так.

Дано число 1. Можно ли выразить через него с помощью конечного числа основных действий число $\sqrt[3]{2}$?

Упражнение 6. Докажите, что $\sqrt[3]{2}$ — иррациональное число.

Неразрешимость задачи об удвоении куба вытекает из этого упражнения и следующей общей теоремы, доказательство которой будет дано в п. 9.

Теорема 2. *Пусть кубическое уравнение $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ с рациональными коэффициентами a, b и c не имеет рациональных корней, и пусть x_0 — его корень. Тогда x_0 нельзя выразить через целые числа с помощью конечного числа основных действий.*

Действительно, как следует из упражнения 6, уравнение $x^3 - 2 = 0$ не имеет рациональных корней, а значит, его корень $x_0 = \sqrt[3]{2}$ нельзя выразить через 1 с помощью конечного числа основных действий. Поэтому, исходя из единичного отрезка, нельзя построить циркулем и линейкой ребро куба с объемом 2.

Перейдем к задаче о трисекции угла. Это, собственно говоря, не одна задача, а целая серия: каждому углу соответствует своя задача. Некоторые из них разрешимы — например, угол в 90° можно разделить циркулем и линейкой на три равные части. Мы покажем, что *в общем виде* задача о трисекции угла *неразрешима*. Для этого достаточно указать хоть один угол φ, который нельзя разделить на три равные части. Мы возьмем $\varphi = 30°$.

Этот угол можно построить циркулем и линейкой (см., рис. 3), исходя

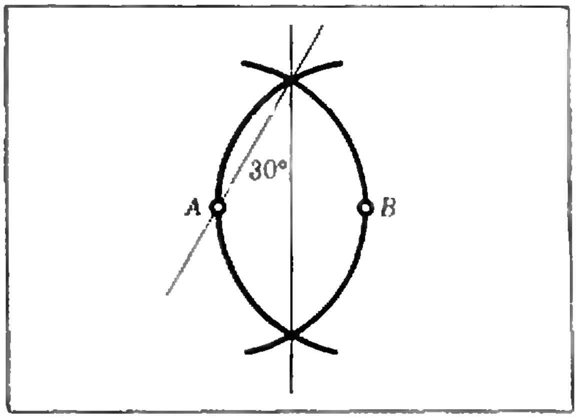


Рис. 3.

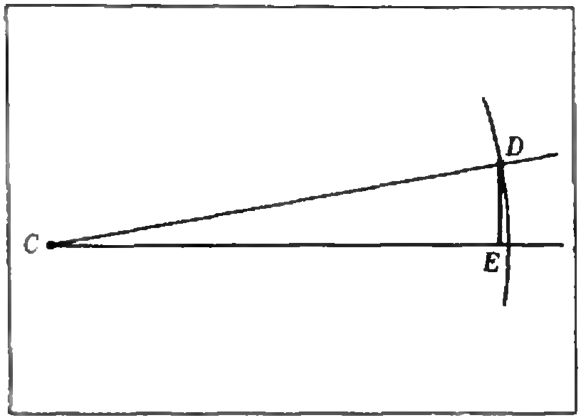


Рис. 4.

из конфигурации $\{A, B\}$, состоящей из двух точек A и B ($AB = 1$). Если бы его можно было разделить циркулем и линейкой на три равные части по 10°, то мы смогли бы, исходя из конфигурации $\{A, B\}$, построить и угол в 10°, а значит, и отрезок длиной $s = \sin 10°$ (см. рис. 4, где $\angle C = 10°$, $CD = 1$, $DE \perp CE$, и значит, $DE = \sin 10°$).

Докажем, что этого сделать нельзя, то есть число $s = \sin 10°$ нельзя получить с помощью конечного числа основных действий из числа 1.

Используя формулу $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$, получаем уравнение $\frac{1}{2} = \sin 30° = 3s - 4s^3$, или

$$s^3 - \frac{3}{4}s + \frac{1}{8} = 0. \qquad (1)$$

По теореме 2 нам достаточно доказать, что (1) не имеет рациональных корней. В этом можно убедиться непосредственно, но проще воспользоваться следующим общим приемом.

Лемма. *Пусть уравнение*

$$x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0 \qquad (2)$$

с целыми коэффициентами $a_1, \ldots, a_n$ имеет рациональный корень x_0. Тогда x_0 — обязательно целое число и $|x_0|$ является делителем числа $|a_n|$.

Доказательство. Запишем x_0 в виде несократимой дроби p/q (p — целое, q — натуральное, в частности, если x_0 — целое, то $q = 1$). Подставим $x_0 = p/q$ в (2), умножим все члены на q^{n-1} и перенесем первое слагаемое в правую часть. Получим

$$a_1p^{n-1} + a_2p^{n-2}q + \ldots + a_{n-1}pq^{n-2} + a_nq^{n-1} = -p^n/q.$$

Слева стоит целое число, значит, p^n/q — тоже целое, и поскольку p и q взаимно просты, то $q = 1$ и x_0 — целое. Переписав (2) при $x = x_0$ в виде

$$a_n = x_0(-a_{n-1} - a_{n-2}x_0 - \ldots - a_1x_0^{n-2} - x_0^{n-1}),$$

получаем, что $|a_n|$ делится на $|x_0|$. Лемма доказана.

Чтобы воспользоваться леммой, сделаем в (1) замену $x = 2s$. Получим уравнение

$$x^3 - 3x + 1 = 0. \qquad (3)$$

Так как 1 и −1 не являются его корнями, то (по лемме) оно не имеет рациональных корней, а значит, и уравнение (1) не имеет рациональных корней. По теореме 2 число s нельзя выразить через 1 с помощью конечного числа основных действий, и значит, задача о трисекции угла в 30° неразрешима.

Упражнение 7. Можно ли угол в 19° разделить циркулем и линейкой на 19 равных частей?

8. Доказательство теоремы 1

Будем говорить, что *число x можно построить, исходя из данной конфигурации*, если, исходя из нее, можно построить такие точки C и D, что $CD = |x|$ (то есть $CD = x$, если $x \geq 0$, и $CD = -x$, если $x < 0$).

Упражнение 8. Докажите, что

a) если числа z и t можно построить, то можно построить и числа $z + t$, $z - t$, zt, z/t (при $t \neq 0$) и $\sqrt{z}$ (при $z \geq 0$),

b) точку (x, y) можно построить тогда и только тогда, когда можно построить ее координаты — числа x и y,

c) исходя из конфигурации с параметрами $p_1, \ldots, p_n$, можно построить числа $p_1, \ldots, p_n$.

Из упражнений 8c и 8a следует, что, исходя из данной конфигурации, можно построить любое число, которое выражается через ее параметры $p_1, \ldots, p_n$ с помощью конечного числа основных действий. Тем самым, согласно упражнению 8b, можно построить любую точку (x, y), координаты которой выражаются с помощью основных действий через $p_1, \ldots, p_n$. Половина теоремы 1 доказана.

Остается доказать обратное утверждение: если точку (x, y) можно построить, то x и y выражаются через параметры исходной конфигурации с помощью основных действий. Это утверждение сразу вытекает из следующей леммы.

Лемма. *Пусть к конфигурации с параметрами $q_1, \ldots, q_N$ применено одно из элементарных построений α, β, γ. Тогда параметры полученной конфигурации выражаются через $q_1, \ldots, q_N$ с помощью основных действий.*

Доказательству леммы предпошлем следующее упражнение.

Упражнение 9. Докажите, что

a) прямая, проходящая через две различные точки (c_1, c_2) и (d_1, d_2), задается уравнением

$$x = c_1 \quad \text{при} \quad c_1 = d_1$$

и

$$y = \frac{c_2 - d_2}{c_1 - d_1}x + \frac{c_1 d_2 - c_2 d_1}{c_1 - d_1} \text{ при } c_1 \neq d_1,$$

b) расстояние между точками (c_1, c_2) и (d_1, d_2) равно $\sqrt{(c_1 - d_1)^2 + (c_2 - d_2)^2}$,

c) если две прямые задаются уравнениями

$$y = k_1 x + b_1 \quad \text{и} \quad y = k_2 x + b_2,$$

то при $k_1 = k_2$ они либо параллельны, либо совпадают, а при $k_1 \neq k_2$ пересекаются в точке

$$\left(\frac{b_2 - b_1}{k_1 - k_2}, \quad \frac{k_1 b_2 - k_2 b_1}{k_1 - k_2}\right);$$

прямые $y = k_1 x + b_1$ и $x = a_2$ пересекаются в точке $(a_2, k_1 a_2 + b_1)$; прямые $x = a_1$ и $x = a_2$ либо параллельны, либо совпадают,

d) окружность с центром (c, d) и радиусом r задается уравнением $(x - c)^2 + (y - d)^2 = r^2$.

Доказательство леммы. При построении α к параметрам $q_1, \ldots, q_N$ добавляется одно или два числа — коэффициенты уравнения $x = c$ или $y = kx + b$, задающего проведенную прямую. Согласно упражнению 9a они выражаются через $q_1, \ldots, q_N$ с помощью основных действий (так как координаты отмеченных точек, через которые проводится прямая, входят в число параметров $q_1, \ldots, q_N$).

При построении β проводится окружность с центром O и радиусом CD. Координаты точек O, C и D входят в число параметров, а радиус выражается через них с помощью основных действий согласно упражнению 9b.

При построении γ возможны три случая.

Первый — когда отмечается точка пересечения двух прямых — разбирается с помощью упражнения 9c.

Во втором случае пусть отмечается точка (x_0, y_0) пересечения или касания окружности $(x - c)^2 + (y - d)^2 = r^2$ (см. упражнение 9d) и прямой $y = kx + b$. Координаты (x_0, y_0) удовлетворяют обоим уравнениям. Подставив $y = kx + b$ в первое уравнение, получаем для определения x_0 квадратное уравнение

$$(x - c)^2 + (kx + b - d)^2 = r^2.$$

Если применить формулу для решения квадратного уравнения, то x_0 (а стало быть, и $y_0 = kx_0 + b$) выразится через k, b, c, d и r с помощью основных действий. Для прямой, заданной уравнением $x = a$, аналогичный результат получается еще проще.

В третьем случае отмечается точка пересечения или касания окружностей

$$(x - c)^2 + (y - d)^2 = r^2,$$
$$(x - c')^2 + (y - d')^2 = r'^2.$$

Раскроем скобки и вычтем одно уравнение из другого. Получим линейное уравнение

$$Px + Qy = R,$$

где $P = 2(c' - c)$, $Q = 2(d' - d)$, $R = r^2 - r'^2 + c'^2 - c^2 + d'^2 - d^2$. Если $Q \neq 0$, то перепишем его в виде $y = kx + b$ (где $k = -P/Q$, $b = R/Q$), а если $Q = 0$, $P \neq 0$ — то в виде $x = a$ (где $a = R/P$), и тем самым сведем все к уже разобранному второму случаю; равенство $P = Q = 0$ невозможно (если $R \neq 0$, окружности не имеют общих точек, если $R = 0$ — совпадают).

Лемма, а вместе с ней и теорема 1 доказаны.

9. Доказательство теоремы 2

Разделим основные действия на *простые* — сложение, вычитание, умножение и деление и *сложное* — извлечение квадратного корня.

Пусть имеется некоторое множество чисел. Рассмотрим все числа, которые можно получить из них с помощью конечного числа простых действий.

Определение. Если обозначить исходное множество через M, то полученное множество P называется полем, порожденным M.

Ясно, что если числа z и t принадлежат полю P, то и числа $z+t$, $z-t$, zt и z/t (при $t \neq 0$) принадлежат P.

Примеры. А. Множество M, состоящее из одного числа 1, порождает поле рациональных чисел.

В. Множество M, состоящее из всех рациональных чисел и числа $\sqrt{2}$, порождает поле P, в которое входят все числа вида $a+b\sqrt{2}$ (где a и b рациональны) и только они. Проверьте это, обратив особое внимание на деление. Отметим, что то же поле P порождается двумя числами: 1 и $\sqrt{2}$.

Упражнение 10. Принадлежит ли $\sqrt{3}$ полю P из примера В?

Пусть x — какое-нибудь число, которое выражается через 1 с помощью конечного числа основных действий. Это значит, что имеются числа $x_1, \ldots, x_n$, где $x_1 = 1$, $x_n = x$, и каждое число x_k $(1 < k \leqslant n)$ выражается через предыдущие с помощью одного основного действия. Например, для $x = \sqrt{2} - 5\sqrt{3}$ можно взять $x_1 = 1$,

$x_2 = 1+1 = 2$, $x_3 = \sqrt{2}$,

$x_4 = 1+2 = 3$, $x_5 = \sqrt{3}$,

$x_6 = 2+3 = 5$, $x_7 = 5\sqrt{3}$,

$x_8 = \sqrt{2} - 5\sqrt{3} = x$.

Построим цепочку полей $P_1, \ldots, P_n$, где P_k — поле, порожденное множеством чисел $x_1, \ldots, x_k$. В этой цепочке для каждого поля P_k имеются две возможности:

1. Если x_k принадлежит P_{k-1}, то P_k совпадает с P_{k-1}.

2. Если x_k не принадлежит P_{k-1}, то P_k порождается множеством, которое получается добавлением к полю P_{k-1} числа x_k (при этом x_k^2 обязательно принадлежит P_{k-1}).

Из сказанного ясно, что для доказательства теоремы 2 достаточно установить следующее.

Лемма 1. *Пусть число s не принадлежит полю P, s^2 принадлежит P и Q — поле, порожденное множеством, которое получается добавлением к P числа s. Пусть уравнение*

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \qquad (4)$$

с коэффициентами, принадлежащими P, не имеет корней в поле P. Тогда оно не имеет корней и в поле Q.

Прежде, чем доказать эту лемму, опишем, как устроено поле Q.

Лемма 2. *Любое число q из поля Q*

1) *представляется в виде $q = p_1 + p_2 s$, где p_1 и p_2 принадлежат P,*

2) *удовлетворяет квадратному уравнению $x^2 + dx + e = 0$ с коэффициентами d и e, принадлежащими P.*

Доказательство леммы 2.

1) Ясно, что все числа вида $p_1 + p_2 s$ принадлежат Q. Чтобы доказать, что других чисел в Q нет, достаточно проверить, что простые действия над числами вида $p_1 + p_2 s$ снова приводят к числам того же вида. Это следует из формул

$$(p_1 + p_2 s) \pm (r_1 + r_2 s) = (p_1 \pm r_1) + (p_2 \pm r_2)s,$$

$$(p_1 + p_2 s) \cdot (r_1 + r_2 s) = (p_1 r_1 + p_2 r_2 s^2) + (p_1 r_2 + p_2 r_1)s$$

(напомним, что s^2 принадлежит полю P),

$$(p_1 + p_2 s) : (r_1 + r_2 s) = \frac{(p_1 + p_2 s)(r_1 - r_2 s)}{r_1^2 - r_2^2 s^2} = (p_1 + p_2 s)\left(\frac{r_1}{r_1^2 - r_2^2 s^2} - \frac{r_2 s}{r_1^2 - r_2^2 s^2}\right)$$

($r_1^2 - r_2^2 s^2 \neq 0$, так как иначе $s^2 = r_1^2/r_2^2$, и $s = \pm r_1/r_2$ принадлежит P вопреки условию).

2) Положим $\overline{q} = p_1 - p_2 s$, тогда число $q = p_1 + p_2 s$ удовлетворяет уравнению $(x - q)(x - \overline{q}) = x^2 + dx + e = 0$, где $d = -(q + \overline{q}) = -2p_1$, $e = q\overline{q} = p_1^2 - p_2^2 s^2$.

Доказательство леммы 1. Докажем лемму 1 от противного. Пусть уравнение (4) имеет корень q в поле Q. Тогда по лемме 2 число q удовлетворяет системе уравнений

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0, \qquad (4)$$

$$x^2 + dx + e = 0. \qquad (4')$$

Умножив уравнение (4′) на $(x + a - d)$, вычтем его из уравнения (4). Получим $[b - e - (a - d)d]x + [c - (a - d)e] = 0$. Обозначим первую скобку через f, а вторую — через g. Тогда $fq + g = 0$. Если $f \neq 0$, то $q = -g/f$ принадлежит полю P, что противоречит условию. Если $f = 0$, то и $g = 0$, и значит,

$$x^3 + ax^2 + bx + c - (x + a - d) \times (x^2 + dx + e) = fx + g = 0,$$

то есть

$$x^3 + ax^2 + bx + c = (x + a - d) + (x^2 + dx + e).$$

Но тогда уравнение (4) имеет корень $q = d - a$, принадлежащий полю P, — вопреки условию.

Полученное противоречие доказывает лемму 1, а вместе с ней и теорему 2.

Задачи наших читателей

1. Сторона квадрата $ABCD$ равна a. На диагонали AC взята точка P так, что $|PC| = |AC|/4$. Пусть E — точка пересечения BP и CD, O — центр квадрата, M — точка пересечения BP с перпендикуляром OK, проведенным из точки O на сторону BC.

а) Найти $|CE|$.

б) Доказать, что треугольник OEM равнобедренный.

М. И. Айзенберг

2. Вокруг треугольника ABC описана окружность. Из произвольной точки этой окружности на стороны AB, BC и AC треугольников опущены соответственно перпендикуляры h_c, h_a и h_b. Затем из этой же точки опущены перпендикуляры H_a, H_b и H_c на касательные к данной окружности соответственно в точках A, B и C. Доказать, что $H_a + H_b + H_c \geq h_a + h_b + h_c$.

Н. В. Щербина

3. Дан 1974-угольник. Его разрезают на k 987-угольников таких, что их вершины либо совпадают с вершинами 1974-угольника, либо лежат внутри него, причем ни одна из вершин какого-либо 987-угольника не является внутренней точкой стороны другого 987-угольника.

Найти наименьшее значение k.

М. Биктимиров

4. На плоскости расположены 1973 прямые общего положения (никакие две прямые не параллельны, никакие три прямые не пересекаются в одной точке). При их пересечении образовалось 100 многоугольников. Определить число точек пересечения прямых.

П. Иванов

Б. Г. Ерозолимский

Бета-превращения ядер и свойства нейтрино

Весь доступный нашему знанию мир, как известно, состоит из взаимодействующих друг с другом частиц материи—из так называемых элементарных частиц. Это, прежде всего, электроны, протоны, нейтроны, фотоны и десятки других частиц. Сейчас уже стало очевидным, что термин «элементарные частицы» неудачен. На самом деле эти частицы нельзя рассматривать как элементарные кирпичики мироздания, они сами являются сложными образованиями. Главным доказательством этому служит то, что все известные сейчас элементарные частицы способны превращаться друг в друга. По-видимому, понять «устройство» частиц невозможно, не поняв особенностей их взаимодействий друг с другом, которые, в частности, приводят к взаимным превращениям частиц.

В настоящее время известно четыре типа взаимодействия частиц материи: гравитационное, электромагнитное, ядерное (сильное) и так называемое слабое.

Читатель, безусловно, знаком в той или иной степени с первыми тремя типами взаимодействия. Напомним лишь, что наиболее интенсивным является ядерное взаимодействие (именно поэтому его и называют еще сильным взаимодействием). Силы притяжения между нуклонами, то есть протонами и нейтронами в ядре, и обусловливают стабильность атомного ядра. Чтобы разрушить ядро, преодолеть ядерные силы, необходимо затратить огромную энергию. Ядерные силы очень быстро спадают с расстоянием и проявляются лишь при непосредственном «контакте» нуклонов друг с другом.

Несколько слабее, но все же достаточно интенсивно электромагнитное взаимодействие. Это — обычное притяжение или отталкивание электрически заряженных частиц.

Гравитационное взаимодействие— наименее интенсивное из всех взаимодействий, оно не имеет никакого практического значения в жизни элементарных частиц.

Последний вид — слабое взаимодействие. Его так назвали потому, что оно действительно значительно слабее ядерного и электромагнитного взаимодействий. Однако его роль в микромире велика. Оказывается, благодаря слабым взаимодействиям и происходит бо́льшая часть превращений одних элементарных частиц в другие.

Впервые с такими превращениями наука встретилась при изучении естественной радиоактивности, открытой в самом конце XIX века. Исследования ученых, прежде всего Марии и Пьера Кюри и Эрнеста Резерфорда, показали, что ядра некоторых химических элементов способны самопроизвольно распадаться, то есть превращаться в ядра других элементов. Такие превращения сопровождаются излучением. Известны излучения трех типов, которые обозначаются буквами α, β и γ. Как оказалось,

α-лучи — это потоки ядер атомов гелия, β-лучи — потоки электронов, а γ-лучи — потоки фотонов. Мы будем говорить подробно только о β-распадах (когда превращения ядер сопровождается вылетом быстрых электронов).

Откуда берутся электроны, вылетающие с огромной скоростью? Повидимому, из ядра, тем более, что при β-распаде электрический заряд ядра изменяется как раз на единицу. Значит, в ядре есть электроны? Первая ядерная модель действительно была построена из протонов и электронов. Лишь позднее стало ясно, что такое устройство ядра невозможно, свойства атомных ядер и элементарных частиц несовместимы с этой гипотезой. С современной точки зрения ядра всех элементов состоят из протонов и нейтронов. Как же тогда объяснить β-распад? Здесь-то и начинаются превращения частиц друг в друга!

Оказывается, что при β-распаде ядра один из нейтронов в ядре превращается в протон, что сопровождается рождением энергичного электрона *):

$$n \rightarrow p + e^- . \qquad (1)$$

При этом порядковый номер элемента (заряд ядра) соответственно увеличивается на единицу. Например,

$$_{82}\mathrm{Pb}^{214} \rightarrow {}_{83}\mathrm{Bi}^{214} + e^-$$

— изотоп свинца превращается в изотоп висмута с тем же атомным весом.

Следует особо подчеркнуть содержащийся в процессе (1) полный и решительный разрыв с глубоко укоренившимся в сознании ученых прошлого века представлением о том, что частицы вещества не могут рождаться или исчезать. Вылет электрона из ядра при β-превращении рассматривается здесь не как следствие того, что он (электрон) там и был до этого, а как акт возникновения электрона в самом процессе β-распада. Это подтверждается множеством фактов. В частности, в конце 40-х годов было доказано, что свободный нейтрон (не входящий в состав ядра) нестабилен и самопроизвольно превращается в протон и электрон с периодом полураспада всего около 10 минут. За последние два десятилетия с помощью ускорителей открыто большое число новых элементарных частиц: мезонов (частиц легче протона, но тяжелее электрона), гиперонов (частиц тяжелее протона). Все они, как оказалось, недолговечны и тоже превращаются друг в друга, наподобие свободного нейтрона.

Появление атомных реакторов, а также техники разделения изотопов привело к открытию и получению большого количества новых искусственных радиоактивных веществ. Среди них много таких, при β-распаде которых происходит вылет не электрона, а позитрона (e^+). Заряд ядра (атомный номер) при этом соответственно уменьшается на единицу. Это означает, что в таких ядрах осуществляется превращение одного из протонов в нейтрон и позитрон по схеме *)

$$p \rightarrow n + e^+ . \qquad (2)$$

Например, превращение магния в натрий, происходящее с периодом полураспада 11,6 секунды, можно записать так:

$$_{12}\mathrm{Mg}^{23} \rightarrow {}_{11}\mathrm{Na}^{23} + e^+ .$$

Процесс (2) возможен, правда, лишь в ядре; в свободном состоянии именно нейтрон превращается в протон. Дело в том, что масса нейтрона, а значит, и его собственная энергия больше, чем у протона. И потому превращение свободного протона в нейтрон нарушало бы закон сохранения энергии.

Таким образом, способность к взаимному превращению из уникального диковинного свойства, проявившегося в β-распаде ядер, стала неотъемлемой характеристикой практически всех известных элементарных частиц. В настоящее время эта область физики — физика слабых взаимодействий — бурно развивается. С 30-х годов, когда Э. Ферми создал первую теорию β-распада ядер, сделано уже немало для того, чтобы все известные факты получили теоретическое обоснование. Правда, существующие пока представления очень далеки *от той стройности и законченности*, которые отличают, например, в настоящее время картину электромагнитного взаимодействия.

---

*) В самом деле при таком превращении рождается еще одна частица, но об этом будет рассказано позже.

*) Эта реакция так же, как и реакция (1), записана пока неправильно

Согласно современным воззрениям всякое взаимодействие может быть описано с помощью некоторого поля, причем возникновение сил притяжения или отталкивания между частицами обусловлено их способностью «рождать» и поглощать кванты этого поля. Теория устанавливает глубокую связь между механизмом возникновения сил, действующих между частицами—источниками данного поля, и возможными «превращениями» этих частиц, которые сопровождаются рождением *квантов* этого поля.

Например, взаимодействие между электрическими зарядами обусловлено электромагнитным полем, кванты которого — фотоны. Это же взаимодействие приводит к возможности рождения кванта (фотона), скажем, при торможении быстро летящего заряда (электрона). Реакция «превращения» тут такая:

$$e \to e' + \gamma,$$

где e' — это электрон с изменившейся энергией.

Аналогичная ситуация оказывается и в случае слабого взаимодействия. Сами силы взаимодействия частиц, например нуклонов, при этом столь ничтожны на фоне ядерных и электромагнитных сил, что их проявления удалось обнаружить лишь косвенно, *и то в очень тонких экспериментах*. А вот процессы превращений, при которых рождаются кванты этого поля, нам давно известны — ими и являются β-превращения ядер и слабые распады элементарных частиц. В этом смысле реакции (1) и (2), реакции превращения протона и нейтрона друг в друга, можно интерпретировать как процессы рождения квантов поля слабого взаимодействия (e^- и e^+). Подробное изучение, однако, показало, что ситуация здесь оказывается существенно сложнее. Поле слабых сил на самом деле представлено квантами двух сортов: электронами (позитронами) и частицами с совершенно *удивительными свойствами, а именно* — нейтрино, так что реакции (1) и (2) записаны неверно. Вместе с электроном или позитроном должно обязательно рождаться и нейтрино.

История открытия нейтрино является одной из самых блестящих страниц науки XX века и заслужива-

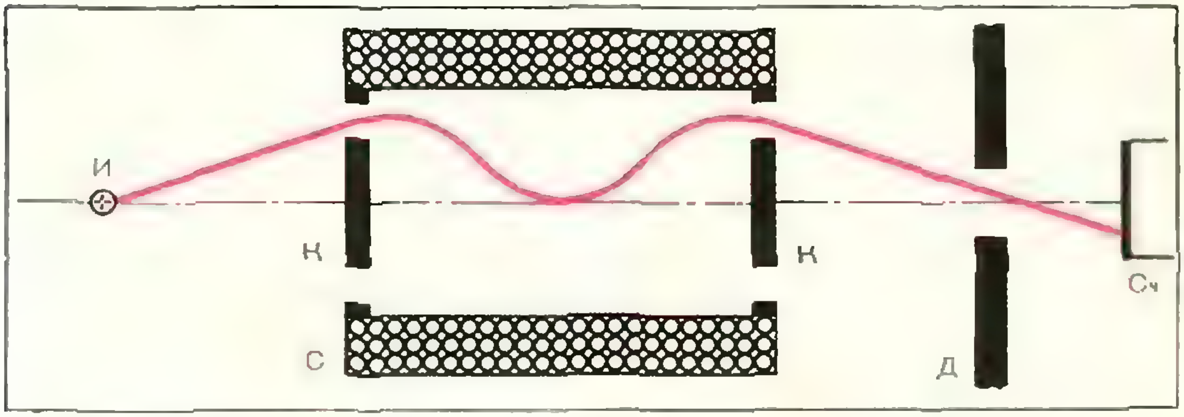


Рис. 1. Красным показана проекция винтовой траектории электрона.

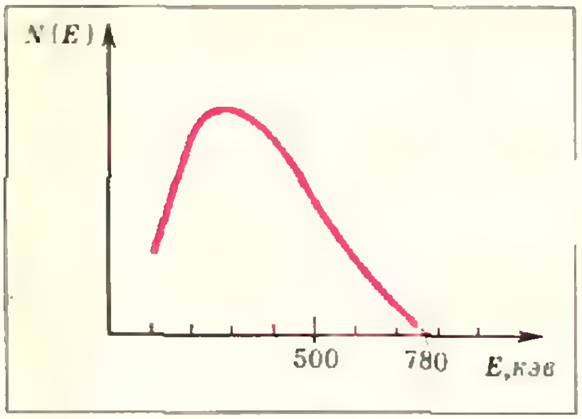


Рис. 2. Бета-спектр свободного нейтрона.

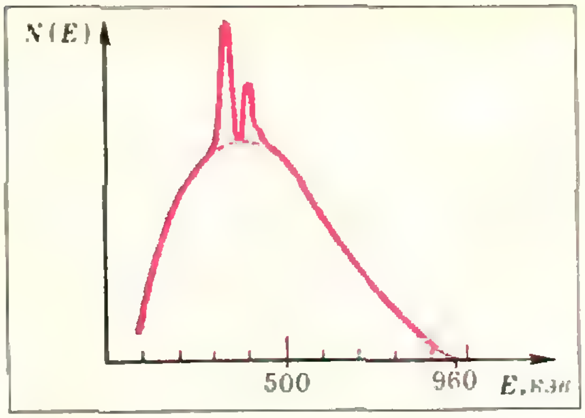


Рис. 3. Бета-спектр радиоактивного изотопа золота.

ет того, чтобы вкратце о ней рассказать. Существование нейтрино было теоретически предсказано В. Паули в результате попыток осмыслить странный факт, обнаруженный в β-распаде ядер. Измерения энергии вылетающих при β-распаде электронов показали, что электроны не обладают фиксированной энергией, которая была бы свойственна данному β-превращению. Имеется широкий диапазон, или, по-другому, спектр энергий, простирающийся от нуля до некоторого максимального значения.

Измерение энергии электронов производится с помощью специальных приборов — бета-спектрометров, в которых электроны разных энергий различаются либо по траекториям в магнитных или электрических полях, либо по амплитуде электрических импульсов, возникающих в детекторах спектрометрического типа (например, в сцинтилляционных счетчиках). На рисунке 1 изображена схема простого магнитного спектрометра с продольным полем. Электроны из источника И попадают в магнитное поле, образованное соленоидом С. Траектория электрона в таком поле представляет винтовую линию с осью, параллельной оси соленоида *). Можно показать, что электроны, вышедшие из источника достаточно малого размера с одной и той же энергией, сфокусируются вблизи определенной точки, где и устанавливается диафрагма Д, за которой стоит счетчик Сч. Траектории частиц с другой энергией при этом таковы, что эти частицы через диафрагму Д не проходят. От прямого же попадания электронов (вдоль силовых линий поля) в отверстие диафрагмы Д предохраняют кольцевые диафрагмы К. Изменяя величину магнитного поля (тока в соленоиде), можно таким образом «просмотреть», сколько электронов, испускаемых источником, обладают той или иной энергией, то есть исследовать их энергетический спектр.

Вот как выглядит, например, β-спектр свободного нейтрона (рис. 2) или спектр радиоактивного изотопа золота $_{79}\mathrm{Au}^{198}$ (рис. 3). По оси ординат отложено в произвольном масштабе число частиц с энергией E (точнее, с энергией в достаточно малом интервале ΔE, от E до $E + \Delta E$), а по оси абсцисс — энергия в килоэлектронвольтах. Из рисунков 2 и 3 видно, что β-спектр непрерывен, присутствуют электроны с любыми энергиями от 0 до E_{max}.

В спектре, представленном на рисунке 3, видны отдельные узкие линии. Это свидетельствует о том, что кроме электронов с непрерывным спектром есть еще несколько групп электронов с вполне определенными энергиями (так называемые «монохроматические» электроны). Однако, природа таких

---

*) См., например, решение задачи Ф217, «Квант», 1974, № 2.

линий совершенно иная, соответствующие этим линиям электроны никакого отношения к β-распаду не имеют.

Если процесс β-распада представлять по схеме (1) или (2), то наличие непрерывного спектра электронов совершенно непонятно. В самом деле, процесс β-превращения сопровождается выделением вполне определенной энергии, которая распределяется между двумя образующимися частицами (электроном и ядром отдачи — ядром нового элемента) единственно возможным образом, так что энергия электрона должна быть вполне определенной. Это непосредственно следует из законов сохранения энергии и количества движения. Так как первоначальное ядро покоится, то его количество движения (импульс p) равно 0. Суммарное количество движения образующихся частиц так же должно равняться нулю, то есть электрон и ядро отдачи должны разлетаться в противоположные стороны. Обозначим массу электрона и его скорость через m_e и v_e, а массу ядра отдачи и его скорость — M и u и запишем закон сохранения количества движения:

$$m_e v_e - Mu = 0. \qquad (3)$$

С другой стороны, сумма кинетических энергий образовавшихся частиц должна быть равна E_0 — полной энергии, выделившейся при β-распаде:

$$E_e + E_M = E_0. \qquad (4)$$

Для простоты расчетов можно принять, что связь между энергией и импульсом частицы дается классической формулой $E = \frac{p^2}{2m}$.

Из уравнений (3) и (4) следует, что скорость v_e, а значит, и энергия электрона E_e определены однозначно ($E_e = \frac{E_0}{1 + m_e/M}$). Следовательно, β-спектр должен был бы представлять собой одну единственную линию. Кстати, легко убедиться в том, что поскольку $M \gg m_e$, то $E_e \approx E_0$, то есть ядро отдачи уносит весьма малую долю всей энергии распада.

Какова же величина этой ожидаемой энергии электрона? Для примера рассмотрим β-распад свободного нейтрона. Точные измерения показали, что масса нейтрона несколько больше массы протона, а именно:

$$m_n - m_p = 2{,}5\, m_e.$$

Согласно одному из фундаментальных положений теории относительности Эйнштейна всякой массе соответствует энергия, связанная с ней соотношением $E = mc^2$, где c — скорость света. Тогда энергия, которая должна выделиться при превращении нейтрона в протон и электрон, равна

$$E_0 = (m_n - m_p - m_e)c^2 = 1{,}5 m_e c^2 = 780\ \textit{кэв}.$$

Из рисунка 2 видно, что энергия E_0 как раз и есть $E_{\max}$ — граничная энергия β-спектра. Это значит, что практически всегда электрон уносит не всю энергию распада (с точностью до энергии ядра отдачи), а лишь часть ее, причем величина этой части от раза к разу принимает различные значения.

Куда же девается остальная энергия? Многократно проводившиеся измерения, в которых β-радиоактивный препарат помещался внутрь калориметра с очень толстыми стенками, показали, что нет никаких известных излучений, которые уносили бы часть энергии, а в калориметре при этом выделяется энергия, которая в среднем составляет лишь *половину* от полной энергии β-распада.

Это «исчезновение» энергии, которое даже давало повод подвергать сомнению справедливость закона сохранения энергии в микромире, и натолкнуло Паули на мысль о том, что при β-распаде рождается еще одна частица. Она не обладает электрическим зарядом, а масса ее чрезвычайно мала. Ферми назвал эту частицу нейтрино. Нейтрино может свободно проходить через весьма большие толщи вещества и поэтому не улавливается стенками калориметров. Полная же энергия β-превращения распределяется между нейтрино и электроном, оставляя в среднем на долю электрона лишь половину *). Таким образом, вместо реакций (1) и (2) нужно записать такие реакции:

$$n \rightarrow p + e^- + \tilde{\nu}, \qquad (5)$$

$$p \rightarrow n + e^+ + \nu. \qquad (6)$$

Символ ν соответствует нейтрино а $\tilde{\nu}$ — антинейтрино (о различиях между ними будет рассказано дальше).

Важным подтверждением этой гипотезы явились эксперименты, в которых исследовалась отдача ядер, образующихся в результате β-распада. Было показано, что ядро отдачи и электрон вовсе не разлетаются в противоположные стороны. Это также свидетельствует о рождении еще одной какой-то частицы при β-распаде. Ведь закон сохранения количества движения (импульса) требует, чтобы центр масс всех разлетающихся в результате β-распада частиц оставался на месте — ведь распадающееся ядро первоначально покоится (с точностью до теплового движения). Образовавшиеся ядро отдачи и электрон, как показывает опыт, разлетаются под любыми углами друг к другу. Но тогда суммарный вектор их количества движения не равен нулю! Если же учесть, что вылетающая частица уносит с собой некоторый импульс, то закон сохранения импульса может быть выполнен.

Но самое замечательное то, что между недостающим значением энергии E_ν и величиной «нескомпенсированного» импульса p_ν оказывается всегда имеет место очень простое соотношение: $E_\nu = p_\nu c$, где c — скорость света. Но ведь это известное соотношение между энергией и импульсом фотона — частицы, движущейся со скоростью света и имеющей нулевую массу покоя. Такое же соотношение устанавливает теория относительности для тел, движущихся со скоростью, близкой к скорости света, то есть для тел с весьма малой или даже равной нулю массой покоя *). Итак, предположив, что при β-распаде вылетает нейтрино, мы обеспечиваем выполнение обоих фундаментальных законов сохранения (энергии и импульса) и получаем возможность правильно рассчитать энергии частиц — продуктов распада.

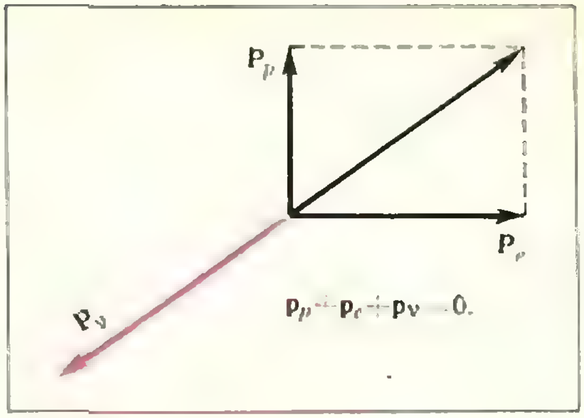


Рис. 4.

Для примера еще раз рассмотрим распад свободного нейтрона. Пусть электрон и протон разлетелись под углом 90°, кинетическая энергия электрона $E_e = 200$ *кэв*. Какова при этом энергия протона?

Составляем два уравнения: закон сохранения энергии

$$E_0 = E_\nu + E_p + E_e \qquad (7)$$

и закон сохранения импульса (рис. 4)

$$p_\nu^2 = p_e^2 + p_p^2. \qquad (8)$$

Здесь $E_0 = 780$ *кэв* — полная энергия, выделяющаяся при β-распаде нейтрона (см. рис. 2), E_ν и p_ν — энергия и импульс нейтрино, причем $E_\nu = p_\nu c$. Импульс электрона p_e и его кинетическая энергия с учетом поправок теории относительности связаны между собой так:

$$p_e^2 c^2 = E_e^2 + 2E_e m_e c^2.$$

Действительно, импульс электрона равен $p_e = \dfrac{m_e v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ (m_e — масса покоя электрона), полная энергия электрона равна $E = \dfrac{m_e c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$, энергия покоя равна $E_п = m_e c^2$. Тогда кинетическая энергия электрона

$$E_e = E - E_п = m_e c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right).$$

---

*) С точностью до энергии ядра отдачи.

*) См., например, статью Н. П. Стахановa «Масса и энергия в теории относительности», «Квант», 1975, № 3.

Возведя обе части равенства в квадрат и учтя выражение для импульса электрона, получим записанное выше соотношение между кинетической энергией и импульсом электрона.

Связь между импульсом и кинетической энергией протона можно записать классической формулой $p_p^2 = 2M_p E_p$ (M_p — масса протона), так как скорость протона много меньше скорости света.

Решение уравнений (7) и (8) с учетом соотношений между кинетической энергией и импульсом частиц даст для энергии протона величину $E_p \approx 50$ *эв*.

Итак, при β-превращении ядра всегда образуется не две частицы, а три. Именно это и приводит к тому, что β-спектр оказывается сплошным: доля энергии, уносимой электроном, зависит от того, с какой энергией вылетело нейтрино. Первая теория этого процесса была предложена в начале 30-х годов Э. Ферми.

Современная теория объединила явления β-распада ядер с аналогичными превращениями других частиц в общий класс явлений универсального слабого взаимодействия. Одним из наиболее примечательных утверждений теории явилось предсказание возможности процессов, обратных процессам (5) и (6):

$$\nu + n \rightarrow p + e^-, \qquad (9)$$

$$\tilde{\nu} + p \rightarrow n + e^+. \qquad (10)$$

Теория предсказала также и интенсивность таких процессов. Оказалось, что прежде чем произойдет захват нейтрино (с энергией 1 *мэв*), эта частица может (в среднем) пройти слой вещества (например, воды) толщиной около 10^{15} *км*!!! Нейтрино свободно может пройти сквозь всю Землю так, что лишь одна из $5 \cdot 10^{12}$ частиц поглощается Землей, то есть вызывает «обратный» β-распад. Вот почему никакие калориметры в ранних экспериментах по β-распаду не могли задержать эту «неуловимую» частицу.

Тем не менее, такой процесс был обнаружен в чрезвычайно тонком и рекордном по чувствительности эксперименте американских ученых Райнеса и Коуэна в 1953 году (эксперимент проводился вблизи мощного промышленного атомного реактора).

Этот опыт явился окончательным доказательством существования нейтрино. В опыте регистрировалось в среднем около трех событий захвата нейтрино за час. Такая частота событий находится в отличном согласии с количественными предсказаниями теории.

Изучение свойств этой частицы продолжается и в настоящее время. Например, было установлено, что нейтрино, вылетающие при распаде нейтрона (процесс 5), и нейтрино, вылетающие при превращении протона в нейтрон (процесс 6), являются на самом деле разными частицами. Оба вида нейтрино, как оказалось, обладают собственным вращательным моментом — спином, направленным по оси вращения. Однако у нейтрино из распада (5) направление спина соответствует правовинтовому вращению, а у нейтрино из реакции (6) — левовинтовому. В соответствии с этим нейтрино первого типа называют «антинейтрино» и обозначают его $\tilde{\nu}$.

Далее, исследования распада мезонов, проведенные на больших ускорителях в Брукхейвене (США) и Церне (Швейцария), показали, что существует еще одна пара нейтрино — антинейтрино, которая чем-то существенно отличается от нейтрино, участвующих в распадах типа (5) и (6). Во всяком случае, под действием тех нейтрино (именуемых мюонными) не происходит обратный β-процесс Райнеса — Коуэна (процесс 10). Зато происходят аналогичные процессы захвата нейтрино нейтроном или протоном, при этом вместо электрона или позитрона рождаются μ-мезоны соответствующего знака:

$$n + \nu_\mu \rightarrow p + \mu^-, \qquad (11)$$

$$\tilde{\nu}_\mu + p \rightarrow n + \mu^+. \qquad (12)$$

Установлено также, что у всех нейтрино масса покоя действительно очень мала (либо вовсе равна нулю); так, например, про массу обычного (электронного) нейтрино известно, что она по крайней мере меньше 1/7000 массы электрона.

Во многих лабораториях мира, в том числе и в Советском Союзе, ведутся интенсивные экспериментальные работы по изучению нейтрино. Цель этих работ — выяснить, какими еще свойствами обладают нейтрино. В частности, ведутся поиски других процессов, которые согласно теории слабых взаимодействий должны происходить под действием нейтрино.

Огромное внимание уделяется также поиску пока еще не обнаруженного нейтринного излучения от Солнца и других звезд. Современные представления о природе солнечной и внутризвездной энергии связаны с картиной интенсивных ядерных процессов, происходящих в сверхгорячей плазме (при температуре в несколько десятков миллионов градусов), из которой состоят внутренние области Солнца и других звезд. Возникнове́ние в этих процессах нейтрино должно существенно сказываться на общем энергетическом балансе, а следовательно, и на всей динамике развития звезд, поскольку нейтрино, свободно проникая сквозь всю толщу Солнца или звезды, улетают в космическое пространство и уносят с собой заметную долю общей энергии. Для обнаружения солнечных нейтрино сооружаются огромные подземные лаборатории на большой глубине в угольных шахтах или в тоннелях под большими горами с тем, чтобы обеспечить минимальный «уровень фона» от космических лучей в нейтринных детекторах.

Так в решении проблем, связанных с изучением слабых взаимодействий и нейтрино, тесно сомкнулись пути развития физики элементарных частиц — физики микромира — и науки о звездах и других галактических объектах — современной астрофизики.

Элементарная исповедь

Хорошо быть нейтриной. Летишь себе куда хочешь, пролетаешь все насквозь. Заряда нет, масса нулевая, никто тебя не трогает, не регистрирует... Чего еще надо?

А тут вертишься, как проклятый, вокруг ядра, с переменной вероятностью, с уровня на уровень скачешь. Энергию излучаешь. Все до последнего кванта отдаешь, а тебя все по Бору да по Дираку квантуют.

Поле открыли. Электромагнитное называется. *E* по иксу, *H* по игреку, *V* по зету. С ума можно сойти. Орбиты, говорят, стационарные, вертись, пожалуйста, сохраняй энергию.

Вот друг у меня на 1-й Боровской работает, у Водорода. А живет где-то у черта на куличках. Пока на работу доберется, так намучается бедняга, что хоть на ядро падай. А на работе что? Кванты разные, фотоны. Хулиганье. Шастают кругом, так и смотрят, кого с орбиты сшибить. Непорядок. Больше 10^{-8} *с* на одном атоме не удержишься.

А свободному и того хуже. То поле, то яма, а чего доброго и *U* ускоряющее. Вот деверь мой как-то в яму попал, теперь у него что-то с ψ-функцией не в порядке. Не совсем гладкая, с вывихом, значит.

В общем, что и говорить. Вот раньше, бывало, бежишь себе спокойно от «—» к «+». Ток тебе навстречу. У него новости спросишь, сам расскажешь. Добежишь, передохнешь. А теперь... Даже остановиться нельзя. Остановишься — такую неопределенность в импульсе получишь, что аж закачаешься, а импульс уменьшишь — по пространству размажут. Нет, нейтриной быть лучше.

Из газеты Московского физико-технического института «За науку».

ЛАБОРАТОРИЯ «КВАНТА»

Как можно измерить толщину зеркального слоя?

Н. М. Ростовцев

При изготовлении зеркал на полированную поверхность стекла наносят тонкий слой металла, хорошо отражающего свет. Особенно широкое распространение получили зеркала из серебра, осажденного на стекло химическим путем.

Но серебро, как известно, металл дорогой. Как проконтролировать расход серебра, то есть измерить толщину его слоя на зеркальной поверхности? Вы сумеете ответить на поставленный вопрос и произвести измерения толщины зеркального слоя, если познакомитесь с методом, предложенным Физо в 1861 году. Этот метод основан на химическом взаимодействии иода с серебром, он до сих пор применяется на практике.

Для измерения толщины зеркального слоя серебра на него кладут крупинку иода. Почти сразу же в окрестности крупинки начинает изменяться цвет покрытия. Через 5—10 минут (в зависимости от толщины слоя) вокруг крупинки образуется несколько окрашенных колец, а в том месте, где лежала крупинка, зеркало становится прозрачным. Если зеркало осветить красным светом или смотреть через красное стекло, то вокруг крупинки будут видны чередующиеся красные и темные кольца (рис. *а*).

Что же происходит? Пары иода (I_2), распространяющиеся от крупинки, взаимодействуют с серебром (Ag) и переводят его в иодистое серебро (AgI) — прозрачное твердое вещество. Около крупинки иода образуется слой AgI переменной толщины, напоминающий по своей форме двояковыпуклую линзу (рис. *б*). Толщина «линзы» к краям спадает «на нет». Интерференцией света в этом слое и объясняется появление колец.

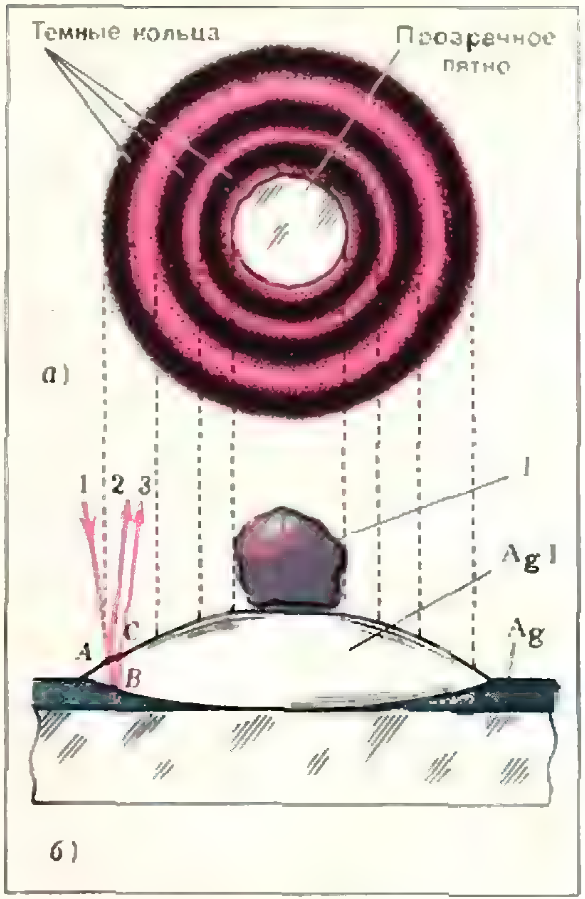
Когда на зеркало падает световая волна (луч 1 на рис. *б*), то она частично отражается от внешней поверхности слоя AgI (точка A, луч 2), частично проходит внутрь слоя, отражается от второй его поверхности, то есть от границы с серебром (точка B), и выходит наружу (точка C, луч 3). Полученные таким образом отраженные волны (лучи 2 и 3) когерентны, поэтому они будут интерферировать. Результат интерференции зависит от геометрической разности хода δ лучей 2 и 3, которую можно подсчитать по формуле

$$\delta = AB + BC.$$

Если угол падения света равен нулю или близок к нему, то $AB = BC$, поэтому

$$\delta = 2AB = 2d, \qquad (1)$$

где d — толщина «линзы» в месте падения светового луча. От края к центру слоя толщина его d постепенно растет, увеличивается и разность хода δ. При освещении монохроматическим светом (например, красным) максимумы освещенности (красные кольца) наблюдаются там, где разность хода лучей равна целому числу длин волн света в иодистом серебре. Темные кольца (минимумы освещенности) образуются там, где разность хода лучей кратна половине



длины волны λ в этом веществе:

$$\delta = (2k-1)\frac{\lambda}{2}. \qquad (2)$$

Здесь $k = 1, 2, 3, \ldots$ — номер темного кольца. Первым считается крайнее внешнее темное кольцо.

Из соотношений (1) и (2) следует, что там, где *наблюдается темное кольцо* с номером k, толщину слоя AgI можно подсчитать по формуле

$$d = (2k-1)\frac{\lambda}{4}. \qquad (3)$$

Если последнее темное кольцо с номером $k_{\max}$ совпадает с краем центрального прозрачного пятна, то максимальная толщина слоя $d_{\max}$ равна

$$d_{\max} = (2k_{\max}-1)\frac{\lambda}{4}. \qquad (4)$$

В действительности же последнее темное кольцо обычно не совпадает с краем прозрачного пятна, а *находится* на некотором расстоянии от него (как, например, на рис. *а*). Поэтому на самом деле $d_{\max}$ несколько больше значения, рассчитанного по формуле (4). Попробуем оценить эту неточность. Разность толщин «линзы» в местах, соответствующих двум соседним темным кольцам, равна половине длины волны. Следовательно, погрешность в определении $d_{\max}$ не превышает $\lambda/4$. Тогда, можно считать, что $d_{\max}$ равно приблизительно

$$d_{\max} = (2k_{\max}-1)\frac{\lambda}{4} + \frac{\lambda}{4} = k_{\max}\frac{\lambda}{2}. \qquad (5)$$

Длина волны света в веществе λ *связана* с длиной волны света в вакууме λ_0 соотношением $\lambda = \frac{\lambda_0}{n}$, где n — показатель преломления вещества. Учитывая это, запишем

$$d_{\max} = k_{\max}\frac{\lambda_0}{2n}. \qquad (6)$$

Оказывается (см. упражнение в конце статьи), толщина h серебряного слоя на зеркале связана определенным образом с максимальной толщиной иодистого серебра $d_{\max}$:

$$h = \frac{d_{\max}}{4} = k_{\max}\frac{\lambda_0}{8n}. \qquad (7)$$

Для иодистого серебра $n = 2,15$. Подставив это значение в (7), получаем формулу для определения толщины слоя серебра:

$$h = k_{\max}\frac{\lambda_0}{17,2}.$$

Пусть картина, изображенная на рисунке *а*, наблюдается через красный светофильтр (длина волны красного света $6,2\cdot10^{-5}$ *см*); тогда

$$h = \frac{3\cdot6,2\cdot10^{-5}}{17,2} \approx 10^{-5}\ \text{см}.$$

Если наблюдение проводят в белом свете, то под $k_{\max}$ понимают число цветных колец, а λ берут равной $5,6\cdot10^{-5}$ *см* (длина волны зеленого света, к которому наиболее чувствителен наш глаз).

Погрешность измерения толщины слоя AgI методом Физо, как было показано выше, равна $\frac{\lambda}{4}=\frac{\lambda_0}{4n}$. Толщина слоя Ag в 4 раза меньше толщины слоя AgI, поэтому погрешность в определении толщины слоя серебра равна $\frac{1}{4}\cdot\frac{\lambda_0}{4n}=\frac{\lambda_0}{34,4}$.

Для опытов по измерению толщины зеркального покрытия проще всего воспользоваться шариком из набора елочных украшений. Такой шарик надо осторожно разбить на кусочки с размерами порядка 1×1 *см*. Можно использовать и обычное маленькое зеркало. Слой серебра в зеркалах обычно покрывают краской, но ее легко удалить ваткой, смоченной в скипидаре или ацетоне. Опыты можно проводить и с пластинками слюды, покрытыми тонким слоем серебра. Такие пластинки имеются в слюдяных конденсаторах емкостью 100—1000 *пф*.

Крупинки иода можно найти в школьном кабинете химии. Для опытов подойдут крупинки размерами с маковое зернышко или несколько больше. Если крупинки иода достать не удается, то можно воспользоваться настойкой иода. Спичку смачивают в настойке иода, и после впитывания раствора отрезают кусочек длиной 1 — 1,5 *мм*. Его и кладут на исследуемый слой серебра.

Если кольца располагаются очень близко друг к другу, то следует воспользоваться лупой. Кольца видны более четко и сосчитать их легче, если рассматривать картину через красное стекло.

Упражнение

Показать, что толщина слоя серебра приблизительно в 4 раза меньше толщины слоя иодистого серебра, если известно, что плотность серебра — $10{,}5\cdot10^3$ *кг/м³*, плотность иодистого серебра — $5{,}73\cdot10^3$ *кг/м³*, атомный вес серебра — 107,8, молекулярный вес иодистого серебра — 234,7.

Указание. Запишите реакцию образования иодистого серебра и сравните объем, занимаемый прореагировавшим серебром, с объемом полученного иодистого серебра. Средние площади сечения обоих слоев считать одинаковыми.

Задачи на делимость чисел

Ниже приводятся несколько задач, которые мы советуем попробовать решить с помощью метода математической индукции. Этот метод зачастую позволяет решить многие задачи такого типа «в лоб» и избавляет нас от поисков более «хитрых» решений. Правда, эти «хитрые» решения зачастую короче, но зато их труднее придумать! Приведем сразу одно указание — индукцию приходится иногда применять многократно.

1. Докажите, что

n^3+5n делится на три,
$n^4+6n^3+11n^2+6n$
делится на четыре
при любом натуральном n.

2. Докажите, что

$4^n+15n-1$ делится на 9,
5^n-4n-1 делится на 16,
7^n-6n-1 делится на 36,
8^n-7n-1 делится на 49,
$(m+1)^n-m\cdot n-1$ делится на m^2
при любых натуральных m и n.

3. Докажите, что

$3^{n+1}+2^n\cdot5^{n+2}$ делится на 7,
$5^{2n}-3^n$ делится на 16,
$5^{2n+1}+3^{n+2}\cdot2^{n-1}$ делится на 19
при любом натуральном n.

4. Докажите, что

n^2-n делится на 2,
n^3-n делится на 3,
n^5-n делится на 5,
n^7-n делится на 7, . . .
n^p-n, где p—простое число, делится на p
при любом натуральном n.

О. С. Берлянд, Б. О. Берлянд

Одиннадцать кругов

На четвертой странице обложки в круге размещены двадцать три круга. Положение каждого из них определено точками касания либо с опорными окружностями, либо с опорными прямыми, либо друг с другом. Центры всех опорных окружностей лежат на вертикальном диаметре, точки их пересечения с этим диаметром — или крайние точки диаметра, или центр круга, или середина радиуса.

Одинаково окрашенные круги кажутся конгруэнтными, не так ли? Но, может быть, зрение нас обманывает? Во всяком случае, с помощью циркуля различие между ними установить не удается. Так какое же выполняется равенство — точное или приближенное?

На рисунке 1 из рисунка с обложки удалены части, содержащие круги, явно конгруэнтные оставшимся одноцветным. Двенадцать кругов исчезло, оставшиеся пронумерованы. В том же порядке занумеруем их радиусы. Ясно, что если удастся провести доказательство гипотезы для кругов на рисунке 1, то его легко распространить на рисунок с обложки.

Проверку начнем с желтых кругов. Пусть радиус наибольшей из опорных окружностей равен R. Из рисунка 2 видно, что

$$\left(\frac{R}{4}\right)^2-\left(\frac{R}{2}-r_1\right)^2=\left(\frac{R}{4}+r_1\right)^2,$$

откуда $r_1=R/6$. Аналогично из рисунка 3 получаем равенство

$$\left(\frac{R}{2}+r_2\right)^2+\left(\frac{R}{2}\right)^2=(R-r_2)^2,$$

из которого следует, что и $r_2=R/6$. Теперь вы без труда докажете самостоятельно, что $r_3=R/6$.

А вот *для того, чтобы доказать*, что $r_4=R/6$, теоремы Пифагора недостаточно; приходится воспользоваться теоремой Стюарта: *если в треугольнике со сторонами a, b и c из вершины A к стороне a провести отрезок длины d* (рис. 4), *который делит ее на отрезки m и n, то*

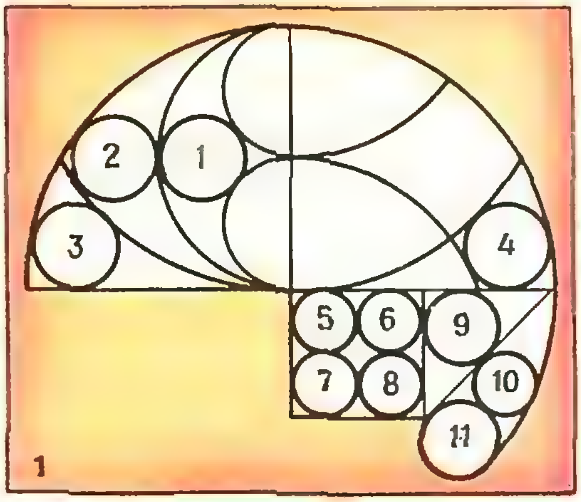
$$d^2a=b^2m+c^2n-amn.$$

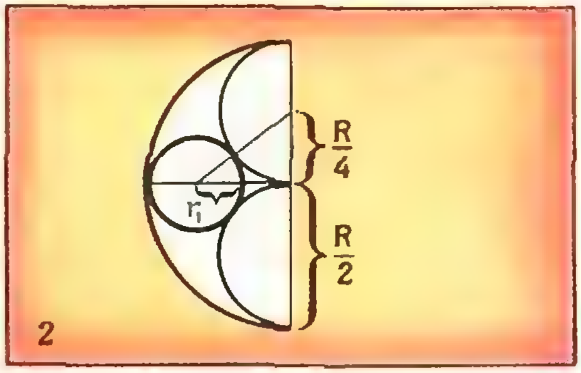
Доказательство теоремы Стюарта следует *из равенств* $c^2=d^2+m^2-2mp$ и $b^2=d^2+n^2+2np$, где p — проекция отрезка d на основание треугольника.

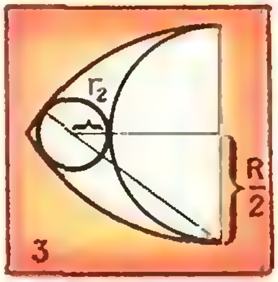
Радиус любого из белых кругов равен $R/8$. Чтобы доказать это для десятого круга, можно рассмотреть прямоугольный треугольник, выделенный красным цветом на рисунке 5.

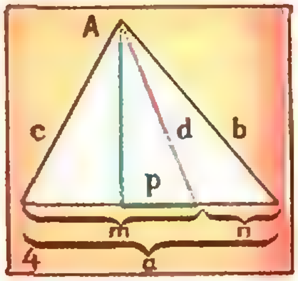
Доказано почти все, остальное вы без труда сделаете самостоятельно. А может быть, вы найдете другое доказательство?

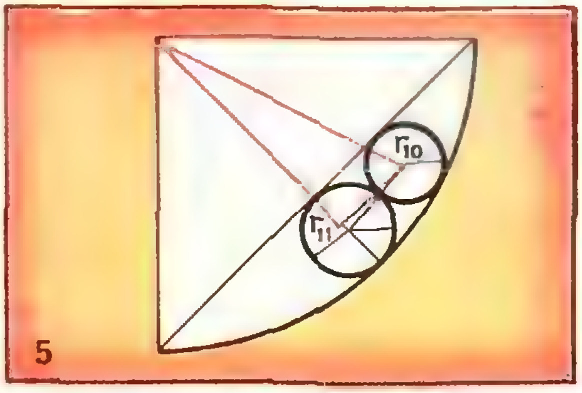
В. Н. Березин











Расположение опорных окружностей и прямых на рисунках 1, 2, 3 и 5 соответствует рисунку на четвертой странице обложки.

задачник кванта

Решения задач из этого номера можно посылать не позднее 1 августа 1975 г. по адресу: 117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15, издательство «Наука», журнал «Квант». После адреса на конверте напишите, решения каких задач вы посылаете, например: «Задачник «Кванта», М326, М327» или «... Ф338». Решения задач по каждому из предметов (математике и физике), а также новые задачи просьба присылать в отдельных конвертах. Задачи из разных номеров журнала присылайте также в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки ваших решений). Условия оригинальных задач, предлагаемых для публикации, присылайте в двух экземплярах вместе с вашими решениями этих задач (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «... новая задача по математике»). После формулировки задачи мы обычно указываем, кто предложил нам эту задачу. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Наиболее трудные задачи отмечены звездочкой.

Задачи

М326—М330; Ф338—Ф342

М326. Хорда окружности удалена от центра на расстояние h. В каждый из сегментов, стягиваемых хордой, вписан квадрат так, что две соседние вершины квадрата лежат на дуге, две другие — на хорде (рис. 1). Чему равняется разность длин сторон этих квадратов?

Э. Г. Готман

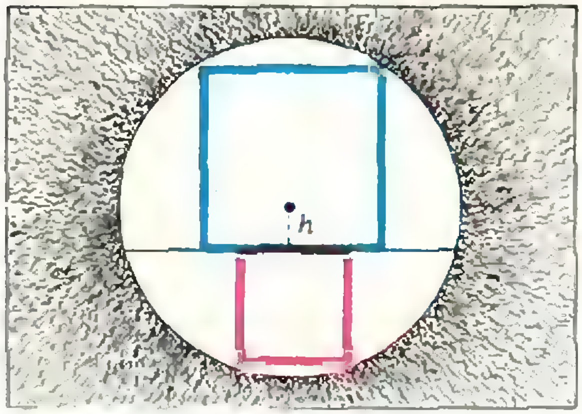


Рис. 1.

М327. В компании N человек. Каждому из них нравится ровно k людей из этой компании. При каком наименьшем k можно утверждать, что обязательно найдутся два человека из этой компании, которые нравятся друг другу?

А. Колодин, ученик 10 класса (г. Коломыя)

М328. По правильному тетраэдру ползают муха и два паука. Муха ползает только по ребрам, а пауки — по всей поверхности. Максимальная скорость мухи в 2 раза больше максимальной скорости пауков.

а) Докажите, что при любом начальном расположении пауки смогут поймать муху.

б) Верно ли это, если максимальная скорость мухи более чем в 2 раза превосходит максимальную скорость пауков?

в) Как изменится ответ, если разрешить паукам ползать только по ребрам тетраэдра? по всему объему тетраэдра? (Муха по-прежнему двигается только по ребрам.)

О. Ефремов, ученик 9 класса (г. Ангарск)

М329. Выпуклый n-угольник помещен в квадрат со стороной 1. Докажите, что найдутся три вершины A, B, C этого n-угольника такие, что площадь треугольника ABC меньше $8/n^2$.

Г. Шмелев, ученик 10 класса (г. Ярославль)

М330. На плоскости расположены два выпуклых многоугольника M_0 и M_1. Обозначим через M множество точек, в которые может попасть середина отрезка, один конец которого принадлежит M_0, второй — M_1. Докажите, что M — выпуклый многоугольник.

а) Сколько сторон может иметь M, если M_0 имеет их n_0, а M_1 — n_1?

б) Каков может быть периметр M, если периметр M_0 равен P_0, а M_1 — P_1?

в)* Какова может быть площадь M, если площадь M_0 равна S_0, а площадь M_1 — S_1?

Н. Б. Васильев

Ф338. Два стержня из разных металлов с коэффициентами линейного расширения α_1 и α_2 при температуре 0°C имеют малоразличающиеся длины l_1 и l_2 и поперечные сечения s_1 и s_2. При каких температурах стержни будут иметь одинаковые а) длины? б) поперечные сечения? в) объемы?

Б. Б. Буховцев

Ф339. Теннисный мяч попадает на тяжелую ракетку и упруго отражается от нее. Масса мяча много меньше массы ракетки, а скорость мяча до столкновения с ракеткой равна v и составляет угол $\alpha = 60°$ с перпендикуляром к ракетке. С какой постоянной скоростью должна поступательно двигаться ракетка для того, чтобы мяч отразился от нее под прямым углом к направлению первоначального движения? Как до, так и после столкновения с ракеткой мяч не вращается.

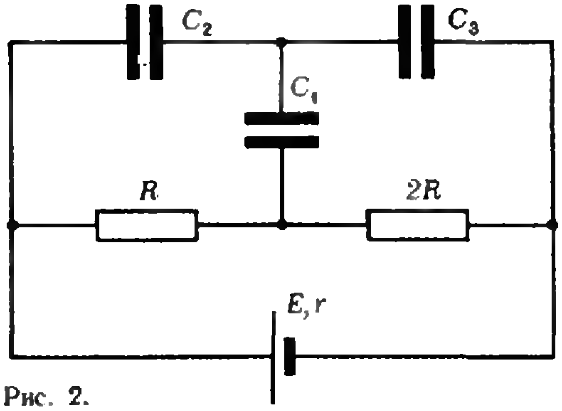


Рис. 2.

Ф340. Спутник Земли массой $m = 10$ *кг*, движущийся по круговой орбите в высоких слоях атмосферы, испытывает сопротивление разреженного воздуха. Сила сопротивления $F = 5 \cdot 10^{-4}$ *н*. Определить, насколько изменится скорость спутника за один оборот вокруг Земли. Высоту полета спутника над поверхностью Земли считать малой по сравнению с радиусом Земли.

С. М. Козел

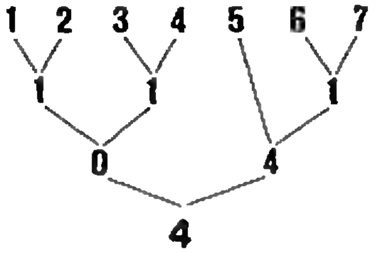
Ф341. В простейшей схеме магнитного гидродинамического генератора плоский конденсатор с площадью пластин S и расстоянием между ними d помещен в поток проводящей жидкости с удельной проводимостью σ. Жидкость движется с постоянной скоростью v параллельно пластинам. Конденсатор находится в магнитном поле с индукцией $\mathbf{B}$, направленной перпендикулярно скорости жидкости и параллельно плоскости пластин. Какая мощность выделяется во внешней цепи, имеющей сопротивление R?

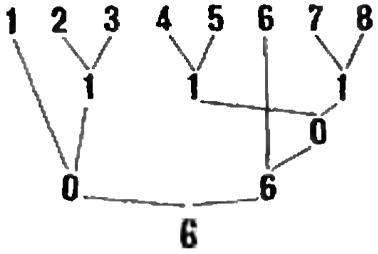
Ф342. Найти заряд конденсатора 2 (рис. 2), если $C_1 = C_2 = C_3 = C$. Э. д. с. источника E, внутреннее сопротивление источника r.

Решения задач

М292—М295; Ф300—Ф302

М292. *На доске выписаны числа от 1 до 50. Разрешается стереть любые два числа и вместо них записать одно число — модуль их разности. После повторения указанной процедуры несколько раз на доске остается одно число. Какое это может быть число?*





М293. *Дан треугольник C_1C_2O. В нем проводится биссектриса C_2C_3, затем в треугольнике C_2C_3O — биссектриса C_3C_4 и так далее. Докажите, что последовательность величин углов $\gamma_n = \widehat{C_{n+1}C_nO}$ стремится к пределу, и найдите этот предел, если $C_1OC_2 = \alpha$.*

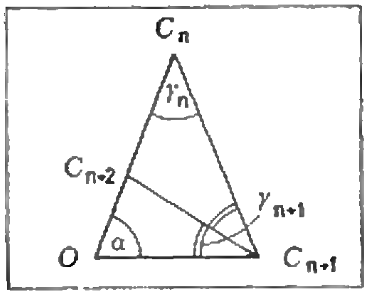


Рис. 1.

Ответ. Любое нечетное число, меньшее 50, то есть одно из 25 чисел 1, 3, 5,…, 49.

Покажем сначала, что любое из этих чисел может получиться. Пусть мы хотим получить число $2m+1$ ($m=0, 1, \ldots, 24$). Разобьем числа от 1 до 50 на пары так: $(1, 2m+2)$, $(2, 3)$, $(4, 5)$, …, $(2m, 2m+1)$, $(2m+3, 2m+4)$, …, $(49, 50)$. Запишем вместо каждой пары модуль разности входящих в нее чисел: $2m+1$, 1, …, 1 (24 единицы). Осталось избавиться от единиц. Для этого можно, разбив их на пары, получить 12 нулей, а потом избавиться и от нулей (вместо пары $(a, 0)$ мы можем писать одно число $|a-0|=a$).

Теперь докажем, что никакое другое число, кроме 1, 3, 5,…,49 получиться не может. Прежде всего ясно, что любое написанное на доске число будет заключено между 0 и 50 (если $0 \leqslant a \leqslant 50$, $0 \leqslant b \leqslant 50$, то и $0 \leqslant |a-b| \leqslant 50$). Докажем, что полученное число обязательно будет нечетным. Проследим за суммой всех чисел, выписанных на доске. Вначале она равна

$$1+2+3+\ldots+50=25\cdot 51,$$

то есть нечетна. Но замена пары (a, b) на одно число $|a-b|$ не меняет четность всей суммы, поскольку числа $a+b$ и $|a-b|$ всегда одинаковой четности (или оба четны, или оба нечетны). Поэтому сумма выписанных чисел на каждом шаге, в том числе и на самом последнем, когда остается одно число,— будет нечетна.

Можно показать, что и в более общем случае, когда вначале на доске выписаны числа от 1 до n, в конце может получиться любое целое число k такое, что $0 \leqslant k \leqslant n$ и k — той же четности, что $n(n+1)/2$ (то есть k четно, если n дает при делении на 4 остаток 3 или 0, и нечетно, если — остаток 1 или 2).

◆

Попробуем догадаться, чему равен этот предел (предположив, что существование предела уже доказано). Из условия задачи следует, что $C_{n+1}C_{n+2}$ — биссектриса угла треугольника $C_nC_{n+1}O$ (рис. 1), поэтому

$$2\gamma_{n+1}+\gamma_n+\alpha=\pi. \tag{1}$$

Если предел $\lim\limits_{n\to\infty}\gamma_n$ существует и равен β, то, переходя к пределу в равенстве (1), получим

$$2\beta+\beta+\alpha=\pi, \tag{2}$$

откуда

$$\beta=(\pi-\alpha)/3.$$

Теперь докажем, что γ_n действительно стремится к пределу $\beta=(\pi-\alpha)/3$. Посмотрим, как меняется с ростом n разность между γ_n и β. Перепишем (1) так:

$$2\left(\gamma_{n+1}-\frac{\pi-\alpha}{3}\right)=\frac{\pi-\alpha}{3}-\gamma_n.$$

Отсюда следует, что $|\gamma_{n+1}-\beta|=|\gamma_n-\beta|/2$, то есть что разность между γ_n и β при переходе от n к $n+1$ уменьшается вдвое. Следовательно, $|\gamma_n-\beta|=|\gamma_1-\beta|/2^{n-1}$ стремится к нулю, то есть предел γ_n действительно существует и равен $\beta=(\pi-\alpha)/3$.

M294. *Докажите, что если a, b, c, d, x, y, u, v — вещественные числа и $abcd > 0$, то*

$$(ax+bu)(av+by)(cx+dv)\times(cu+dy) \geq (acuvx+bcuxy+advxy+bduvy)\times(acx+bcu+adv+bdy).$$

M295. *Сечения выпуклого многогранника тремя параллельными плоскостями p_0, p_1 и p_2 (p_1 расположена между p_0 и p_2 на одинаковом расстоянии h от той и другой) имеют площади S_0, S_1 и S_2 соответственно. Между p_0 и p_2 нет ни одной вершины многогранника.*

а) Докажите, что

$$2\sqrt{S_1} \geq \sqrt{S_0}+\sqrt{S_2}.$$

б) В каком случае неравенство обращается в равенство?

в) Найдите площадь S_t сечения многогранника плоскостью, параллельной p_0 и расположенной на расстоянии th от p_0 и $(2-t)h$ от p_2 ($0 < t < 2$).

г) Найдите объем части многогранника, заключенной между плоскостями p_0 и p_2.

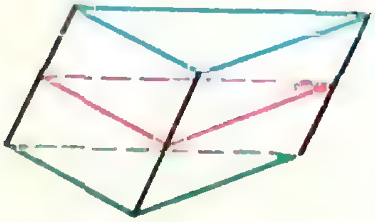


Рис. 2.

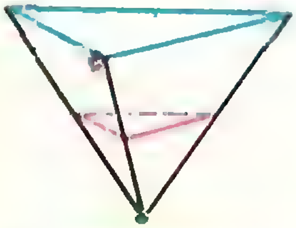


Рис. 3.

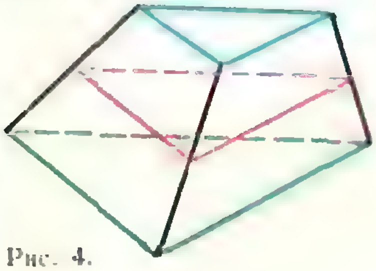


Рис. 4.

Если раскрыть все скобки, то в каждой части неравенства получится по 16 слагаемых, из которых 12 — одинаковые и сокращаются. Оставшиеся слагаемые после приведения подобных членов составляют такое очевидное неравенство, эквивалентное исходному:

$$abcd\,(xy-uv)^2 \geq 0.$$

◆

Обозначим часть многогранника, заключенную между плоскостями p_0 и p_2, через M; через V — объем выпуклого многогранника M. По условию все вершины M лежат в плоскостях p_0 и p_2. На рисунках мы будем вершины и ребра многогранника M, *лежащие в плоскости p_2, изображать голубым цветом, в p_0* — зеленым, а сечение плоскостью p_1 — красным.

Рассмотрим сначала несколько примеров.

1°. M — призма с основаниями в плоскостях p_0 и p_2 (рис. 2). Тогда $S_t = C$ (постоянная величина), в частности, $S_0 = S_1 = S_2 = C$, так что выполняется равенство

$$2\sqrt{S_1} = \sqrt{S_0}+\sqrt{S_2} \qquad (*)$$

и $V = 2S_0h$ (высота призмы равна $2h$).

2°. M — треугольная пирамида, у которой вершина лежит в плоскости p_0, а основание — в плоскости p_2 (рис. 3). Тогда линейные размеры сечения плоскостью, параллельной p_0, пропорциональны расстоянию этой плоскости от p_0, так что S_t пропорционально t^2: $S_t = At^2$, так что

$$S_0 = 0,\ S_1 = A,\ S_2 = 4A,$$

и вновь выполняется равенство $(*)$; при этом $V = 2S_2h/3$.

3°. M — усеченная треугольная пирамида с основаниями в плоскостях p_0 и p_2 (рис. 4). Тогда $S_t = A(t-\tau)^2$ (τ определяется тем, на каком расстоянии $|\tau h|$ от плоскости p_0 пересекаются продолжения боковых граней пирамиды: $\tau > 2$ или $\tau < 0$, в зависимости от того, лежит ли точка пересечения продолжений боковых граней по ту же сторону от p_0, что p_2, *или по другую*), так что

$$S_0 = A\tau^2,\ S_1 = A(1-\tau)^2,\ S_2 = A(2-\tau)^2$$

Проверьте, что вновь выполнено равенство $(*)$, а A и τ можно выразить через S_0 и S_2 так:

$$\frac{\tau-2}{\tau} = \sqrt{\frac{S_2}{S_0}} \Rightarrow \tau = \frac{2\sqrt{S_0}}{\sqrt{S_0}-\sqrt{S_2}};$$

$$A = \left(\frac{\sqrt{S_0}-\sqrt{S_2}}{2}\right)^2$$

Объем V равен $2(S_0+\sqrt{S_0S_2}+S_2)h/3$ (его можно найти как разность объемов двух неусеченных пирамид: $V = \frac{S_0h\tau}{3}-\frac{S_2h(\tau-2)}{3}$).

Разумеется, пример 2° можно считать частным случаем 3°.

4°. M — треугольная призма, лежащая на боку (рис. 5, *а*). Здесь $S_t = B(2-t)$, так что

$$S_0 = 2B,\ S_1 = B,\ S_2 = 0.$$

и выполнено неравенство

$$2\sqrt{S_1} > \sqrt{S_2}+\sqrt{S_0}, \qquad (**)$$

и $V = S_0h$ (рис. 5, *б*).

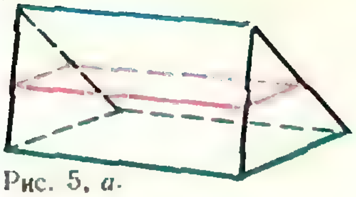


Рис. 5, *а*.

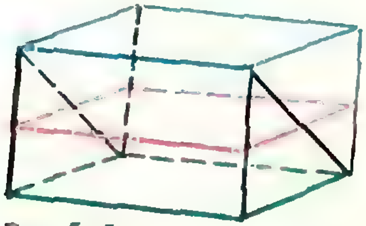


Рис. 5, *б*.

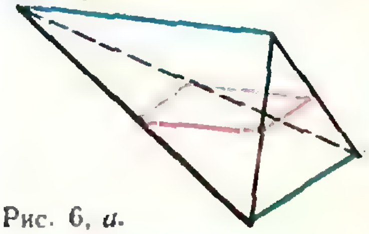


Рис. 6, *а*.

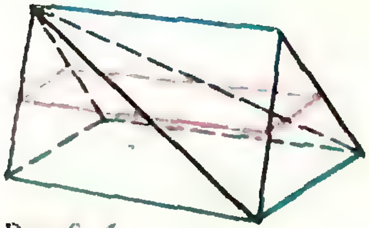


Рис. 6, *б*.

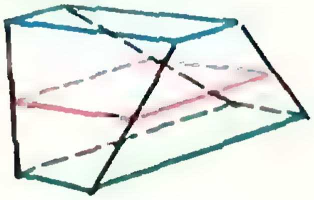


Рис. 7.

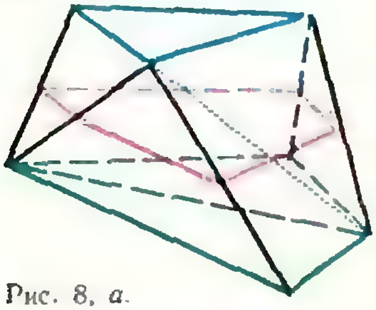


Рис. 8, *а*.

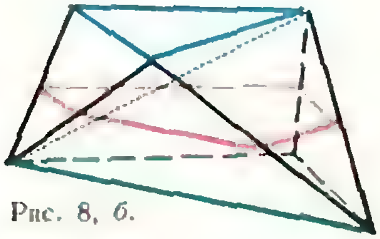


Рис. 8, *б*.

5°. M — треугольная пирамида, у которой две вершины принадлежат p_0, а две — p_2 (рис. 6, *а*). Тогда S_t — площадь параллелограмма, у которого длины сторон линейно зависят от t, причем одна обращается в 0 при $t=0$, а другая — при $t=2$, поэтому $S_t=At\,(t-2)$, так что $S_0=S_2=0$, $S_1=-A$ и выполнено неравенство (**). Объем V здесь равен $4S_1h/3$ (рис. 6, *б*).

6°. M — многогранник, у которого все сечения плоскостями, параллельными p_0 и p_2, — параллелограммы (быть может, вырожденные при $t=0$ или $t=2$ — см. рисунок 7). В этот пример входят 4°, 5°, параллелепипеды, усеченная пирамида с параллелограммом в основании и другие многогранники. Здесь мы заметим только, что длины той и другой стороны параллелограмма линейно зависят от t (либо вообще не зависят от t), так что S_t выражается функцией вида $S_t=C$, $S_t=B(t-\tau_0)$ или $S_t=A(t-\tau_1)(t-\tau_2)$ (τ_j — числа, не принадлежащие интервалу $]0;2[$).

Теперь приведем схему решения задачи в общем случае, оставляя детали доказательств читателю.

Любой многогранник M можно свести к уже рассмотренным, воспользовавшись тем или другим из следующих способов:

(**Р**). M можно разрезать на треугольные пирамиды (вида 2° и 5°) некоторыми плоскостями, проходящими через его вершины (рис. 8, *а*—*г*).

(**Д**). Если M отличен от многогранников вида 6°, то, продолжив некоторые его грани, можно несколькими треугольными усеченными пирамидами и призмами (вида 3° и 2° и 1°) дополнить M до треугольной усеченной пирамиды или призмы (рис. 8, *д*).

Теорема 1. *Площадь сечения S_t, как функция t, выражается для любого многогранника M квадратным трехчленом:*

$$S_t=At^2+Bt+C,$$

причем дискриминант этого трехчлена неотрицателен:

$$B^2-4AC\geqslant 0$$

и равен нулю только для призм и пирамид (в том числе усеченных) с основаниями в плоскостях p_0 и p_2.

Лемма. Пусть $F(t)=At^2+Bt+C\geqslant 0$ на отрезке $a\leqslant t\leqslant b$. Тогда график функции $y=\sqrt{F(t)}$ на этом отрезке — выпуклый вверх, если $B^2-4AC>0$, выпуклый вниз, если $B^2-4AC<0$, и представляет собой отрезок прямой линии (или состоит из отрезков двух прямых), если $B^2-4AC=0$. (График функции $y=f(t)$ на отрезке $[a,b]$ мы называем *выпуклым вверх*, если для любых точек c, $c-d$ и $c+d$ этого отрезка выполнено неравенство

$$2f(c)\geqslant f(c+d)+f(c-d),$$

и *выпуклым вниз*, если выполнено противоположное неравенство, — см. рис. 9.)

Ясно, что из теоремы 1 и леммы вытекает утверждение а) задачи М295 и ответы на вопросы б) и в):

б) равенство (*) выполняется только для пирамид, призм и усеченных пирамид с основаниями в плоскостях p_0 и p_2.

в) $S_t=At^2+Bt+C$, где A, B и C определяются из системы уравнений $S_0=C$, $S_1=A+B+C$, $S_2=4A+2B+C$; отсюда

$$S_t=\frac{S_2-2S_1+S_0}{2}\,t^2-\frac{3S_0-4S_1+S_2}{2}\,t+S_0.$$

Чтобы найти объем V, те, кто знаком с началами интегрального исчисления, могут просто проинтегрировать S_t от $t=0$ до $t=2$ и результат умножить на h. Впрочем, с самого начала ясно, что если нужная формула существует (то есть объем действительно выражается через S_0, S_1, S_2 и h), то она должна иметь вид $V=(\alpha S_0+\beta S_1+\alpha S_2)h$, а числа α и β

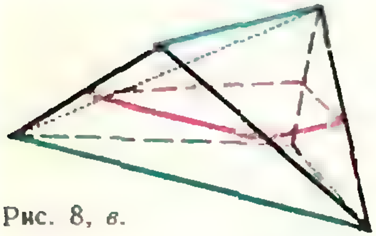


Рис. 8, *в*.

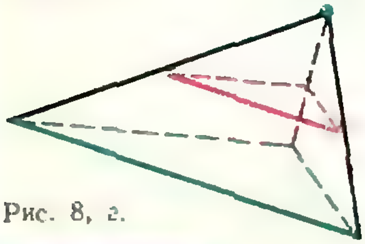


Рис. 8, *г*.

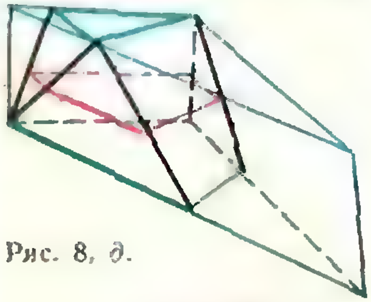


Рис. 8, *д*.

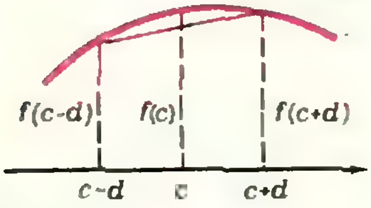


Рис. 9.

легко найти из рассмотренных пяти примеров. Таким образом, мы приходим к такой теореме, *дающей ответ на вопрос г).*

Теорема 2. *Объем V многогранника M равен $(S_0+4S_1+S_2)h/3$.*

В заключение дадим несколько указаний к доказательствам всех высказанных утверждений.

Утверждения (**Р**) и (**Д**) можно доказать индукцией по числу вершин или по числу граней многогранника M.

В доказательстве теоремы 1 удобно воспользоваться (**Д**): если $M\cup\Pi_1\cup\ldots\cup\Pi_n=\Pi_0$ и $S_t^i (i=0, 1, \ldots, n)$ — площади сечений многогранников Π_i (усеченных пирамид и призм), то

$$S_t=S_t^{(0)}-S_t^{(1)}-\ldots-S_t^{(n)}=At^2+Bt+C,$$

где каждое $S_t^{(i)}$ имеет вид либо C_i, либо $A_i(t-\tau_i)^2$; поскольку $S_t\geqslant0$ при $0\leqslant t\leqslant2$ и (если S_t — непостоянная) At^2+Bt+C принимает неположительные значения (если $S_t^{(0)}=A^{(0)}(t-\tau_0)^2$, то при $t=\tau_0$, если $S_t^{(0)}=C_0$ — то при достаточно больших t), $S_t=At^2+Bt+C$ имеет *вещественные корни, то есть* $B^2-4AC\geqslant0$.

Для доказательства леммы полезно использовать тот факт, что свойство «иметь вещественные корни» и *направление выпуклости* графика сохраняются, если умножить трехчлен на положительное число или перейти к новому трехчлену с помощью линейной замены переменной $t=pt^*+q$ (p и q — любые числа, $p\neq0$). Для тех, кто познакомился с кривыми второго порядка по статьям Н. Н. Бронштейна («Квант», №№ 1, 3, 4), заметим, что в случае $B^2-4AC>0$ графиком $y=\sqrt{F(t)}$ будет кусок эллипса или гиперболы, фокусы которой лежат на оси Ot, а в случае $B^2-4AC<0$ — кусок гиперболы, у которой отрезок, соединяющий фокусы, перпендикулярен Ot.

Для доказательства теоремы 2 лучше использовать (**Р**) — тогда формулу для V достаточно проверить для тетраэдров 2° и 5°.

Н. Б. Васильев

◆

Ф300*). *Найти, на какую высоту поднимается жидкость в расширяющемся и сужающемся конических капиллярах. Смачивание полное. Угол при вершине конуса, который образует капилляр, равен 2α. Этот угол считать малым. Коэффициент поверхностного натяжения жидкости σ.*

Так как смачивание полное, то свободная поверхность жидкости в капилляре представляет собой часть сферической поверхности, вписанной в конус. Радиус этой сферы R равен $r/\cos\alpha$, где r — радиус капилляра на той высоте, до которой поднимается жидкость (рис. 10, 11). Под вогнутой сферической поверхностью радиуса R давление в жидкости меньше атмосферного на величину $p_д=\frac{2\sigma}{R}=\frac{2\sigma\cos\alpha}{r}$ и равно $p=p_0-p_д=p_0-\frac{2\sigma\cos\alpha}{r}$. На уровне поверхности жидкости в широком сосуде давление в капилляре равно $p+\rho gh$ и, очевидно, равно атмосферному давлению p_0. Следовательно,

$$p_0-\frac{2\sigma\cos\alpha}{r}+\rho gh=p_0, \quad \text{или} \quad \rho gh=\frac{2\sigma\cos\alpha}{r}. \qquad (1)$$

Обозначим через r_0 радиус капилляра на уровне поверхности жидкости в широком сосуде. Тогда $r=r_0+h\,\mathrm{tg}\,\alpha$ в случае расширяющегося капилляра и $r=r_0-h\,\mathrm{tg}\,\alpha$

---

*) Решение задачи Ф299 будет опубликовано в следующем номере.

при суживающемся капилляре. Или, для обоих случаев, $r = r_0 + kh\,\mathrm{tg}\,\alpha$, где $k = 1$ для расширяющегося капилляра и $k = -1$ для суживающегося капилляра. Учитывая это, перепишем (1) в виде

$$\rho g h = \frac{2\sigma\cos\alpha}{r_0 + kh\,\mathrm{tg}\,\alpha}. \tag{2}$$

При $\alpha = 0$ это уравнение дает известный результат $h = \frac{2\sigma}{\rho g r_0}$. Если α не равно нулю, то из (2) непосредственно получаем квадратное уравнение

$$k\rho g\,\mathrm{tg}\,\alpha\, h^2 + \rho g r_0 h - 2\sigma\cos\alpha = 0. \tag{3}$$

Решая это уравнение, найдем

$$h_{1,2} = \frac{-\rho g r_0 \pm \sqrt{(\rho g r_0)^2 + 8k\rho g\sigma\sin\alpha}}{2k\rho g\,\mathrm{tg}\,\alpha}. \tag{4}$$

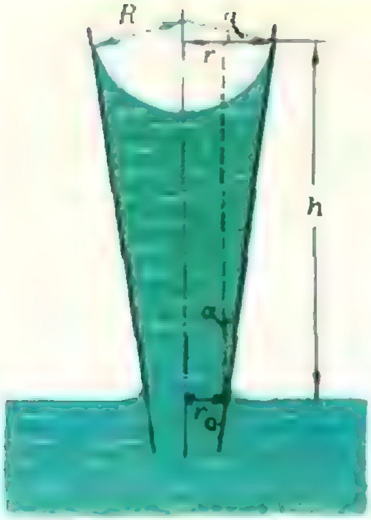


Рис. 10.

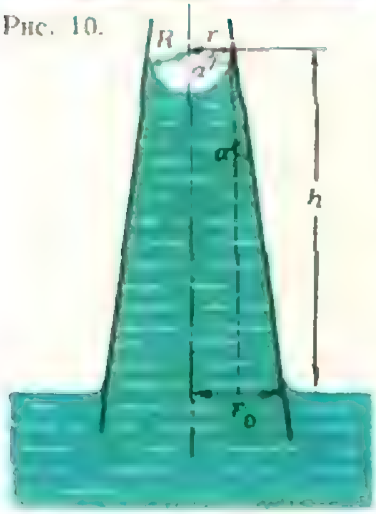


Рис. 11.

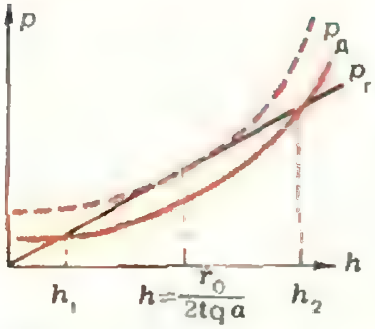


Рис. 12.

В случае расширяющегося капилляра (при $k = 1$) имеется только одно положительное значение корня уравнения (3):

$$h = \frac{-r_0 + \sqrt{r_0^2 + 8\sigma\sin\alpha/\rho g}}{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}.$$

До такой высоты и поднимется жидкость в расширяющемся капилляре.

В случае суживающегося капилляра ($k = -1$), если $\rho g r_0^2 > 8\sigma\sin\alpha$, оба корня могут быть положительными и поэтому необходимо исследовать ответ более подробно. Для этого вернемся к уравнению (2). Выражение в левой части уравнения — это гидростатическое давление столба жидкости высоты h; обозначим его $p_г$. Выражение в правой части — это добавочное, «поддерживающее» давление $p_д$, возникающее благодаря действию сил поверхностного натяжения. Нарисуем на одном чертеже графики зависимости $p_г$ и $p_д$ от h (рис. 12). Точки пересечения графиков соответствуют найденным значениям h_1 и h_2, то есть положениям равновесия жидкости в капилляре. Рассмотрим оба эти положения. Пусть $h = h_1$ и по каким-то случайным причинам уровень жидкости немного увеличился. В этом случае $p_д$ увеличится меньше, чем $p_г$, следовательно, поверхность жидкости опустится, вернувшись к уровню с $h = h_1$. При уменьшении h $p_д$ уменьшится меньше, чем $p_г$, благодаря чему уровень жидкости увеличится. Это означает, что положение равновесия

$$h = h_1 = \frac{r_0 - \sqrt{r_0^2 - 8\sigma\sin\alpha/\rho g}}{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}$$

является устойчивым. Точно так же, рассматривая положение равновесия $h = h_2$, можно показать, что оно является неустойчивым. При случайном уменьшении уровня жидкости он будет продолжать уменьшаться до h_1, а при увеличении h — увеличиваться до верхней границы капилляра.

При $\rho g r_0^2 = 8\sigma\sin\alpha$ имеется только одно значение корня, графики $p_г$ и $p_д$ (пунктирная линия на рисунке) касаются в точке $h = \frac{r_0}{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}$.

В этом случае положение равновесия жидкости неустойчиво, и при случайном малом увеличении уровня жидкости он будет подниматься до границы капилляра. При $\rho g r_0^2 < 8\sigma\sin\alpha$ положения равновесия вообще отсутствуют, и жидкость обязательно поднимется до верха капилляра.

Ф 301. *Круглая линза диаметра D состоит из двух соединенных по диаметру половинок. Фокусное расстояние одной из них F, другой $2F$. На расстоянии a от линзы находится источник света, на расстоянии $2a$ по другую сторону линзы — экран. Нарисуйте график зависимости освещенности изображения источника на экране от расстояния точки экрана до оптической оси линзы. Источник находится на оптической оси линзы, экран перпендикулярен этой оси.*

Две половинки линзы образуют оптическую систему из двух линз с фокусными расстояниями F (линза Л$_1$) и $2F$ (линза Л$_2$). Оптические оси этих линз совпадают. По определению освещенность зависит от светового потока, попадающего на экран, и от площади пятна на экране. В нашем случае при определенном положении источника каждая линза создает на экране свое световое пятно, так как различны фокусные расстояния линз. Величины же световых потоков, проходящих через линзы, одинаковы, поскольку одинаковы площади линз, а значит, и телесные углы, внутри которых заключены световые потоки, попадающие на экран. Следовательно, освещенность экрана определяется величиной площади изображения. Очевидно, что при изменении положения источника меняется положение его изображения, следовательно, изменяются площадь пятна на экране и величина освещенности изображения на экране.

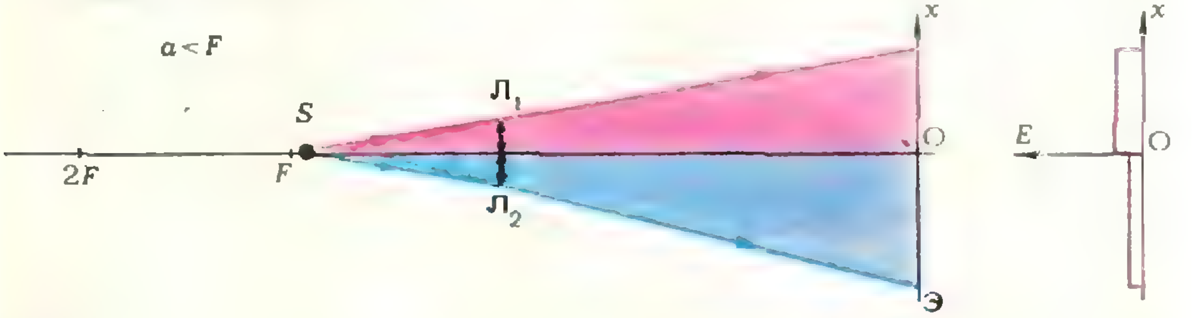


Рис. 13.

Используя формулу линзы, найдем, что изображения источника находятся от линз на расстояниях $f_1 = \dfrac{Fa}{a-F}$ и $f_2 = \dfrac{2Fa}{a-2F}$. Рассмотрим несколько положений источника.

При $a<F$ $f_1<0$ и $f_2<0$, то есть оба изображения источника мнимые. На экран попадают пучки лучей, показанные на рисунке 13. Эти пучки на экране не перекрываются, каждая линза освещает свою часть экрана и создает на нем свою освещенность. (Напомним, что в геометрической оптике рассматриваются узкие приосевые пучки, поэтому световое пятно на экране небольшое, и можно считать, что освещенность в любом месте пятна одна и та же.) Справа на рисунке показан график зависимости освещенности от расстояния x до оптической оси.

При $F<a<2F$ $f_1>0$ и $f_2<0$. Изображение источника в первой линзе действительное, а во второй — мнимое. Однако распределение освещенности зависит еще от того, каково f_1 — больше оно или меньше, чем расстояние до экрана $2a$. Это соответствует случаям $F<a<\dfrac{3}{2}F$ и $\dfrac{3}{2}F<a<2F$.

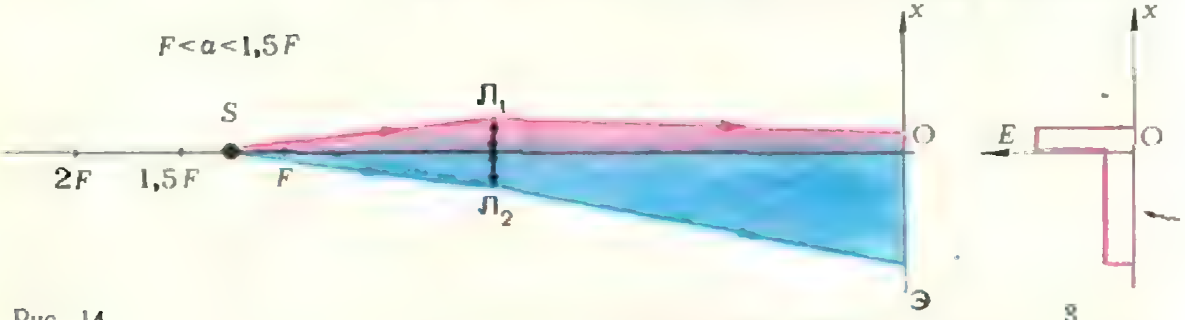


Рис. 14.

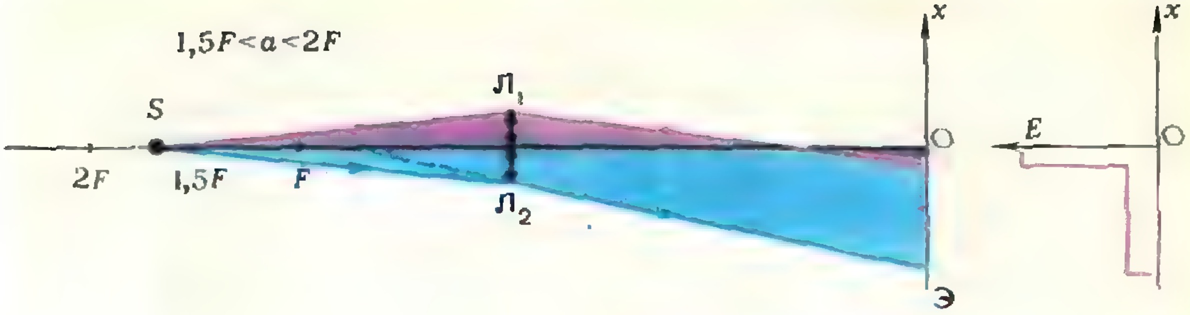


Рис. 15.

Пучки лучей и графики освещенности для этих случаев показаны на рисунках 14 и 15.

И, наконец, при $a > 2F$ оба изображения источника действительные, причем $f_1 < 2a$, а f_2 может быть и больше, и меньше, чем $2a$. Если $2F < a < 3F$, то $f_2 > 2a$; ход лучей и график освещенности аналогичны случаю, показанному на рисунке 15. Если же $a > 3F$, то $f_2 < 2a$, построения и графики аналогичны случаю, соответствующему рисунку 14. Убедитесь в этом самостоятельно.

◆

Ф302. *За лисой, бегущей прямолинейно и равномерно со скоростью v_1, гонится собака, скорость которой v_2 постоянна по абсолютной величине и направлена все время на лису. В тот момент, когда скорости v_1 и v_2 оказались взаимно перпендикулярными, расстояние между лисой и собакой было равно l. Каково было ускорение собаки в этот момент?*

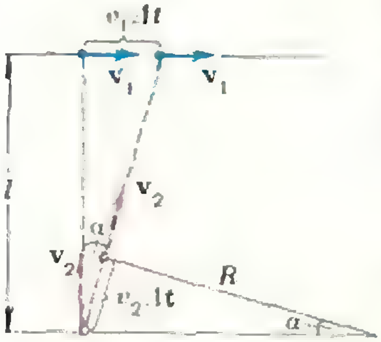


Рис. 16.

Так как абсолютная величина скорости собаки постоянна, а меняется только направление скорости, то ускорение собаки направлено перпендикулярно к вектору скорости. Чтобы найти величину ускорения собаки, воспользуемся тем, что любую траекторию материальной точки за очень малый промежуток времени можно считать дугой окружности. Тогда ускорение собаки представляет собой центростремительное ускорение, равное

$$a = \frac{v_2^2}{R},$$

где R — радиус окружности, которой можно заменить действительную траекторию собаки.

Рассмотрим перемещение собаки за малое время Δt. За это время вектор скорости собаки повернется на угол α такой, что $\alpha = \frac{v_2 \Delta t}{R}$ (рис. 16). С другой стороны, лиса за время Δt переместится на расстояние $v_1 \Delta t = \alpha l$, так как вектор скорости собаки все время направлен на лису. Следовательно,

$$\frac{v_2 \Delta t}{R} = \frac{v_1 \Delta t}{l}.$$

Тогда

$$R = \frac{v_2}{v_1}\, l \quad \text{и} \quad a = \frac{v_1 v_2}{l}.$$

И. Ш. Слободецкий

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

Прикладная математика и математики

Л. Е. Садовский

Мы оказались современниками мощного прогресса математических знаний, становления новых разделов математики, новых сфер ее приложений и таких научных направлений, как «математическая экономика», «математическая лингвистика», «математическая психология», «математические методы в биологии». Вторжение математики в нетрадиционные для нее области интеллектуальной и практической деятельности человека, создание за последние десятилетия электронных цифровых вычислительных машин (ЭЦВМ) — существенные черты происходящего во всем мире процесса, именуемого научно-технической революцией. Этот процесс потребовал перестройки математического образования на всех ступенях: в школах, техникумах, вузах. Вольно или невольно, но мы все — участники этой перестройки.

Учащиеся начальных и средних школ уже изучают математику по новым учебникам, сообразно новым концепциям и программам. В 1975—1976 годах экспериментальные школы и классы страны закончат примерно 3000 учащихся, а в 1977 году все выпускники наших школ будут подготовлены по новым программам. Учителя школ уже ведут преподавание по-новому, перестраивают методику обучения. Математические кафедры вузов и университетов, в свою очередь, вынуждены учитывать реально сложившуюся ситуацию и также менять многое в издавна установившихся порядках. Научные работники, инженеры, чтобы не отстать, вынуждены овладевать новыми разделами прикладной математики и широко использовать ЭЦВМ.

Таким образом, огромная часть активно работающего общества непосредственно или косвенно включена в процесс математизации наук. При этом возникает множество больших и малых проблем. Охватить их, даже частично, в небольшой статье — еще одна проблема (и к тому же неразрешимая!).

Поэтому, имея в виду естественные интересы выпускников средних и специальных физико-математических школ и интернатов, остановлюсь на новом явлении, порожденном возрастающей потребностью современного общества в «математизированных кадрах». Здесь я, во-первых, имею в виду существенное расширение математических курсов на традиционных и новых факультетах технических вузов и, во-вторых, факультеты (потоки) прикладной математики, созданные за последние годы в ряде крупнейших вузов страны.

Нынешние выпускники вузов к концу текущего столетия станут активной научной и инженерной силой. В условиях быстрого старения техники, технологии производства и профессиональных навыков инженер обязан готовиться к осмысливанию новых явлений, к изменению профессиональной направленности, к поисковым работам на стыке различных областей. По словам американского специалиста Гэлбрейта, чтобы управлять организацией, возникшей в результате специализации, нужен специалист в области организации.

Менее всего со временем теряют свою значимость знания в области фундаментальных дисциплин, в первую очередь — математики с ее приложениями, теоретической механики и физики. В несколько категоричной, но выразительной форме об этом пишут авторы книги «Математика и логика. Ретроспектива и перспектива» («Мир», 1971) М. Кац и С. Улам: «В одном отношении математика стоит особняком среди других наук: никакой ее результат не может быть зачеркнут дальнейшим развитием науки. Однажды доказанная теорема уже никогда не станет неверной, хотя впоследствии может выясниться, что она является лишь тривиальным частным случаем какой-то более простой истины. Математические знания не подлежат пересмотру, и общий их запас может лишь возрастать».

Знание совокупности законов природы, математических конструкций, теорем, умение логически мыслить, сопоставлять и анализировать факты на основе диалектико-материалистического мировоззрения — вот существенная часть научного капитала инженера. Постановление ЦК КПСС и Совета Министров СССР «О мерах по дальнейшему совершенствованию высшего образования в стране» как раз и ориентирует нашу высшую школу на изучение общих закономерностей природы, на получение твердых знаний в области фундаментальных дисциплин, на умение вести самостоятельную поисковую работу. Изучение инструкций, описательных дисциплин, частностей устройства агрегатов, технологий и т. д. отодвигается на второй план.

О требованиях к знаниям молодежи говорил также в своей речи на XVII съезде ВЛКСМ тов. Л. И. Брежнев *): «Наше время — век грандиозной научно-технической революции. Она охватывает все стороны жизни общества, предъявляет большие требования к каждому человеку, его знаниям, профессиональной подготовке. Это особенно должно волновать молодое поколение, на которое завтра лягут все заботы о дальнейшем умножении материальных и духовных сил нашего государства. Перед молодежью как никогда остро стоит задача постоянно пополнять и углублять свои знания, овладевать последними достижениями науки и техники. И это относится не только к нынешним и будущим инженерам, техникам и другим специалистам, но и к рабочему классу, к труженикам села».

Многочисленные наблюдения подтвердили решающую роль точных наук в становлении непрестанно совершенствующегося инженера и техника. Как правило, только тот, кто помимо основной подготовки обладает специальными математическими знаниями, способен в сжатые сроки овладевать новыми разделами техники и приложениями математики. А сейчас многие способные молодые люди, закончившие втузы по обычным инженерным специальностям, явно ощущают свою «математическую несостоятельность» и устремляются на инженерные потоки математических факультетов университетов.

Огромная тяга к образованию (в особенности в области чистой и прикладной математики) в нашей стране счастливо сочетается со все расширяющимися возможностями. Еще не столь давно математиков готовили только математические, механико-математические и физико-математические факультеты университетов и педагогических институтов (последние в основном — преподавателей школ). Однако мощность университетов явно недостаточна для обеспечения потребностей страны, ее научных и вычислительных центров, автоматизированных систем управ-

---

*) «Правда», 24 апреля 1974 г.

ления (АСУ) и других звеньев народного хозяйства.

По скромным подсчетам, девятая пятилетка потребовала свыше 125 000 специалистов по прикладной математике и АСУ. Более 50 000 математиков-прикладников будет подготовлено за текущее пятилетие.

Более чем в 60 вузах страны началась подготовка таких специалистов. Несколько лет в университетах и крупнейших вузах ведется подготовка инженеров—математиков (или математиков—инженеров). За прошедшие годы страна получила примерно 10 тысяч инженеров—математиков. С 1969 года специальность «инженер—математик» преобразована в новую специальность —«прикладная математика», имеющую несколько специализаций. Основные из них:

1) математическое обеспечение АСУ,
2) математическое обеспечение ЭВМ,
3) применение средств вычислительной техники (к решению инженерных, экономических, управленческих и других задач).

Проблемы, с которыми сталкивается инженер—математик, весьма разнообразны и по своему происхождению, и по трудности. Поэтому охарактеризовать их можно лишь в общих чертах.

Специалисты по математическому обеспечению АСУ занимаются, в основном, проектированием принципиальных схем АСУ, математическим описанием и выбором оптимальных вариантов процессов производства, управления, сбора и обработки информации, построением оптимальных объемных планов (на год, квартал), оперативным планированием (например, суточным), экономико-статистическими исследованиями (от взаимосвязей со смежными производствами и реализации продукции до системы материального поощрения) и другими.

АСУ представляет собой своеобразную иерархическую систему. В ней цель каждой подсистемы состоит в принятии определенных решений. При движении от более крупных частей к более мелким происходит постепенная детализация задач. Чем задача конкретнее, тем она, как правило сложнее. К самым трудным относятся вопросы оперативного планирования и управления. Большие затруднения вызывает установление критериев полезности, оптимальности. Обычно создание обоснованного критерия — часть решения задачи. Примерно таким кругом задач описывается специализация математического обеспечения АСУ — одной из указанных выше специализаций «прикладной математики».

Вторая специализация (математическое обеспечение ЭВМ)— это так называемое внутреннее обеспечение ЭВМ: составление наборов (пакетов) программ, направленных на решение определенного круга задач; изучение различных языков программирования; создание трансляторов — устройств, воспринимающих текст программ, написанных на «почти человеческом» языке, и переводящих их на язык машины; исследование различных режимов работы отдельной ЭВМ и вычислительных систем, разработка структуры вычислительного процесса.

Третья специализация (применение средств вычислительной техники) связана с подготовкой математиков для поисковых работ в различных областях техники, технологии, экономики, обработки информации, управления.

Здесь требуется умение сформулировать задачу на языке математики — построить ее «математическую модель», изучить эту модель, установить, если это требуется, критерии полезности и выявить условия, их оптимизирующие.

Поэтому специалисты в указанной области и классифицируются как математики.

Подготовка математиков-прикладников ведется в университетах и наиболее крупных втузах страны (в частности, в Ленинградском и Львовском политехнических, Харьковском радиотехническом, Казанском авиационном институтах, в Днепропетровском институте инженеров железнодорожного транспорта, в МАИ, МИЭМ, МИФИ, МФТИ, МИИТе, МИНХ и ГП).

Чтобы стать математиком-прикладником, вовсе не обязательно стремиться в университеты или в столичные города. Эта возможность открыта любителям математики, физики и их приложений во многих учебных заведениях страны.

Математики-прикладники — выпускники специализированных факультетов университетов и втузов — высоко ценятся повсюду. Вспоминаю слова представителя дирекции завода счетно-аналитических машин (САМ), произнесенные им в 1972 году на совещании в Министерстве высшего и среднего специального образования СССР: «Математики и только математики с университетским образованием и выпускники факультетов прикладной математики нужны САМ». Еще одна иллюстрация: математикам-прикладникам, направляемым на работу в вычислительные центры железных дорог, Министерство путей сообщения установило начальный оклад в 160 рублей в месяц.

Заметим, что нужда в специалистах-математиках велика во всех странах мира. Так, потребности европейских стран за период с 1970 по

1975 год оцениваются в 400 000 человек, примерно на том же уровне находятся потребности США.

Основная особенность специальности «прикладная математика» заключается в широкой математической подготовке в сочетании с овладением программированием на универсальных языках для ЭЦВМ и знанием основ ряда общетеоретических и инженерных дисциплин — физики, теоретической механики, электротехники, электроники, теории автоматического управления. Широкое математическое образование и активное владение им обеспечивает подготовку к решению не одной какой-либо задачи, а к решению многих различных задач. В то же время обычное инженерное образование приспособлено, как правило, к решению узкого круга задач. В учебном плане специальности «прикладная математика» из общего числа 4700 учебных часов около 2600 отведены математике, ее приложениям, ЭЦВМ и АСУ, предусмотрено 18 различных математических курсов (объемом в 1700 часов) от математического анализа до особенностей подходов и методологии прикладной математики*).

«Распространение математики вширь сопровождается ее проникновением вглубь; математика занимает теперь видное положение в жизни общества. Изменилось и традиционное представление о математиках: место паганелеобразных чудаков заняли в этом представлении молодые люди в ковбойках, занимающиеся лыжным спортом. Все большее число родителей желает определить своих детей в школы с математическим уклоном» (В. А. Успенский, из предисловия к книге «Математика в современном мире»).

В чем же секрет этой моды? Конечно же, не в том, что профессия математика достижима в итоге малых усилий. Наоборот, не так уж много удастся указать специализаций, требующих стольких усилий и времени, сколько требует специализация математическая. До конца понять это может тот, кто сам занимается математикой: решает задачи, доказывает утверждения, вносит свой большой или малый вклад в развитие этой науки. Следовательно, суть в ином — в том реальном эффекте, который приносят успешные приложения математических методов в решении практических задач и в уверенности в неограниченном росте этого эффекта. Суть также и в том, что математика, как и всякая другая наука, развивается по собственным внутренним законам, но питается идеями и задачами, возникшими как внутри, так и вне нее; она ставит перед собой цели, диктуемые собственной логикой развития и развитием других наук. Эти задачи и цели способны увлекать своей сложностью, необычностью и красотой тех, кто способен к восприятию этих особенностей. Нельзя не учитывать также и требований общества. Известный английский математик-педагог У. Сойер пишет по этому поводу в книге «Путь в современную математику» («Мир», 1972): «Автоматизация все больше будет вытеснять человека в область творческих профессий, требующих качеств, свойственных исключительно человеку: понятливости, принципиальности, оригинальности, критичности, инициативности. Очевидно, что «автоматизированное общество» предъявит особый спрос на высокоразвитое творческое начало». И далее: «Человеку 2000 года, несомненно, потребуется гораздо более солидный научный фундамент чем нашему современнику. Быть может, ему понадобится знакомство с исследованием операций, чтобы принимать рациональные решения при большом разнообразии ситуаций. В его общем образовании некоторые разделы математики несомненно займут свое место».

Кстати, в связи с исследованием операций (понимаемых как мероприятия, подчиненные единому замыслу и направленные к достижению определенных целей) небезинтересно шутливое высказывание известного специалиста Т. Саати: «Исследование операций представляет собой искусство давать плохие ответы на те практические вопросы, на которые даются еще более плохие ответы другими методами». Однако в каждой шутке есть доля правды: методы прикладной математики применимы зачастую в тех ситуациях, в которых иные подходы не дают сколько-нибудь приемлемых результатов.

---

*) В их числе: линейная алгебра и аналитическая геометрия, математический анализ, дифференциальные уравнения, уравнения математической физики, общая алгебра, теория графов и комбинаторика, численные методы, теория функций комплексной переменной и специальные функции, функциональный анализ, теория вероятностей и математическая статистика, теория случайных процессов, математическая логика, теория информации и кодирования, теория массового обслуживания, теория игр и исследование операций, методы оптимизации, теория надежности и планирования эксперимента, электронные вычислительные машины и программирование, теория алгоритмических языков, элементы и устройства АСУ.

Вопрос о том, что такое прикладная математика, естественно предварить вопросом: «Что такое математика?»

Широко известны, ставшие классическими, слова Ф. Энгельса: «Чистая математика имеет своим объектом пространственные формы и количественные отношения действительного мира» («Анти — Дюринг», К. Маркс и Ф. Энгельс, соч. изд. 2, т. XX, с. 37).

Об особенностях математики высказывались многие ученые. Так, профессор МГУ Г. Е. Шилов говорил на заседании математической секции Московского Дома ученых в 1972 году: «Математика есть наука о математических структурах, рассматриваемых в их предистории, то есть накоплении фактов и связей явлений действительности, в их истории — анализе и расчленении логических связей и понятий, кристаллизации расчлененных понятий в аксиомы, в их окончательном аксиоматическом оформлении и развитии и, наконец, в их выходе в другие области как самой математики, так и других наук».

В то же время известный математик Р. Курант весьма образно писал: «На вопрос — что такое математика? — невозможно дать обстоятельный ответ на основе одних лишь философских обобщений, семантических определений или с помощью обтекаемого газетно-журнального многословия. Так же как нельзя дать общее определение музыке или живописи: никто не может оценить эти виды искусства, не понимая, что такое ритм, гармония и строй в музыке или форма, цвет и композиция в живописи. Для понимания же сути математики еще в большей степени необходимо подлинное проникновение в составляющие ее элементы.

Принимая во внимание все вышесказанное, можно тем не менее дать математике некоторое общее определение... Взаимосвязь общего с частным, дедукции с конструктивным подходом, логики с воображением — именно они и составляют самую сущность живой математики...

Иными словами, полет в область абстрактной общности должен исходить из конкретного и частного и завершаться конкретным и частным» («Математика в современном мире», «Мир», 1967, с. 16).

Нельзя не согласиться с тем, что попытки дать исчерпывающее определение математики означает втискивание ее в некие границы, в то время как математика способна моделировать всевозможные процессы мышления и многочисленные ситуации, изучаемые в науке и технике. Именно в построении математических моделей явлений, процессов, схем, в их исследовании и проявляются прикладные аспекты математики.

Всякий научный подход связан с построением модели изучаемого явления. Модель в определенном смысле проще самого объекта, обычно она имитирует не все, а лишь наиболее важные его особенности и потому удобнее для изучения. Модели могут иметь различную природу: математическую, физическую, химическую, экономическую и иную. Все зависит от изучаемого объекта (явления, ситуации) и от тех его свойств, которые учитываются моделью. Так, математической моделью токов, протекающих в электрической цепи, служит система линейных уравнений (закон Кирхгофа). Физической моделью, воспроизводящей работу водителя поезда, является автомашинист. Физической моделью строительной конструкции может служить система упругих стержней, а математической моделью последней — система уравнений, связывающая напряжения в этих стержнях. Н. Винер и его сотрудники построили механическую модель, имитирующую дрожание руки человека с нарушенной координацией движения. Затем была построена математическая модель изученного явления.

В действительности нет ничего необычного в построении моделей: каждый инженерный, экономический и иной расчет, выполняемый с привлечением средств и языка математики, оказывается, в сущности, математическим моделированием.

Хорошо знакомые вам понятия числа, функции, уравнения служат в известных условиях математическими моделями определенных реальных объектов. Существуют экономико-математические модели использования материальных ресурсов различными отраслями хозяйства, модели производства и потребления и другие.

Проблемы, связанные с выбором модели, ее изучением, оптимизацией некоторых критериев ее качества, неизбежными упрощающими предположениями, необходимыми вычислениями и многие другие, весьма многообразны, трудны и не могут здесь рассматриваться. Все сказанное носит лишь иллюстративный характер: вот, например, чем занимается прикладная математика. По вопросу о том, является ли прикладная математика самостоятельной дисциплиной, ныне не существует единого мнения. Однако это обстоятельство для нас несущественно. В особенности, в условиях отсутствия исчерпывающей дефиниции всей математики как таковой.

Видимо не существует бесспорных признаков, по которым можно классифицировать математические конструкции на теоретические («чистые») и прикладные. Все относительно. Так, например, во времена К. Гаусса комплексные числа большинством математиков рассматривались как весьма абстрактные объекты. Но прошли годы, возникла теория функций комплексной переменной, ее аппарат нашел приложения в гидро- и аэродинамике (в расчетах подъемной силы крыла самолета), в теоретической электротехнике и других областях. Абстрактная теория групп, ведущая свое начало от работ Лагранжа (1736—1813), нашла изумительное применение в конкретных задачах кристаллографии, теоретической физики, в квантовой механике, в теории кодирования (в математической науке о передаче сообщений по линиям связи), в проблеме разрешимости алгебраических уравнений в радикалах. Существование некоторых элементарных частиц было предвосхищено теорией групп задолго до их фактического обнаружения *). В терминах теории групп Ф. Клейн классифицировал различные разделы геометрии. Понятие группы, наряду с понятиями множества, функции, предела стало одним из основных в математике. Подобными примерами перерастания чистого в прикладное и обратными процессами история математики очень богата.

В уже упомянутой книге Р. Курант писал: «На самом деле между «чистой» и «прикладной» математикой невозможно провести четкую грань. Поэтому-то в математике и не должно быть разделения на касту верховных жрецов, поклоняющихся непогрешимой математической красоте и внимающим только своим склонностям, и на работников, обслуживающих их. Подобная «кастовость» в лучшем случае симптом человеческой ограниченности, удерживающей большинство людей от свободного странствования по необъятным просторам человеческих интересов».

Об этом же писал Ф. Клейн в книге «Элементарная математика с точки зрения высшей» (Гостехиздат, 1934): «Чисто логические концепции должны составить, так сказать, твердый скелет организма математики, сообщающий ей устойчивость и достоверность. Но самая жизнь математики, важнейшие наведения и ее продуктивность относятся преиму-

---

*) Так, например, существование позитрона и мезона постулировалось в работах П. Дирака и Х. Юкавы. Свойства этих частиц изучались математическими методами до их экспериментального подтверждения.

щественно к ее приложениям, то есть к взаимным отношениям ее абстрактных объектов со всеми другими областями. Изгнать приложения из математики — это то же, что искать живое существо с одной только костной основой без мускулов, нервов, сосудов». Уместно также вспомнить известный афоризм: «Чистые математики делают то, что можно, так, как нужно, а прикладники — то, что нужно, так, как можно».

Подчеркнем, что подготовка кадров на факультетах прикладной математики в технической школе преследует две взаимосвязанные цели: создать устойчивую основу математических знаний и привить вкус к прикладным задачам, научить методам прикладной математики, методам вычислений, опыту построения и исследования математических моделей с использованием ЭЦВМ, пониманию того, что приближенное решение лучше, чем полное его отсутствие, что первое приближение сегодня подчас важнее лучшего через месяц.

«В нашей стране сложились, в основном, два направления подготовки кадров высшей квалификации — университеты и техническая школа. Первое направление отличается широкой общенаучной подготовкой, но не готовит выпускников в полной мере для работы в промышленных научно-исследовательских институтах и лабораториях; техническая же школа не дает достаточной широты образования. Сейчас наблюдается определенное сближение университетского и технического образования, создан целый ряд вузов (технических университетов), сочетающих в себе элементы (если угодно, преимущества) университетской и технической школ» (О. М. Белоцерковский. Технические университеты. — В сб. «Будущее науки», М., «Знание», 1974.).

Воспитание математика-прикладника во многом зависит от процесса учебы и преподавания. В нем, как и в общем развитии математики, основной проблемой является правильное соотношение между теорией и практическими приложениями. Здесь бытуют две точки зрения. Согласно первой — полезно все, что развивает интеллектуальные силы личности, ее общую математическую культуру. Согласно второй — полезно лишь то, что непосредственно может быть использовано, что приводит к практическим результатам. Но, по-видимому, одна лишь полезность — односторонний критерий, этакая утилитарная точка зрения, встречающаяся в кругах «потребителей» математики. Односторонним является также и критерий безусловной строгости и логического совершенства в решении конкретной задачи. Они далеко не всегда (в практических задачах даже очень редко) могут быть обеспечены, а решить задачу все же нужно. В этих условиях обязателен поиск компромисса между строгостью и полезностью.

Умение найти компромисс между математической строгостью и целесообразностью, умение использовать так называемые рациональные рассуждения, основанные на «здравом смысле», приобретаются в процессе обучения в технических университетах — на специализированных факультетах и потоках прикладной математики ряда известных высших технических учебных заведений.

Абитуриент-1975

А. Я. Яковлев

После окончания средней школы в Курсавке (Ставропольский край) Люда Ф. решила поступить на математический факультет Ставропольского педагогического института. Тем более, что учительница математики вывела ей в аттестате четверку по алгебре и пятерку по геометрии.

На письменном экзамене Люде предложили 4 задачи (ответы к ним мы приведем в конце журнала).

1. *Найти боковую поверхность правильной треугольной пирамиды, сторона основания которой равна a, угол между боковыми гранями равен β.*

2. *Решить неравенство*

$$\log_2^2 x - \log_2 x - 6 \leqslant 0.$$

3. *Решить уравнение*

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = \cos x + \cos 2x + \cos 3x.$$

4. *При каких значениях a оба корня уравнения*

$$x^2 - (a+1)x + (a+4) = 0$$

отрицательны?

Увы! Решая первую задачу, Люда никак не могла вспомнить, что такое угол между боковыми гранями. Потом обозначила через $\frac{\beta}{2}$ угол между боковым ребром и высотой пирамиды. Разумеется, ответ получился неверный.

Решая неравенство, Люда нашла такие корни левой части: $x_1 = {}^1/_8$, $x_2 = 4$. «Но $x = {}^1/_8$ не подходит, — пишет Люда, — так как график в этой точке положительный. Значит, корень один : $x = 4$.» Затем Люда формулирует ответ: «При $x = 4$ график огрицателен».

Можно ли специально придумать подобную нелепость?

При решении тригометрического уравнения Люда пишет: «$\sin 2x = \cos 2x$ — корней нет, так как синус и косинус не могут одновременно равняться одному и тому же числу». Очевидно, Люда забыла, что $\sin 45° = \cos 45°$, то есть что синус и косинус угла в 45° равны. А это много раз встречалось и в восьмом классе, и в девятом, и в десятом.

Наконец, решая четвертую задачу, Люда пишет: «Корни отрицательны, если дискриминант меньше нуля», — и начинает преобразовывать дискриминант.

Оставим оценки Люды в аттестате на совести ее учительницы. Немало грубых ошибок в письменных работах и других абитуриентов. Даже тех, кто «пожалован» четверками и пятерками по математике в аттестатах.

Из 225 поступавших на математическое отделение Ставропольского педагогического института полностью справились с работой лишь ...четверо. Не справились (получили двойки) — шестьдесят, хотя оценки ставились весьма либерально.

В расположенном по соседству Ставропольском сельскохозяйственном институте не справились с работой почти 50 процентов абитуриентов. В том числе — ровно половина жителей краевого центра, в том числе — шестеро из семи выпускников школы № 6, четверо из четверых выпускников школы №17.

Немногим лучше результаты письменных экзаменов по математике в московских вузах. Каждый четвертый абитуриент получил неудовлетворительную оценку в Московском институте химического машиностроения, почти каждый третий — в автодорожном, до сорока процентов двоек — в станкоинструментальном.

И это несмотря на то, что требования, предъявляемые к абитуриенту, весьма невысоки. Задачи, предлагающиеся на вступительных экзаменах, точно такие же, как в школьных задачниках. Если у проверяющего возникает сомнение — ставится более высокая оценка. А математическая подготовка поступающих, как свидетельствуют экзаменаторы из всех вузов, из года в год снижается. «Мы каждый год вынуждены упрощать задачи для письменных экзаменов», — утверждает проректор Московского станкоинструментального института. Об этом же говорит сравнение вариантов вступительных заданий разных вузов.

В технических, экономических и многих других вузах вступительный экзамен по математике — основной. Именно экзамен по математике показывает качество подготовки абитуриента к обучению в вузе, показывает, может ли данный абитуриент успешно учиться в данном вузе. Очень часто именно на экзамене по математике решается вопрос: быть или не быть абитуриенту студентом. Почему же экзамен по математике играет такую важную роль?

Если студент химического вуза плохо освоил в школе химию, это, конечно, безрадостно, но преодолимо: курс химии он будет изучать в вузе «с самого начала». Если же он плохо освоил тригонометрические уравнения и преобразования или ошибается в действиях со степенями, считая, например, что $x^{-3} = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$, успешно учиться в инженерном или экономическом вузе он не сможет. Физика и химия, теоретическая механика и сопромат, теория вероятностей и статистика, а также другие инженерные и экономические науки потребуют четких, быстрых, доведенных до автоматизма навыков в вычислениях и преобразованиях. А снова учить всему этому в вузе уже не будут. Иногда справедливо говорят, что программа вуза строится на математическом фундаменте, заложенном в средней школе.

Полбеды, если студент забыл формулу объема пирамиды: ее можно найти в любом справочнике; гораздо хуже, если студент не может использовать нужную формулу для решения задачи или не знает, какую формулу применить.

«Математика — это язык», — сказал крупнейший американский физик У. Гиббс. Это язык, на котором и выражаются условия производственных, технических, экономических, военных задач, и получаются решения этих задач; это также аппарат, с помощью которого применяется та же химия, тот же сопромат, те же экономические науки. Одна из важнейших задач сегодняшнего инженера (экономиста, исследователя, ученого) — формализация решаемых задач, формулировка их на языке математики.

Даже сто лет назад инженер Сайрус Смит, попав на «Таинственный остров» (вспомните Жюля Верна!), мог весьма широко и не без пользы применить свои математические познания. А наука, техника и экономика сегодняшнего дня просто немыслимы без применения математики, без умения правильно, быстро и точно ею пользоваться.

Особенно возросло значение математики и ее приложений в последние десятилетия. Каждый инженер, экономист, исследователь вынужден пользоваться помощью ЭВМ; инженеры и экономисты не могут обойтись без линейного программирования и других математических методов; все большую роль играют теория вероятностей и математическая статистика.

Чем же отличается письменный вступительный экзамен по математике от школьной контрольной работы, от задач, решаемых на уроках? Методами решения? Сложностью задач? Объемом программы?

Вовсе нет. Ни тем, ни другим, ни третьим.

Программы вступительных экзаменов по математике абсолютно не отличаются от программ средней школы. Любая задача, предлагаемая на вступительном экзамене, может быть решена последовательным применением правил, формул, теорем, которые изучались в средней школе. Часто на экзамене предлагаются попросту задачи из школьных задачников, иногда — из других широко известных задачников. Задачи, приведенные выше, также ничем не отличаются от школьных. Наиболее трудоемкой из них является первая задача. Для решения ее надо последовательно выполнить несколько отдельных этапов, каждый из которых мог быть отдельной задачей в VII—IX классах школы. Однако отдельные частные задачи многие школьники решают вполне удовлетворительно, а комплексную задачу из 5—6 этапов доводят до конца лишь очень немногие.

Не секрет, что школьник часто решает задачи не вполне самостоятельно: учитель задает наводящий вопрос, напоминает нужную формулу, исправляет допущенную ошибку, указывает путь или план решения. Бывает, что школьник просто списывает решение с доски или даже (чего греха таить?) у соседа. Задачи в домашнем задании напоминают разобранные на уроке. А на экзамене в вузе вчерашнему школьнику дают листок с задачами, которые приходится решать самостоятельно: наводящих вопросов никто не задает, о пропущенном коэффициенте никто не напоминает, «похожие» задачи почему-то не приходят в голову, а в листке соседа задачи совсем не похожие.

Почти все поступающие знают необходимые формулы и теоремы и даже умеют их доказывать. Но, во-первых, далеко не все умеют применять эти формулы и теоремы. И, во-вторых, большое количество арифметических ошибок и недосмотров приводит к резкому (но вполне справедливому!) снижению оценок за письменные работы по математике.

Ведь подавляющее большинство проблем, стоящих перед специалистом, заключается в том, чтобы найти число: число тонн, число рублей, число рабочих, число километров в час и т. п. Некоторые школьные учителя за арифметические ошибки и недосмотры иной раз и не сбавляют оценку: подумаешь, это же арифметика! Но если только что построенный мост развалится под первым же грузовиком, сможет ли оправдаться инженер, что, рассчитывая мост на нагрузку 50 тонн, он «по недосмотру» поставил запятую на один знак левее?

...Вычисляя синус угла, абитуриент получил значение 2,8 вместо нужного 0,28. Явно нелепый ответ должен был привлечь внимание абитуриента и заставить его искать ошибку. Но он этого не сделал. Не смог (или не захотел) подумать. И получил неудовлетворительную оценку. Не умеющие (или не желающие) думать в вузы не принимаются!

Недостаточная четкость вычислений и преобразований особенно неприятна при решении комплексных задач. Выполняя отдельный этап, абитуриент вынужден концентрировать внимание на самóм действии, теряя нередко нить рассуждений, забывая, какой этап следует дальше. Очень часто ошибка по невниманию (пропущенная цифра, неверный знак, неаккуратно выполненное или нечетко записанное действие) приводит к заведомо неверному ответу. А на поиски ошибки уходит гораздо больше времени, чем на проверку каждого выполняемого действия.

Поэтому отработка четких навыков в вычислениях и преобразованиях, беглость и автоматизм в элементарных действиях — необходимое условие и для успешной сдачи письменного экзамена по математике, и для успешной учебы в вузе.

В заключение — некоторые советы Абитуриенту-1975.

1. Готовиться к письменному экзамену нужно начать заблаговременно, решать задачи — самостоятельно. Если задача «не выходит», можно попросить педагога или товарища помочь наметить план решения; после этого задачу нужно все же решить, не пользуясь чьей-либо помощью (и не заглядывая в решение). Вообще, научиться решать задачи можно только решая задачи.

2. Лучше начинать не с «комплексных» задач, а с более частных. Например, сначала решать основные задачи планиметрии, потренироваться в решении треугольников, поупражняться в преобразовании выражений, содержащих тригонометрические функции, затем переходить к решению стереометрических задач и решению тригонометрических уравнений, а после этого решать более сложные задачи, предлагавшиеся на вступительных экзаменах.

3. Не обязательно начинать с задачи № 1. Начните с той, план решения которой вам ясен; аккуратно записав ее решение, принимайтесь за следующую.

4. К комплексной задаче составьте поэтапный план решения, запишите порядок выполнения отдельных этапов. Это поможет вам не терять нить рассуждений и сэкономит время.

5. К геометрической задаче сделайте четкий и достаточно крупный чертеж, если возможно — в 2—3 цвета. Очень полезны «выносные» чертежи: сечение, основание, иногда — проекция или боковая грань. Не экономьте время на качестве чертежей!

6. Постарайтесь достать прошлогодние варианты избранного вами вуза и за одну — две недели до экзамена устройте «репетицию». Если не справитесь самостоятельно за 3—4 часа, то попросите педагога или консультанта в вузе разобрать этот вариант, а затем «прорепетируйте» с другим вариантом.

Задачи наших читателей

1. Обозначим через (a) модуль разности между числом a и ближайшим к нему целым числом. Например, $(9) = 0$, $\left(\frac{8}{3}\right) = \frac{1}{3}$, $(\pi) = 0{,}14\ldots$

Дана бесконечная последовательность

$$(\sqrt{2}),\ (2\sqrt{2}),\ (3\sqrt{2}), \ldots,\ (n\sqrt{2}), \ldots$$

а) Докажите, что найдется член этой последовательности такой, что величина его меньше $\frac{1}{1975}$.

б) Докажите, что таких членов последовательности найдется бесконечно много.

В. Колосов

2. Операция * ставит 3 точкам плоскости, не лежащим на одной прямой, в соответствие ортоцентр, центр тяжести и центр описанной окружности треугольника, который они образуют.

Можно ли с помощью линейки (она служит только для проведения прямых) и операции * построить параллелограмм?

С. М. Агеев

3. Доказать, что

$$\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right)+$$
$$+\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)^2+$$
$$+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots\frac{1}{n}\right)^2+$$
$$\left(+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}\right)^2+$$
$$+\ldots+\left(\frac{1}{n}\right)^2=2n.$$

С. Л. Манукян

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

В Московском государственном университете в 1974 году на приемных экзаменах по физике использовались три варианта экзаменационных билетов. Первый вариант предназначался для физического факультета, второй — для механико-математического факультета и факультета вычислительной математики и кибернетики и третий — для химического, почвенного, геологического и географического факультетов.

Задачи, предлагавшиеся в билетах первых двух вариантов, мы уже публиковали (см. «Квант», 1975, № 5). В этом номере мы помещаем задачи из билетов третьего варианта. Кроме одной задачи в каждом билете предлагались два теоретических вопроса. Оба вопроса и задача относились к разным разделам курса физики.

1. Парашютист покидает гондолу свободно летящего аэростата на высоте $h_0 = 250$ *м*. Первые $h_1 = 50$ *м* он падает свободно, а затем, раскрыв парашют, опускается с постоянной скоростью $v_0 = 4$ *м/с*. На каком расстоянии S от места прыжка (по горизонтали) приземлится парашютист? Скорость ветра $v_1 = 2$ *м/с* и не зависит от высоты.

2. Нужно выкопать колодец глубиною $h_0 = 20$ *м*. При какой глубине колодца h будет совершена 1/3 всей необходимой работы по выемке грунта? Плотность грунта считать везде одинаковой.

3. Два одинаковых маленьких шарика подвешены на нитях длиной $l = 2$ *м* к одной точке потолка. Когда шарикам сообщили одинаковые заряды $q = 2\cdot 10^{-8}$ *к*, они разошлись на расстояние $R = 16$ *см*. Определить натяжение T каждой из нитей. Электрическая постоянная

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi\cdot 9\cdot 10^9}\ ф/м.$$

4. Баллон, содержащий $V_1 = 0{,}02$ *м*^{3} воздуха под давлением $p_1 = 4\cdot 10^5$ *н/м*^{2}, соединяют с баллоном, содержащим $V_2 = 0{,}06$ *м*^{3} воздуха под давлением $p_2 = 2\cdot 10^5$ *н/м*^{2}. Найти установившееся в сосудах давление, если температура постоянна.

5. Батарея замкнута на сопротивление $R_1 = 8$ *ом*. Напряжение на сопротивлении $u_1 = 3$ *в*. Когда батарею замкнули на сопротивление $R_2 = 14$ *ом*, напряжение на сопротивлении стало равным $u_2 = 3{,}5$ *в*. Определить электродвижущую силу батареи.

6. Водород для наполнения аэростата объемом $V = 50$ *м*^{3} при температуре $t = 0\,^\circ C$ и нормальном атмосферном давлении был получен путем электролиза воды. Сколько электрической энергии W было при этом затрачено, если напряжение на электродах $u = 22{,}4$ *в*? Электрохимический эквивалент водорода $k = 0{,}01$ *мг/к*. Объем килограмм-молекулярной массы газа при нормальных условиях $V_0 = 22{,}4$ *м*^{3}.

7. Собирающая и рассеивающая линзы, имеющие общую оптическую ось, расположены на расстоянии $l = 4$ *см* друг от друга. Параллельный пучок света круглого сечения радиуса $r_1 = 3$ *см*, пройдя через обе линзы, остается параллельным. Определить радиус r_2 выходящего пучка, если свет падает со стороны собирающей линзы, а фокусное расстояние рассеивающей линзы $f = 2$ *см*.

8. Луч света входит в трехгранную призму из каменной соли, находящуюся в воздухе, перпендикулярно первой грани, полностью отражается от второй грани и выходит перпендикулярно третьей грани. На какой наибольший угол можно таким образом изменить направление луча, если показатель преломления каменной соли $n = 2$?

В. Н. Слудский

Ленинградский государственный университет

им. А. А. Жданова

В ленинградском государственном университете имеются три физико-математических факультета: математико-механический факультет, факультет прикладной математики — процессов управления и физический факультет.

Наиболее отличительной чертой университетского образования является широта и фундаментальность получаемых знаний, представляющих основу, на которой строятся те или иные дисциплины прикладного характера. Выпускник университета обладает широкими возможностями для приложения своих знаний, легко приспосабливается к постоянно изменяющимся задачам, выдвигаемым практикой.

Математико-механический факультет принимает в последние годы 400 слушателей и готовит выпускников по четырем специальностям — математике, прикладной математике, механике и астрономии. В соответствии с этим на факультете имеются 4 отделения, прием на которые производится с раздельным конкурсом.

На математическом отделении студенты специализируются по современным направлениям анализа, алгебры, теории чисел, геометрии, дифференциальных и интегральных уравнений, теории вероятностей и математической физики.

Отделение вычислительной математики и кибернетики готовит выпускников по методам вычислений, исследованию операций, математическому обеспечению ЭВМ и АСУ, теоретической кибернетике.

На механическом отделении вместе с глубоким изучением математики студенты получают специализацию по одному из современных направлений механики: аналитической механике, теории колебаний, автоматическому регулированию и управлению, динамике полета, теории упругости и пластичности, гидро- и аэродинамике (включая аэродинамику разреженных газов), физической механике.

На астрономической специальности подготовка ведется по специальностям: астрофизика, радиоастрономия, астрометрия, небесная механика, звездная астрономия.

Факультет прикладной математики — процессов управления готовит высококвалифицированные кадры по прикладной математике, имеющие глубокую общетеоретическую подготовку и опыт работы на современных ЭВМ. Ежегодный прием — 200 человек.

Основные специализации: математическое обеспечение ЭВМ и АСУ и применение средств вычислительной техники. На факультете научные исследования ведутся по управлению техническими объектами, управлению технологическими процессами и процессами проектирования сложных систем, распределению сил и средств, общим математическим и механическим вопросам систем управления.

Физический факультет производит прием на специальности: физика, радиофизика и геофизика. Общее число студентов, зачисляемых на первый курс — 300 человек. По специальности физика готовят выпускников 14 кафедр. Из них четыре — сугубо теоретические, где студенты занимаются вопросами квантовой механики, теории поля и элементарных частиц, статистической физики и математической физики. Остальные кафедры в основном выпускают физиков-экспериментаторов — специалистов по ядерной физике, физике твердого тела, оптике и спектроскопии, физике полимеров, физике атмосферы и др. Научная работа студентов, к которой они привлекаются, начиная с II—III курсов, протекает в лабораториях Научно-исследовательского Физического Института при Ленинградском университете и других НИИ г. Ленинграда. В настоящее время факультет переехал в новое помещение, где созданы прекрасные условия для плодотворной работы. В этом году вблизи факультета сдается общежитие на 1000 мест, в котором будут жить сту-

денты-физики. Вступительные экзамены и зачисление на физический факультет проводятся в июле месяце. Прием заявлений прекращается 9 июля.

Ниже мы приводим варианты письменного вступительного экзамена по математике на различных факультетах ЛГУ в 1974 году. Примеры задач по физике, предлагавшихся на вступительных экзаменах по физике в последние годы, помещены в «Кванте», 1974, № 6.

Математико-механический факультет и факультет прикладной математики — процессов управления

Вариант 1

1. Между двумя портами курсирует грузовое судно, скорость которого линейно зависит от веса перевозимого груза и при нагрузке в 2000 тонн в 3 раза меньше, чем при нагрузке в 1000 тонн. Кроме того, известно, что при нагрузке в 2000 тонн судно проходит расстояние между портами за 25 часов. За какое время оно пройдет это расстояние при наибольшем грузообороте? Чему равна нагрузка судна при наибольшем грузообороте? (Грузооборотом называется произведение веса перевозимого груза на скорость судна.)

2. Расположить в порядке возрастания три числа

$$a_1 = \log_{1/2} \sin 2x, \quad a_2 = -1 - \log_2 \sin x,$$

$$a_3 = \log_{1/2} (1 - \cos 2x),$$

если известно, что $0 < x < \frac{\pi}{4}$.

3. Найти все вещественные a, для которых при всех $b > 0$ существует в интервале $0 < x < \frac{1}{2}$ решение уравнения

$$\log_2 (1 - x - x^2) = a\log_{1-x-x^2} 2 + b.$$

4. Даны равносторонний треугольник со стороной a и окружность, касающаяся одной из сторон треугольника и делящая вторую сторону на две равные части. Кроме того, известно, что центр окружности лежит на третьей стороне треугольника. Найти расстояние от центра окружности до ближайшей вершины треугольника.

5. Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник, боковые стороны которого равны b, а угол при основании равен α $\left(\alpha > \frac{\pi}{4}\right)$. Каждое из боковых ребер пирамиды образует угол β с плоскостью основания. Найти площадь сечения, проходящего через высоту пирамиды и вершину угла α.

Вариант 2

1. Скорость товарного поезда линейно зависит от количества его вагонов, причем известно, что скорость состава из 60 вагонов равна $\frac{2}{3}$ скорости состава из 40 вагонов. Кроме того, известно, что паровозная бригада выполняет план перевозок на 100% при наибольшем грузообороте. (Грузооборотом называется произведение числа вагонов на скорость поезда.) На сколько процентов будет выполнять план перевозок паровозная бригада, составляя товарный поезд из 40 вагонов?

2. Расположить в порядке возрастания три числа

$$a_1 = 1 + \log_2 \cos x, \quad a_2 = \log_2 (1 + \cos 2x),$$

$$a_3 = 1 - 2 \log_{\frac{1}{2}} \sin 2x,$$

если известно, что $0 < x < \frac{\pi}{6}$.

3. Найти все вещественные a, для которых при всех $b < 0$ существует в интервале $4 < x < +\infty$ решение уравнения

$$a \log_{\left(1 - \frac{2}{x}\right)} 4 = \log_4 \left(1 - \frac{2}{x}\right) + b.$$

4. Даны равнобедренный треугольник с основанием a и окружность с центром в одной из вершин треугольника. Известно, что одна из боковых сторон треугольника делится окружностью на три равные части. Найти радиус окружности.

5. Основанием пирамиды служит равнобочная трапеция, у которой боковые стороны и меньшее основание равны a, а острый угол равен α $\left(\alpha > \frac{\pi}{3}\right)$. Каждое из боковых ребер пирамиды образует угол β с плоскостью основания. Найти площадь сечения, проходящего через высоту пирамиды перпендикулярно к основаниям трапеции.

Химический и психологический факультеты и экономический факультет (кроме отделения политэкономии)

Вариант 3

1. Имеются две порции одного и того же вещества, играющего роль катализатора. В присутствии 1-й порции реакция в сосуде происходит на 6 минут дольше, чем в присутствии 2-й порции. Если же в сосуд бросить обе порции катализатора, то реакция происходит в течение 4 минут. Определить время

продолжения реакции в присутствии каждой порции катализатора, если известно, что скорость реакции пропорциональна весу присутствующего в сосуде катализатора.

2. Решить неравенство

$$\frac{x\sqrt{x}+(1-x)\sqrt{1-x}}{\sqrt{x^2-2(x^2-x)\sqrt{x-x^2}}}>1.$$

3. Решить уравнение

$$\log_2(9+\cos 2x)+\log_{\frac{1}{2}}(\sin^2 x\cdot\cos^2 x+1)=3.$$

4. Определить острые углы прямоугольного треугольника, стороны которого составляют геометрическую прогрессию.

5. Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник, боковые стороны которого равны a, и угол при вершине равен α. Две боковые грани пирамиды, проходящие через равные стороны основания, перпендикулярны к основанию, а равные боковые ребра наклонены к нему под углом α. Определить радиус шара, описанного около пирамиды.

Биолого-почвенный и географический факультеты

Вариант 4

1. 8 товарных вагонов первая бригада грузчиков может разгрузить на 1 час быстрее, чем вторая бригада. Если 7 вагонов будут разгружать обе бригады вместе, а последний вагон будет разгружать только вторая бригада, то на выполнение всей работы потребуется 2 часа. За какое время может выполнить работу каждая из бригад, работая отдельно?

2. Решить неравенство

$$\frac{1}{1+\log_2 x}+\log_x 8\geqslant\frac{5}{4}.$$

3. Решить уравнение
$\sin^2 x+\sin^2 2x=\sin^2 3x.$

4. В прямоугольном треугольнике гипотенуза равна a, а биссектриса одного из острых углов — $\frac{a}{\sqrt{3}}$. Найти катеты.

5. В прямом круговом конусе даны площадь основания S_1 и площадь боковой поверхности S_2. Найти радиус вписанного шара

Геологический факультет и отделение политэкономии экономического факультета

Вариант 5

1. Из одного города в другой вылетел самолет. Если бы скорость самолета была на 130 *км/ч* меньше действительной, то он прибыл бы в другой город с опозданием на 1 час 6 минут. Определить действительную скорость самолета, если расстояние между городами равно 2860 *км*.

2. Решить уравнение

$$\frac{5}{3+\log_2 x}=2+\log_{\sqrt{x}}\frac{1}{2}.$$

3. Решить уравнение

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{12}+x\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{12}-x\right)=\frac{5}{4}.$$

4. Через точку A, лежащую на расстоянии $2r$ от центра окружности радиуса r, проведена прямая на расстоянии $r/2$ от центра окружности, пересекающая окружность в точках B и C. Найти AB и AC.

5. В основании прямого параллелепипеда лежит параллелограмм с тупым углом α и сторонами a и b. Меньшая диагональ параллелепипеда равна большей диагонали основания. Определить объем параллелепипеда.

В. Ф. Осипов, П. Е. Товстик

Физический факультет

В последние годы (1972—1974 гг.) вступительные экзамены на физическом факультете Ленинградского университета проводятся в июле в два срока: с 4-го по 18-е июля и с 10-го по 21-е июля. При составлении вариантов вступительного экзамена по математике для физического факультета учитываются те требования, которые естественно предъявлять к математическим знаниям будущих студентов-физиков.

Нужно заметить, что примерно четверть студентов физического факультета ЛГУ специализируется по различным направлениям теоретической и математической физики, требующей глубокого знания как прикладных, так и абстрактных разделов математики. Кроме того, хорошей математической подготовки требует освоение курсов теоретической физики и большинства спецкурсов, читаемых и остальным студентам факультета. В связи с этим курс математики на физическом факультете читается в большом объемё и на достаточно высоком уровне. Вместе с тем у этого курса имеются и особенности: во-первых, изложение математических методов для физиков должно гармонически сочетаться с приложением этих методов к конкретным задачам и, во-вторых, развитие модельных и интуитивных соображений при решении задач должно играть не меньшую роль, чем строгий аксиоматический подход.

Отсюда вытекают требования, предъявляемые к абитуриентам на вступительных экзаменах по математике. Абитуриент, желающий получить высокий балл на письменном экзамене, должен ясно представлять себе переход от исходной формулировки задачи (иногда нестандартной) к системам уравнений, геометрическому чертежу, неравенствам и т. д., уметь связывать воедино идеи и методы, которые давались на уроках алгебры, геометрии и физики, свободно владеть техникой преобразований, уметь анализировать полученные решения с точки зрения здравого смысла, правил размерностей, строгого оправдания формальных выкладок. В вариант входят пять задач различной трудности.

Ниже мы разберем решения нескольких характерных задач (трудных и средней трудности) из числа предлагавшихся на письменном экзамене по математике на физическом факультете ЛГУ в 1973 и 1974 годах и приведем два полных варианта 1974 года.

Задача 1. *Стрелок из лука находится на расстоянии 40 м от крепостной стены высотой 30 м. Начальная скорость стрелы 40 м/с. При каких углах наклона стрелы к горизонту в момент выстрела стрела перелетает через стену? Сопротивление воздуха, рост стрелка, толщину крепостной стены, влияние оперения и т. д. не учитывать. Ускорение свободного падения считать равным 10 м/с². Предельный случай падения стрелы на стену не рассматривать.*

Задача нетрудная. Для ее решения нужно лишь знать формулы равноускоренного движения и правило сложения скоростей. Пусть t — момент времени, когда стрела достигает горизонтального расстояния $l = 40$ м до стены, α — начальный угол наклона стрелы к горизонту. Чтобы стрела перелетела через стену, ее высота в момент t должна быть больше высоты стены $h = 30$ м. Отсюда

$$\begin{cases} v_0 t\cos\alpha = l \\ v_0 t\sin\alpha - \dfrac{gt^2}{2} > h \end{cases}$$

($v_0 = 40$ м/с). Исключая t и подставляя численные значения v_0, l, h, получаем неравенство относительно α:

$$\operatorname{tg}^2\alpha - 8\operatorname{tg}\alpha + 7 < 0,$$

откуда $1 < \operatorname{tg}\alpha < 7$. Поскольку, по смыслу задачи, угол α лежит в пределах от 0 до $\dfrac{\pi}{2}$, то $\dfrac{\pi}{4} < \alpha < \operatorname{arctg} 7$.

Задача 2. *Равномерно движущийся шар сталкивается с покоящимся шаром центральным ударом. При столкновении в тепло переходит 25% кинетической энергии. Каково должно быть соотношение между массами шаров, чтобы движущийся шар продолжил свое движение в первоначальном направлении со скоростью не менее 50% от начальной?*

Для решения задачи надо правильно написать законы сохранения энергии и импульса в момент столкновения. Дополнительная сложность состоит в том, что эти законы сформулированы для материальных точек, и при решении соответствующих уравнений появляется второй «нефизический» ответ, отвечающий проскакиванию одного шара сквозь другой. Такой ответ должен быть отброшен. В целом задача трудная.

Пусть M и m — массы покоящегося и движущегося шаров, v_1 и v_2 — начальная и конечная скорости движущегося шара, u — конечная скорость покоящегося шара. Из законов сохранения и условия задачи следует, что

$$\begin{cases} \dfrac{3}{4} mv_1^2 = Mu^2 + mv_2^2, \\ mv_1 = Mu + mv_2, \\ u \geqslant v_2 \geqslant \dfrac{1}{2} v_1 > 0 \end{cases}$$

(условие $u \geqslant v_2$ исключает «нефизический» ответ). Введем новые переменные $x = \dfrac{v_2}{v_1}$, $y = \dfrac{u}{v_1}$, $t = \dfrac{m}{M}$. В них система примет вид

$$\begin{cases} \dfrac{3}{4} t = y^2 + tx^2, \\ y = t(1 - x), \\ y \geqslant x \geqslant \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Исключив y из системы уравнений, получим уравнение

$$(t + 1)x^2 - 2tx + \left(t - \frac{3}{4}\right) = 0$$

относительно величины x. Отсюда

$$x_{1,2} = \frac{t \pm \frac{1}{2}\sqrt{3 - t}}{t + 1},$$

$$y_{1,2} = \frac{t\left(1 \mp \frac{1}{2}\sqrt{3 - t}\right)}{t + 1}.$$

Таким образом, приходим к ограничению $t \leqslant 3$. Физически это условие означает, что при бо́льшем соотношении масс (при $t > 3$) ни при каком характере удара не может быть потеряно 25% энергии. Из условия $y \geqslant x$ следует, что годится решение лишь с нижним знаком перед радикалом. Осталось удовлетворить условию $x \geqslant \dfrac{1}{2}$, которое с учетом найденного выражения для x и очевидного неравенства $t > 0$ принимает вид $t^2 - t - 2 \geqslant 0$. Это неравенство выполняется при $t \geqslant 2$. Ответ: $2 \leqslant \dfrac{m}{M} \leqslant 3$.

Задача 3. *Спортсмен № 1 стартует из пункта А в пункт Б вверх по реке. Вслед за ним через 5 минут отправляется спортсмен № 2. Их скорости таковы, что* *они достигли бы пункта Б одновременно, но на середине пути спортсмен № 1 повернул назад и, встретив спортсмена № 2 в 150 м от пункта А, вернулся в пункт А через 5 минут после старта спортсмена № 2. Найти скорость спортсмена № 2, если скорость спортсмена № 1 в стоячей воде равна 1 м/с.*

Если задачу решать в общем виде, то она приводит к уравнению третьей степени, однако заданные численные значения величин сильно упрощают решение. Трудность задачи — средняя.

Пусть u — скорость течения реки (в м/с), v — искомая скорость спортсмена № 2 (в м/с), s — расстояние от A до $Б$ (в м). Из условий задачи вытекает следующая система уравнений:

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{s}{1-u} = \frac{s}{v-u} + 300,\\ &\frac{\frac{s}{2}}{1-u} + \frac{\frac{s}{2}}{1+u} = 600,\\ &\frac{\frac{s}{2}}{1-u} + \frac{\frac{s}{2}-150}{1+u} = \frac{150}{v-u} + 300.\end{aligned}\right.$$

Вычитая из 3-го уравнения 2-е, находим

$$v = \frac{u+1}{2u+1} + u.$$

С другой стороны, приравняв выражения для s, найденные из 1-го и 2-го уравнений, после простых, хотя и длинных выкладок получим, что

$$v = \frac{u+2}{2u+1}.$$

Отсюда, исключая v, приходим к уравнению

$$2u^2 + u - 1 = 0,$$

которое имеет единственный положительный корень $u = 1/2$. Поэтому $v = 1\frac{1}{4}$ м/с.

З а д а ч а 4. *Имеется наклонная плоскость, расположенная под углом α к горизонту. На расстоянии s от нее на второй наклонной плоскости находится материальная точка M. Какой угол с горизонтом должна составлять эта плоскость, чтобы материальная точка, двигаясь по ней без трения, достигла бы первой плоскости за наименьшее время? Каково это время? Считать, что линия пересечения наклонных плоскостей горизонтальна.*

На вступительных экзаменах обычно не предлагаются задачи на экстремум, поскольку при их решении можно использовать элементы высшей математики, что дает известные преимущества тем из поступающих, кто этими элементами владеет. Данная задача элементарными методами решается значительно проще, чем при использовании понятия производной.

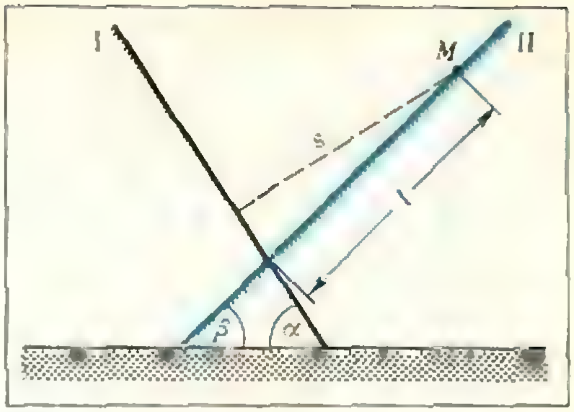


Рис. 1.

Пусть β — искомый угол наклона второй плоскости, l — длина пути материальной точки по этой плоскости (см. рис. 1). Очевидно, $l = s/\sin(\alpha+\beta)$. На второй наклонной плоскости действует ускорение $g\sin\beta$. Поэтому время движения материальной точки по второй плоскости равно

$$t = \sqrt{\frac{2l}{g\sin\beta}} = \sqrt{\frac{2s}{g\sin\beta\,\sin(\alpha+\beta)}} = \sqrt{\frac{4s}{g[\cos\alpha - \cos(\alpha+2\beta)]}}.$$

Искомое минимальное время $t_{\min}$ отвечает случаю $\cos(\alpha+2\beta) = -1$, откуда

$$\beta = \frac{\pi-\alpha}{2}, \quad t_{\min} = \sqrt{\frac{2s}{g\cos^2\frac{\alpha}{2}}}.$$

З а д а ч а 5. *Каждое из двух плоских зеркал может вращаться вокруг своей оси (O_1 и O_2 соответственно), лежащей в плоскости зеркал, причем эти оси параллельны. Между зеркалами закреплена светящаяся точка S. Ее положение таково, что если через S провести плоскость, перпендикулярную к осям зеркала, то в возникающем треугольнике SO_1O_2 $\angle SO_1O_2 = \alpha$ и $\angle SO_2O_1 = \beta$. Какой угол γ должны образовывать между собой зеркала, чтобы изображения точки S в них были максимально удалены друг от друга?*

Хотя эта задача средней трудности, ее решили немногие абитуриенты. Возможно, это связано с тем, что в школе не успевают как следует разобрать простейшие законы геометрической оптики.

Изображение точки в плоском зеркале лежит на перпендикуляре, опущенном из точки на зеркало, позади зеркала на расстоянии, равном расстоянию от точки до зеркала. При вращении первого зеркала вокруг оси O_1 геометрическим местом изображений точки S является окружность с центром в O_1 (рис. 2), проходящая через S (поскольку $SO_1 = O_1S_1$). Наибольшее расстояние между S_1 и S_2 достигается, когда изображения S_1 и S_2 лежат на линии центров O_1O_2. Следовательно, зеркала должны делить пополам углы $\angle S_1O_1S$ и $\angle S_2O_2S$. Поэтому $\angle MO_1O_2 = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$, $\angle MO_2O_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\beta}{2}$, $\gamma = \frac{\alpha + \beta}{2}$.

З а д а ч а 6. *Найти все вещественные решения уравнения*

$$\frac{x^2}{x-1} + \sqrt{x-1} + \frac{\sqrt{x-1}}{x^2} = \frac{x-1}{x^2} + \frac{1}{\sqrt{x-1}} + \frac{x^2}{\sqrt{x-1}}.$$

Несмотря на простоту формулировки задачи, ее решение вызывает некоторые трудности. Попытка «в лоб» избавиться от иррациональностей ни к чему хорошему не приводит. Следует использовать симметрию заданного уравнения. Его ОДЗ: $x > 1$. Пусть $a(x) = x^2$, $b(x) = x - 1$, $c(x) = \sqrt{x-1}$. Тогда заданное уравнение можно записать в виде $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c}$, откуда

$$\frac{(c-b)(b-a)(a-c)}{abc} = 0.$$

Таким образом, решение исходного уравнения эквивалентно решению трех уравнений: $a(x) = b(x)$, $b(x) = c(x)$, $c(x) = a(x)$, которые в данном случае легко решаются. Ответ: $x = 2$.

Вариант 1

1. На расстоянии L от плоской стены в отсутствие поля тяготения покоится шарик. На него налетает другой такой же шарик со скоростью v, направленной под углом α к перпендикуляру к стене. Линия центров шариков в момент удара лежит в плоскости, образованной вектором v и перпендикуляром к стене. Какой угол β должна образовывать линия центров в момент удара и перпендикуляр к стене, чтобы покоящийся шарик достиг стены за кратчайшее время? Каково это время? Удар абсолютно упругий. Считать, что вращение шариков не происходит.

2. Правильная треугольная пирамида со стороной основания a повернута вокруг оси симметрии на угол 60°. Определить объем общей части исходной и повернутой пирамид, если боковые грани — прямоугольные треугольники.

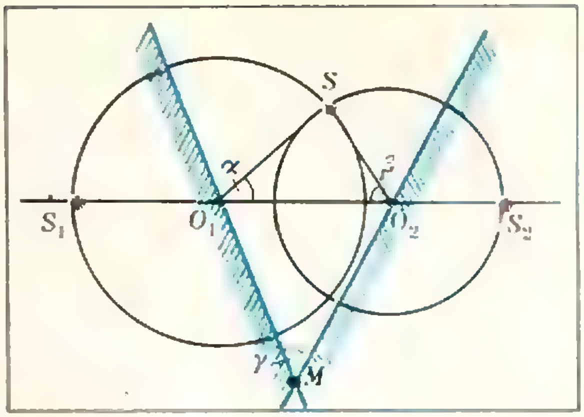


Рис. 2.

3. Выразить сумму $\frac{\sin^8\varphi}{a^3} + \frac{\cos^8\varphi}{b^3}$ только через параметры a и b, если известно, что угол φ удовлетворяет условию $\frac{1}{a}\sin^4\varphi + \frac{1}{b}\cos^4\varphi = \frac{1}{a+b}$ $(a, b > 0)$.

4. Решить уравнение:

$$\log_2\left(x + \frac{1}{x}\right) = \sin^2\frac{\pi x}{2} + \cos^4\frac{\pi x}{2}.$$

5. При всех $a \neq 0$ решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + yz + 2az = 1, \\ xy + yw + 2aw = 0, \\ w^2 + yz + 2ay = 1, \\ xz + zw + 2ax = 0. \end{cases}$$

Вариант 2

1. Снаряд в верхней точке траектории на высоте h разрывается на два одинаковых осколка, которые падают по направлению движения снаряда: один на расстоянии l_1 от места разрыва по горизонтали, другой — на расстоянии l_2. Скорость снаряда в момент разрыва равна v. Через какое время от момента разрыва упадет каждый осколок? Массой пороховых газов пренебречь.

2. На плоскости (x, y) построить области, для всех точек которых выполнены неравенства

$$1 \geqslant |\operatorname{tg} x| \geqslant \operatorname{tg} 2y.$$

3. Решить уравнение:

$$10^{x^2-4x+2} = \frac{1}{25}\left(\sin\frac{\pi x}{12} - \sin^2\frac{\pi x}{12}\right).$$

4. Решить неравенство

$$\log_{2\cos^2 x}(2\cos x - 1) > 1.$$

5. Образующая прямого кругового конуса имеет длину l и составляет с высотой угол α. Через две образующие конуса, составляющие между собой угол 2β, проведена плоскость. Найти расстояние от этой плоскости до центра вписанного в конус шара.

И. А. Молотков, С. Ю. Славянов

РЕЦЕНЗИИ, БИБЛИОГРАФИЯ

Как создавалась современная физика звезд и галактик

Е П Левитан

Первоначальные сведения по астрономии легко почерпнуть из научно-популярных книг, журналов, школьных учебников. Однако, как правило, эти сведения дают несколько одностороннее представление об астрономии: перед взором не очень пытливого человека возникает образ прекрасной и ...очень легкой науки, до отказа наполненной множеством интереснейших данных и всевозможных гипотез. Гипотезы часто излагаются так, что кажется, будто люди просто придумали их «между делом» и что ровно ничего не стоит придумать десятки других, еще лучших. Но ведь далеко не всякое измышление на научную тему может именоваться научной гипотезой или, тем более, научной теорией. И эта мысль станет предельно ясной, когда вы прочитаете книгу московского астронома В. А. Бронштэна «Гипотезы о звездах и Вселенной» *).

В своей книге В. А. Бронштэн стремится показать, «как создаются, проверяются и опровергаются научные гипотезы о происхождении и природе небесных тел». Но это не просто сборник различных гипотез, а краткая и умело написанная история становления физики звезд, внегалактической астрономии и космологии. Как же удалось менее чем на 400 страницах «объять необъятное»?

Прежде всего, автор решил рассмотреть вопрос об источниках энергии Солнца и звезд.

В течение очень многих лет астрономы кропотливо собирали разнообразные сведения о физических характеристиках звезд и о соотношениях между ними. Важнейшей вехой на пути наведения порядка в большом «хозяйстве» звездной астрономии явилось появление научно обоснованной классификации спектров звезд и установление зависимости между спектром и светимостью звезды. Современной теории звездной эволюции удалось объяснить особенности этой зависимости. Об истории создания этой теории рассказывается в первой главе.

Затем вам предстоит встреча с пульсирующими и взрывающимися звездами. Здесь вы встретите уникальный случай в истории науки: самая первая гипотеза о причине блеска цефеид оказалась верной, а все последующие — неверными!

Тема третьей главы — из чего и как рождаются звезды.

В настоящее время существуют две концепции происхождения звезд. Какие? В чем их принципиальное различие? Этому вопросу посвящены многие прекрасно написанные страницы книги В. А. Бронштэна.

Завершив рассказ о звездах, автор приглашает читателя в мир галактик (четвертая — шестая главы). Почти сразу после того, как ученым стало ясно, что наша галактика не единственная во Вселенной, а лишь одна из многих, возник вопрос: как образовались галактики? Начались размышления о том, имеют ли формы галактик какую-нибудь связь с их эволюцией, какие из галактик молодые, а какие старые и т. д. В книге В. А. Бронштэна подробно рассказывается о зарождении и развитии космогонии галактик.

Заключительная (седьмая) глава книги посвящена теории «горячей Вселенной» *).

Хочется подчеркнуть, что «Гипотезы о звездах и Вселенной» — это книга не только о научных гипотезах, но и о людях науки. И хотя в ней нет подробных биографий ученых, вы, несомненно, обратите внимание на те краткие сведения, которые там приведены. И уж наверняка задумаетесь об огромной роли молодежи в науке. Подавляющее большинство крупных советских астрономов приобщались к астрономии в юношеском и даже детском возрасте, когда они с увлечением работали в астрономических кружках и успешно участвовали в астрономических олимпиадах. Это — один из лучших путей в большую науку. И на этом пути большую пользу приносят хорошие, умные книги. Книга, о которой мы рассказали, несомненно, одна из них.

---

*) Бронштэн В. А. Гипотезы о звездах и Вселенной. М., «Наука». 1974, 384 с., цена 77 к.

*) Тот, кто заинтересуется этой теорией более подробно, может обратиться к публикациям в научно-популярном журнале АН СССР «Земля и Вселенная».

Новые книги

В этом номере мы публикуем аннотации на книги, выходящие во II квартале 1975 года. Заказы на книги надо оформлять через специализированные магазины или магазины «Книга — почтой».

Математика

Издательство «Наука»

1. **Донеддю А.** *Евклидова планиметрия*. Объем 15 л., тираж 25 000 экз., цена 1 р. 20 к.

В книге приводится строгое изложение курса планиметрии. Система аксиом, принятая автором, достаточно близка к системе аксиом, принятой в нашей средней школе.

Книга будет полезна учителям средней школы, школьникам старших классов и студентам педагогических институтов и университетов.

2. **Пойа Д.** *Математика и правдоподобные рассуждения*. Объем 34 л., тираж 30 000 экз., цена 1 р. 85 к.

Эта книга принадлежит перу широко известного в Советском Союзе венгерского математика и замечательного педагога Д. Пойа. Написанная превосходным языком, она живо и в доступной форме знакомит читателя с тем, какими путями добываются в математике новые факты, как относиться к той или иной гипотезе.

Книга представляет большой интерес для всех, кто интересуется математикой, психологией творчества, историей.

3. **Постников М. М.** *Устойчивые многочлены*. Объем 12 л., тираж 25 000 экз., цена 40 к.

В книге систематически излагается основа теории устойчивых многочленов. Используя лишь только сведения, известные из курса средней школы, она вводит читателя в круг важнейших идей классической алгебры и анализа.

Книга рассчитана на учителей средней школы, школьников, студентов и вообще всех любителей математики.

4. **Курош А. Г.** *Алгебраические уравнения произвольных степеней*. Издание 2-е. Объем 2 л., тираж 30 000 экз., цена 7 к.

В основе этой книги лежат лекции, прочитанные автором в МГУ для школьников старших классов. Крупный ученый и блестящий педагог А. Г. Курош живо и увлекательно рассказывает об общих методах теории алгебраических уравнений. Книга полезна для всех любителей математики и особенно для школьников старших классов.

5. **Маркушевич А. И.** *Возвратные последовательности*. Издание 2-е. Объем 3 л., тираж 50 000 экз., цена 10 к.

Автор в живой и доступной для школьников форме рассказывает о возвратных последовательностях (включая арифметическую, геометрическую последовательности и т. д.).

Автор не только излагает общую теорию, но и приводит интересные исторические факты, относящиеся к ее возникновению. Книга написана хорошим языком и будет с интересом прочитана учащимися старших классов.

6. **Гик Е. Я.** *Математика на шахматной доске*. Объем 8 л., тираж 100 000 экз., цена 30 к.

В книге в живой и увлекательной форме рассказывается о разнообразных связях, существующих между математикой и шахматами: о математических легендах, посвященных происхождению шахмат, об играющих машинах, о математике шахматных турниров. Много внимания уделено математическим задачам и головоломкам, связанным с шахматной доской. Рассмотрены все известные типы таких задач (задачи о доске, о маршрутах, о расстановках и силе фигур и т. д.). Приводятся задачи «о ходе коня» и «о восьми ферзях», которыми занимались великие математики Эйлер и Гаусс.

7. **Тумаков И. М.** *Анри Леон Лебег*. Объем 5,5 л., тираж 10 000 экз., цена 40 к.

Значение интеграла Лебега для современной математики и ее приложений очень велико, но об авторе этого интеграла, французском математике Анри Леоне Лебеге, почетном члене многих академий наук мира и математических обществ известно очень мало. Книга И. М. Тумакова, подготовленная к 100-летию со дня рождения ученого, восполняет этот пробел. В ней приведены биографические сведения о Лебеге, дан обзор его научных трудов, показаны истоки и значение открытия Лебега.

Издательство «Высшая школа»

8. **Копеин Т. А., Малинов М. П.** *Пособие по математике для поступающих в техникумы*. Объем 18 л., тираж 100 000 экз., цена 74 к.

Это пособие предназначено для поступающих в техникумы на базе 8 классов средней школы. Оно полностью отвечает программе вступительных экзаменов в техникумы.

Физика

Издательство «Наука»

1. **Зубов В. Г., Шальнов В. П.** *Задачи по физике*. Издание 10-е. Объем 16 л., тираж 300 000 экз., цена 55 к.

Сборник содержит задачи по физике в объеме программы средней школы. Почти все задачи снабжены решениями или подробными указаниями. Задачник будет полезен учащимся старших классов средней школы, а также лицам, готовящимся к поступлению в вузы.

2. *Элементарный учебник физики.* Под редакцией Г. С. Ландсберга. Том I. Издание 9-е. Объем 36 л., тираж 300 000 экз., цена 1 р. 11 к.

Эта книга завоевала широкую и прочную известность. Ее основными достоинствами являются глубина изложения физических процессов, простота в изложении и великолепный живой язык.

Первый том посвящен изложению механики, теплоты и молекулярной физики. Книга рассчитана на школьников старших классов и учителей физики.

3. Гегузин Я. Е. *Почему и как исчезает пустота.* Объем 12 л., тираж 22 000 экз., цена 75 к.

В книге популярно и занимательно рассказывается об истории развития физических идей современной теории спекания — основы технологического процесса порошковой металлургии и производства огнеупорных материалов. Показано, как в тесной взаимосвязи теории, эксперимента и технологии формировались новые идеи в области физики спекания.

4. Карпов И. И., Лисневский Ю. И. *Кварки.* Объем 9 л., тираж 50 000 экз., цена 60 к.

Книга посвящена одной из интересных проблем современной физики элементарных частиц — гипотезе кварков. Они в элементарных частицах еще не обнаружены. Но эта гипотеза уже оказалась очень полезной для науки, позволив получить много новых выводов, подтвердившихся в экспериментах. В книге в доступной форме излагаются основные положения гипотезы кварков, попутно разбираются те физические понятия и идеи, без знания которых нельзя представить себе ее суть.

Издательство «Мир»

5. Пирсол И. *Кавитация.* Объем 5 л., тираж 50 000 экз., цена 44 к.

В книге рассказано о так называемом явлении кавитации. На большом практическом материале автор показывает вредные и полезные стороны этого явления. Книга представляет интерес для всех любителей физики.

6. Чедд Г. *Звук.* Объем 11 л., тираж 50 000 экз., цена 89 к.

Что такое звук, какова его природа, почему звук вызывает различные ощущения — вот неполный перечень вопросов, затронутых в этой книге. Книга написана живо, популярно. Ее с интересом прочтут широкие круги читателей.

Издательство «Просвещение»

7. *Школьный астрономический календарь на 1975/76 учебный год.* Составитель Дагаев М. М. Объем 6 л., тираж 100 000 экз., цена 22 к.

В календаре помещены основные сведения о Солнце, Луне, планетах, звездах и т. д., а также справочные данные, необходимые для наблюдения различных астрономических явлений. Книга полезна всем любителям астрономии и особенно членам астромических кружков.

8. Верзилин Н. М., Корсунская В. М. *В. И. Вернадский.* Объем 7 л., тираж 100 000 экз., цена 19 к.

Эта книга является биографическим очерком о жизни и научной деятельности крупного советского ученого академика В. И. Вернадского. Книга представляет интерес для школьников старших классов.

Издательство «Атомиздат»

9. Васильев М. В., Станюкович К. П. *В глубины неисчерпаемого.* Объем 12 л., тираж 100 000 экз., цена 40 к.

Авторы ярко и увлекательно рассказывают об эволюции представлений человека о строении материи и ее развитии. Книга рассчитана на широкий круг читателей.

10. Рыдник В. И. *Законы атомного мира.* Объем 15 л., тираж 50 000 экз., цена 50 к.

Автор в живой и увлекательной форме рассказывает об основных представлениях квантовой механики и о найденных ею законах атомного мира. Книга предназначена для широкого круга читателей.

11. Франк-Каменецкий Д. А. *Плазма — четвертое состояние вещества.* Издание 4-е. Объем 9 л., тираж 100 000 экз., цена 30 к.

Книга принадлежит перу известного советского ученого и популяризатора науки. Автор в живой и доступной форме рассказывает читателю о природе плазмы, перспективах использования термоядерной энергии и многих других возможных применениях плазмы. Книга рассчитана на широкий круг читателей.

Справочная литература

Издательство «Высшая школа»

1. *Справочник для поступающих в высшие учебные заведения СССР в 1975 году.* Объем 34 л., тираж 500 000 экз., цена 1 р. 25 к.

Справочник содержит правила приема в вузы, порядок зачисления на подготовительные отделения вузов, программы вступительных экзаменов и перечень вузов с указанием их адресов, факультетов и специальностей.

2. *Правила приема и программы вступительных*

экзаменов в вузы СССР в 1975 году. Объем 5 л., тираж 400 000 экз., цена 20 к.

Справочник содержит правила приема и программу вступительных экзаменов во все вузы Советского Союза в 1975 году.

Научно-фантастическая литература

Издательство «Мир»

1. *Человек-компьютер.* Сб. научно-фантастических произведений. Объем 16 л., тираж 100 000 экз., цена 1 р. 12 к.

Основу сборника составляет роман американского писателя-фантаста М. Крайтона «Человек-компьютер». В сборник также включены фантастические произведения английских, венгерских и других авторов на тему «Медицина и фантастика».

Издательство «Молодая гвардия»

2. Глазов Г. *Вынужденный детектив.* Объем 14,5 л., тираж 100 000 экз., цена 50 к.

Остросюжетная повесть, рассказывающая о розыске художественных ценностей, похищенных гитлеровцами в годы войны из польского музея.

Издательство «Детская литература»

3. Давыдов Ю. *Глухая пора листопада.* Объем 33 л., тираж 100 000 экз., цена 1 р. 60 к.

Автор в острой и занимательной форме рассказывает о последних днях «Народной воли».

4. Файбышенко Ю. *Решающий час.* Объем 13 л., тираж 100 000 экз., цена 78 к.

Приключенческая повесть о геологах, вступивших в борьбу с преступниками, пытавшимися втянуть поисковую группу в преступление против Родины.

5. Виткович В. *Огненный мяч.* Объем 11 л., тираж 100 000 экз., цена 45 к.

Эта книга о взаимоотношениях человека и природы, об охране природы и окружающей среды.

6. Стругацкий А., Стругацкий Б. *Неназначенные встречи.* Объем 26 л., тираж 100 000 экз., цена 1 р. 50 к.

В новую книгу известных советских писателей-фантастов войдут три повести: «Дело об убийстве», «Малыш», «Пикник на обочине». В основе всех трех повестей лежит одна общая тема — контакт с внеземными цивилизациями.

7. Шаталов В., Ребров М. *Люди и космос.* Объем 6 л., тираж 100 000 экз., цена 49 к.

В этой книге летчик-космонавт СССР В. Шаталов и журналист М. Ребров рассказывают о совместном советско-американском эксперименте «Союз — Аполлон».

8. Велтистов Е. *Победитель невозможного.* Объем 27,5 л., тираж 100 000 экз., цена 93 к.

Повести о приключении электронного мальчика, электронной собаки и их друзей.

9. Подольный Р. *Пути народов.* Объем 14 л., тираж 100 000 экз., цена 60 к.

Книга посвящена проблемам возникновения и формирования народов на нашей планете.

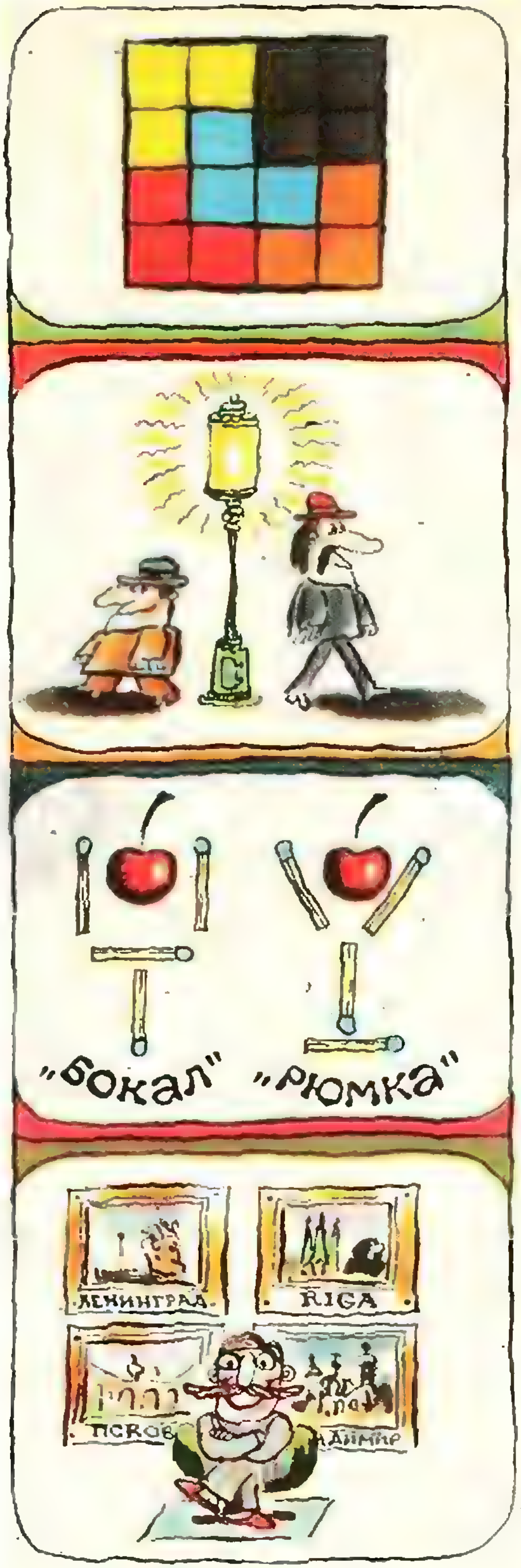
Советуем купить!

Магазин № 8 «Техническая книга» (103773, Москва, Петровка, 15) имеет в продаже и высылает наложенным платежом (без задатка) следующие книги:

1. Селезнев Ю. А. *Основы элементарной физики.* Издание 4-е. «Наука». Цена 92 к..
2. Бляшке В. *Круг и шар.* «Наука». Цена 53 к.
3. Кендалл М., Моран П. *Геометрические вероятности.* «Наука». Цена 90 к.
4. Лефор Г. *Алгебра и анализ* (задачи). «Наука». Цена 1 р. 15 к.
5. Манин Ю. И. *Кубические формы: алгебра, геометрия, арифметика.* «Наука». Цена 1 р. 29 к.
6. Литлвуд Дж. *Математическая смесь.* Перевод с англ. Издание 3-е. «Наука». Цена 37 к.
7. Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М. *Геометрические оценки и задачи из комбинаторной геометрии.* Библиотека математического кружка, вып. 13. «Наука». Цена 87 к.
8. *Физика,* часть I. *Вселенная.* Перевод с англ. Под редакцией Ахматова А. С. «Наука». Цена 1 р. 30 к.
9. *Физика,* часть II. *Оптика и волны.* Под редакцией Ахматова А. С. «Наука». Цена 1 р. 78 к.
10. *Элементарный учебник физики.* Под редакцией Г. С. Ландсберга. Том III. (Колебания, волны. Оптика. Строение атома.) Издание 7-е, стереотипное. «Наука». Цена 1 р. 13 к.
11. Яворский Б. М., Пинский А. А. *Основы физики.* Том 2. (Электродинамика; колебания и волны; основы квантовой физики атомов, молекул и твердых тел; физика ядра и элементарных частиц.) «Наука». Цена 1 р. 20 к.
12. Тригг Дж. *Решающие эксперименты в современной физике.* Перевод с англ. «Мир». Цена 41 к.
13. Дорман Л. И. *Солнечные космические лучи.* «Наука». Цена 1 р. 06 к.

Т. С. Петрова,
М. Л. Смолянский

«Квант» для младших школьников



Задачи

1. Квадрат с вырезанной «четвертушкой» легко разрезать на 4 конгруэнтные части (см. рисунок). А сможете ли вы разрезать на 5 конгруэнтных частей квадрат, если эта четвертушка не вырезана?

2. Два приятеля — высокий и низенький, расходятся с одинаковыми скоростями от фонаря в разные стороны. Чья тень движется скорее?

3. При делении некоторого числа на 13 и 15 получились одинаковые частные, но первое деление было с остатком 8, а второе — без остатка. Найти это число.

4. В недавно вышедшей книге Мартина Гарднера «Математические новеллы» есть такая головоломка. Из четырех спичек составлен «бокал», в котором лежит вишня (см. рисунок). Нужно, переместив лишь две спички, передвинуть «бокал» так, чтобы вишня оказалась снаружи. По словам М. Гарднера многие безуспешно ломали себе голову над этой головоломкой.

А вы сможете решить эту задачу? Попробуйте также решить эту задачу для «рюмки».

5. Однажды первый вторник месяца я провел в Ленинграде, а первый вторник после первого понедельника — в Риге. В следующем месяце я первый вторник провел в Пскове, а первый вторник после первого понедельника — во Владимире. Какого числа и какого месяца я был в каждом из этих городов?

Рисунки Э. Назарова

Е. Я. Гик

Шахматно-математические задачи С. Лойда

Сэмюэль Лойд (1841—1911) принадлежит к числу величайших мастеров занимательных задач и головоломок. Им придумано множество великолепных задач, до сих пор не утративших своей популярности. А игра «Пятнадцать» принесла Лойду мировую славу (подробное исследование этой игры можно найти в «Кванте», 1974, № 2).

Любопытно, что Лойд был не только выдающимся изобретателем головоломок, но и одним из крупнейших шахматных композиторов всех времен. Каждый, кому приходилось решать шахматные задачи Лойда, не раз восхищался остроумием и неповторимостью замыслов композитора.

До 17 лет юный Сэм посещал общеобразовательную школу, и если бы он поступил в колледж, из него наверняка бы вышел очень сильный математик или инженер. Однако, несмотря на любовь к математике, страсть к шахматам оказалась сильнее. Он не стал поступать в колледж, а все время отдавал шахматам. Первую задачу Лойда опубликовала одна нью-йоркская газета, когда автору было всего 14 лет. В 16 лет Лойд уже редактировал отдел в американском «Шахматном ежемесячнике», а в семидесятые годы прошлого столетия вел еженедельную шахматную страничку в журнале «Scientific American». Обычно его статья открывалась задачей, расположение фигур в которой изображало какую-нибудь букву или геометрическую фигуру, например, «Колесо в колесе» (рис. 1). Вот как «раскручивается» это колесо: а) 1. Ф : h3 + Кр : h3 2. Крg5 мат; б) 1...Ке7 + 2. Кре4 Л : f4 мат; в) 1. Фg3 + Ф : g3 2. Кg6 + Ф : g6 мат; г) 1...Ке7 + 2. Кре4 Кg5 +3. Ф : g5 мат (в) и г)—«обратный» мат).

Конечно, Лойд стремился сочетать свою любовь к математике и шахматам. И поэтому не удивительно, что многие его задачи имеют одновременно и математическую, и шахматную основу. Сейчас мы рассмотрим 15 с нашей точки зрения наиболее интересных шахматно-математических задач Сэмю-

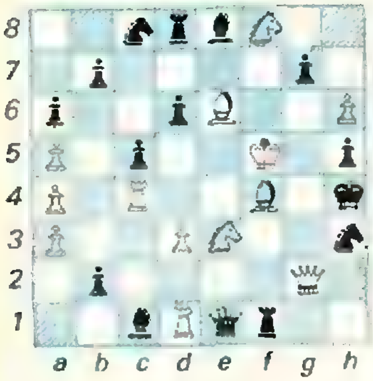


Рис. 1. «Колесо в колесе». а) Белые начинают и дают мат в два хода; б) черные начинают и дают мат в два хода; в) белые начинают и заставляют противника дать им мат в два хода; г) черные начинают и заставляют противника дать им мат в два хода.

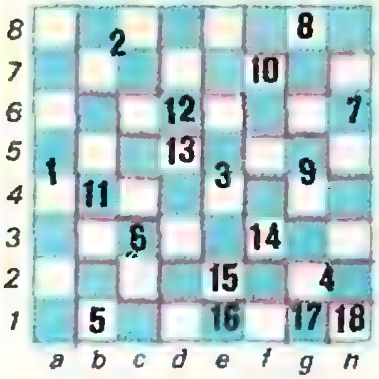


Рис. 2.

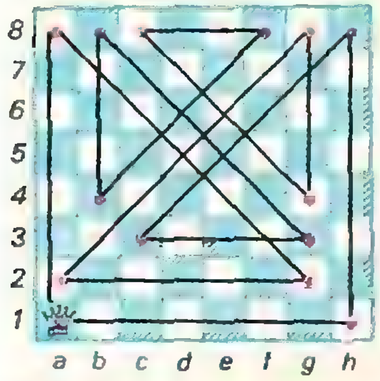


Рис. 3 а.

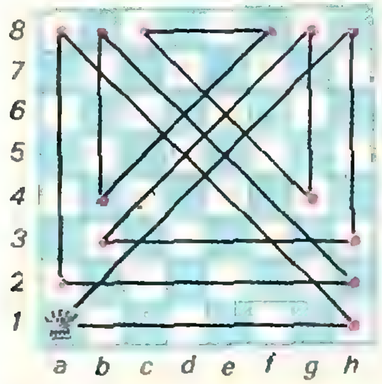


Рис. 3 б.

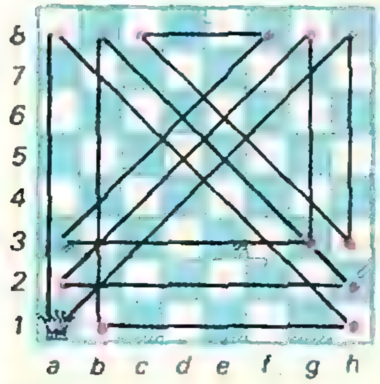


Рис. 3 в.

эля Лойда. Задачи Лойда в других жанрах можно найти в книге М. Гарднера «Математические головоломки и развлечения» («Мир», М., 1971).

Задача 1. *Разрезать шахматную доску на максимальное число частей, отличающихся друг от друга либо формой, либо цветом соответствующих полей; переворачивать части запрещается.*

Искомое число равно 18. Один из возможных разрезов приведен на рисунке 2.

Задача 2. *На полях a1, b2, c3 и d4 стоят белые кони. Разрезать доску на четыре конгруэнтные части так, чтобы в каждой из них оказалось по коню.*

Позднее было придумано множество головоломок на разрезание доски, но именно Лойд явился основателем задач такого типа. Одной из любимейших шахматных фигур Лойда был ферзь; можно сказать, что Лойд создал целую теорию задач с участием ферзя.

Задача 3. *Ферзь стоит на поле a1. Найти наименьшее число ходов, за которое ферзь может пройти по всем полям доски и вернуться на исходное поле.*

Искомое число ходов равно 14. Всего существует шесть маршрутов: три приведены на рисунке 3, остальные получаются из них зеркальным отражением относительно диагонали a1 — h8. Красным отмечены поля, на которых ферзь делает остановки.

Лойд доказал, что если исходное поле находится в синей области на рисунке 4, то замкнутый маршрут ферзя по всем полям доски занимает уже 15 ходов. Если же исходное поле находится в красной области, то достаточно 14 ходов. Сообразите сами, как эта красная область получена на симметричном рисунке 4 (из рисунка 3).

Задача 4. *За какое минимальное число ходов ферзь может обойти все поля доски 3 × 3, если ему разрешается выходить за пределы доски?*

Достаточно четырех ходов (рис. 5). В популярной литературе эта задача часто формулируется иначе: *не отрывая карандаш от бумаги, перечеркнуть четырьмя отрезками прямых девять точек, расположенных в форме квадрата.*

Задача 5. *Ферзь стоит на поле d1. Какой самый длинный (в геометрическом смысле) путь он может проделать за 5 ходов (проходя через центры полей)?*

Задача 6. *Начав с поля c3, обойти ферзем за 15 ходов всю доску, закончив путь на поле f6. Ни одно из полей не должно быть пройдено дважды.*

Задача 7. *Расставить на доске 16 ферзей так, чтобы на каждой вертикали, горизонтали и диагонали стояло не более двух из них.*

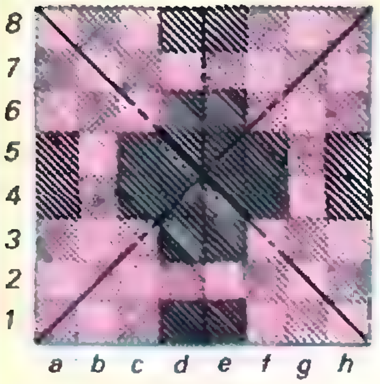


Рис. 4.

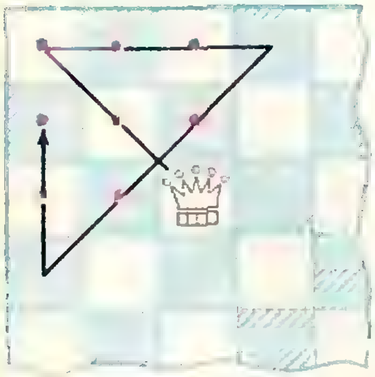


Рис. 5.

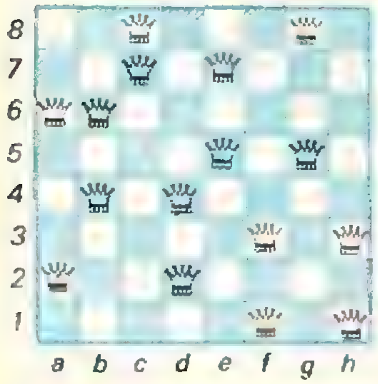


Рис. 6.

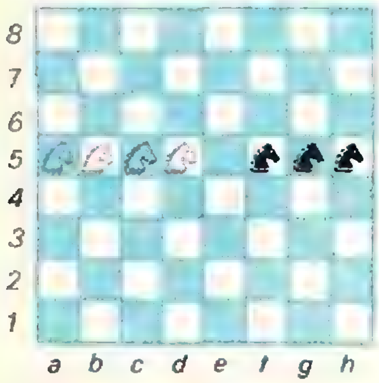


Рис. 7.

На рисунке 6 приведена искомая расстановка; заметим, что для доски размером $n \times n$ и $2n$ ферзей эта задача не решена до сих пор.

Многие задачи Лойда посвящены необычным расстановкам фигур на доске, а также движению коней. Приведем по одной задаче на каждую из этих тем.

Задача 8. *Расставить на доске три ферзя и две ладьи так, чтобы они держали под обстрелом все 64 поля доски.*

Задача 9. *В позиции на рисунке 7 нужно переставить белых коней на вертикали e, f, g и h, а черных соответственно на вертикали a, b и c. При этом очередь хода не соблюдается, белым и черным коням запрещено отступать (белым влево, черным вправо), и на каждой вертикали может стоять только один конь.*

Эта задача — одна из труднейших лойдовских головоломок. Лойд очень гордился ею.

Много изобретательности проявил Лойд, «анализируя» начальную расстановку фигур на доске. Вы, конечно, знаете, что самый быстрый мат возможен уже на втором ходу, причем его получают белые: 1. f4 e6 2. g4 Фh4 мат. Этот мат в шахматных справочниках называется «дурацким». Более известен четырехходовый «детский» мат, который часто получают начинающие шахматисты: 1. e4 e5 2. Сc4 Кc6 3. Фh5 Кf6 4. Ф : f7 мат.

Что касается ничейного исхода, то часто встречаются следующие три ситуации, в которых партия заканчивается ничьей:

а) на доске пат;

б) один из противников дает вечный шах;

в) у каждой стороны осталось по королю. Естественно возникают новые задачи.

Задача 10. *Как быстрее всего партия может придти к позиции на рисунке 8?*

Здесь каждая сторона должна съесть по 15 фигур и пешек противника. Так как на первом ходу белые ничего не могут взять, то партия должна состоять не менее чем из 16 ходов. Однако известны лишь 17-ходовые партии, приводящие к полному опустошению доски. В зависимости от конечного расположения королей решений существует много. В нашем случае нужно сделать следующие 17 ходов: 1. e4 d5 2. ed Ф : d5 3. Фh5 Ф : a2 4. Ф : h7 Ф : b1 5. Ф : g7 Л : h2 6. Л : a7 Л : g2 7. Л : b7 Л : g1 8. Л : c7 Ф : b2 9. Л : c8 + Крd7 10. Л : b8 Л : b8 11. С : b2 Л : b2 12. Л : g1 Л : c2 13. Ф : f7 Л : d2 14. Ф : e7 + Кр : e7 15. Л : g8 Л : f2 16. Л : f8 Л : f1 + 17. Кр : f1 Кр : f8.

Задача 11. *Как быстрее всего партия может закончиться патом?*

Кажется, что число ходов должно быть очень велико. Ведь в отличие от мата, когда только у короля (стоящего под шахом) нет ходов, здесь все фигуры должны быть «замурованными». Однако цели удается достичь всего за 10 ходов: 1. e3 a5 2. Фh5 Лa6 3. Ф : a5 h5 4. Ф : c7 Лah6 5. h4 f6 6. Ф : d7 + Крf7 7. Ф : b7 Фd3 8. Ф : b8 Фh7 9. Ф : c8 Крg6 10. Фe6 пат! (рис. 9).

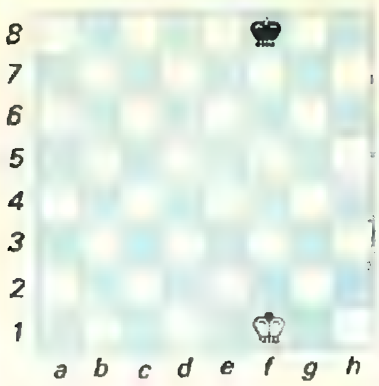


Рис. 8.

З а д а ч а 12. *Как быстрее всего партия может закончиться патом, если ни одна из фигур (ни белых, ни черных) не должна быть взята?*

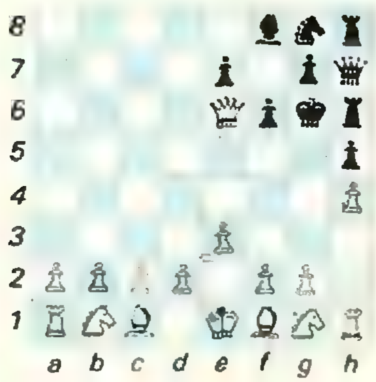


Рис. 9.

Парадоксально, но при таком довольно сильном на вид дополнительном условии партия удлиняется всего на два хода: 1. d4 d6 2. Фd2 e5 3. a4 e4 4. Фf4 f5 5. h3 Ce7 6. Фh2 Ce6 7. Лa3 c5 8. Лg3 Фa5 + 9. Кd2 Ch4 10. f3 Cb3 11. d5 e3 12. c4 f4 пат! (рис. 10).

Доказать, что эти две партии — самые короткие, очень сложно — практически для этого надо перебрать соответственно всевозможные 9- и 11-ходовые партии. Однако, учитывая, что этим партиям скоро исполнится сто лет, можно без всяких сомнений считать их рекордными.

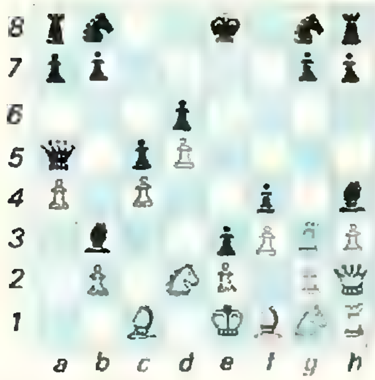


Рис. 10.

З а д а ч а 13. *Как быстрее всего партия может закончиться вечным шахом?*

Достаточно трех ходов: 1. f4 e5 2. Кр f2 Ф f6 3. Кр g3 Ф:f4+4. Кр h3 Фf5+ и так далее.

В заключение приведем еще два рекорда Лойда, также связанных с начальной позицией.

З а д а ч а 14. *Черные симметрично повторяют ходы белых (пока это возможно). За какое наименьшее число ходов белые могут поставить мат неприятельскому коромю?*

Мат дается уже на четвертом ходу, причем двумя путями: 1. c4 c5 2. Фa4 Фa5 3. Фc6 Фc3 4. Ф : c8 мат; 1. d4 d5 2. Фd3 Фd6 3. Фh3 Фh6 4. Ф : c8 мат.

Известна такая забавная история. Некто явился в шахматный клуб и объявил, что нашел способ не проигрывать черными. «Каким образом?» — спросили его. — «Очень просто, — повторяя ходы противника!» Сыграть с «изобретателем» вызвался Лойд, который и объявил ему мат в 4 хода.

З а д а ч а 15. *Вновь черные повторяют ходы белых. Зная об этом, за сколько ходов белые могут заматовать самих себя?*

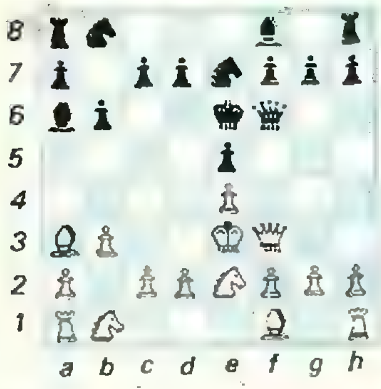


Рис. 11.

Белые могут получить «обратный» мат уже на восьмом ходу: 1. e4 e5 2. Крe2 Крe7 3. Крe3 Крe6 4. Фf3 Фf6 5. Кe2 Кe7 6. b3 b6 7. Ca3 Ca6 (рис. 11). 8. Кd4+! ed мат.

Конечно, трудно соперничать с Лойдом в изобретательности, но, может быть, вам тоже удастся установить какой-нибудь рекорд на шахматной доске?!

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

К статье «Циркулем и линейкой»

1. Нельзя. Решение — в тексте статьи.

2. Построим окружность s с центром A и радиусом AB (построение β), отметим точки C и D, в которых s пересекает l (построение γ), радиусом CD проведем окружности с центрами C и D (построение β), отметим точку их пересечения E (построение γ) и проведем прямую $p = AE \perp l$ (построение α).

3. Проведем прямую AB и перпендикуляр к ней через точку A (см. упражнение 2) и рассмотрим систему координат, изображенную на рисунке 2 в тексте статьи. Докажем сначала, что можно построить любую прямую, которая в этой системе координат задается уравнением $y = k/2^n$ (или $x = k/2^n$), где k — произвольное целое, а n — любое натуральное число. Для этого нужно разделить отрезок $AB = 1$ пополам, еще раз пополам, и т. д., пока не получится отрезок $AC = 1/2^n$; отложив его $|k|$ раз по оси y (вверх, если $k > 0$, или вниз, если $k < 0$), получим точку $D = (0, k/2^n)$; через нее проведем перпендикуляр к оси y (см. упражнение 2). Проведя прямые $y = k/2^n$ и $x = l/2^m$, мы можем отметить точку их пересечения $(l/2^m, k/2^n)$. Отсюда следует решение упражнения 3.

а) Пусть на одной из линий конфигурации выделен отрезок (или дуга) d. Хотя бы на одну из осей d проектируется в отрезок (а не в точку) — пусть для определенности это ось y. Подберем натуральное n так, чтобы длина проекции d на ось y была больше $1/2^n$. Тогда эта проекция содержит точку вида $(0, k/2^n)$. Проведем прямую $y = k/2^n$ и отметим ее точку пересечения с d.

b) Поскольку в исходной конфигурации проведено конечное число линий, то *не проведена* одна из прямых вида $y = k/2^n$. Линии исходной конфигурации пересекают ее в конечном числе точек. Отметим точку $(l/2^m, k/2^n)$, отличную от всех этих точек.

с) Ясно, что одна из точек вида $(l/2^m, k/2^n)$ удовлетворяет условию.

4. Исходная конфигурация теоремы 1′ — это прямая l и такие точки A, B_1, ..., B_n на ней, что $AB_1 = d_1, \ldots, AB_n = d_n$. Для определенности пусть $d_1 = 1$, так что систему координат в теореме 1 можно построить, приняв за основу точки A и $B = B_1$. Тогда параметрами конфигурации окажутся числа $0, d_1, \ldots, d_n$.

Если x выражается через $d_1, \ldots, d_n$ с помощью основных действий, то согласно теореме 1 можно построить точку $C = (x, 0)$ и, тем самым, отрезок AC длины x. Обратно, пусть, исходя из конфигурации $\{l, A, B_1, \ldots, B_n\}$, можно построить отрезок CD длины x. Тогда, отложив CD от точки A, мы построим точку $(x, 0)$, и согласно теореме 1, x выражается через $0, d_1, \ldots, d_n$ (а значит, и через $d_1, \ldots, d_n$) с помощью основных действий.

5. Пусть дан отрезок длины $d = \sqrt[3]{2}$. Тогда отрезок длины $x = d^2 = \sqrt[3]{4}$ построить нельзя. Действительно, $x = d\sqrt[3]{2}$, то есть перед нами задача об удвоении куба, неразрешимость которой доказана в п. 7. Если бы, наряду с отрезком длины $d = \sqrt[3]{2}$, был задан еще отрезок длины $e = 1$, то построение отрезка длины $x = d^2$ стало бы возможным (рис. 1 при $z = t = d$).

6. Любое рациональное число можно записать в виде *несократимой* дроби p/q. Докажем, что $\sqrt[3]{2}$ так записать нельзя. Допустим противное: пусть $\sqrt[3]{2} = p/q$ (где p и q не имеют общих множителей). Тогда $p^3 = 2q^3$, то есть p^3 — четное число. Значит, и p — четное число (так как куб нечетного числа — число нечетное), то есть $p = 2n$. Отсюда $8n^3 = 2q^3$, $q^3 = 4n^3$. Значит, q^3, а следовательно, и q тоже четно. Пришли к противоречию: p и q имеют общий множитель 2. Итак, $\sqrt[3]{2}$ — иррациональное число.

7. Можно. Увеличив данный угол в 19 раз, получим угол в 361°.

8. а) См. рисунок 1.

b) Если числа x и y построены, то можно построить точки $(x, 0)$ и $(0, y)$. Проведя через них перпендикуляры к осям, получим на пересечении точку (x, y).

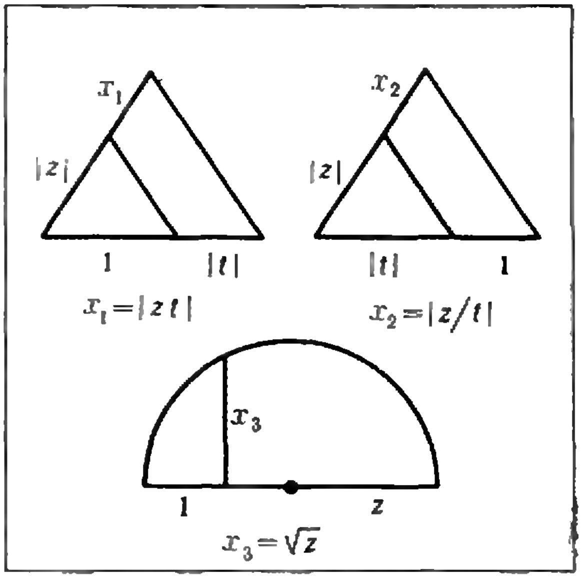


Рис. 1.

Если точка (x, y) построена, то, опустив из нее перпендикуляры на оси, получим точки $(x, 0)$ и $(0, y)$, то есть построим числа x и y.

c) Если параметр p — одна из координат отмеченной точки, то p можно построить согласно 8b. Если $p = k$ (или $p = b$) для проведенной прямой $y = kx + b$, то, отметив точки пересечения $(0, b)$ и $(1, k + b)$ этой прямой с осью y и прямой $x = 1$, мы можем построить p согласно 8b и 8a (для прямой $x = a$ нужно отметить точку ее пересечения с осью x).

Пусть p — один из параметров (x_0, y_0 или r) проведенной окружности s. Отметим на s три различные точки T_1, T_2, T_3 (см. упражнение 3). Проведя срединные перпендикуляры к отрезкам T_1T_2 и T_1T_3, построим центр окружности $O = (x_0, y_0)$. Теперь x_0 и y_0 строятся согласно 8b, а $r = |OT_1|$ уже построено.

9. a) Выписанное уравнение линейно, значит, оно задает прямую. То, что эта прямая проходит через заданные точки, проверяется непосредственно.

b) Следует из теоремы Пифагора (см. школьный учебник).

c) Если $k_1 = k_2$, то обе прямые образуют равные углы с осью x и, значит, либо параллельны, либо совпадают; если $k_1 \neq k_2$, то они не совпадают и обе проходят через заданную точку. Остальные случаи разбираются еще проще.

d) Следует из 9b.

10. Нет. Доказательство основывается на том, что числа $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ и $\sqrt{6}$ иррациональны (последнее устанавливается так же, как иррациональность $\sqrt[3]{2}$, см. упражнение 6). Если бы $\sqrt{3}$ можно было записать в виде $\sqrt{3} = a + b\sqrt{2}$, где a и b рациональны, то отсюда следовало бы, что $3 = a^2 + 2ab\sqrt{2} + 2b^2$. Последнее не противоречит иррациональности $\sqrt{2}$ только при $ab = 0$. Но если $b = 0$, то $3 = a^2$ (что невозможно, так как $\sqrt{3}$ — иррациональное число), а если $a = 0$, то $3 = 2b^2$ и $6 = (2b)^2$ (вопреки иррациональности $\sqrt{6}$).

К статье «Абитуриент-1975»

1. $\dfrac{3a^2}{8\sqrt{\sin\left(\frac{\beta}{2} - 30^\circ\right)\sin\left(\frac{\beta}{2} + 30^\circ\right)}}$.

2. $1/4 \leqslant x \leqslant 8$.

3. $x_{1,2} = \dfrac{2\pi}{3}(3n \pm 1)$, $x_3 = \dfrac{\pi}{8}(4n+1)$, n — целое.

4. $-4 < a \leqslant -3$.

К статье «Ленинградский государственный университет им. А. А. Жданова»

Вариант 1

1. При нагрузке судна в P (тонн) его скорость $v = v_0 - kP$, где k — коэффициент пропорциональности, $v_0 > 0$. Имеем $v_0 - 2000k = \frac{1}{3}(v_0 - 1000k)$, откуда $k = \dfrac{v_0}{2500}$, $v = v_0\left(1 - \dfrac{P}{2500}\right)$. Следовательно, грузооборот судна равен $v_0 P\left(1 - \dfrac{P}{2500}\right)$. Последнее выражение принимает наибольшее значение при $P = 1250$ (тонн).

Далее, если S — расстояние между портами, то $\dfrac{S}{v_0\left(1 - \frac{2000}{2500}\right)} = 25$ (ч), откуда $S = 5v_0$. При наибольшем грузообороте судно пройдет расстояние между портами за $\dfrac{S}{v} =$

$$= \frac{5v_0}{v_0\left(1 - \frac{1250}{2500}\right)} = 10 \text{ (ч)}.$$

2. $a_2 - a_1 = \log_2 \cos x < 0$, то есть $a_1 > a_2$; $a_3 - a_1 = -\log_2 \sin x + \log_2 \cos x$, кроме того, при $0 < x < \dfrac{\pi}{4}$ справедливо неравенство $\cos x > \sin x$, поэтому $a_3 > a_1 > a_2$.

3. Пусть $u = \log_2(1 - x - x^2)$. Тогда $u = \dfrac{a}{u} + b$, то есть $u^3 - bu - a = 0$. Условие разрешимости этого квадратного уравнения имеет вид $b^2 + 4a \geqslant 0$ (для всех $b > 0$), поэтому $a \geqslant 0$. Далее, при изменении x от 0 до $\dfrac{1}{2}$ квадратный трехчлен $1 - x - x^2$ монотонно убывает от 1 до $1/4$, а u убывает от 0 до -2. Следовательно, надо найти условие на неотрицательное a, при котором для всех $b > 0$ уравнение $u^2 - bu - a = 0$ имеет решение в интервале $-2 < u < 0$. Имеем $u_{1,2} = \dfrac{1}{2}\left(b \pm \sqrt{b^3 + 4a}\right)$. $u_1 = \dfrac{1}{2}\left(b + \sqrt{b^2 + 4a}\right)$ является посторонним решением, так как при $a \geqslant 0$ и $b > 0$ справедливо неравенство $\dfrac{1}{2}\left(b + \sqrt{b^2 + 4a}\right) \geqslant 0$. Далее, ясно, что при $a \geqslant 0$ и $b > 0$ будет $u_2 = \dfrac{1}{2}\left(b - \sqrt{b^2 + 4a}\right) \leqslant 0$, причем равенство имеет место только при $a = 0$. Поэтому случай $a = 0$ надо исключить. Осталось удовлетворить неравенству $\dfrac{1}{2}\left(b - \sqrt{b^2 + 4a}\right) > -2$, то есть $4 + b > \sqrt{b^2 + 4a}$. Но последнее неравенство при $b > 0$ равносильно неравенству $4 + 2b > a$ (для всех $b > 0$), поэтому $4 \geqslant a$. **Ответ:** $0 < a \leqslant 4$.

4. $(\sqrt{6} - 2)a$.

5. $-\frac{b^2\cos\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}{2\cos 3\alpha}$. Указание. Условие $\alpha > \frac{\pi}{4}$ означает, что центр окружности, описанной около основания, лежит внутри основания.

Вариант 2

1. 96%. 2. $a_3 < a_2 < a_1$. 3. $0 < a \leqslant \frac{1}{4}$. 4. $\frac{\sqrt{7}}{3}a$. 5. $\frac{a^2}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{tg}\,\beta$. Указание. Условие $\alpha > \frac{\pi}{3}$ означает, что центр окружности, описанной около основания, лежит внутри основания.

Вариант 3

1. 12 *мин*; 6 *мин*. 2. $0 < x < \frac{1}{2}$. 3. $x_1 = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi$, $x_2 = \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \ldots)$. 4. $\arccos\frac{\sqrt{5}-1}{2}$; $\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. 5. $\frac{a}{2\cos\frac{\alpha}{2}}\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2}}$.

Вариант 4

1. 3 часа; 4 часа. 2. $\frac{1}{2} < x \leqslant \frac{1}{\sqrt[5]{16}}$ или $1 < x \leqslant 8$. 3. $x_1 = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi$; $x_2 = \frac{k\pi}{2}$ $(k = 0, \pm 1, \ldots)$. Замечание. Другая форма записи ответа: $x_1 = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}$; $x_2 = k\pi$. 4. $\frac{a}{2}$; $\frac{\sqrt{3}}{2}a$. 5. $\sqrt{\frac{S_1(S_2 - S_1)}{\pi(S_2 + S_1)}}$.

Вариант 5

1. 650 *км/ч*. 2. $x_1 = 4$; $x_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}}$. 3. $x = (-1)^k\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}$ $(k = 0, \pm 1, \ldots)$. 4. $AB = \frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{5} - 1)r$; $AC = \frac{\sqrt{3}}{2} \times (\sqrt{5} + 1)r$. 5. $2ab\sin\alpha\sqrt{-ab\cos\alpha}$.

Физический факультет

Вариант 1

1. $\beta = \frac{\alpha}{2}$, $t_{\min} = \frac{L}{v\cos^2\frac{\alpha}{2}}$. 2. $V = \frac{1}{36}a^3\sqrt{2}$. 3. $\frac{1}{(a+b)^3}$. 4. $x = 1$.

5. 1) $x = w = 0$, $y_{1,2} = z_{1,2} = -a \pm \sqrt{a^2+1}$;
2) $x_{1,2} = w_{1,2} = \pm\sqrt{a^2+1}$, $y = z = -a$.

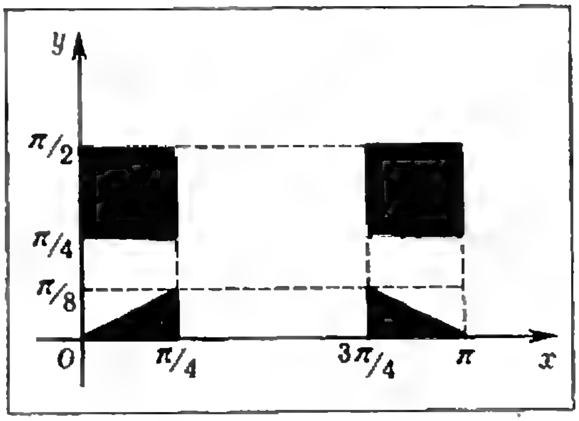


Рис. 2.

Вариант 2

1. Задача имеет решение лишь при условии $2u^2h \geqslant l_1l_2g$. Если это условие выполнено, то

$$l_1 = \frac{2uh \pm \sqrt{4u^2h^2 - 2l_1l_2gh}}{l_2g},$$

$$l_2 = \frac{2uh \mp \sqrt{4u^2h^2 - 2l_1l_2gh}}{l_1g}$$

(два решения задачи соответствуют двум возможным типам траекторий осколков).

2. Заданные неравенства выполнены в областях, отмеченных цветом на рисунке 2, и в областях, получающихся из них π — периодическим повторением по переменной x и $\frac{\pi}{2}$ — периодическим повторением по переменной y.

3. $x = 2$.

4. $\frac{\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{3} + 2k\pi$; $-\frac{\pi}{3} + 2k\pi < x < -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \ldots)$.

5. $\frac{l\cos\alpha(\sin^2\alpha - \sin^2\beta)^{1/2}}{\cos\beta(1 + \sin\alpha)}$.

К статье «Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова»

1. $S = 106$ *м*.

2. $h = h_0/\sqrt{3} \approx 11{,}6$ *м*.

3. $T = \frac{2lq^2}{4\pi\varepsilon_0R^2} = 3{,}5\cdot 10^{-3}$ *н*.

4. $p = \frac{p_1V_1 + p_2V_2}{V_1 + V_2} = 2{,}5 \cdot 10^5$ *н/м²*.

5. $E = u_1u_2 \frac{R_1 - R_2}{u_2R_1 - u_1R_2} = 4{,}5$ *в*.

6. $W = uq = \frac{u\mu V}{kV_0} = 10^{10}$ *дж*.

7. $r_2 = \frac{fr_1}{l + f} = 1$ *см*.

8. $\alpha = \pi - 2 \arcsin \frac{1}{n} = \frac{2\pi}{3}$.

К статье «Выход в пространство»

(см. «Квант», 1975, № 5)

1) Введем в пространстве декартовы координаты (x, y, z) так, что оси x и y расположены в нашей плоскости. Положению пешехода в точке с координатами (x, y) в момент времени t соответствует в пространстве точке (x, y, t). Траекторией движения каждого пешехода в пространстве будет прямая линия. Тот факт, что два пешехода встречаются, означает, что соответствующие им в пространстве прямые пересекаются.

2) Возьмем точки, соответствующие окружностям, как это делалось при решении задачи Аполлония (см. статью). Тогда, например, три точки, соответствующие пересечениям пар общих внешних касательных, принадлежат нашей плоскости и плоскости, проходящей через три соответствующие точки, расположенные по одну сторону от нашей плоскости.

3) Рассмотрим треугольную призму, ребра которой проектируются в данные прямые и три точки на различных ее гранях, проектирующиеся в данные точки (две прямые при этом можно оставить на месте). Искомый треугольник — проекция треугольника, получающегося при пересечении призмы плоскостью, проходящей через три точки выбранные, на ее гранях.

4) Рассмотрим плоскость, пересекающуюся с данной по прямой ABC и не совпадающую с данной плоскостью. В этой новой плоскости возьмем фиксированную окружность O, проходящую через AB. Возьмем произвольную сферу, которой принадлежит окружность O. Точки касания всевозможных касательных к сфере, проходящих через C, лежат в одной плоскости. Значит, если M_1 и N_1 — точки касания этих касательных с окружностью O, то M, N, M_1 и N_1 лежат в одной плоскости. При этом M_1 и N_1 фиксированы, а прямые (AB) и (M_1N_1) пересекаются.

5) Возьмем сферу, центр которой расположен в центре данной окружности, а радиус равен ее радиусу. Проведем в этой сфере через A хорду KL, перпендикулярную плоскости данной окружности. Тогда M принадлежит плоскостям, касающимся данной сферы в точках K и L.

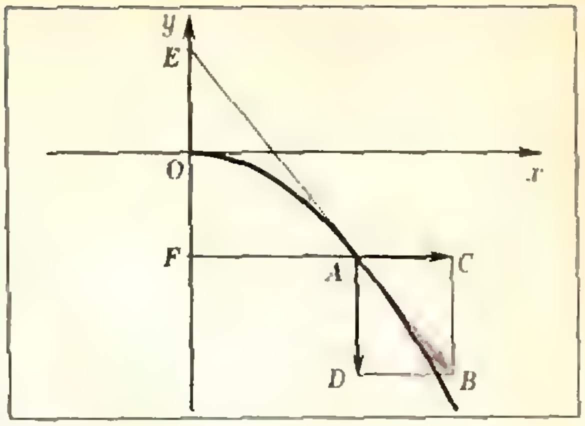


Рис. 3.

6) Возьмем произвольную плоскость, затем гиперплоскость, пересекающую ее по прямой и в этой гиперплоскости другую плоскость, пересекающуюся с этой прямой.

К статье «Касательные к рулеттам»

(см. «Квант», 1975, № 5)

Задача 1. Пусть $A = A_t = (x(t), y(t))$ — точка на траектории $\left(\text{параболе } y = -\frac{g}{2v^2}x^2\text{; рис. 3}\right)$, $\overrightarrow{AB}$ — вектор скорости в этой точке, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AC}$ — его вертикальная и горизонтальная компоненты, F — проекция A на ось y, E — симметричная относительно O точка. Надо доказать, что EA и AB составляют одну прямую, то есть что $\measuredangle EAF = \measuredangle CAB$. Это следует из подобия одноименных треугольников: $\triangle EAF \backsim \triangle CAB$, так как $|AC| = v$, $|AD| = gt$, $|EF| = 2|OF| = gt^2$, $|AF| = vt$.

Задача 2. Пусть A — точка на траектории, $\overrightarrow{AB}$ — вектор скорости, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ — скорости составляющих движений, $|OF| = -\frac{gt^2}{2}$, $|OE| = |OF|$ (рис. 4). Мы хотим до-

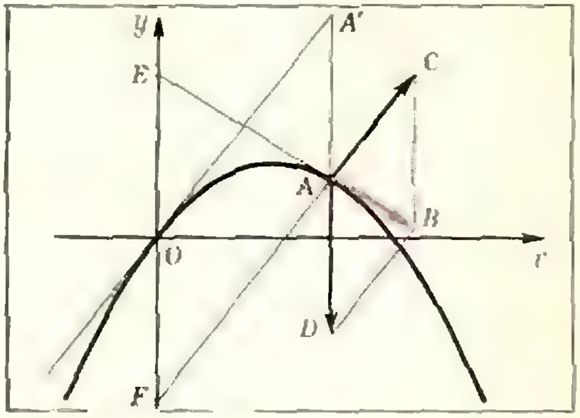


Рис. 4.

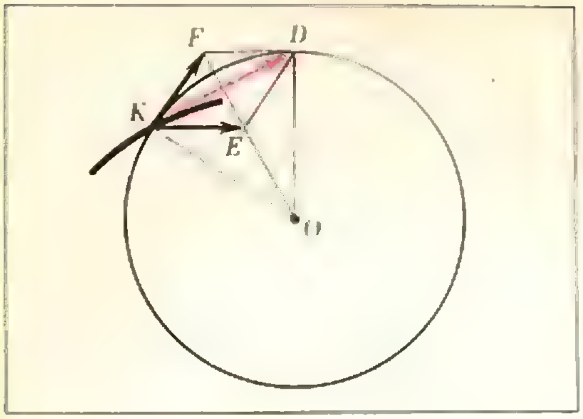


Рис. 5.

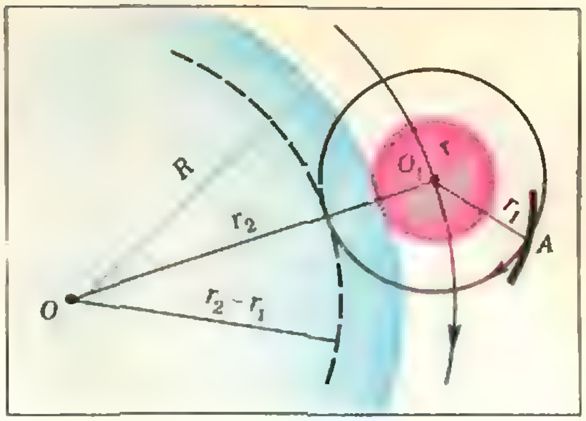


Рис. 7.

казать, что точки E, A и B лежат на одной прямой. Рассмотрим $\triangle EFA$ и $\triangle ACB$. Стороны EF и CB параллельны, $|EF| = gt^2$, $|CB| = gt$, то есть $\frac{|EF|}{|CB|} = t$. Далее, из построения точки F ясно, что вектор $\overrightarrow{FA}$ равен $\overrightarrow{OA'}$, где $A' = (ut, vt)$, то есть точки F, A и C лежат на одной прямой, причем $\frac{|FA|}{|AC|} = t$. В результате получаем подобие рассматриваемых треугольников и $\angle EAF = \angle CAB$, что и требовалось доказать.

Задача 3. Ясно, что длину вектора $\dot{\mathbf{r}}_1$ мы можем выбрать произвольно; $|\dot{\mathbf{r}}_1| = |\dot{\mathbf{r}}_2|$. Пусть $\dot{\mathbf{r}}_2 = \overrightarrow{KE}$ (горизонтальный вектор), $\dot{\mathbf{r}}_1 = \overrightarrow{KF}$ (касательный вектор) (рис. 5); выберем длину $|\dot{\mathbf{r}}_1| = |\dot{\mathbf{r}}_2|$ так, чтобы вершина D ромба $EKFD$ лежала на окружности, ограничивающей производящий круг (тогда KD — это касательная к циклоиде). Нам надо доказать, что D — «верхняя» точка круга, то есть что прямая OD вертикальна ($OD \perp KE$). Имеем $EF \perp KD$ (как диагонали ромба), а значит, EF проходит через центр O (как перпендикуляр к хорде, проходящий через ее середину). Получаем, что $\triangle FDO = \triangle FKO$ (по трем сторонам), а значит, $\angle FDO = \angle FKO$; но $\angle FKO = 90^\circ$ (FK — касательная к кругу), значит, и $\angle FDO = 90^\circ$, а это и требовалось доказать, так как $FD \parallel KE$.

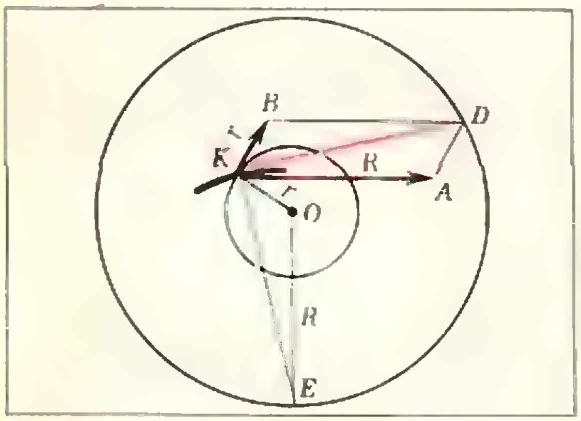


Рис. 6.

Задача 4. Пусть $\dot{\mathbf{r}}_2 = \overrightarrow{KA}$ (горизонтальный вектор), $|\dot{\mathbf{r}}_2| = R$, $\dot{\mathbf{r}}_1 = \overrightarrow{KB}$ (касательный вектор к малой окружности), $|\dot{\mathbf{r}}_1| = r$ (рис. 6). Тогда $\overrightarrow{KD}$ — касательный вектор к укороченной циклоиде, и нужно доказать, что $KE \perp KD$, где E — нижняя точка производящего круга. Имеем $KB \perp OK$ (касательная и радиус), $BD \perp OE$ (горизонталь и вертикаль), значит, $\angle KBD = \angle KOE$ (как углы с взаимно перпендикулярными сторонами). Далее, $|BD| = |KA| = |OE| = R$, $|KB| = |OK| = r$. Поэтому $\triangle BKD = \triangle OKE$. Таким образом, $\angle BKD = \angle OKE$; следовательно, и $\angle EKD = \angle OKE + \angle OKD = \angle BKD + \angle OKD = \angle OKB$; но так как $\angle OKB$ — прямой, то и $\angle EKD$ — прямой.

Задача 5. Ясно, что если $r_2 > r_1$, то наше движение можно продолжить до качения круга радиуса r_1 с центром O_1 по границе круга радиуса $r_2 - r_1$ с центром O, однако со скольжением ($v_1 \neq v_2$). Найдем для этого движения «рельс» и «колесо». Имеем $u_1 = \frac{v_1}{r_1}$, $u_2 = \frac{v_2}{r_2}$ — угловые скорости вращения соответственно точки A вокруг O_1 и точки O_1 вокруг O. Выберем два числа R и r так, чтобы $Ru_2 = ru_1$, $R + r = r_2$; тогда линейные скорости точек границы круга с центром O радиуса R и круга с центром O_1 радиуса r будут равны по величине (рис. 7); эти круги касаются друг друга, и так как описанные в условии задачи вращения происходят в одну и ту же сторону, то в точке касания их скорости направлены в разные стороны. Поэтому круг радиуса r с центром O_1 катится по границе круга радиуса R с центром O уже без скольжения (см. определение качения без скольжения — скорость в точке

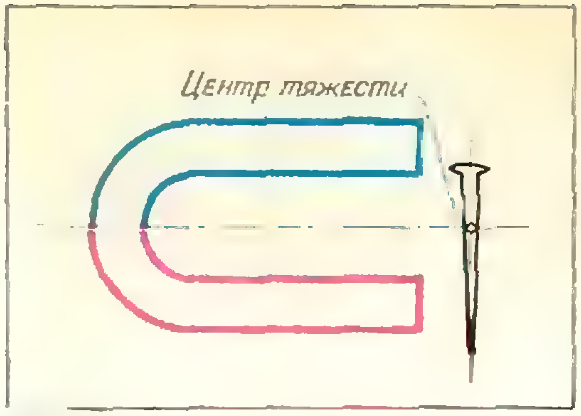


Рис. 8.

соприкосновения равна нулю!). Обозначив $\alpha = \frac{u_1}{u_2}$, получим $r = \frac{r_2}{\alpha + 1}$, $R = \alpha r$.

Итак, мы получили, что точка A будет двигаться по обычной эпициклоиде, если $r = r_1$, удлиненной, если $r < r_1$, и укороченной если $r > r_2$.

Заметим, что может получиться $R < r$ и что ограничение $r_2 > r_1$ не существенно.

Эта задача поясняет, каким образом эпициклоиды появились в системе Птолемея (II век н. э.)*). У Птолемея точка O отвечает Земле, A — Солнцу или планете, O_1 — вспомогательная точка. Без эпициклоид не обошелся и Коперник: только в точке O у него находилось Солнце. Лишь при рассмотрении эллиптических орбит эпициклоиды уже не требовались**).

Задача 5′. Продолжим, как и в задаче 5, наше движение до движения всей плоскости как твердой пластины. Возникающее движение будет иметь один из трех видов в зависимости от α. (См. обозначения в решении задачи 5.)

Пусть $\alpha > 1$. Определим $\tilde{R}, \tilde{r}$ так, чтобы $\tilde{R} - \tilde{r} = r_2$, $\frac{\tilde{R}}{\tilde{r}} = \alpha$, то есть $\tilde{r} = \frac{r_2}{\alpha - 1}$.

Рассмотрим теперь неподвижный обруч радиуса $\tilde{R}$ с центром O, по внутренней стороне которого катится без скольжения круг радиуса $\tilde{r}$ так, что его центр O_1 движется как сказано в условии задачи. Нетрудно убедиться, что тогда точка A тоже будет двигаться так, как того требует условие. Значит, при $\alpha > 1$ точка A движется по гипоциклоиде, укороченной или удлиненной в зависимости от того, $\tilde{r} = r_1$, $\tilde{r} > r_1$ или $\tilde{r} < r_1$.

При $\alpha < 1$ положим $\tilde{r} = \frac{r_2}{1 - \alpha}$, $\tilde{R} = \alpha \tilde{r}$.

Рассмотрим неподвижный круг радиуса $\tilde{R}$ с центром O, по границе которого катится без скольжения своей внутренней стороной обруч радиуса $\tilde{r}$, центр которого совершает вращение, предписанное условием задачи ($\tilde{r} > \tilde{R}$). Тогда точка A будет вовлечена в нужное движение, а значит, траекторией ее является перициклоида, укороченная или удлиненная.

При $\alpha = 1$ получающееся движение плоскости, как легко убедиться, не будет иметь мгновенных центров вращения — точек с нулевой скоростью (рекомендуем вам для каждого случая $\alpha < 1$, $\alpha = 1$, $\alpha > 1$ нарисовать свою картинку). Но тогда оно должно являться движением по траекториям, получающимся друг из друга сдвигом. Так как точка O_1 движется по окружности с центром O, то, значит, и остальные точки движутся по окружностям, получающимся из указанной сдвигом. Попытайтесь доказать этот результат непосредственно.

К задачам «Квант» для младших школьников»

(см. «Квант», 1975, № 5)

1. Верно. Ира собрала не меньше, чем один из мальчиков, а Таня — больше, чем второй мальчик.
2. Для нагревания 50 *г* льда от —10 °C до 0 °C надо затратить 0,43 *кал/(г·град)* × ×50 *г*·10 *град* = 215 *кал*, а для таяния этого льда — еще 80 *кал/г*·50 *г* = 4000 *кал*. При остывании 100 *г* воды от +10 °C до 0 °C выделится всего 1 *кал* /(*г·град*)·100 *г* × ×10 *град* = 1000 *кал*. Следовательно, растает не весь лед, и в сосуде будет находиться смесь воды и льда при температуре 0 °C.
3. Данное число всегда четно; рассмотреть последние цифры степеней 1^n, 2^n, 3^n, 4^n.
4. См. рисунок 8.
5. 1024.

---

*) Птолемей, предположив, что планеты могут двигаться по удлиненным эпициклоидам, смог объяснить в рамках своей системы наблюдавшееся астрономами «попятное» движение планет (иногда планеты начинали двигаться *в обратном направлении*).

**) Подробнее о системах мира можно прочесть в статье Я. А. Смородинского «Николай Коперник», опубликованной в журнале «Квант», 1973, № 2.

Корректор *Е. В. Сидоркина*

117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.
«Квант», тел. 234-08-11. Сдано в набор 15/III-75
Подписано в печать 4/V-75 Бумага 70×100¹/₁₆
Физ. печ. л. 4. Усл. печ. л. 5,20. Уч.-изд. л. 6,41
Тираж 368 940 экз. Т-06594 Цена 30 коп. Заказ 513

Чеховский полиграфический комбинат
Союзполиграфпрома
при Государственном комитете Совета Министров
СССР по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли, г. Чехов Московской обл.

Рукописи не возвращаются

Игра «шестиугольник»

На верхнем рисунке изображены 12 элементов игры — фигур, каждой из которых дано название. Каждая из них составлена из шести равносторонних треугольников. Такие фигуры называют треугольным гексамино. У фигур нет «нижней» или «верхней» стороны. Фигура «шестиугольник» до конца игры в игре не участвует.

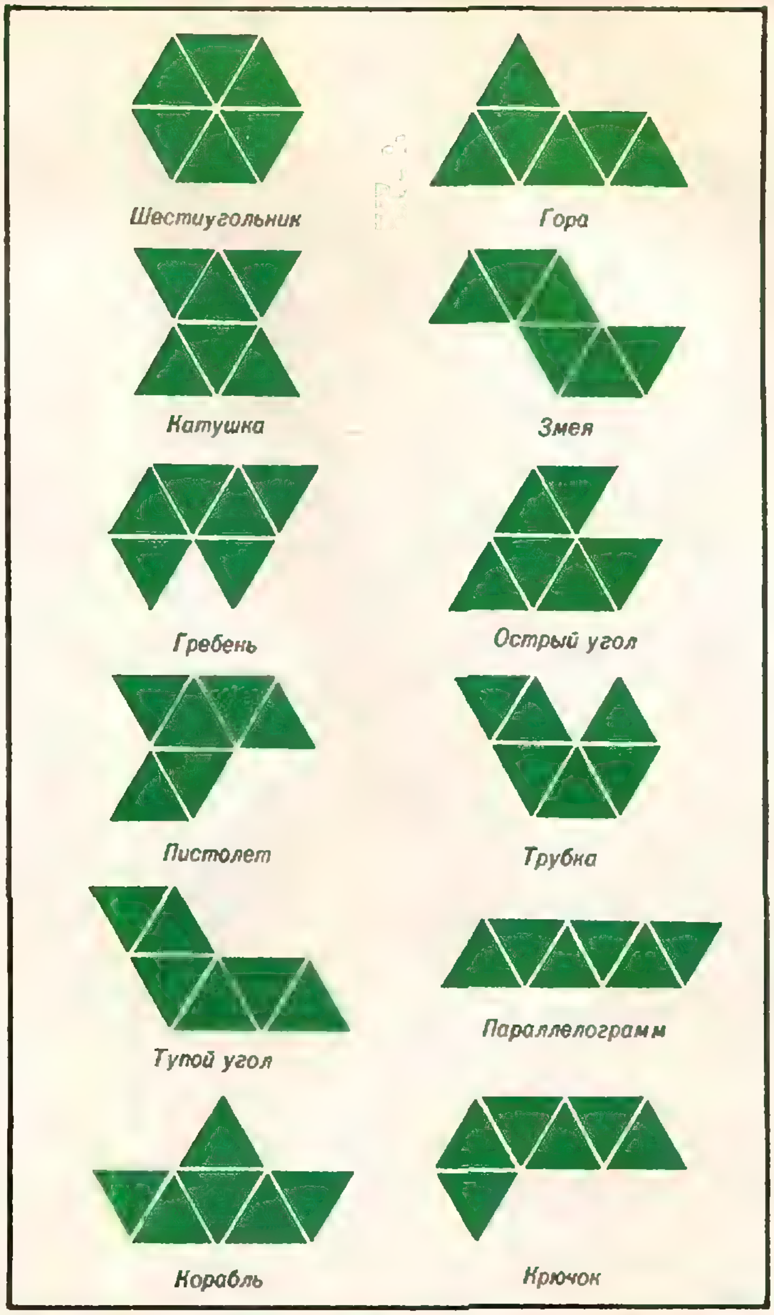
В игру «шестиугольник» могут играть два и более участников.

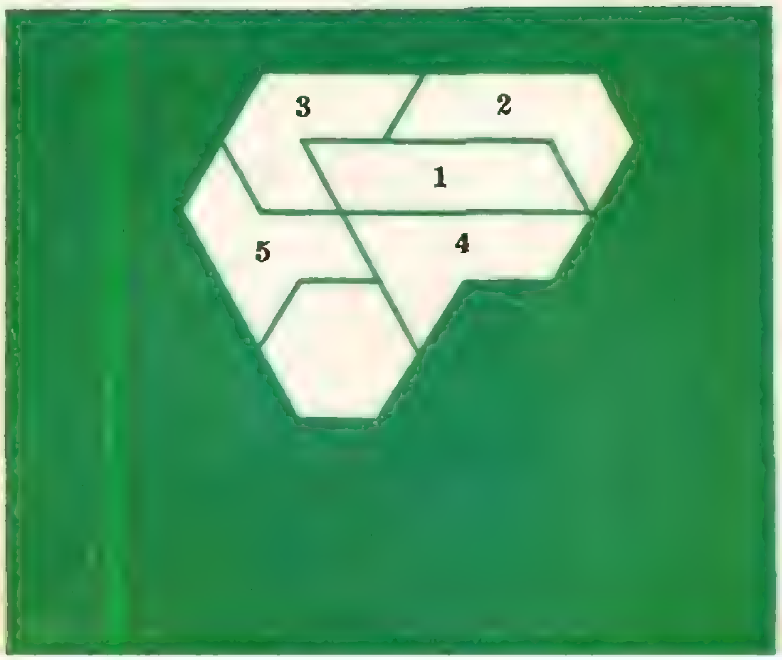
Первый игрок (по условию или по жребию) берет любую из фигур и кладет ее на стол — фигура в игре. Следующий игрок очередным ходом берет одну из оставшихся фигур и кладет ее так, чтобы она касалась уже лежащих по сплошной линии, длина которой равна трем единицам длины периметра фигур (единица длины — длина стороны треугольника, составной части фигуры). Если игрок не может подобрать такую фигуру из еще не использованных, то он может взять любую фигуру на столе, выходящую к границе контура, и переложить ее согласно правилам на другое место (вновь касанием подряд по трем единицам длины периметра). Когда все фигуры находятся в игре, то очередные ходы заключаются в перекладывании фигур. Но игра может закончиться раньше, чем возникнет такая необходимость.

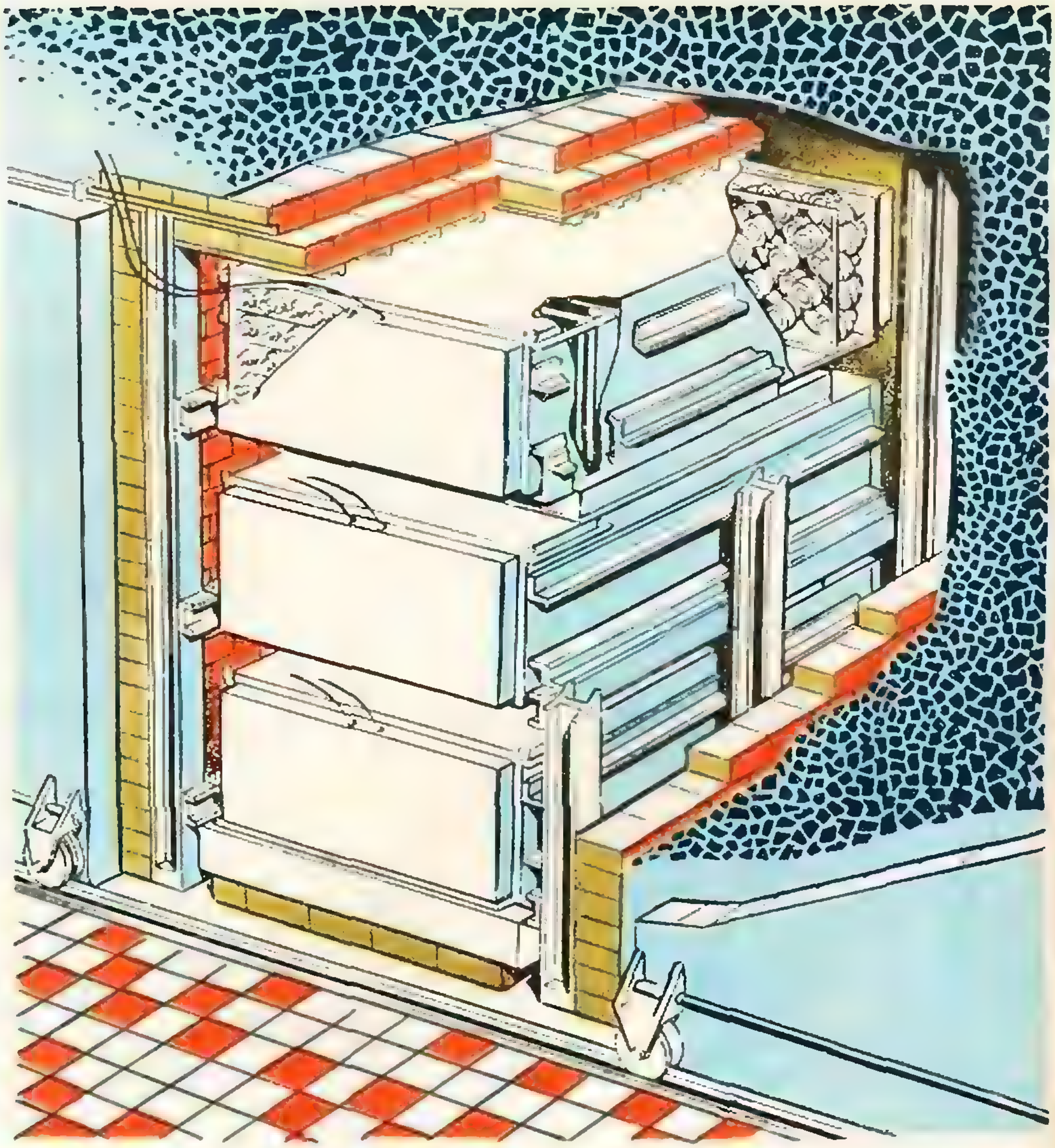
Цель игры — создание такой ситуации, после которой возможен ход фигурой «шестиугольник». Игрок, создавший такую ситуацию, получает дополнительный ход этой фигурой и выигрывает.

На нижнем рисунке изображен пример партии (возможно, самой короткой).

Л. П. Мочалов







На приведенном рисунке вы видите схематический разрез нейтринного детектора, установленного вблизи ядерного реактора. В этом детекторе впервые удалось зарегистрировать «следы» самой неуловимой из всех элементарных частиц — нейтрино. Основными элементами детектора служат баки (I, II, III) с жидким сцинтиллятором, снабженные системой фотоэлементов.

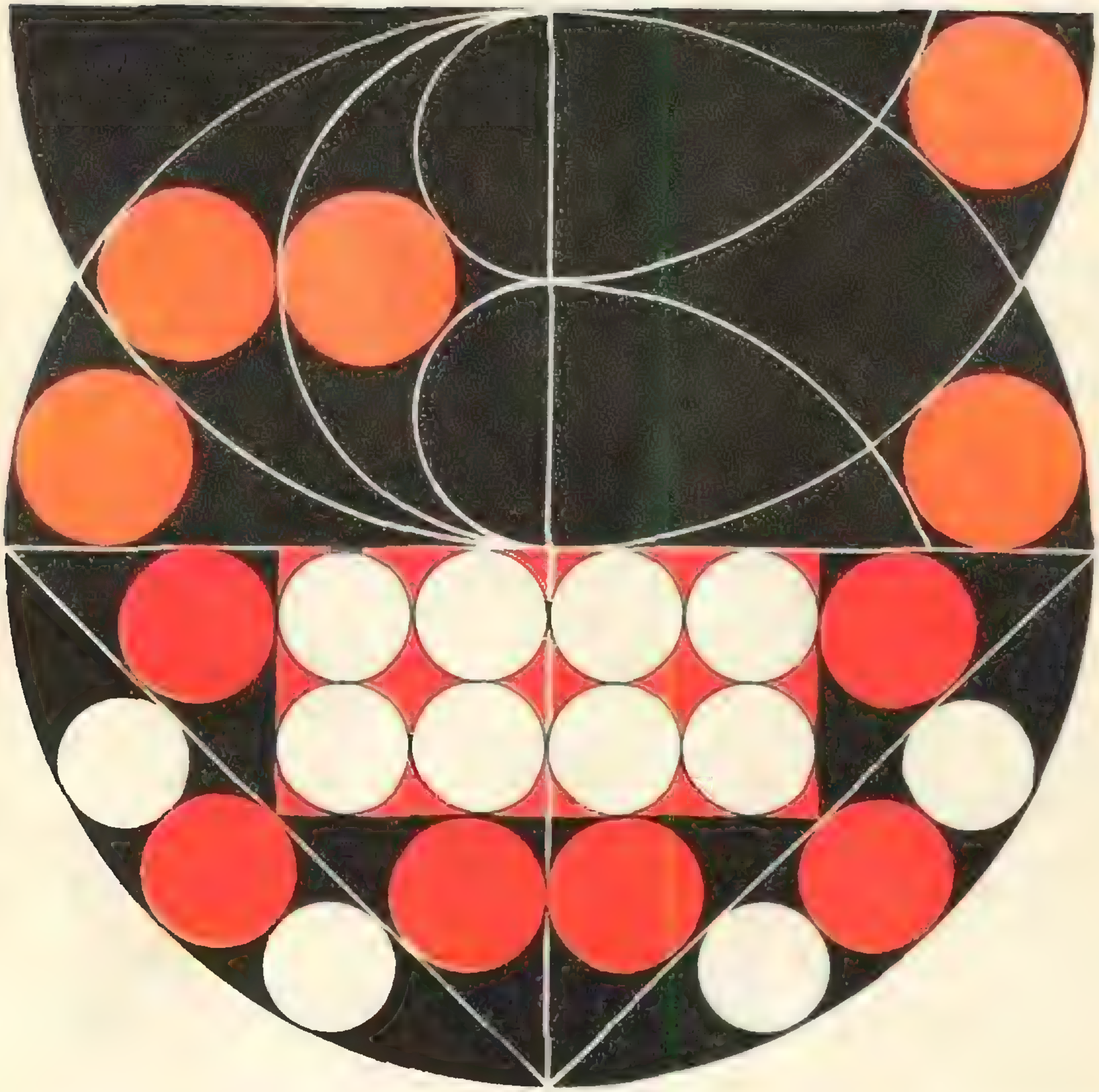
Деление ядер урана сопровождается возникновением нейтрино и антинейтрино. Захват антинейтрино протоном приводит к возникновению нескольких γ-квантов, которые дают световые вспышки в сцинтилляторе. Система фотоэлементов преобразует световые сигналы в электрические, одновременно усиливая их.

Подробнее об открытии и свойствах нейтрино вы можете прочитать в статье Б. Г. Ерозолимского (с. 10).

На первой странице обложки вы видите геометрический орнамент, сконструированный из двух семейств подобных парабол и семейств подобных квадратов. Его удается правильно раскрасить в два цвета. Подумайте над тем, какие орнаменты допускают подобную раскраску.

Цена 30 коп.
Индекс 70465

6



На этом рисунке вы видите двадцать три круга. Каждый из них определен точками касания либо с опорными окружностями и прямыми (белые на рисунке), либо друг с другом. Центры опорных окружностей лежат на вертикальном диаметре наибольшей из них. Пересечениями опорных окружностей с этим диаметром являются или крайние его точки, или его середина, или точка, делящая его в отношении 1 : 3.

Одинаково окрашенные круги кажутся конгруэнтными, не так ли? Но, может быть, зрение нас обманывает? Измерением различие между ними установить не удается. Можно ли доказать, что фигуры конгруэнтны? Об этом рассказывается на с. 21.

НОМЕР
7

Основан в 1970 году.

КВАНТ

1975

7

Научно-популярный
физико-математический
журнал
Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической
литературы

Главный редактор
академик И. К. Кикоин

Первый заместитель
главного редактора
академик А. Н. Колмогоров

Редакционная коллегия:

М. И. Башмаков,
С. Т. Беляев,
В. Г. Болтянский,
Н. Б. Васильев,
Ю. Н. Ефремов,
В. Г. Зубов,
П. Л. Капица,
В. А. Кириллин,
главный художник
А. И. Климанов,
С. М. Козел,
зам. главного редактора
В. А. Лешковцев,
Л. Г. Макар-Лиманов,
А. И. Маркушевич,
Н. А. Патрикеева,
И. С. Петраков,
Н. Х. Розов,
А. П. Савин,
И. Ш. Слободецкий,
зам. главного редактора
М. Л. Смолянский,
Я. А. Смородинский,
В. А. Фабрикант,
А. Т. Цветков,
М. П. Шаскольская,
С. И. Шварцбурд,
А. И. Ширшов.

Редакция:

В. Н. Березин,
А. Н. Виленкин,
И. Н. Клумова,
художественный редактор
Т. М. Макарова,
Н. А. Минц,
Т. С. Петрова,
В. А. Тихомирова,
зав. редакцией
Л. В. Чернова

В НОМЕРЕ:

2 Международная встреча на космической орбите

6 *Э. Г. Белага.* Узел на столе математика

21 *В. З. Кресин.* Гигантские кванты

30 *В. М. Фишман.* Решение задач с помощью геометрических преобразований

Математический кружок

36 *В. Н. Березин, В. И. Слепой.* Если треугольник задан ...

Задачник «Кванта»

40 Задачи М331—М335; Ф343—Ф347

42 Решения задач М296—М299; Ф303—Ф311, Ф299

Практикум абитуриента

53 *Г. Ю. Граковский, Ю. Д. Кабалевский, П. И. Самойленко.* Математические специальности в техникумах

55 **Вступительные экзамены в вузы**

55 *Э. А. Голубов.* Уральский государственный университет им. А. М. Горького

57 *Ю. С. Бабурин.* Куйбышевский государственный университет

58 *В. А. Тонян.* Московский институт электронного машиностроения

59 *В. С. Колпаков, Р. Н. Сахарова.* Ярославский политехнический институт

60 *Л. П. Боровских.* Новосибирский институт инженеров железнодорожного транспорта

61 *Н. Н. Карелин, И. С. Осипишин, М. А. Паленичка.* Львовский политехнический институт

63 *Ю. В. Комленко.* Ижевский механический институт

Рецензии, библиография

64 *М. П. Шаскольская.* О диффузии в кристаллах

«Квант» для младших школьников

66 Задачи

67 *А. П. Савин, Л. М. Финк.* Разговор в трамвае

71 **Ответы, указания, решения**

Смесь *(с. 20, 65, 70)*

© Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», «Квант», 1975 год.

МЕЖДУНАРОДНАЯ ВСТРЕЧА НА КОСМИЧЕСКОЙ ОРБИТЕ

Июль 1975 года навсегда войдет в историю космонавтики. В соответствии с соглашением между СССР и США о сотрудничестве в исследовании и использовании космического пространства в мирных целях на этот месяц назначен первый совместный полет по программе ЭПАС — экспериментальный полет «Аполлон» — «Союз». Важнейшим моментом этого эксперимента будет стыковка кораблей.

Стыковка и расстыковка космических кораблей — чрезвычайно важный элемент космических программ. Сегодня она необходима при доставке космонавтов на орбитальные научные станции и возвращении их на родную Землю. В будущем без нее невозможна будет сборка в околоземном пространстве сложных многоцелевых орбитальных станций, которые будут собираться из специальных блоков различного назначения, поочередно доставляемых на орбиту при помощи ракет-носителей. Она является также необходимой частью будущих полетов человека к планетам Солнечной системы. При этом космический корабль остается на удаленной от планеты орбите как базовая станция, с которой направляются к поверхности планеты возвращаемые автоматические зонды и космонавты-исследователи. Наконец, без проведения стыковки невозможно также и оказание помощи попавшим в беду экипажам космических кораблей.

И в советской, и в американской программах космических исследований было осуществлено много полетов с проведением стыковок в космическом пространстве. Однако, конструкции советских и американских кораблей сильно отличаются друг от друга и стыковка кораблей «Союз» и «Аполлон» потребовала от конструкторов и космонавтов решения дополнительных, принципиально новых задач. В связи с программой ЭПАС в Советском Союзе и США был выполнен большой объем работ по отработке новых систем и узлов космических кораблей. Космонавты проходили сложные наземные тренировки в условиях, максимально приближенных к тем, которые планируются в совместном советско-американском полете. В декабре 1974 года был проведен полет космического корабля «Союз-16». Экипаж корабля — А. В. Филипченко и Н. Н. Рукавишников — проводил в космических условиях испытание нового стыковочного агрегата, совершал маневрирования на орбите, характерные для предстоящего совместного полета с кораблем «Аполлон».

Осуществление совместного полета кораблей «Союз» и «Аполлон» — этого крупного космического эксперимента — явится важным вкладом в развитие международных научных связей, будет способствовать укреплению взаимного доверия между СССР и США и дальнейшей разрядке международной напряженности.

Мы помещаем небольшой фотоочерк о советских космонавтах, подготовленный фотокорреспондентом Агентства Печати Новости А. С. Моклецовым.

1. Центр подготовки космонавтов им. Ю. А. Гагарина. Летчики-космонавты СССР Герои Советского Союза Алексей Губарев (слева) и Георгий Гречко на одной из тренировок в макете станции «Салют».

2

3

2. Орбитальная станция «Салют». Макет станции в центре подготовки космонавтов им. Ю. А. Гагарина.

3. Испытания космического корабля «Союз» и ракеты-носителя.

4. Центр подготовки космонавтов им. Ю. А. Гагарина. Летчики-космонавты СССР Герои Советского Союза Георгий Гречко (слева) и Алексей Губарев после тренировки в орбитальной станции-тренажере «Салют».

4

5

5. Во время подготовки к полету экипажа космического корабля «Союз-12» командир корабля подполковник Василий Лазарев и бортинженер Олег Макаров проводят тренировки на море.

4-я с. обложки — центр подготовки космонавтов им. Ю. А. Гагарина. Летчик-космонавт СССР Герой Советского Союза Георгий Гречко в кабине космического корабля-тренажера «Союз».

УЗЕЛ НА СТОЛЕ МАТЕМАТИКА

Э. Г. Белага

Узел — древнейшее изобретение, намного более древнее, чем колесо, и настолько привычное, что его трудно назвать изобретением. В течение тысячелетий искусством «вязания» и «развязывания» узлов овладевали кружевницы и ткачи, матросы парусных кораблей и любители головоломок. А математическая теория узлов, раздел обширной области математики — *топологии*, возникла около ста лет тому назад. Мы расскажем о некоторых проблемах и открытиях этой красивой теории. Нашему читателю мы советуем запастись достаточно длинным куском бечевки, чтобы буквально «своими руками» проверять утверждения и решать задачи, которые встретятся в тексте.

§ 1. Мог ли Александр Македонский открыть теорию узлов?

Книги античных историков сохранили для нас легенду-притчу о том, как македонский царь Александр, проходя с войском во время своего победоносного похода в глубины Азии через персидский город, посетил храм и увидел одну из достопримечательностей Персии — узел, сплетенный мудрецом Гордием; предание гласило, что тот, кто развяжет этот узел, станет царем Вселенной. Юный царь разрубил узел мечом.

Восхищаться ли нам находчивостью Александра или сожалеть, что тем же ударом меча он лишил себя завидной возможности стать основателем теории узлов?

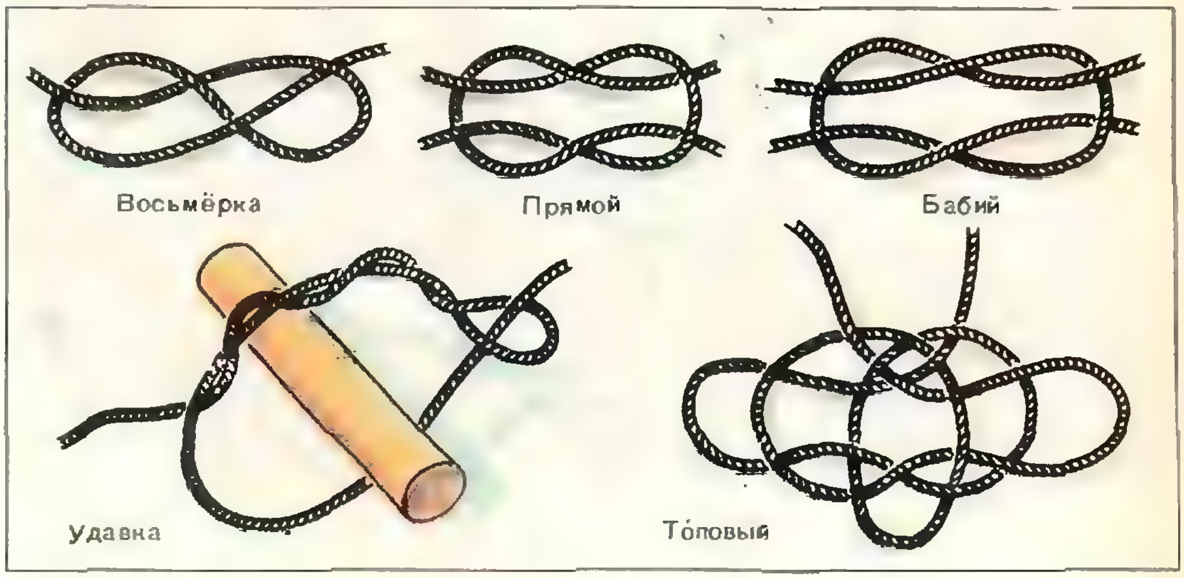


Рис. 1. Небольшая коллекция морских узлов.

Но не будем преувеличивать: даже если Александр хорошо знал античную математику (а это, скорее всего, так — воспитателем Александра был Аристотель), он, конечно, был бы удивлен, узнав, что задача, от решения которой он так по-царски уклонился, математическая. Тем более, что решена эта задача была только в наше время, около пятнадцати лет тому назад, когда был придуман метод, позволяющий по виду или описанию узла определять, развязывается данный узел или нет.

§ 2. Кунсткамера узлов

Знакомство с узлами мы начнем с морских узлов, изображенных на рисунке 1*). Концы узлов уходят за пределы рисунка и там крепятся. Однако при изучении узлов удобно считать, что свободные концы каждого из них соединены друг с другом; после такой операции привычный для нас веревочный узел с двумя торчащими или болтающимися концами превратится в плетеное веревочное кольцо.

На рисунке 2 изображены такие «абстрактные» узлы, получающиеся из некоторых морских узлов рисунка 1: *восьмерка* изображена на рисунке 2, *а*, *то́повый* узел — на рисунке 2, *б*, *прямой* и *бабий* узлы (на рисунке 1 у этих узлов по четыре конца!) превращаются либо в узлы на рисунках 2, *в* и 2, *г*, либо в *зацепления* (рис. 2, *д* и 2, *е*).

Примеры *зацеплений* изображены на рисунке 3.

В теории узлов зацепления изучаются наравне с узлами; к сожалению, из-за недостатка места мы не сможем о них рассказать.

Рисунок 4 пополняет нашу кунсткамеру новыми образцами узлов вместе с их математическими вариантами.

Наши первые впечатления об узлах приводят нас к таким определениям:

Узел — это замкнутая пространственная кривая, не имеющая точек самопересечения.

Зацепление — это совокупность двух или более попарно непересекающихся и самонепересекающихся замкнутых пространственных кривых.

Рисунки всех рассмотренных нами узлов содержат **кратные** точки — точки, в которых скрещиваются несколько участков линии, изображающей узел. Такие точки на рисунках узлов называют *точками скрещивания* — двойными, тройными

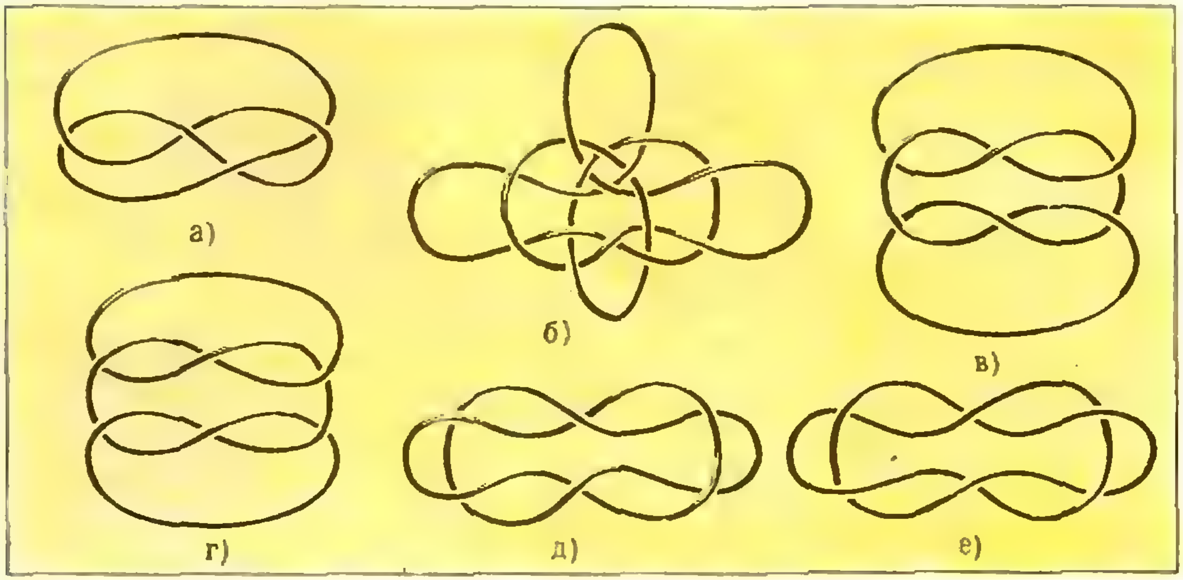


Рис. 2. Математические двойники некоторых морских узлов.

---

*) Рисунок Н. Павлинова из книги Б. Житкова «Морские истории», М., «Детская литература», 1972.

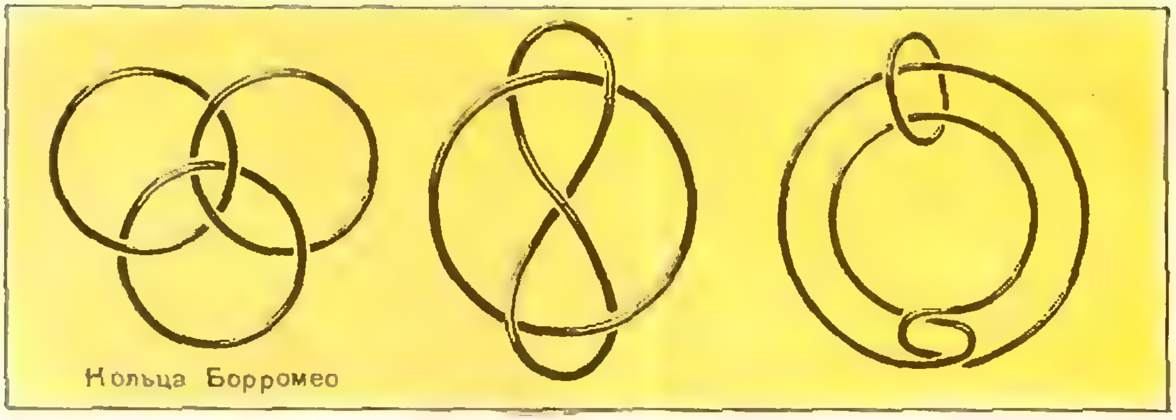


Рис. 3. Небольшая коллекция зацеплений.

или n-кратными, если в них встречаются две, три или n линий. Все точки скрещивания на рисунке 2 — двойные; это не случайно: тройных точек и точек большей кратности, а также совпадения линий и прочих «неправильностей» плоского изображения узла всегда можно избежать выбором подходящего «места», откуда мы «смотрим» на узел, когда рисуем его.

Любое плоское изображение узла, все кратные точки которого — это двойные точки скрещивания, называется диаграммой узла.

Для каждой двойной точки скрещивания на диаграмме узла нужно, конечно, указать, какая из двух пересекающихся в этой точке линий проходит «над», а какая «под» другой (обычно «нижнюю» из двух линий прерывают, как это и сделано на рисунке 2).

§ 3. Об искусстве плести узоры из веревочного кольца

Житейский опыт говорит нам, что любой, даже очень сложный узел может быть при некотором терпении развязан. Но вспомним: развязывая узел, мы, как правило, манипулируем его концами. У наших же «абстрактных» узлов концов нет, и следует ожидать, что не разрывая «веревки», из которой «связан» узел, мы не сможем развязать большинство из уже рассмотренных нами узлов.

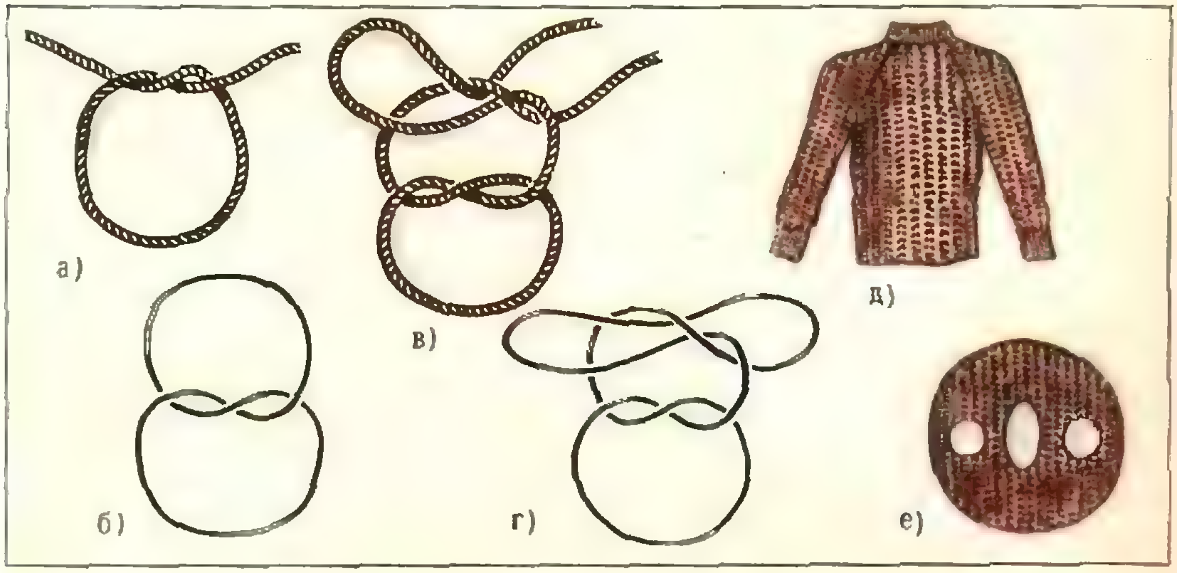


Рис. 4. Одинарный узел, «бантик» и свитер, связанный из одной нити.

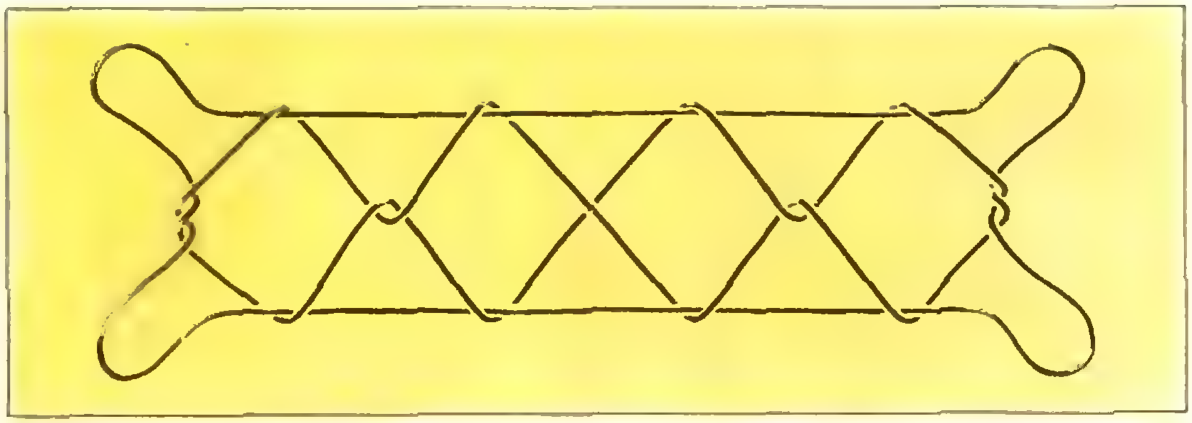


Рис. 5. «Лестница Иакова» — тривиальный узел?

Согласно определению, окружность также следует считать узлом — простейшим из всех узлов, или, как еще его называют, *тривиальным* узлом.

Рассматривая топовый узел на рисунке 1, можно заметить, что он легко развязывается, если только его петли не охватывают деталей оснастки корабля.

Упражнение 1. Покажите, что топовый узел на рисунке 2, *б* может быть распутан и превращен в окружность.

Узлы, которые, подобно топовому, могут быть развязаны, называют узлами *тривиального типа*, или просто *тривиальными*.

Большой опыт в искусстве «плетения» тривиальных (но часто весьма затейливых) узлов накоплен любителями популярной игры с веревочным кольцом. Один из таких узлов-узоров под названием *«лестница Иакова»* изображен на рисунке 5 *).

Итак, топовый узел, «лестница Иакова» и окружность — это один и тот же узел в разных обличьях. Существуют ли другие типы узлов? И как различать узлы?

§ 4. Узлы дикие и узлы ручные

Но прежде, чем пускаться в опасное плавание по неведомому нам Морю Узлов, проверим прочность нашего суденышка — определения.

Должны ли мы считать узлами замкнутые кривые, изображенные на

---

*) Способ плетения этого узла на пальцах двух рук и другие подробности об «игре в веревочку» можно найти в книге М. Гарднера «Математические досуги», М., «Мир», 1972, глава 22.

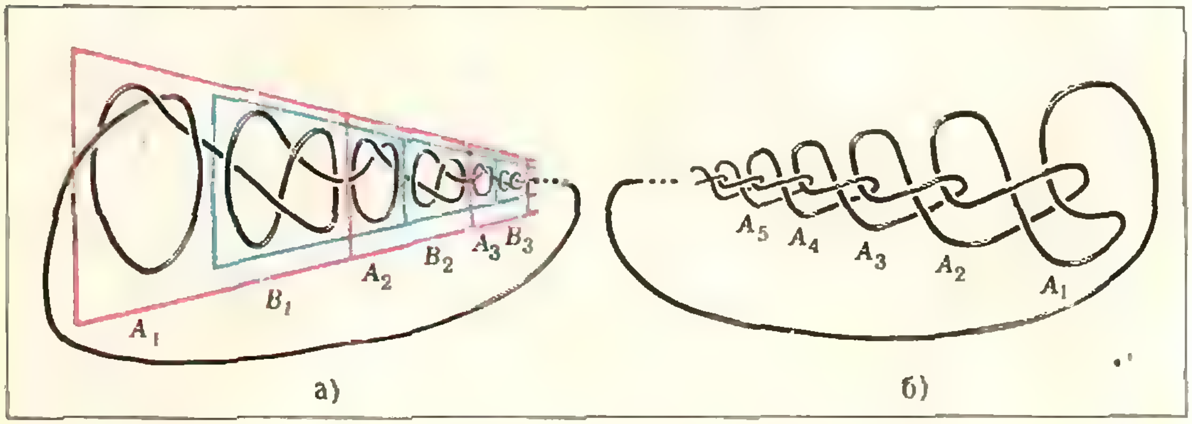


Рис. 6. Два диких узла. Цветные «рамочки» пригодятся позже.

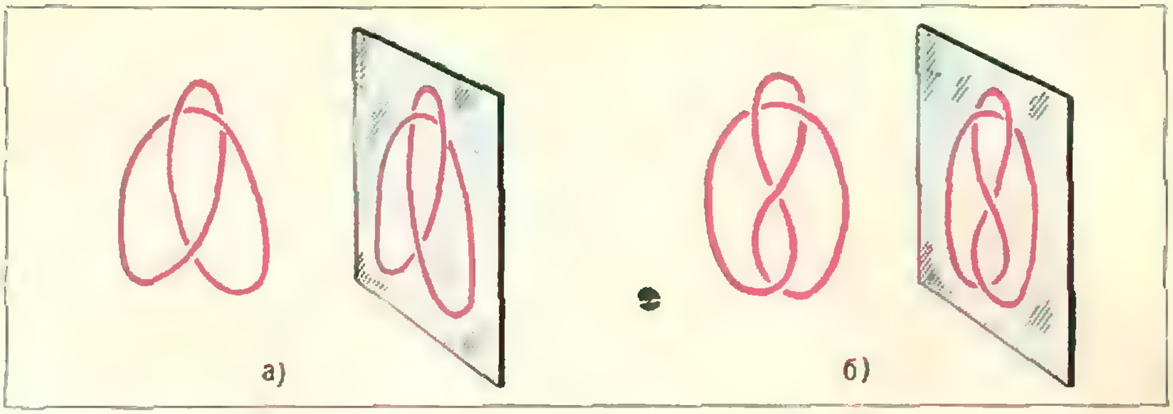


Рис. 7. Узлы перед зеркалом.

рисунках 6, *а*, *б*? И кривые ли это? Не вдаваясь в детали *), мы должны признать за этими странными конструкциями право называться кривыми, а, следовательно, и узлами. Но узлами «дикими», в отличие от «ручных», похожих на обычные веревочные узлы.

Ручной узел может быть приведен к замкнутой пространственной ломаной с конечным числом звеньев и без точек самопересечения.

Все узлы, изображенные на рисунках 2 и 4, можно считать ручными: каждый из них разбивается на конечное число «почти прямолинейных» отрезков. С другой стороны, очевидно, что узлы на рисунке 6 не ручные, такие узлы и называются *дикими*.

Дикие узлы могут обладать неожиданными свойствами; например, узел, изображенный на рисунке 6, *б* **), развязывается, но лишь после бесконечного числа последовательных операций: сначала петлю A_1 нужно *вынуть из петли* A_2, *потом петлю* A_2 — из A_3 и так далее. Развязать же этот узел в обычном смысле невозможно.

§ 5. Типы узлов можно определять по-разному

Нам хотелось бы, чтобы наша теория узлов сохранила наивное представление об «одинаково завязанных» узлах, которое есть у всех нас. Так возникает первое из двух (разных) определений *типа* узла.

Первое определение. Говорят, что два узла *изотопны*, или имеют один *изотопический тип*, если один узел можно «перевязать» в другой, не разрезая его и не допуская самопересечений.

Практически изотопность двух узлов можно иногда доказывать либо с помощью веревочного кольца, либо на серии рисунков-диаграмм. Например, как мы уже знаем, топовый узел изотопен «лестнице Иакова» и оба они изотопны окружности. Вот еще пример: *одинарный* узел (см. рис. 4, *а*, *б*) изотопен (проверьте это!) простейшему после окружности узлу, изображенному на рисунке 7, *а*. Благодаря сходству с контуром клеверного листа, этот узел называется *клеверным листом*, или *трилистником*. Нарисуйте сами узел *«двойной бантик»*; уже в возрасте двух-трех лет вы умели доказывать (потянув за свободный конец веревочки), что *«бантик»* (см. рис. 4, *в*, *г*) и «двойной бантик» изотопны одинарному узлу, а значит, и клеверному листу.

Упражнение 2. Докажите, что прямой узел (рис. 2, *в*) изотопен *сквер-узлу* (рис. 8, *а*), а бабий узел — *бабушкину узлу* (рис. 2, *г* и 8, *б*).

---

*) Строгое определение кривой потребовало бы многих страниц (см., например, книгу А. Пархоменко «Что такое линия», М., 1954).

**) Рисунок взят из книги «Введение в теорию узлов» Р. Кроуэлла и Р. Фокса, М., «Мир», 1967.

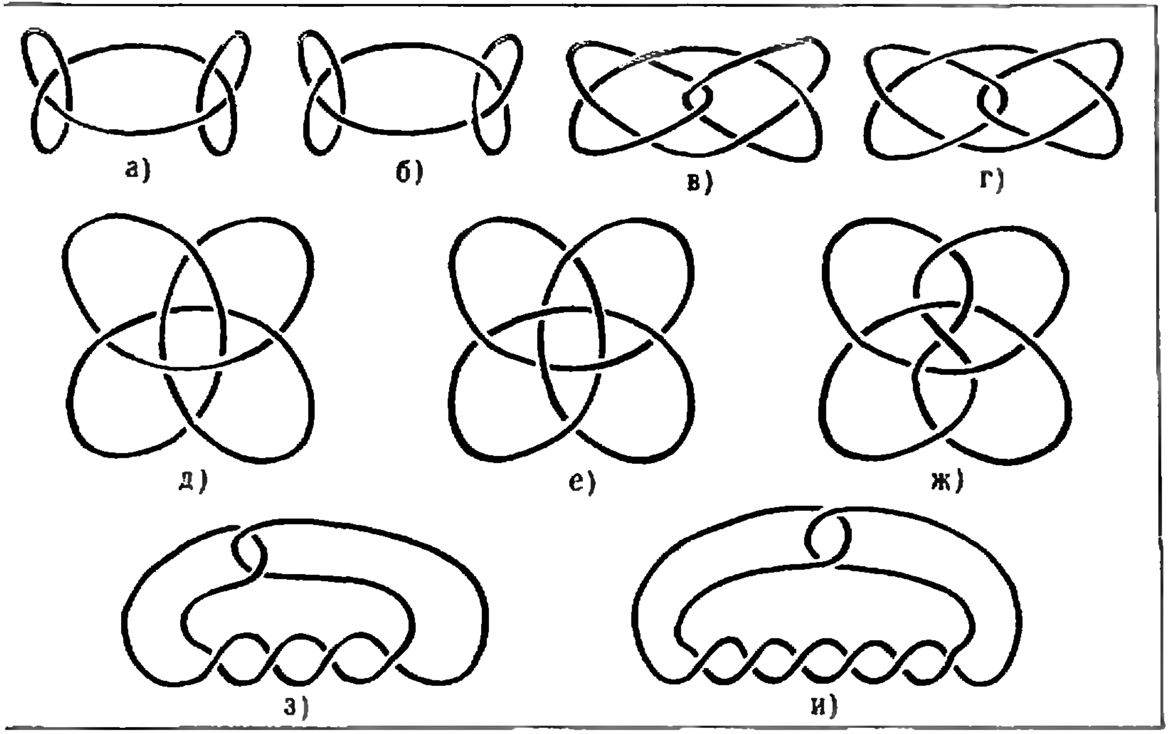


Рис. 8. Еще девять экспонатов из нашей кунсткамеры.

Второе определение. Говорят, что два узла *эквивалентны*, или имеют одинаковый *тип*, если они изотопны или если один из них изотопен зеркальному изображению второго.

Согласно этому определению, всякий узел эквивалентен своему зеркальному образу. А вот восьмерка даже изотопна!

Упражнение 3. Докажите это, «перевязав» узел на рисунке 7, *б* («левую» восьмерку) в «правую» восьмерку.

Узлы, которые, подобно восьмерке, изотопны своему зеркальному изображению, называют *зеркальными*. Существуют ли незеркальные узлы? Да: в 1914 году немецкий математик Ден, один из основателей теории узлов, доказал незеркальность клеверного листа (см. рисунок 7, *а*). Иными словами, эквивалентные узлы не всегда изотопны (изотопные же эквивалентны по определению). Хотя сквер-узел и бабушкин узел очень похожи (рис. 8, *а* и 8, *б*), они не только неизотопны, но и неэквивалентны. Строгое доказательство этого утверждения сложнее, например, доказательства нетривиальности восьмерки (или клеверного листа). Тем не менее нетрудно указать «причину» их неэквивалентности: она состоит в незеркальности клеверного листа (обратите внимание на упражнение 9 в § 8). Не эквивалентны и узлы *истинной* (рис. 8, *в*) и *ложной*, (рис. 8, *г*) *дружбы* (есть и такие!), *беседочный узел*, *турецкая чалма* и *китайская роза* (рис. 8, *д*, *е*, *ж*), *узел грузчика* и *удавка* (рис. 8, *з*, *и*).

§ 6. Инварианты узла

По каким же признакам различают узлы? Одного ощущения, что два узла «похожи» или «не похожи», мало: даже такие простые узлы, как клеверный лист и восьмерка, можно изображать и завязывать по-разному (мы уже сравнивали рисунки 4, *б*, *г* и 2, *а* с рисунками 7, *а* и 7, *б*). Для нас важны только те признаки и свойства узлов, которые не зависят от способа их реализации или изображения и которые совпадают поэтому для всех узлов одного типа.

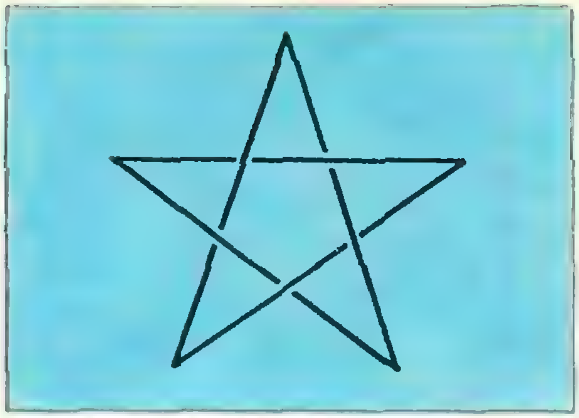


Рис. 9. Является ли этот узел замкнутой пятизвенной ломаной?

Такие признаки называют *инвариантами узла* *).

Большинство известных инвариантов определяется и вычисляется довольно сложно.

Наиболее изученный и удобный из алгебраических инвариантов — группа узла — вычисляется по совершенно точно описанным правилам, которые в принципе мог бы запомнить любой старшеклассник; однако для понимания как этих правил, так (что, конечно, важнее) и самого определения группы узла нужно знать начала топологии и высшей алгебры. Используя именно группу узла, обычно доказывают, что узел нетривиален или что два узла неэквивалентны.

Тем интереснее познакомиться с простейшими числовыми инвариантами, в том числе — с *минимальным числом скрещиваний* и *родом* узла. Для достаточно простых узлов значения этих инвариантов находятся почти сразу по диаграмме узла; но доказать, что найденное число и есть значение инварианта, как правило, очень сложно.

А. Минимальное число скрещиваний узла

Из всех диаграмм (см. § 2) узла B выберем ту, для которой число точек скрещивания минимально. Это число $M(B)$ и называется *минимальным числом скрещиваний узла* B.

Упражнение 4. 1. Докажите, что $M(A) = 0$ тогда и только тогда, когда узел A тривиален.

2. Докажите, что не существует узлов A, для которых $M(A) = 1$ или $M(A) = 2$

3. В § 5 уже упоминалось (хотя и не доказывалось), что окружность, клеверный лист и восьмерка попарно не эквивалентны. Пользуясь этим, докажите, что равенства $M(A) = 3$ и $M(B) = 4$ выполняются тогда и только тогда, когда узел A эквивалентен клеверному листу, а узел B — восьмерке. Тем самым мы получили исчерпывающие сведения об узлах с минимальным числом скрещивания, не превосходящим 4.

Б. «Изломанность» узла

В соответствии с определением ручных узлов (§ 4) представим узел A

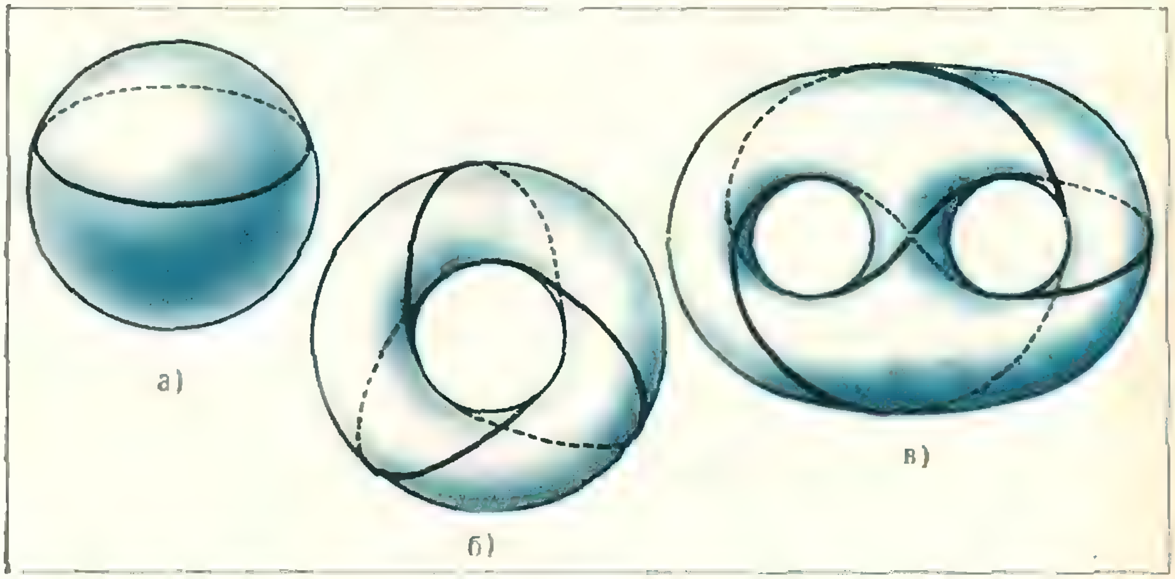

а)
б)
в)

Рис. 10. Тривиальный узел на сфере, клеверный лист на «бублике» и восьмерка на «кренделе».

---

*) Инвариант (слово латинского происхождения) — *неизменный*, не зависящий от формы.

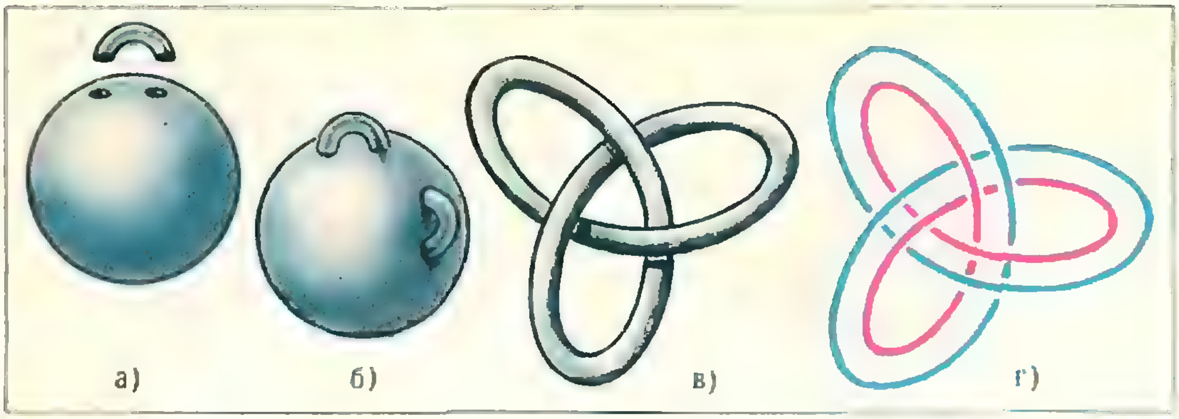


Рис. 11. Сферы с ручками и завязанный тор.

в виде замкнутой ломаной с наименьшим возможным числом звеньев. Назовем это число И (*A*) *«изломанностью»* узла *A*.

Упражнение 5. Вычислите «изломанность» узла, изображенного на рисунке 9 (ответ: восемь). Чему равна «изломанность» восьмерки? Существуют ли узлы с «изломанностью» три, четыре и пять?.

В. «Кондитерское число» узла

Из всех узлов только окружность можно нарисовать на сфере без точек самопересечения; клеверный лист можно нарисовать на *«бублике»* (торе), а для восьмерки нужен *«крендель»*; как расположить эти узлы на таких поверхностях, видно из рисунков 10, *а*, *б*, *в*.

И тор, и «крендель» получаются из гибкой сферы, к которой приклеены полые гибкие «ручки» (см. рис. 11, *а*, *б*).

Наименьшее число ручек, которые нужно приклеить к сфере, чтобы на получившейся поверхности можно было разместить узел A без точек самопересечения — числовой инвариант К (*A*) *узла A*.

Упражнение 6. Узлы, для которых К (*A*) = 1, называют *торическими*. Постройте все торические узлы с минимальным числом скрещиваний, равным 3, 5, 7.

У инварианта К (*A*) нет общепринятого названия. Мы будем называть его *«кондитерским числом»* узла. Для того чтобы определение К (*A*) стало вполне корректным, нуж-

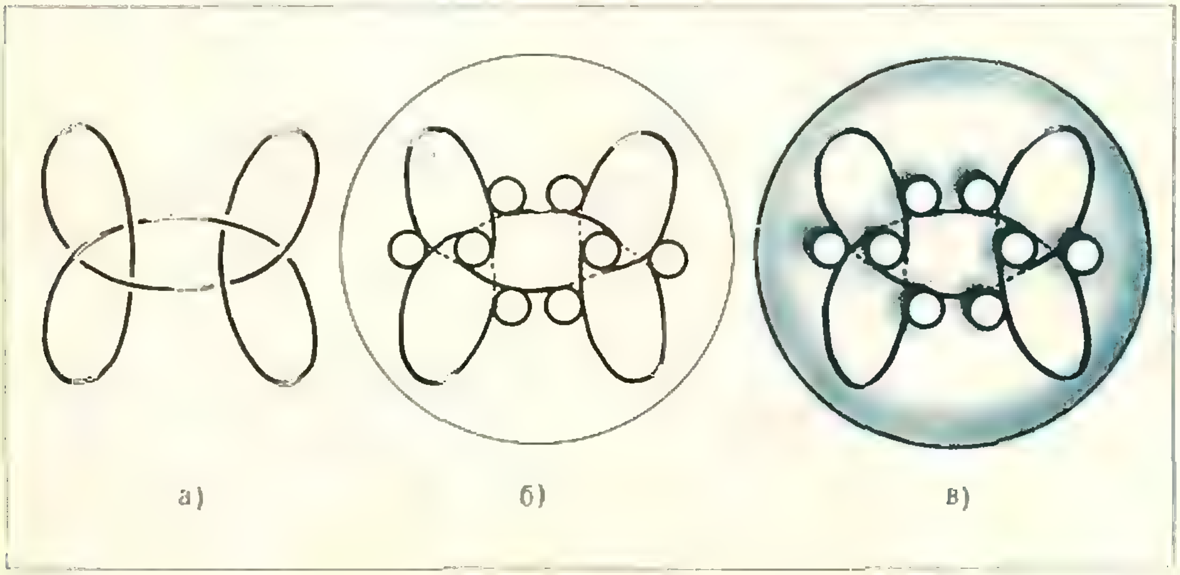


Рис. 12.

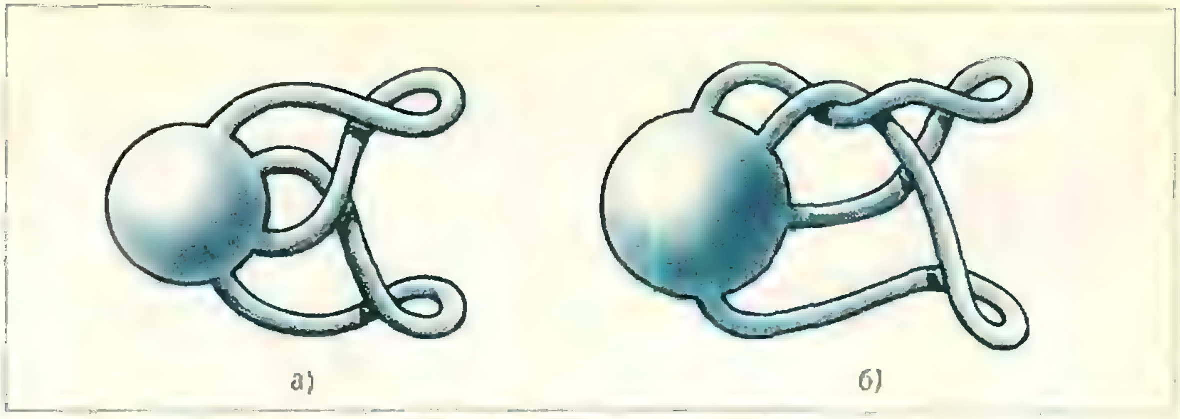


Рис. 13. «Контурные узлы» сфер с ручками.

но доказать, что для любого узла существует хотя бы одна сфера с ручками, на которой можно расположить этот узел без точек самопересечения.

Упражнение 7. Придумайте какой-нибудь способ построения такой сферы с ручками по диаграмме узла (подсказка: рисунок 12).

§ 7. Род узла — важнейший из числовых инвариантов

За простотой последнего определения кроется подвох: любой узел можно расположить на торе, стоит только «завязать» тор таким узлом! (Как это сделать, видно, например, из рисунков 11, *в*, *г*.) Следовательно, при определении «кондитерского числа» нужно условиться, что ручки сфер «не завязаны»: например, очень малы, разбросаны по поверхности сферы далеко друг от друга и имеют форму «половины бублика» (как на рисунке 11, *б*).

Напротив, при построении, пожалуй, наиболее полезного из числовых инвариантов рассматриваются как раз сферы с произвольным расположением ручек (ручки могут быть перевиты, завязаны и сцеплены); а ограничение накладывается на способ размещения узла на такой поверхности: требуют, чтобы после разрезания вдоль узла эта поверхность распадалась на две части. Ясно, например, что после разрезания тора и «кренделя» вдоль узлов на рисунках 10, *б*, *в* (проверьте это!) получается только

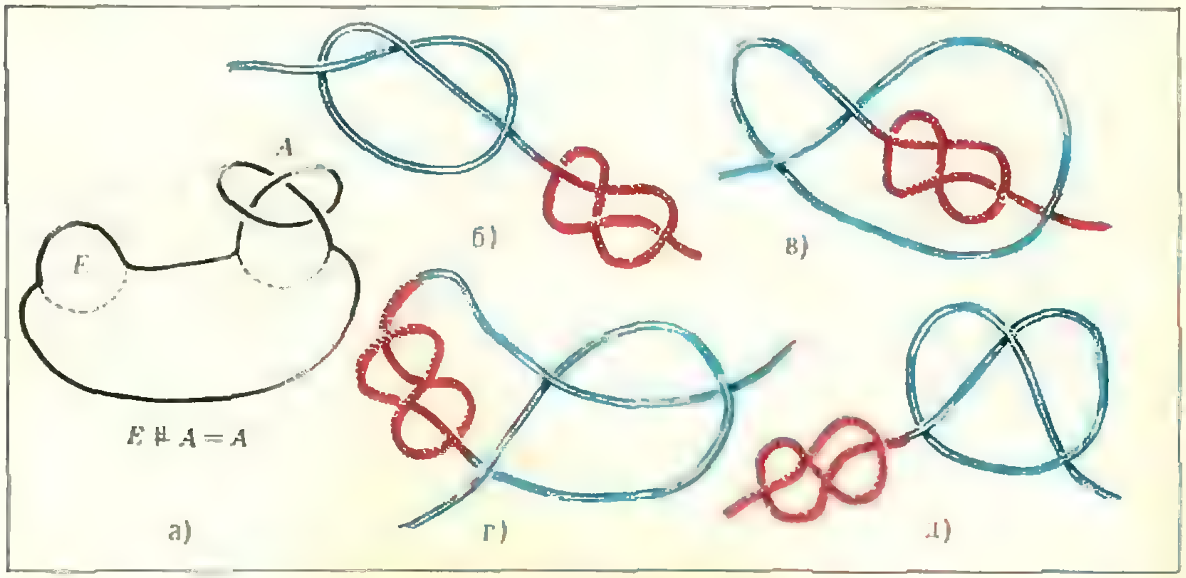


Рис. 14. От перемены мест узлов их композиция не меняется.

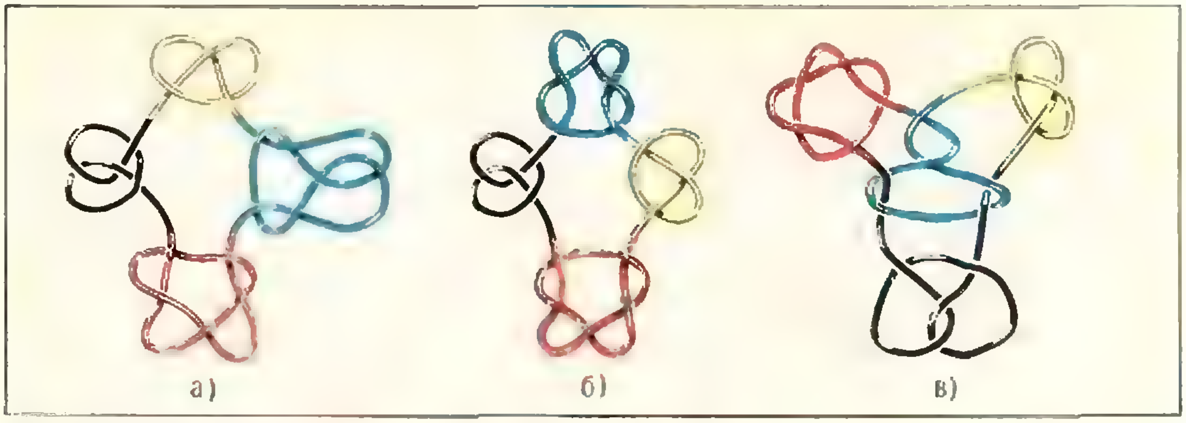


Рис. 15. Разные обличия одного узла.

один «кусок» поверхности. «Крендели» же, разрезанные вдоль узлов-контуров на рисунках 13, *а*, *б*, распадаются каждый на две части — верхнюю, обращенную к нам, и нижнюю (первый из них — это клеверный лист, а второй — восьмерка).

Род Р (*А*) *узла А — это половина наименьшего числа ручек у сферы, допускающей «разрезающее» размещение узла А.*

Упражнение 8. Докажите, что при разрезании как угодно завязанного тора вдоль любого узла на нем можно получить тольк оодин связный «кусок» поверхности. (Вместе с рисунками 13, *а*, *б*, это утверждение доказывает равенство рода клеверного листа и восьмерки единице.)

Нам нужно еще доказать возможность «разрезающего» расположения любого узла хотя бы на одной сфере с ручками; кроме того, определение наводит на мысль, что «наименьшее число ручек» всегда четно (это действительно так — см. упражнение 12 в § 10). Мы вернемся к этим вопросам в § 10, где докажем самое замечательное свойство рода узла.

§ 8. Арифметика узлов

Если два узла завязаны рядом на одной веревке, то получившийся узел называют *произведением* или *композицией* этих двух узлов.

Операция композиции узлов очень похожа на операцию умножения целых чисел.

1. *Роль «единицы» при «умножении» двух узлов, очевидно, играет тривиальный узел — окружность.* Обозначив его буквой E, а композицию двух узлов A и B через $A \# B$, получим $A = E \# A = A \# E$ (см. рис. 14, *а*).

2. *Композиция — коммутативная операция:*

$$A \# B = B \# A.$$

Это легко доказать, протащив по веревке один узел «сквозь» другой (см., например, рис. 14, *б*—*д*).

Упражнение 9. Сквер-узел и бабушкин узел можно разложить в композицию двух узлов. Как это сделать и какая разница между этими двумя разложениями?

Коммутативность композиции часто бывает удобно использовать для доказательства изотопности узлов; например, три узла на рисунках 15, *а*, *б*, *в* изотопны, так как ... Но вам будет интереснее понять это самостоятельно.

Композицию узлов можно было бы определить и так, как ее понимают дети — любители завязывать узлы покрепче, как правило, на шнурках от собственных туфель: сначала завязывается один узел, на него второй, затем третий и так далее.

Упражнение 10. Используя идею «перемещения» узла по веревке, докажите, что такой сложный узел изотопен композиции составляющих его узлов. Иными словами, новое определение композиции по существу совпадает со старым.

3. Узел B *делит* узел A, если найдется такой узел C, что

$$A = B \# C.$$

Подобно единице, тривиальный узел делится только сам на себя.

Иначе, никакой нетривиальный узел *нельзя развязать, завязав рядом с ним другой*.

Это очевидное на первый взгляд утверждение нуждается в доказательстве. Вот идея одного из возможных доказательств: предположим, что $A \# B = E$; завяжем последовательно бесконечное число пар узлов A и B. Мы получим дикий узел, изображенный на рисунке 6, *а*. Он легко развязывается — для этого достаточно внутри всех красных трапеций одновременно развязать бесконечное число пар A_k, B_k (вспомним, что $A_k = A$, $B_k = B$ и $A \# B = E$). Если же мы также одновременно развяжем все пары (B_1, A_2), (B_2, A_3), ... внутри синих трапеций, то получим узел A_1 $(=A)$; следовательно, он развязывается! Итак, $A = E$, а значит, и $B = E$.

4. Узел называется *простым*, если он нетривиален и делится только на тривиальный узел и на узлы, изотопные ему самому.

Подобно простым числам, *существует бесконечное число простых узлов*. Подробнее о простых узлах мы расскажем в § 9.

5. Как и натуральное число, *любой нетривиальный узел представим в виде композиции конечного числа простых узлов, причем такое представление единственно*.

Доказательства свойств 4 и 5 найдены сравнительно недавно — в 1949 году (о разложимости узла на простые узлы рассказано в следующем параграфе; единственность такого представления мы не доказываем).

§ 9. О простых узлах

Существование простых узлов было доказано более чем через двадцать лет после того, как простейшие из них были собраны и систематизированы; в 1926 году американские математики Александер (один из основателей теории узлов) и Бриггс опубликовали таблицу диаграмм узлов (в те времена их еще не называли простыми), аналогичную таблицам простых чисел*) (с. 17). Место узла в таблице определяется, прежде всего, его минимальным числом скрещиваний, а среди узлов с одинаковым таким числом — прежде всего, «кондитерским числом» узла, а затем уже другими, нам пока незнакомыми инвариантами.

Упражнение 11. Найдите все простые узлы на рисунках 2 — 8 и их диаграммы в таблице. Вычислите значения инвариантов М, И, К, и Р для этих узлов.

В основе доказательств как существования простых узлов, так и разложимости любого нетривиального узла на конечное число простых лежит замечательное свойство рода узлов: *род композиции двух узлов равен сумме родов «сомножителей»*, то есть:

$$\mathrm{P}(A \# B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B).$$

Мы расскажем об этом свойстве в § 10, а сейчас дважды воспользуемся им.

1°. Итак, рассмотрим нетривиальный узел A. Если он простой, то существование простых узлов уже доказано, как доказана и разложимость узла A на конечное число простых. В противном случае разложим A на композицию двух узлов, затем разложим, если это возможно, каждый из узлов-«сомножителей» и так далее. Не более чем через $(\mathrm{P}(A) - 1)$ шагов мы получим нужное нам разложение — род каждого из (нетривиальных!) «сомножителей» не меньше 1, а сумма их всех равна $\mathrm{P}(A)$.

2°. Дадим теперь предельно короткое доказательство утверждения *«никакой нетривиальный узел нельзя развязать, завязав рядом с ним другой»* (см. § 8, свойство 3). Действительно, если $A \# B = E$, то $\mathrm{P}(A \# B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) = 0$, так что $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(B) = 0$, а значит, и $A = B = E$.

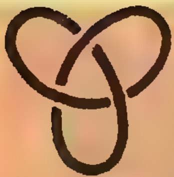
§ 10. Род и композиция

Прежде чем переходить к доказательству равенства $\mathrm{P}(A \# B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)$, вернемся к замечанию, сделанному в конце § 7, и попытаемся устранить пробелы в определении рода узла.

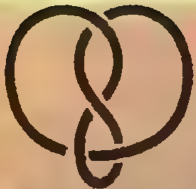
Итак, покажем, что для данного узла всегда найдется хотя бы одна

---

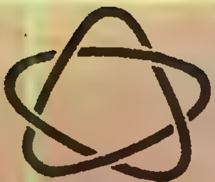
*) Таблица позаимствована из первой книги по теории узлов, «Knotentheorie» K. Reidemeister, 1932



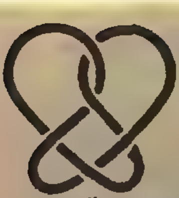
3_1



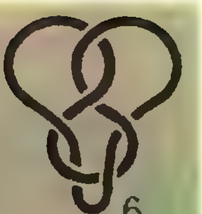
4_1



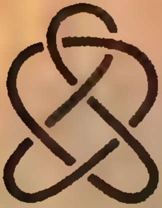
5_1



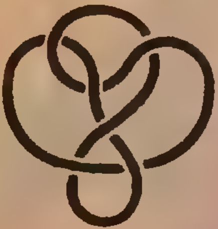
5_2



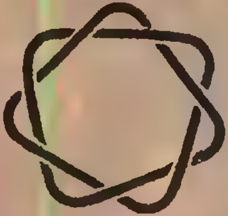
6_1



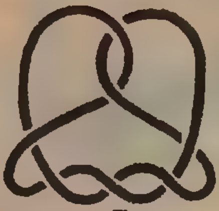
6_2



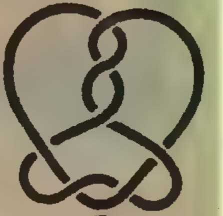
6_3



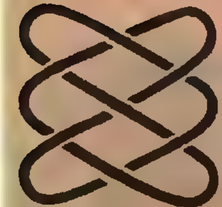
7_1



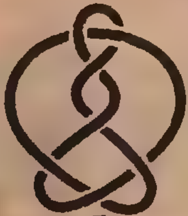
7_2



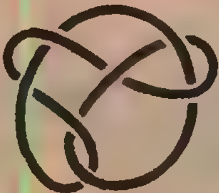
7_3



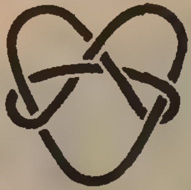
7_4



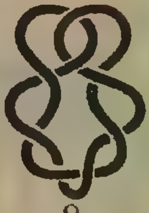
7_5



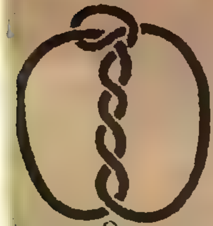
7_6



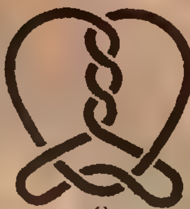
7_7



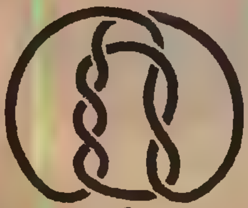
8_1



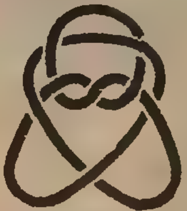
8_2



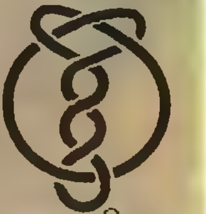
8_3



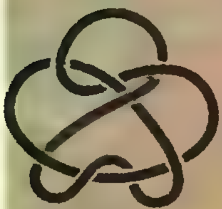
8_4



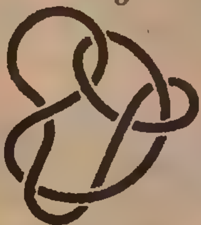
8_5



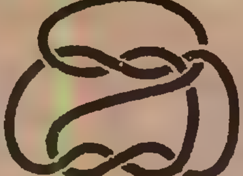
8_6



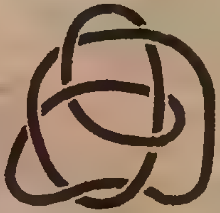
8_7



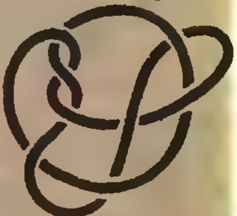
8_8



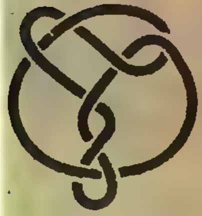
8_9



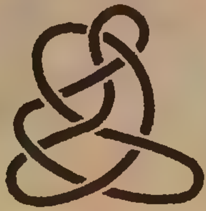
8_{10}



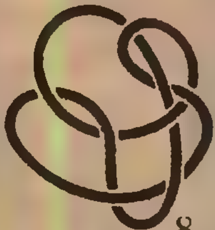
8_{11}



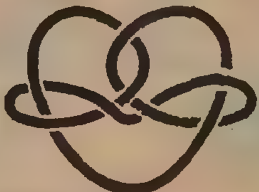
8_{12}



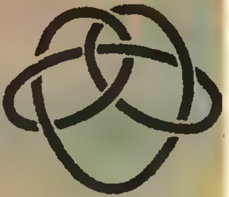
8_{13}



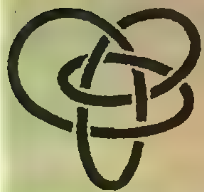
8_{14}



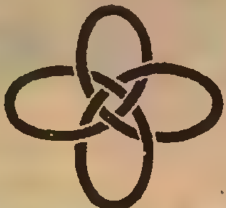
8_{15}



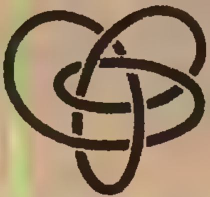
8_{16}



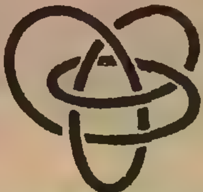
8_{17}



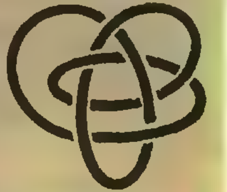
8_{18}



8_{19}



8_{20}



8_{21}

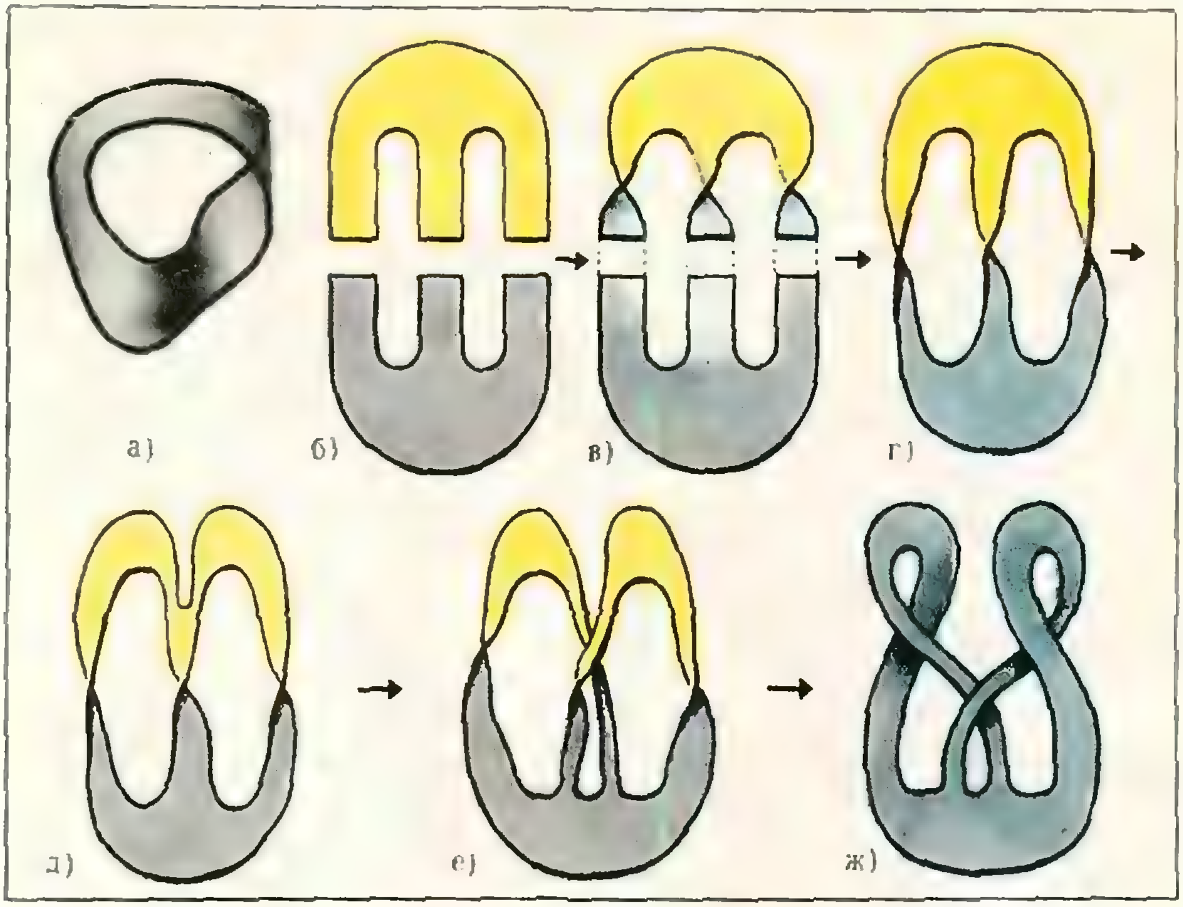


Рис. 16. Двусторонняя пленка, натянутая на клеверный лист и раскрашенная с каждой стороны в свой цвет.

сфера с ручками, на которой можно расположить этот узел так, чтобы он разбивал всю поверхность на два «куска». Возьмем наш узел и «натянем» на него двустороннюю поверхность (как мыльную пленку на проволочный каркас); один из способов такого «натягивания» описан в 9-й главе уже упоминавшейся книги М. Гарднера (см. сноску на с. 9). Как это проделать, например, для клеверного листа, видно из рисунков 16, *б—ж*.

Замечание. Не всегда поверхность, край которой есть некий узел, будет двусторонней: *лист Мебиуса* на рисунке 16, *а* — пример *односторонней* поверхности, натянутой на тривиальный узел!

Будем считать, что пленка, которую мы «натянули» на узел — *двойная* (в том смысле, в котором употребляется выражение «двойной лист бумаги»), со склеенными вдоль узла краями, то есть некое подобие спущенного воздушного шарика. Раздуем теперь этот «воздушный шарик»; мы получим сферу с ручками, на которой «нарисован» наш узел. Если разрезать «шарик» вдоль узла, то он распадется на две пленки, из которых он был склеен.

Упражнение 12. Введем понятие *«окантованной сферы с ручками»*: на сфере мы располагаем «кант» по экватору, на каждой ручке — по двум противоположным образующим, и приклеиваем ручки, соединяя концы канта на сфере и на ручках (ручки могут перекручиваться, как на рис. 13, *а*, *б*). Докажите, что если узел разрезает сферу с наименьшим возможным числом ручек, то этот узел можно реализовать как кант для нашей сферы (иллюстрацией могут служить рисунки 16, *д* — *ж*).

Упражнение 13. Докажите, что кант сферы с нечетным числом ручек, «разрезающий» эту сферу на два куска, всегда будет не узлом, а зацеплением.

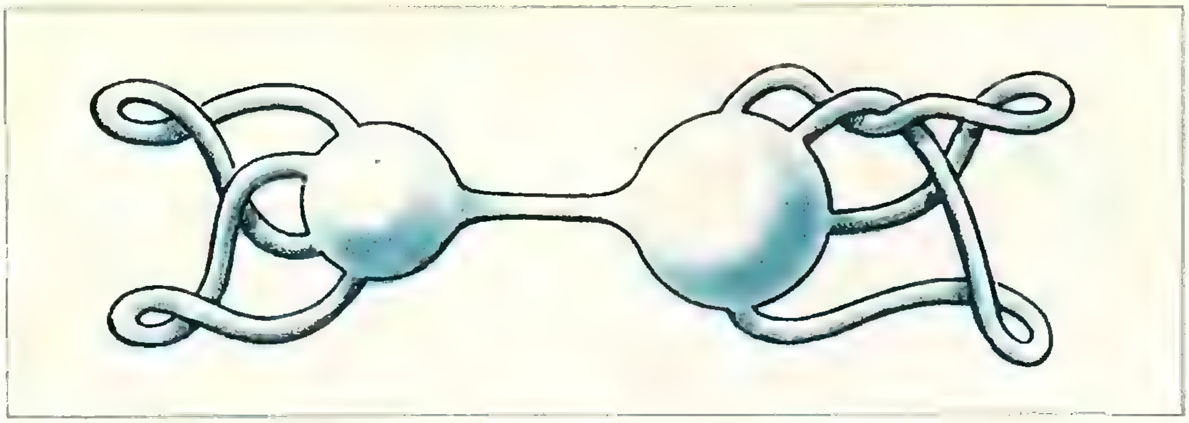
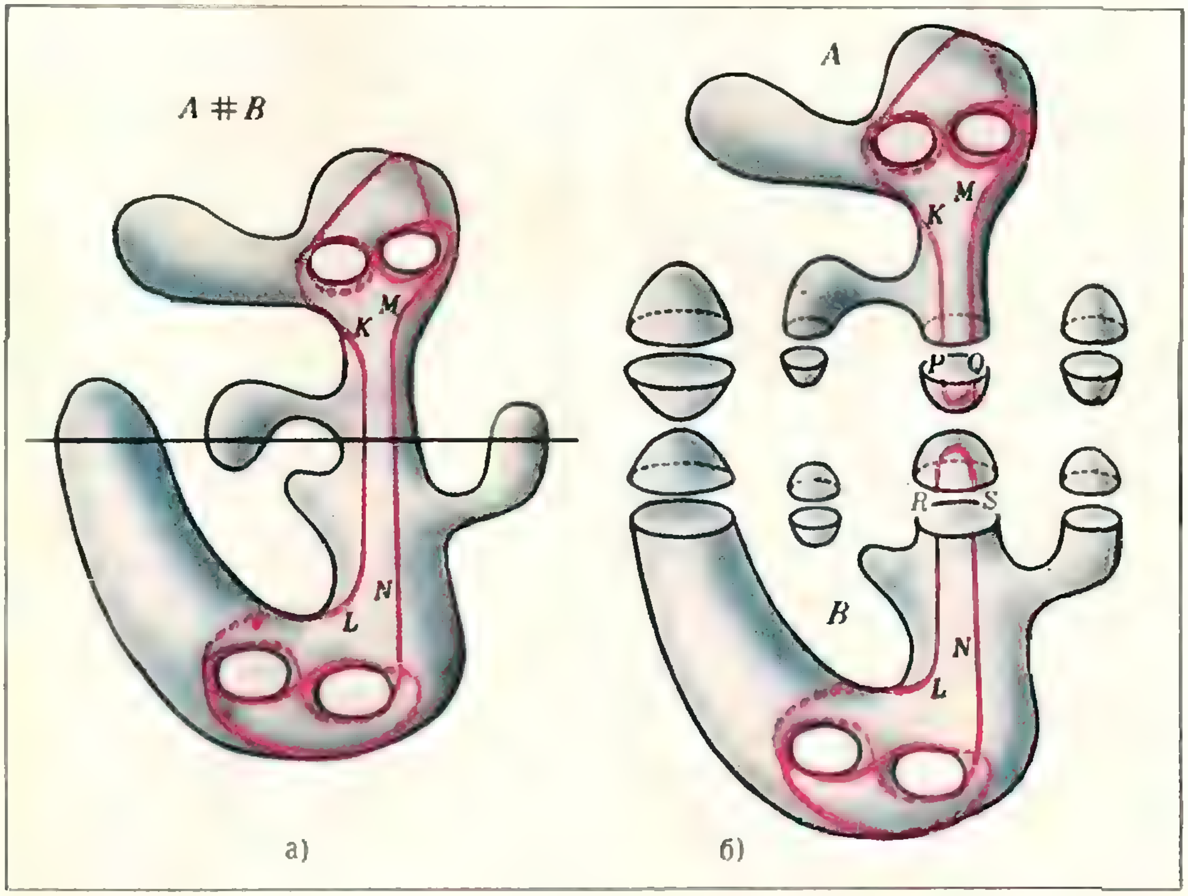


Рис. 17. Как склеивают сферы с ручками.

Из упражнений 12 и 13 следует, что род любого узла — целое число.

Устранив неясности в определении рода узла, докажем теперь равенство рода композиции двух узлов сумме родов компонент.

Нетрудно доказать неравенство $\mathrm{P}(A \# B) \leqslant \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)$: возьмем две сферы с $2\mathrm{P}(A)$ и $2\mathrm{P}(B)$ ручками и расположенными на них «разрезающими» узлами A и B, и соединим сферы в «гантель» с $2(\mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B))$ ручками так, чтобы узлы образовали композицию $A \# B$ (см., например, рис. 17). Очевидно, что узел $A \# B$ разрезает «гантель».



а) б)

Рис. 18. Как из одной поверхности с узлом $A \# B$ «скроить» две поменьше с узлами A и B

Упражнение 14. Докажите подобным образом неравенства

$$\mathrm{M}\,(A \# B) \leqslant \mathrm{M}\,(A) + \mathrm{M}\,(B),$$
$$\mathrm{K}\,(A \# B) \leqslant \mathrm{K}\,(A) + \mathrm{K}\,(B).$$

Неравенство же $\mathrm{P}\,(A \# B) \geqslant \mathrm{P}\,(A) + \mathrm{P}\,(B)$ доказать сложнее (для инвариантов М и К аналогичное неравенство выполняется не всегда).

Рассмотрим сферу с $2\mathrm{P}\,(A \# B)$ ручками и «разрезающим» узлом $A \# B$ на ней.

По определению композиции, мы всегда можем «растащить» узлы A и B на значительное расстояние друг от друга, например, так, чтобы они объединялись в композицию посредством двух соединяющих их параллельных отрезков (KL и MN на рисунке 18, *а*); одновременно нам придется «растянуть» и исходную сферу с ручками.

Проведем теперь плоскость, разделяющую узлы A и B. Эта плоскость рассекает сферу с ручками, во-первых, по «трубке», вдоль которой проходят два отрезка, связывающих узлы (докажите, что эти отрезки действительно проходят по одной трубке, а не по двум разным!); заклеим образовавшиеся два отверстия «заплатами» с нарисованными на них дугами, замыкающими каждый из узлов (дуги PQ и RS на рисунке 18, *б*). Во-вторых, плоскость может «случайно» вырезать «дыры» в тех частях сферы с ручками, которые не содержат линий узла; заклеим «заплатами» (на этот раз без нарисованных дуг) и эти «дыры».

Очевидно, что каждый из получившихся узлов A и B расположен на своей сфере с ручками и разрезает ее, причем сумма чисел ручек каждой из этих сфер не больше числа ручек исходной сферы, то есть $\mathrm{P}\,(A \# B) = \mathrm{P}\,(A) + \mathrm{P}\,(B)$, что и требовалось.

Упражнение 15. Попытайтесь тем же способом доказать неравенство $\mathrm{K}\,(A \# B) \geqslant \mathrm{K}\,(A) + \mathrm{K}\,(B)$.

Вот мы и закончили наше нелегкое путешествие. Если вы хотите продолжить его — путеводителем вам послужит интересная (хотя и трудная) книга Кроуэлла и Фокса.

Алгебраические задачи

1. Доказать, что $x^{13} - 1 = (x - 1)(x^6 - ax^5 + 2x^4 + bx^3 + 2x^2 - ax + 1) \times (x^6 - bx^5 + 2x^4 + ax^3 + 2x^2 - bx + 1)$, где a и b — корни квадратного уравнения $z^2 + z - 3 = 0$. Найти аналогичное разложение для $x^{17} - 1$, выбрав в качестве a и b корни квадратного уравнения $z^2 + z - 4 = 0$.

2. Пусть α, β, γ — корни кубического уравнения $x^3 + bx + c = 0$. Составить уравнение, имеющее корни $\alpha(\beta - \gamma)^2$, $\beta(\gamma - \alpha)^2$, $\gamma(\alpha - \beta)^2$.

3. Доказать, что при любом натуральном значении r числа

$$N_1 = r^{r+1} - 2r^r + 1,$$
$$N_2 = 2r^{r-2} - r^{r-3} - 1$$
$$(r > 2),$$
$$N_3 = r^{r+1} - 2r + 1,$$
$$N_4 = r^{r-2} + r - 2$$

делятся нацело на $(r - 1)^2$, а числа N_1 и N_2 делятся нацело на $(r-1)^3$, если r четно.

4. Доказать, что если $(x + y)(x + z) = bcyz$, $(y + z)(y + x) = acxz$, $(z + x)(z + y) = abxy$, то $a + b + c = abc + 2$ или $a + b + c = abc - 2$.

5. Доказать, что если $x+y+z=0$, $\dfrac{x^2}{a} + \dfrac{y^3}{b} + \dfrac{z^2}{c} = 0$, $ayz + bzx + cxy = 0$, то $(b + c - a)(a + c - b)(a + b - c) = abc$.

6. Пусть натуральное число D таково, что при обращении дроби $\dfrac{1}{D}$ в десятичную получается чисто периодическая дробь, имеющая p цифр в периоде. Обозначим через $N(n, m)$ натуральное число, десятичная запись которого состоит из m групп вида 00...01, причем в каждой группе $n - 1$ нуль (в самой левой группе нули опускаются). Доказать, что если n делится на p, то $N(n, m)$ делится на D в том и только том случае, когда m делится на D.

Н. В.

В. З. Кресин

ГИГАНТСКИЕ КВАНТЫ

Квантовая теория и физика низких температур возникли почти одновременно, в начале этого столетия. На первых порах они развивались независимо друг от друга, но в дальнейшем обнаружилась глубокая связь этих «ровесников». Прежде всего, стало ясно, что без квантовой физики невозможно объяснить явления, наблюдаемые при низких температурах. В дальнейшем, и особенно в последние годы, физика низких температур сама внесла важный вклад в квантовую теорию.

Квант — фундаментальное понятие современной физики. Важность этого понятия подчеркнута и названием журнала, который вы читаете в данный момент. Одно из основных положений квантовой физики состоит в том, что целый ряд физических величин, таких как энергия, импульс и др., в определенных условиях квантуются, то есть могут принимать только дискретный ряд значений. Но до недавнего времени считалось, что квантование касается только микромира, то есть оно свойственно процессам, происходящим в атомах, атомных ядрах и т. п. Действительно, при изучении макроскопических объектов мы имеем дело с громадным числом частиц. И хотя поведение каждой отдельной частицы описывается законами квантовой физики, в целом в макроскопическом образце квантование энергии, импульса и других физических величин не проявляется из-за хаотического теплового движения частиц. Квантовые эффекты как бы усредняются, «сходят на нет». Таким образом, тепловое движение атомов маскирует квантовые закономерности. Однако изучение некоторых явлений, наблюдаемых при температурах, близких к абсолютному нулю, показало, что возможно и макроскопическое квантование, то есть квантование величин, характеризующих макроскопические объекты, размеры которых в сотни тысяч раз больше атомных. Вблизи абсолютного нуля, когда тепловое движение не играет значительной роли, оказывается возможным непосредственное наблюдение квантовых закономерностей.

О двух явлениях макроскопического квантования и пойдет речь в этой статье.

Квантование магнитного потока

Вначале мы обратимся к явлению сверхпроводимости. Сверхпроводники, как известно, замечательны тем, что в них при некоторой температуре (она называется критической и обозначается $T_к$) исчезает электрическое сопротивление. Это явление было открыто в 1911 году голландским ученым Камерлинг-Оннесом. Но природа сверхпроводимости стала понятной спустя почти полвека, в 1957 году, когда, наконец, была построена теория сверхпроводимости.

В этой статье мы не будем останавливаться на объяснении сверхпроводимости, а расскажем о некоторых явлениях, наблюдаемых в мире сверхпроводников, явлениях, в которых, пожалуй, наиболее ярко проявляются законы квантовой физики.

Начнем со следующего простого эксперимента. Возбудим в металлическом кольце электрический ток (например, используя электромагнитную индукцию). При комнатных температурах ток в кольце будет быстро затухать. Протекание тока сопровождается тепловыми потерями, и эти потери приводят к затуханию тока.

Совершенно иная картина наблюдается в случае, когда температура близка к абсолютному нулю и металл является сверхпроводником. При этих условиях однажды наведенный ток становится незатухающим. В одном из опытов ток циркулировал в сверхпроводящем кольце 2,5 года, и если бы эксперимент не прекратили, мог бы циркулировать сколь угодно долго.

На первый взгляд описанная картина незатухающего тока в сверхпроводящем кольце кажется легко объяснимой. В самом деле, в сверхпроводниках ток течет без всякого сопротивления. В них нет джоулевых потерь. Поэтому не теряющие свою энергию электроны и могут сколь угодно долго двигаться по кольцу.

Однако дело обстоит значительно сложней. Конечно, тепловые потери в сверхпроводнике отсутствуют. Тем не менее картина остается загадочной и совершенно необъяснимой с точки зрения классической физики.

Рассмотрим этот вопрос подробнее. Движение электронов, образующих ток в кольце, не является равномерным. Электроны движутся по окружности и, следовательно, с ускорением. Но ускоренное движение электрического заряда всегда сопровождается излучением электромагнитных волн *). Должны излучать электромагнитные волны и электроны, движущиеся с центростремительным ускорением в рассматриваемом металлическом кольце. Постепенный расход энергии на излучение и должен привести, даже в отсутствие тепловых потерь, к затуханию тока в кольце.

Но опыт (а именно он является главным судьей, определяющим правильность всякого теоретического рассмотрения) показывает, что ток не затухает и может циркулировать в сверхпроводящем кольце сколь угодно долго.

В истории физики уже возникала подобная задача.

В 1911 году Резерфорд, основываясь на своих классических опытах по рассеянию α-частиц, создал планетарную модель атома. Он предположил (сейчас мы настолько привыкли к планетарной модели, что слово «предположил» звучит даже странно), что атом состоит из ядра и электронов, вращающихся вокруг него по круговым орбитам.

Основная трудность планетарной модели атома была связана с ускоренным характером движения электронов вокруг ядра. Движущийся с центростремительным ускорением электрон должен излучать электромагнитные волны, при этом энергия его должна уменьшаться, а это должно привести к падению его на ядро. Иными словами, из основных положений физики электромагнитных явлений следует вывод о неустойчивости планетарной модели атома. Но ведь в действительности атомы устойчивы.

Исследование этой фундаментальной трудности, стоявшей на пути признания планетарной модели атома, привело к созданию квантовой теории Бора. Согласно постулатам Бора существуют избранные орбиты, при движении по которым электрон не излучает электромагнитные волны.

Одной из величин, которые характеризуют движение электрона по круговой орбите, служит момент импульса электрона, или орбитальный момент. Моментом импульса электрона, вращающегося по круговой орбите, называется произведение его импульса $p = mv$ на радиус орбиты r: $l = mvr$. Нильс Бор постулировал, что электрон в атоме может двигаться только по таким орбитам, на которых его момент импульса кратен величине $\hbar$, то есть

$$mvr = n\hbar,$$

n — целое число ($n = 1, 2, 3, \ldots$).

На каждой из таких орбит электрон обладает вполне определенной энергией. Иными словами, в квантовой теории атома момент импульса и энергия электрона могут принимать лишь дискретный ряд значений.

---

*) Рекомендуем вам прочитать статью М. И. Каганова «Электрон движется с трением» в «Кванте», 1974, № 12.

Бор сохранил планетарную модель атома и пришел к выводу, что в микромире действуют законы, радикально отличающиеся от законов, установленных физиками при изучении обычного окружающего нас макромира.

Вернемся теперь к рассказу о сверхпроводящем кольце, в котором циркулирует незатухающий электрический ток. Излучение электромагнитных волн в этом случае не возникает по той же причине, по которой не излучает электрон, двигаясь вокруг атомного ядра. В обоих случаях *основную роль играют законы квантовой физики*. Но если при изучении свойств атома мы сталкиваемся с квантованием в микромире, который мы не можем наблюдать непосредственно, то сверхпроводимость дает пример квантования непосредственно наблюдаемой нами макроскопической величины — силы тока.

Оказывается, сила тока в сверхпроводящем кольце не может принимать любое численное значение и изменяться непрерывно. Для всего электронного коллектива, движущегося в таком кольце, возникает гигантская «боровская» орбита. Аналогично тому, *как в планетарной модели атома* разрешенные орбиты электрона характеризуются определенными значениями момента импульса и энергии, гигантские орбиты электронов в сверхпроводящих кольцах характеризуются вполне определенными значениями силы тока.

Поскольку сверхпроводящий ток тесно связан с магнитным полем (см. рис. 1), квантование тока приводит к тому, что индукция B поля может принимать только дискретный ряд значений. Следовательно, будет квантоваться и магнитный поток $\Phi = \pi r^2 B$ через сечение сверхпроводящего кольца. *Иными словами*, магнитный поток Φ может быть кратен некоторой минимальной порции — кванту магнитного потока Φ_0, то есть $\Phi = N\Phi_0$, где N — целое число. Магнитный поток — макроскопическая величина, и возможность его квантования означает переход к гигантским по сравнению с атомными масштаба квантования.

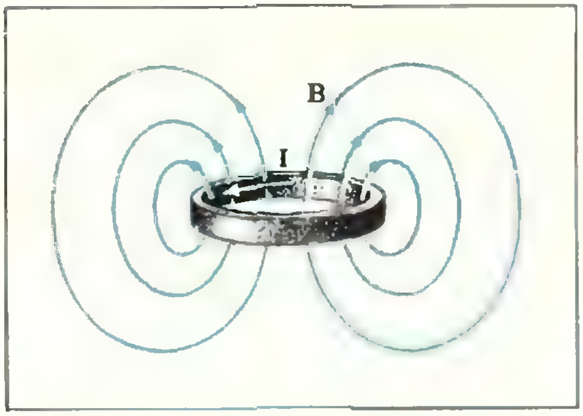


Рис. 1.

Эксперимент, в котором наблюдалось квантование магнитного потока, был проведен американскими физиками Б. Дивером и В. Фэрбенком в 1961 году. На медную проволоку диаметром $1{,}3\cdot 10^{-3}$ см наносился по всей поверхности тонкий слой олова. Таким образом, получался «полый» цилиндр из олова, и в этом цилиндре при температурах ниже $T_к = 3{,}8$ К (при $T < 3{,}8$ К олово становится сверхпроводником) возбуждался сверхпроводящий ток. (Медь не *является сверхпроводником, и поэтому* она играла роль остова, необходимого для приготовления сверхпроводящего цилиндра. В дальнейшем поэтому мы будем говорить только об оловянном цилиндре. В нем и циркулировал незатухающий ток.) Для измерения магнитного потока в полости, окруженной этим током, у одного из концов цилиндра помещалась индукционная катушка. Цилиндр приводился в колебательное движение вдоль его оси, частота колебаний достигала 100 гц. При этом в катушках возникал индукционный ток, позволяющий судить о величине магнитного потока, находящегося внутри цилиндра. Опыт показал, что поток, равный $\Phi = \pi r^2 B$ (r — радиус цилиндра), принимает дискретный ряд значений:

$$\Phi = N\Phi_0,$$

N — целое число ($N = 1, 2, 3, \ldots$), а Φ_0 — квант магнитного потока.

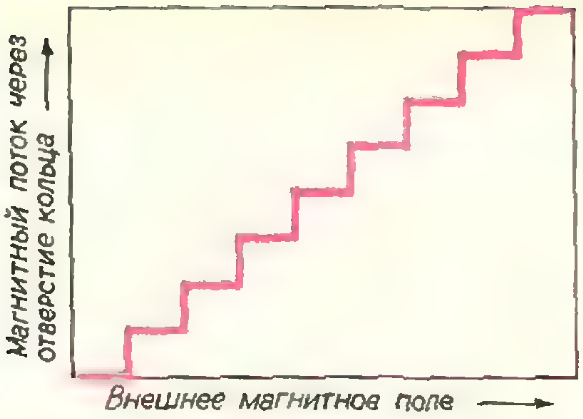


Рис. 2.

На рисунке 2 приведен график изменения магнитного потока через сечения сверхпроводящего кольца при непрерывном изменении внешнего магнитного поля, возбуждающего ток в кольце.

В следующем разделе мы вычислим значение кванта магнитного потока Φ_0. Он оказывается равным $2\cdot10^{-15}$ *вб*. Такова величина минимальной порции магнитного потока. Значение кванта магнитной индукции, как видно из формулы $\Phi = \pi r^2 B$, зависит от радиуса цилиндра. В опыте Дивера и Фэрбенка он был равен $1{,}3\cdot10^{-3}$ *см*, и кванту магнитного потока соответствовало поле $B \approx 5\cdot10^{-6}$ *тл*. Это макроскопическая величина. Она всего в 10 раз меньше индукции магнитного поля Земли.

Квант магнитного потока

Мы вернемся еще к эксперименту, в котором было обнаружено квантование магнитного потока, а сейчас перейдем к вопросу: как рассчитать значение кванта магнитного потока Φ_0? Чтобы ответить на этот вопрос, воспользуемся аналогией с планетарной моделью атома и применим представления теории Бора к току, циркулирующему в кольце (или *цилиндре*).

Электроны, движущиеся в сверхпроводящем кольце, подобны атомным электронам, находящимся на боровской орбите. Запишем условия квантования момента импульса этих электронов:

$$mvr = N\hbar. \qquad (*)$$

Теперь под r следует понимать не радиус электронной орбиты, а радиус кольца, в котором циркулирует сверхпроводящий ток. Поскольку радиус кольца — величина определенная, то условие (*) можно рассматривать как условие квантования электронного импульса $p = mv$. Квантование импульса означает, что ток в кольце может принимать лишь дискретный ряд значений. А это в свою очередь приводит к квантованию магнитного потока. Найдем, как связаны между собой p и Φ.

Энергия, которой обладает ток I, текущий по контуру с индуктивностью L, равна $E = \frac{LI^2}{2}$. Эта же формула справедлива для случая сверхпроводящего контура *).

Поскольку магнитный поток равен $\Phi = LI$, то выражение для энергии может быть записано в виде

$$E = \frac{I\Phi}{2}. \qquad (1)$$

Сила тока, создаваемого в кольце n электронами, движущимися со скоростью v, очевидно, равна $I = \frac{nve}{2\pi r}$. Подставляя это выражение в (1), приходим к следующей формуле для энергии:

$$E = \frac{\Phi ne}{2\pi r}\cdot\frac{v}{2}. \qquad (2)$$

Энергия частицы, движущейся со скоростью v, как известно, равна $E = \frac{mv^2}{2} = \frac{pv}{2}$, где p — импульс частицы. Следовательно, энергия n электронов, движущихся со скоростью v по сверхпроводящему кольцу, равна

$$E = \frac{npv}{2}. \qquad (3)$$

---

*) В «Приложении II» в конце статьи приведен вывод формулы $E = \frac{LI^2}{2}$.

Сравнивая формулы (2) и (3), приходим к следующему выражению для импульса электрона:

$$p = \frac{\Phi e}{2\pi r}. \qquad (4)$$

Существенная особенность сверхпроводников состоит в том, что в них электроны разбиваются на связанные пары. Поэтому имеет смысл говорить об импульсе электронной пары как целого, который равен удвоенному импульсу электрона:

$$p = \frac{\Phi e}{\pi r}. \qquad (5)$$

Формула (5) непосредственно связывает электронный импульс в сверхпроводнике с магнитным потоком, создаваемым сверхпроводящим током. Подставив это выражение в закон квантования (*), получим

$$r\frac{\Phi e}{\pi r} = N\hbar \ (N = 1, 2, 3, \ldots).$$

Отсюда

$$\Phi = N\frac{\hbar\pi}{e} = N\frac{h}{2e},$$

то есть

$$\Phi = N\Phi_0, \text{ где } \Phi_0 = \frac{h}{2e}. \qquad (**)$$

Таким образом, квант магнитного потока оказывается равным $\frac{h}{2e}$. Магнитный поток, пронизывающий сверхпроводящее кольцо, может принимать только значения, кратные Φ_0. Величину кванта легко сосчитать, подставив в (**) численные значения постоянной Планка h и заряда электрона e:

$$\Phi_0 = 2 \cdot 10^{-15} \text{ вб.}$$

В опыте Дивера и Фэрбенка, о котором мы рассказывали выше, и было обнаружено, что магнитный поток в цилиндре принимает значения, кратные именно этой величине.

«Вихри» в сверхтекучем гелии

Другой пример квантования, которое происходит в огромных по сравнению с атомными масштабах, наблюдается также при низких температурах, когда изучается другое «сверхявление» — сверхтекучесть жидкого гелия.

Известно, что при температуре $T = 4{,}2$ °K при нормальном давлении гелий переходит из газообразного состояния в жидкое и при дальнейшем понижении температуры вплоть до абсолютного нуля так и не затвердевает (лишь под давлением в 25 *атм* при температурах, близких к абсолютному нулю, гелий можно перевести в твердое состояние). Но этим не исчерпываются замечательные свойства этого вещества. При $T = 2{,}17$ °K гелий переходит в особое состояние — сверхтекучее. Явление сверхтекучести, открытое академиком П. Л. Капицей в 1937 году, состоит в способности жидкого гелия при температурах, меньших $T = 2{,}17$ °K, протекать в узких капиллярах без всякого трения. Гелий при температурах, меньших 2,17 °K, называют HeII — в отличие от HeI (4,2 °K $> T >$ 2,17 °K), являющегося обычной жидкостью.

Явления сверхтекучести и сверхпроводимости весьма сходны друг с другом. Можно сказать, что сверхпроводимость представляет собой сверхтекучесть электронов. Аналогия сверхпроводимости и сверхтекучести оказывается весьма глубокой, и в частности, она проявляется в возможности наблюдения макроскопических квантовых явлений как в сверхпроводниках, так и в сверхтекучем гелии.

При определении свойства сверхтекучести не случайно отмечается способность гелия протекать без трения именно в узких капиллярах. Дело в том, что вязкость жидкости (или внутреннее трение) может быть измерена двумя независимыми способами. Первый из них связан с измерением скорости вытекания жидкости из узкого капилляра (чем больше вязкость, тем меньше скорость вытекания). Для исследования вязкости другим мето-

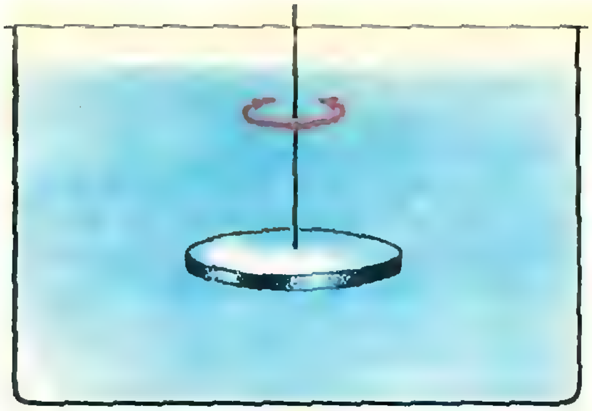


Рис. 3.

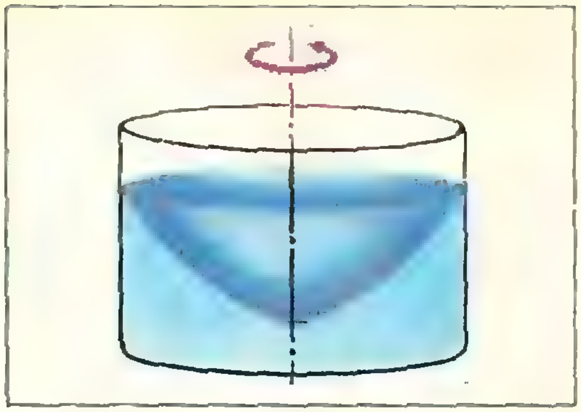


Рис. 4.

дом в жидкость опускается диск, совершающий крутильные колебания (рис. 3). Чем больше вязкость, тем быстрее затухают колебания диска. Для всех жидкостей оба метода измерения дают один и тот же результат. Однако имеется единственное исключение из этого правила, и этим исключением является HeII. При протекании HeII по узким капиллярам вязкость оказывается равной нулю, то есть обнаруживается сверхтекучесть. Можно было бы ожидать, что колебания диска, опущенного в HeII, окажутся незатухающими. Однако при втором способе определения вязкости HeII ведет себя как обычная жидкость — колебания диска затухают.

Эти поразительные свойства гелия нашли свое объяснение в теории сверхтекучести академика Л. Д. Ландау, построенной им в 1941 году. Согласно этой теории HeII характеризуется двумя типами движения — нормальным и сверхтекучим. Наглядно можно представить его как бы состоящим из двух компонент. Одна из них представляет собой нормальную жидкость, а другая — сверхтекучую. Колебания диска затухают благодаря трению его о нормальную компоненту. В опыте с протеканием гелия по узкому капилляру обнаруживается сверхтекучая компонента. При абсолютном нуле нормальная компонента отсутствует.

При $T > 2{,}17$ К, наоборот, обращается в нуль сверхтекучая составляющая. А в промежуточной области температур (0 К $\leqslant T \leqslant 2{,}17$ К) присутствуют обе компоненты.

Вращающийся гелий

Исследуем свойства HeII, налитого в цилиндрический сосуд, вращающийся вокруг оси (см. рис. 4). Будем исходить из описанной выше двухжидкостной модели и постараемся представить себе картину такого вращения. Нормальная компонента благодаря трению о стенки цилиндра должна вовлекаться в движение стенки. Что же касается сверхтекучей компоненты, то, на первый взгляд, кажется, что она должна оставаться неподвижной.

К какому наблюдаемому эффекту должна привести эта своеобразная картина? Как известно, при вращении жидкости, налитой в сосуд, свободная поверхность жидкости принимает форму параболоида. Поскольку в нашем эксперименте вращается не весь гелий, а только его нормальная компонента, то следует ожидать, что при вращении HeII эта поверхность должна быть менее изогнута, чем в случае, когда в цилиндре находится HeI.

Что же показывает эксперимент? Форма поверхности вращающегося HeII оказывается такой же, как в нормальной жидкости.

Как объясняется это явление? Не противоречит ли картина вращающегося гелия теории сверхтекучести и представлению о двух компонентах HeII? Оказывается, что никакого противоречия нет, но картина вращающегося гелия совсем не так проста, как это могло вначале показаться.

Жидкий гелий вращается совершенно спокойно (это соответствует ламинарному течению) только при очень малых скоростях вращения (обычно меньших $\sim 10^{-2}$ *см/с*). С увеличением скорости возникает картина, похожая на турбулентный режим. Представьте себе движущуюся жидкость, содержащую большое количество воронок — областей, в которых движение жидкости подобно движению воздуха в смерче. Вращающийся гелий и оказывается пронизанным такими областями. Они получили название вихрей. Сверхтекучая компонента, находящаяся в области вихря, вращается вокруг его оси. Скорость вращения возрастает по мере приближения к оси вихря, и на некотором расстоянии от оси (порядка межатомных расстояний) происходит «срыв» сверхтекучести; то есть свойство сверхтекучести сохраняется до некоторой критической скорости (~ 60 *м/с*). Поэтому вблизи оси вихря возникает область, содержащая нормальную жидкость. Появление воронок, связанных с вихрями, и приводит к искривлению свободной поверхности вращающегося HeII.

Таким образом, вращающийся сверхтекучий гелий оказывается пронизанным вихрями; ствол вихря представляет собой нормальную компоненту. Атомы гелия вращаются вокруг оси вихря, подобно тому, как вращаются электроны в сверхпроводящем кольце *). Движение этих атомов также подчиняется правилу квантования, которое аналогично правилу квантования Бора для орбит электронов в атоме.

Если p — импульс атома гелия (в сверхтекучей компоненте), r — радиус ствола вихря, то

$$pr = N\hbar, \text{ или } m_{\mathrm{He}}v\cdot r = N\hbar \quad (***)$$
$$(N = 1, 2, 3, \ldots)$$

(m_{He} — масса атома гелия). Иными словами, в случае вихрей в гелии квантуется орбитальный момент атома гелия. Величина кванта орбитального момента равна $\hbar$.

Радиус вихрей в сверхтекучем гелии — величина, которая может принимать любые значения, вплоть до размеров сосуда, в который налит жидкий гелий. Обычно в экспериментах сосуд имеет радиус 1 *см*, то есть масштаб квантования по сравнению с атомным возрастает приблизительно в 10^8 раз (напомним, что размер атомной орбиты $\sim 10^{-8}$ *см*).

Из (***) видно, что скорость вращения атомов гелия вокруг ствола зависит от расстояния их до оси вихря — $v = N\dfrac{\hbar}{m_{\mathrm{He}}r}$ — и при одном и том же значении r может принимать дискретный ряд значений. Для характеристики движения по замкнутому контуру радиуса r пользуются величиной vr, которую называют циркуляцией. Как видно из формулы (***), при образовании вихрей в сверхтекучем гелии циркуляция жидкости может принимать только дискретный ряд значений, то есть является величиной квантованной:

$$vr = N\frac{\hbar}{m_{\mathrm{He}}} \quad (N = 1, 2, 3, \ldots).$$

Закон квантования (***) экспериментально исследовался в работе английского физика Вайнена. Результаты опыта показали, что величина $m_{\mathrm{He}}vr$ действительно принимает дискретный ряд значений, и квант орбитального момента равен $\hbar$.

Таким образом, в сверхтекучем гелии, также как и в сверхпроводниках, наблюдается эффект макроскопического квантования.

В мире низких температур, где тепловое движение еще не играет такой большой роли, как при обычных для нас комнатных температурах, оказываются господствующими квантовые законы. Изучение свойств вещества, находящегося в столь необычных условиях, углубляет и наше понимание квантовой физики. Само название «квантовая» отражает важную особенность физических величин: их дискретность, существование отдельных порций, квантов. И если раньше казалось, что это относится только к величинам, описывающим свойства микрочастиц — электронов, протонов, отдельных атомов и т. п., то из рассказанного выше ясно, какое важное обобщение возникло при изучении физики низких температур. Квантование возможно и в макроскопическом масштабе. Дискретными оказываются величины, описывающие свойства гигантских по сравнению с атомными объектов.

---

*) В некоторых сверхпроводниках при определенных условиях возникает картина, аналогичная появлению вихрей в HeII. Об этом рассказывается в «Приложении I» в конце статьи.

Приложение I

«Вихри» в сверхпроводниках

В этом приложении рассказывается о том, как магнитное поле проникает в некоторые сверхпроводящие вещества. Процесс этот носит квантовый характер: поле проникает в вещество отдельными порциями. Прежде чем перейти непосредственно к описанию этого явления, кратко остановимся на вопросе об использовании сверхпроводников для создания сильных магнитных полей.

На первый взгляд может показаться, что сверхпроводники идеально подходят для создания сколь угодно сильных магнитных полей. В самом деле, при использовании электромагнитов приходится считаться с тепловыми потерями. Рост силы тока в обычном соленоиде влечет за собой и рост джоулевых потерь. И если нам требуются очень сильные магнитные поля, то наряду с большими затратами мощности для поддержания тока необходимы сложные охлаждающие системы, предотвращающие провода от перегрева и даже от плавления. При использовании сверхпроводящего тока, протекающего без всякого сопротивления, эти трудности полностью отсутствуют.

Однако дело обстоит не так просто, как это может показаться на первый взгляд. Предположим, что обычный сверхпроводник находится во внешнем магнитном поле. Оно не может проникнуть внутрь, в толщу сверхпроводника. Дело в том, что существует неразрывная связь между магнитным полем и сверхпроводящим током. Воздействие внешнего магнитного поля приводит к появлению в поверхностном слое металла сверхпроводящего тока. Этот поверхностный ток создает собственное магнитное поле, противоположное приложенному полю. В теории сверхпроводимости доказывается, что происходит полная компенсация магнитного поля внутри сверхпроводящего вещества (это явление называют эффектом Мейсснера).

Если мы создадим в металле сверхпроводящий ток, то в окружающем пространстве возникнет магнитное поле. Оно не может проникнуть в сверхпроводящий образец. Однако такая картина наблюдается до тех пор, пока ток и соответствующее поле не очень велики ($\sim 3 \cdot 10^{-3}$ *тл*). Когда поле достигает некоторого значения $B_к$ (критическое значение), оно проникает внутрь сверхпроводника и, «врываясь» в него, разрушает сверхпроводящее состояние. Поэтому длительное время казалось, что получение с помощью сверхпроводников сильных магнитных полей (больших $B_к$) невозможно.

В дальнейшем выяснилось, однако, что существуют сверхпроводники, с помощью которых можно получать очень большие (сверхсильные) магнитные поля. Эти сверхпроводники — их называют сверхпроводниками второго рода — могут находиться в так называемом смешанном состоянии, теория которого была разработана советским физиком-теоретиком А. А. Абрикосовым.

Если сверхпроводник второго рода, по которому течет ток, находится в магнитном поле, то при некотором значении индукции $B_{к1}$ (эта величина называется нижним критическим полем) поле начинает частично проникать в толщу сверхпроводящего образца. Электроны в сверхпроводнике под действием силы Лоренца начинают двигаться по окружностям (если их скорость перпендикулярна силовым линиям поля). Возникающая при этом картина сходна с картиной вращающегося He II: в сверхпроводнике появляются вихри. Сверхпроводящие электроны вращаются вокруг оси вихря; скорость вращения возрастает по мере приближения к оси, и на некотором расстоянии от нее происходит

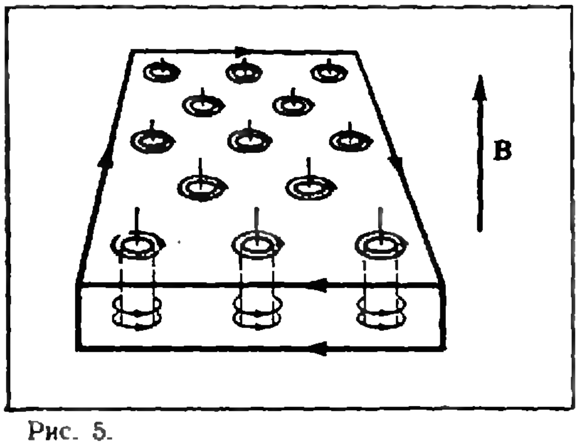


Рис. 5.

«срыв» сверхпроводимости — магнитная индукция внутри вихря отлична от нуля. «Ствол» вихря находится в нормальном состоянии.

Таким образом, сверхпроводящий образец оказывается пронизанным нитями, представляющими собой обычные несверхпроводящие области. Вихри в сверхпроводнике образуют треугольную решетку (см. рис. 5). Стволы вихрей ориентированы в направлении силовых линий магнитного поля. В пространстве между вихрями свойства сверхпроводимости сохраняются. Магнитный поток, пронизывающий сечение ствола вихря, оказывается одним и тем же для всех вихрей и равным по величине кванту магнитного потока Φ_0. То есть каждый вихрь несет один квант потока, и в виде таких отдельных порций магнитное поле проникает внутрь сверхпроводника.

При увеличении поля ($B > B_{к1}$) число нормальных областей растет, вихревые нити сближаются, и при некотором значении поля $B_{к2}$ (эта величина называется верхним критическим полем), когда расстояние между вихревыми нитями становится $\sim 10^{-8}$ *м*, сверхпроводимость полностью разрушается и вещество переходит в нормальное состояние.

Такая своеобразная картина проникновения магнитного поля в сверхпроводники второго рода позволяет использовать их для получения сильных магнитный полей. Значение верхнего критического поля $B_{к2}$ может оказаться очень большим. Например, для сплава Nb_3Sn $B_{к2} \approx 20$ *тл*. (Сверхпроводниками второго рода являются сплавы с высоким содержанием примеси.)

При использовании сверхпроводников второго рода для получения сильных магнитных полей энергетические затраты в сотни—тысячи раз меньше, чем при использовании электромагнитов. Например, для получения поля в 10 *тл* с помощью обычного соленоида требуется источник питания мощностью 5000 *квт* и, кроме того, необходима сложная установка для охлаждения обмотки соленоида. При использовании сверхпроводников необходимы лишь затраты энергии для получения жидкого гелия (при температуре жидкого гелия металл соленоида находится в сверхпроводящем состоянии). Но для этого в приведенном примере необходима мощность всего 5 *квт*. То есть энергетические затраты уменьшаются в 1000 раз.

Приложение II

Приведем вывод формулы для энергии, которой обладает ток, текущий по проводнику.

Рассмотрим контур, по которому протекает ток I. Магнитный поток Φ, создаваемый этим током, возрастает при увеличении I по закону $\Phi = LI$, где L — индуктивность контура. Предположим, что в начальный момент времени $t_0 = 0$ ток в контуре равен I_0, и, начиная с этого момента, сила тока равномерно возрастает и к моменту времени t оказывается равной I_t. Ясно, что возрастание силы тока сопровождается ростом энергии магнитного поля, создаваемого током.

За время t по проводнику переместился заряд q. Заряд двигался ускоренно, так как сила тока возрастала (плотность тока равна $j = nev$; при постоянном n возрастание j обусловлено ростом v). Для того чтобы получить формулу для энергии тока, вычислим работу электрических сил по перемещению заряда q вдоль всей замкнутой цепи. Работа выражается формулой $A = qE$, где E — электродвижущая сила, равная в обычном проводнике $E = IR + \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$.

Первое слагаемое в правой части этого равенства связано с обычными омическими потерями, а второе обусловлено наличием эффекта самоиндукции, ослабляющего ток. Ясно, что $q = I_{ср} \cdot t$ ($I_{ср}$ — средняя сила тока, равная при равномерном возрастании тока $I_{ср} = \frac{I_0 + I_t}{2}$). Таким образом, работа оказывается равной

$$A = \frac{I_0 + I_t}{2} tE.$$

В сверхпроводниках $R = 0$ и $E = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$.

Поскольку $\Phi = LI$, то $E = L\frac{\Delta I}{\Delta t}$. В нашем случае изменение силы тока ΔI равно $\Delta I = I_t - I_0$, а промежуток времени $\Delta t = t$. Тогда $E = L\frac{I_t - I_0}{t}$. Подставляя это значение для E в формулу для работы, приходим к следующему выражению:

$$A = \frac{I_0 + I_t}{2} t \cdot L\frac{I_t - I_0}{t}.$$

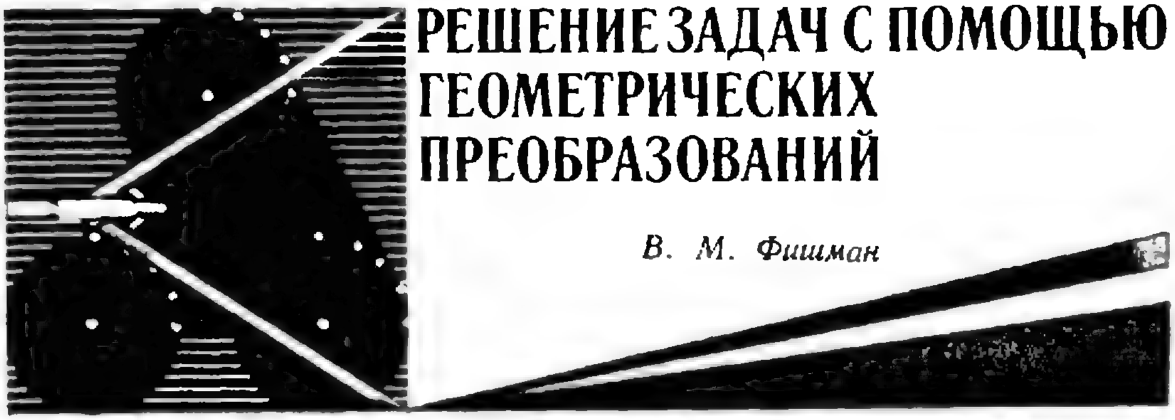
Работа, таким образом, оказывается равной

$$A = \frac{LI_t^2}{2} - \frac{LI_0^2}{2}.$$

Видно, что величина работы описывается изменением величины $\frac{LI^2}{2}$. Ее естественно считать равной энергии тока, так что

$$E = \frac{LI^2}{2}.$$

(Внимательный читатель обнаружит аналогию приведенного вывода формулы для энергии тока с выводом выражения для кинетической энергии в обычной механике.)



РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ С ПОМОЩЬЮ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

В. М. Фишман

В школьном курсе геометрии вы часто встречаетесь со многими геометрическими преобразованиями плоскости: параллельными переносами, симметриями, вращениями, преобразованиями подобия. О важности этих понятий говорит хотя бы то, что при доказательстве конгруэнтности фигур используются геометрические преобразования — перемещения. Однако геометрические преобразования встречаются не только в формулировках определений и в доказательствах школьных теорем; они применяются при решении самых разнообразных геометрических задач. При этом преобразования совсем не обязательно должны фигурировать непосредственно в формулировках задач: часто бывает так, что формулировка задачи носит совершенно «статичный» характер, а самое простое и изящное решение оказывается «динамичным», существенно использующим различные геометрические преобразования заданных фигур. В этой заметке мы расскажем о том, как можно научиться видеть эту внутреннюю «динамику» планиметрических задач.

Общие сведения о геометрических преобразованиях

Начнем с определения *перемещения*.

Определение 1. *Перемещением называется отображение плоскости на себя, при котором сохраняются расстояния между точками.*

Докажем такую теорему о перемещениях:

Теорема 1. *Существует одно и только одно перемещение, которое переводит вершины A, B и C заданного невырожденного треугольника ABC соответственно в вершины A_1, B_1, C_1 конгруэнтного ему треугольника $A_1B_1C_1$.*

Доказательство. Существование такого перемещения следует из того, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ конгруэнтны. Докажем, что оно единственно.

Пусть F — некоторое перемещение плоскости, такое что $F(A) = A_1$, $F(B) = B_1$, $F(C) = C_1$, и пусть X — произвольная точка плоскости. Тогда точка $F(X)$ должна находиться на расстояниях $|XA|$, $|XB|$, $|XC|$ соответственно от точек A_1, B_1 и C_1. Но три окружности с центрами в точках A_1, B_1, C_1, не лежащих на одной прямой, имеют не более одной общей точки; значит, точка $F(X)$ определяется однозначно.

Вы знакомы с тремя видами перемещений:

1. *Параллельными переносами.*

(Параллельный перенос определяется заданием точки и ее *образа*).

2. *Поворотами.*

(Поворот определяется заданием его центра O, угла поворота α и направления поворота; угол поворота α при этом считается заключенным в пределах $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$. Но если выбрать какое-либо направление поворота в качестве положительного, а противоположное направление считать отрицательным, то тогда поворот полностью определяется заданием его центра и угла поворота α; угол поворота при этом считается направленной величиной, числовое значение которой может быть как положительным, так и отрицательным. Поворот с центром O на угол α обозначается

R_O^α. Теперь любой поворот может быть задан указанием его центра и угла поворота α, лежащего в пределах $-180° \leqslant \alpha \leqslant 180°$. Если $\beta = \alpha + 360° \cdot n$, где n — целое и $-180° \leqslant \alpha \leqslant 180°$, то поворотом на угол β называется поворот R^α.)

3. *Осевыми симметриями.*

(Осевая симметрия определяется заданием оси симметрии — прямой l.)

Простейшим перемещением является *тождественное отображение* плоскости, которое любую точку X отображает на себя; его обозначают буквой E, — тогда $E(X) = X$. Тождественное отображение считается поворотом на нулевой угол вокруг любого центра O. Подобным же образом разумно считать тождественное отображение и параллельным переносом на нулевое расстояние. Тождественное отображение — единственное перемещение, которое является одновременно поворотом и переносом.

Для любого центра O повороты на 180° в обоих направлениях совпадают и являются *центральной симметрией* (относительно центра поворота O).

Можно доказать, что любое перемещение является либо параллельным переносом, либо поворотом, либо *композицией* параллельного переноса или поворота с некоторой осевой симметрией. Понятие композиции двух геометрических преобразований будет для нас очень важно в дальнейшем, поэтому остановимся на нем более подробно.

Пусть даны два отображения F и G некоторого множества M на себя. Произведя их последовательно, мы получим новое отображение H, которое отображает $x \in M$ на $H(x) = G(F(x))$. Это новое отображение H является тоже отображением множества M на себя. Оно называется *композицией* отображений F и G и обозначается $G \circ F$.

Из определения 1 следует, что композиция любых двух перемещений (то есть отображений плоскости на себя, сохраняющих расстояния между точками), снова является перемещением. Обратите внимание на порядок записи: обозначая композицию $G \circ F$, мы справа ставим обозначение отображения, которое производится первым. Это замечание существенно; мы увидим, что операция композиции, вообще говоря, не перестановочна — существуют такие отображения F и G, для которых $G \circ F \neq F \circ G$.

Попытаемся теперь разобраться, что представляет собой композиция известных нам отображений — перемещений — в конкретных случаях.

Особенностью *композиции двух параллельных переносов* является ее переместительность — это одна из причин, по которой композицию параллельных переносов (*векторов*) называют их сложением (композицию отображений называть сложением не принято).

Случай *композиции двух поворотов более интересен*; перейдем к нему. Нам понадобится следующее определение: *точка X_0 множества M называется неподвижной точкой отображения G множества M на себя, если $G(X_0) = X_0$.*

Характеристическое свойство поворотов описывает

Теорема 2. *Нетождественное перемещение является поворотом тогда и только тогда, когда оно имеет единственную неподвижную точку.*

Доказательство. Необходимость условия очевидна: единственной неподвижной точкой поворота на ненулевой угол является центр поворота.

Достаточность. Рассмотрим некоторое перемещение F с единственной неподвижной точкой O. Выберем некоторую точку A, отличную от O, и рассмотрим ее образ $B = F(A)$; точка B отлична от A и лежит на окружности $(O; r)$ с центром в точке O и радиусом $r = |OA|$. Если для любой точки A $\widehat{AOB} = 180°$, то F — симметрия относительно точки O, и достаточность условия доказана. Предположим теперь, что существует точка A такая, что $\widehat{AOB} = \alpha \neq 180°$. Рассмотрим точку $F(B) = F^2(A)$ (F^2 — это сокращенное обозначение для композиции

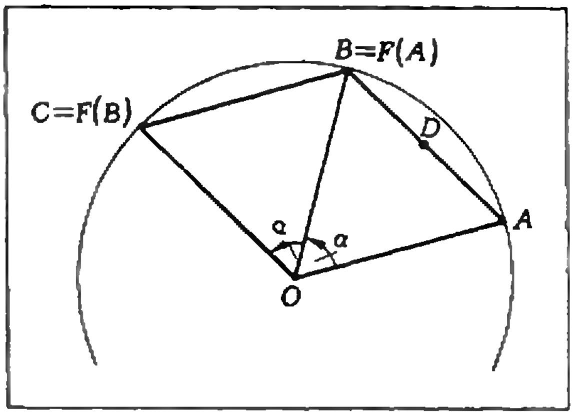


Рис. 1.

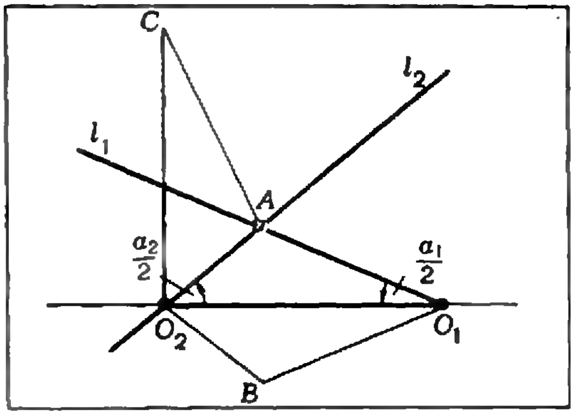


Рис. 2.

$F \circ F$). Так как перемещение F сохраняет расстояния, то точка $F(B)$ снова лежит на окружности $(O;\ r)$ и расстояние между точками $F(B)$ и B равно расстоянию между точками B и A. Этим условиям удовлетворяют две точки: точка A и точка C окружности $(O;\ r)$ такая, что $\widehat{BOC} = \alpha$ (рис. 1). Но если $F(B) = A$, то середина отрезка AB — точка D — является неподвижной точкой преобразования F: $F(D) = D$ (докажите!), а это противоречит тому, что точка O — единственная неподвижная точка F. Значит, $F(B) = C$, и мы доказали, что перемещение F, как и R_O^α, переводит точки O, A и B, не лежащие на одной прямой, в точки O, B и C соответственно. Из теоремы 1 следует, что $F = R_O^\alpha$. Теорема доказана.

Рассмотрим повороты R_O^α и R_O^β с общим центром O. В результате их композиции получается поворот вокруг того же центра O на угол $\alpha + \beta$:

$$R_O^\beta \circ R_O^\alpha = R_O^{\alpha+\beta}.$$

(Полное доказательство этой формулы требует разбора ряда частных случаев — проделайте это самостоятельно.)

Так как всегда $\alpha + \beta = \beta + \alpha$, то

$$R^\beta \circ R^\alpha = R^{\beta+\alpha} = R^{\alpha+\beta} = R^\alpha \circ R^\beta,$$

и композиция поворотов с общим центром переместительна.

Пусть теперь есть два поворота $R_{O_1}^{\alpha_1}$ и $R_{O_2}^{\alpha_2}$ с различными центрами O_1 и O_2 и углами α_1 и α_2 такими, что α_1 и α_2 одного знака (то есть повороты осуществляются *в одном и том же направлении*) и $|\alpha_1 + \alpha_2| \neq 360°$. Покажем, что в этом случае их композиция $R_{O_2}^{\alpha_2} \circ R_{O_1}^{\alpha_1}$ является поворотом на угол $\alpha_1 + \alpha_2$, и найдем центр этого поворота.

Обозначим для краткости поворот $R_{O_1}^{\alpha_1}$ через R_1, поворот $R_{O_2}^{\alpha_2}$ — через R_2. Нам нужно найти все неподвижные точки перемещения $R_2 \circ R_1$.

Предположим, что некоторая точка плоскости A является неподвижной точкой перемещения R_2R_1, то есть что $R_2(R_1(A)) = A$. Обозначив точку $R_1(A)$ через B, получим, что $R_2(B) = A$. Из этого равенства следует, что точка O_2 равноудалена от точек A и B; но так как $B = R_1(A)$, то и точка O_1 равноудалена от точек A и B; следовательно, точки A и $B = R_1(A)$ должны быть симметричны относительно прямой O_1O_2 (рис. 2).

Так как $\widehat{AO_1B} = \alpha_1$, и точки A и B симметричны относительно прямой O_1O_2, то точка A должна лежать на прямой l_1, проходящей через точку O_1 и переходящей при повороте вокруг точки O_1 на угол $\alpha_1/2$ в прямую O_1O_2. С другой стороны, поскольку $\widehat{BO_2A} = \alpha_2$, то точка A должна лежать и на прямой l_2, в которую переходит прямая O_1O_2

при повороте на угол $\alpha_2/2$ вокруг точки O_2. По предположению $\frac{|\alpha_1+\alpha_2|}{2}\neq$ $\neq 180^\circ$ и значит, прямые l_1 и l_2 не параллельны, то есть пересекаются в единственной точке — точке A. Итак, точка A пересечения прямых l_1 и l_2 является единственной неподвижной точкой перемещения $R_2\circ R_1$. Из теоремы 2 следует, что перемещение $R_2\circ R_1$ — поворот вокруг точки A. Найдем угол этого поворота.

Чтобы это сделать, достаточно найти образ произвольной точки, отличной от центра A, при повороте $R_2\circ R_1$ вокруг A. Удобнее всего взять точку O_1. Поворот R_1 оставляет ее на месте, а поворот R_2 переводит в такую точку C, что $|O_2O_1| =$ $= |O_2C|$ и $O_1\widehat{O_2}C = \alpha_2$ (рис. 2). Следовательно, перемещение $R_2\circ R_1$ — это поворот вокруг точки A на угол $O_1\widehat{A}C$. Вычислим этот угол для случая $0^\circ < \alpha_1+\alpha_2 < 360^\circ$ (рис. 2).

$$C\widehat{A}O_2 = O_2\widehat{A}O_1 = 180^\circ - \alpha_1/2 - \alpha_2/2,$$

$$O_1\widehat{A}C = 360^\circ - C\widehat{A}O_2 - O_2\widehat{A}O_1 = \alpha_1 + \alpha_2.$$

(Для случая $-360^\circ < \alpha_1 + \alpha_2 < 0^\circ$ сделайте чертеж и вычислите угол самостоятельно.)

Итак, нами доказана

Теорема 3. *Композиция $R^{\alpha_2}_{O_2}\circ R^{\alpha_1}_{O_1}$ двух поворотов $R^{\alpha_1}_{O_1}$ и $R^{\alpha_2}_{O_2}$ с различными центрами O_1 и O_2 и углами поворотов α_1 и α_2 такими, что α_1 и α_2 — одного знака и $|\alpha_1 + \alpha_2| < 360^\circ$, является поворотом на угол $\alpha_1 + \alpha_2$. Центром этого поворота служит точка пересечения прямых l_1 и l_2, где l_1 — это прямая, проходящая через точку O_1 и переходящая при повороте вокруг точки O_1 на угол $\alpha_1/2$ в прямую O_1O_2, а l_2 — это прямая, в которую переходит прямая O_1O_2 при повороте вокруг точки O_2 на угол $\alpha_2/2$.*

Заметим, что при выполнении условий теоремы 3 композиция $R^{\alpha_1}_{O_1}\circ R^{\alpha_2}_{O_2}$ является поворотом на угол $\alpha_1+\alpha_2$ вокруг точки B, симметричной точке A относительно прямой O_1O_2. Это и показывает, что композиция поворотов с различными центрами не переместительна.

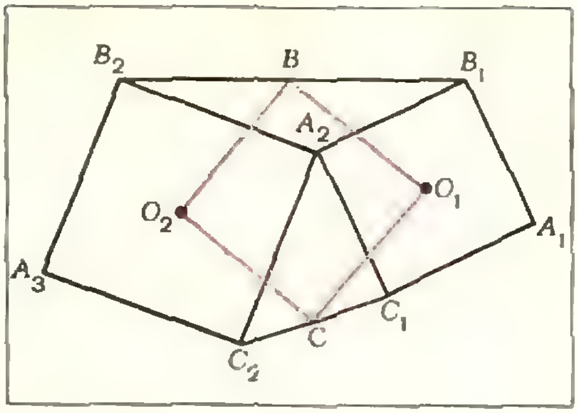


Рис. 3.

Задача 1. Докажите, что композиция двух поворотов с центрами O_1, O_2 и углами поворотов α_1, α_2 такими, что α_1 и α_2 — одного знака и $|\alpha_1+\alpha_2| = 360^\circ$, является параллельным переносом. Постройте этот параллельный перенос по заданным O_1, O_2, α_1. Переместительна ли композиция двух таких поворотов? (Подсказка: рассмотрите композицию симметрий относительно двух различных точек.)

Задача 2. Найдите композицию:

а) двух осевых симметрий;

б) параллельного переноса и поворота.

Исследуйте переместительность композиции различных видов перемещений.

Задачи

Постараемся теперь применить полученные результаты к решению некоторых планиметрических задач.

Рассмотрим сначала такую задачу (она поможет нам в дальнейшем):

На плоскости даны два квадрата $A_1B_1A_2C_1$ и $A_2B_2A_3C_2$ с общей вершиной A_2 (см. рис. 3). Пусть O_1 и O_2 — центры квадратов, B — середина отрезка B_1B_2, C — середина отрезка C_1C_2. Докажите, что O_1BO_2C — квадрат.

Конечно, эту задачу можно решить и без геометрических преобразований, произведя дополнительные построения и рассмотрев некоторые конгруэнтные треугольники. Однако то, что в задаче говорится о «правильных» фигурах — квадратах,— наводит на мысль попробовать применить при ее решении геометрические преобразования.

Заметим, что поворот на 90° вокруг точки O_1 переводит точку B_1 в точку A_2, а поворот на 90° вокруг точки O_2 переводит точку A_2 в точку B_2. По теореме 3 композицией этих двух поворотов является поворот на 180°, то есть центральная симметрия относительно некоторой точки. Так как в результате последовательного выполнения этих двух поворотов точка B_1 переходит в точку B_2, то композицией рассмотренных поворотов будет симметрия относительно середины отрезка B_1B_2 — точки B. С другой стороны, из теоремы 3 следует, что центр композиции этих двух поворотов лежит на пересечении двух прямых, проходящих через точки O_1 и O_2 соответственно под углами 45° к прямой O_1O_2. Значит, эти прямые пересекаются в точке B, и треугольник O_1BO_2 — равнобедренный с прямым углом при вершине B. Аналогично доказывается, что и треугольник O_1CO_2 — равнобедренный, с прямым углом при вершине C. Объединение этих двух треугольников дает квадрат O_1BO_2C, что и требовалось доказать.

Следующие две задачи — это задачи М291 и М297 из «Задачника «Кванта» (см. «Квант», 1974, №№11, 12). Решения этих задач с помощью геометрических преобразований оказываются не только более простыми и изящными, но и более содержательными, чем традиционные решения, основывающиеся на различных искусственных приемах.

М291. *На сторонах A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 треугольника $A_1A_2A_3$ построены квадраты с центрами O_1, O_2, O_3, лежащие вне треугольника* (*рис.* 4). *Докажите, что:*

а) отрезки O_1O_2 и A_3O_3 равны по длине и взаимно перпендикулярны;

б) середины отрезков A_3A_1, O_1O_2, A_3A_2 и A_3O_3 являются вершинами квадрата;

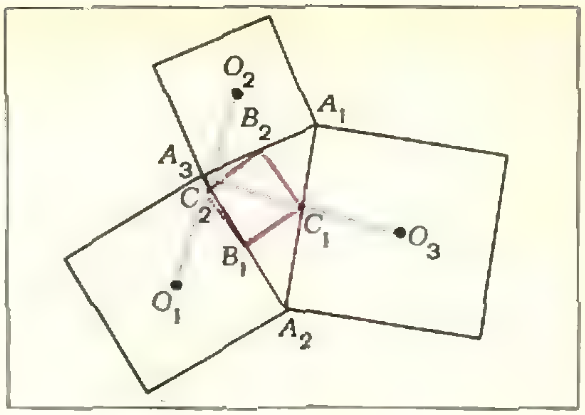


Рис. 4.

в) площадь этого квадрата в 8 раз меньше площади квадрата с центром O_3.

Обозначим через B_1 середину отрезка A_3A_2, через B_2 — середину отрезка A_1A_3. Применив к квадратам с центрами O_2 и O_3 результат предыдущей задачи, получим, что треугольник $O_2B_1O_3$ — равнобедренный с прямым углом при вершине B_1. Следовательно, поворот на 90° вокруг точки B_1 переводит отрезок A_3O_3 в отрезок O_1O_2, что доказывает утверждение *а*). Так как поворот на 90° вокруг точки B_2 переводит точку O_2 в точку A_3, то, применяя теорему 3 к композиции этих двух поворотов (вокруг точек B_1 и B_2), мы получим, как и в предыдущей задаче, что треугольник $B_2C_1B_1$, где C_1 — середина отрезка A_3O_3, — равнобедренный с прямым углом при вершине C_1. Аналогично, треугольник $B_2C_2B_1$, где C_2 — середина отрезка O_1O_2, равнобедренный с прямым углом при вершине C_2, и утверждение *б*) доказано. Утверждение же *в*) следует из того, что диагональ B_2B_1 полученного квадрата как средняя линия треугольника $A_1A_2A_3$ в два раза меньше стороны A_1A_2 квадрата с центром O_3.

М297. *На плоскости заданы 12 точек, являющихся вершинами четырех квадратов $A_1B_1A_2C_1$, $A_2C_2A_3B_2$, $A_3B_3A_4C_3$ и $A_4C_4A_1B_4$ (вершины каждого квадрата перечислены по часовой стрелке, рис. 5). Докажите,* *что $B_1B_2B_3B_4$ и $C_1C_2C_3C_4$ — конгруэнтные параллелограммы, один из которых получается из другого поворотом на 90° (эти параллелограммы могут быть вырожденными: четыре вершины каждого из них в этом случае лежат на одной прямой).*

Пусть D_1 — середина отрезка A_1A_3, D_2 — середина отрезка A_2A_4.

Рассматривая композиции двух соответствующих поворотов на углы 90° (с центрами в отвечающих им вершинах заданных квадратов, см. рис. 5), мы, как и прежде, получим, что треугольники $B_1D_1C_2$, $B_3D_1C_4$, $B_4D_1C_3$ и $B_2D_1C_1$ — равнобедренные с прямым углом при вершине D_1. Поэтому поворот на угол 90° вокруг точки D_1 переводит четырехугольник $B_1B_4B_3B_2$ в четырехугольник $C_2C_3C_4C_1$, что доказывает их конгруэнтность (одновременно получаем, что отрезки B_1B_3 и C_2C_4 равны по длине и взаимно перпендикулярны, что является обобщением утверждения *а*) задачи М291 на случай произвольного четырехугольника $A_1A_2A_3A_4$).

Осталось доказать, что, например, четырехугольник $B_1B_2B_3B_4$ — параллелограмм. Для этого заметим, что все треугольники $C_2D_2B_3$, $C_4D_2B_1$, $C_3D_2B_2$, $C_1D_2B_4$ — равнобедренные с прямым углом при вершине D_2. Значит, поворот на угол 90° вокруг точки D_2 переводит четырехугольник $C_2C_3C_4C_1$ в четырехугольник $B_3B_2B_1B_4$. Композиция двух поворотов вокруг точек D_1 и D_2 на углы 90° является центральной симметрией относительно некоторой точки O_1 и отображает четырехугольник $B_1B_4B_3B_2$ на себя так, что вершины B_1 и B_3, B_2 и B_4 меняются местами. Из этого следует, что четырехугольник $B_1B_2B_3B_4$ — центрально-симметричный, то есть параллелограмм, а это и требовалось доказать.

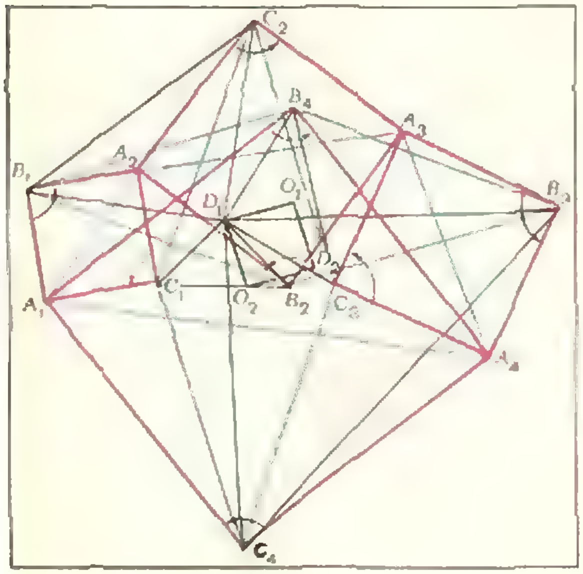


Рис. 5.

Применяя к композиции поворотов на углы 90° вокруг точек D_1 и D_2 теорему 3, мы получим также, что *центры O_1 и O_2 параллелограммов $B_1B_2B_3B_4$ и $C_1C_2C_3C_4$, и середины D_1 и D_2 диагоналей четырехугольника $A_1A_2A_3A_4$ являются вершинами квадрата.*

Это утверждение является обобщением утверждения *б*) задачи М291 на случай произвольного четырехугольника $A_1A_2A_3A_4$.

Докажите теперь, что в условиях задачи М297, *середины сторон четырехугольников $B_1C_2B_3C_4$ и $C_1B_4C_3B_2$ являются вершинами квадратов. Центры этих квадратов и квадрата $D_1O_1D_2O_2$ совпадают и лежат в центре тяжести четырехугольника $A_1A_2A_3A_4$.*

И наконец, задача, которая предлагалась в 1961 году на втором туре XXIV Московской математической олимпиады. Тогда эту задачу решили только два участника олимпиады, причем оба — с применением геометрических преобразований. Теперь, когда вы освоили технику геометрических преобразований, для вас ее решение не должно представить больших затруднений.

Задача 3. *Точки A и B движутся равномерно и с равными угловыми скоростями по окружностям O_1 и O_2 соответственно (против часовой стрелки). Докажите, что вершина C правильного треугольника ABC также движется равномерно по некоторой окружности.*

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

Если треугольник задан...

В. Н. Березин, В. И. Слепой

Обычно в геометрических задачах приходится иметь дело с углами в 30°, 45°, 60°, ...; но есть и такие задачи, где встречаются углы в 80°, 40° и даже 47°! О таких задачах и пойдет речь.

Во всех задачах, разбирающихся в этой заметке, фигурируют лежащие в одной плоскости треугольник и точка, соединенная с его вершинами отрезками. Известными считаются либо какие-то углы между прямыми, либо какие-то метрические соотношения между отрезками прямых, либо и то, и другое. Требуется определить какой-нибудь неизвестный угол (помеченный на соответствующем чертеже знаком вопроса и красной дужкой).

Основные обозначения в заметке стандартные, но иногда при решении задач оказываются полезными и вспомогательные обозначения. Это, прежде всего, «окрашивание» в одинаковый (не черный) цвет равных отрезков и выделение цветом тех участков плоскости, на которые при решении задачи полезно обратить внимание.

Начнем с самой простой задачи.

Задача 1. *Дан равносторонний треугольник ABC и такая точка D вне его, что длина отрезка BD равна стороне $\triangle ABC$, и $\widehat{DBC}=40^\circ$ (см. рис. 1). Найти $\widehat{ADC}$.*

Нетрудно посчитать (сделайте это самостоятельно), что $\widehat{ADC}=30^\circ$. Интересно же то, что $\widehat{DBC}$ может быть любым (а вовсе не обязательно равным 40°); $\widehat{ADC}$ при этом все равно остается равным 30°.

Решите теперь такую задачу.

Задача 2. *Дан равнобедренный треугольник ABC ($|BC| = |CA|$, см. рис. 2) с углом BAC, меньшим 60°, и точка D такая, что отрезок AD образует со стороной AC треугольника угол, равный разности между углом в 60° и углом BAC (то есть*

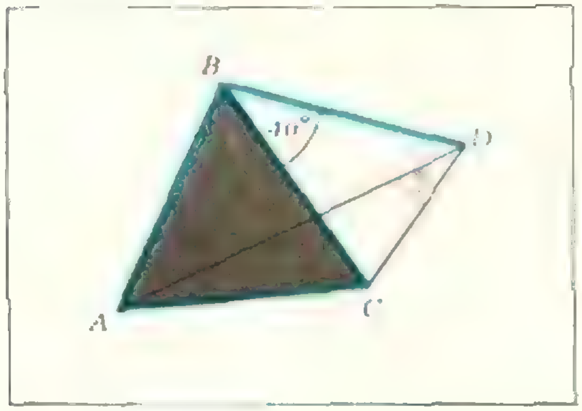


Рис. 1.

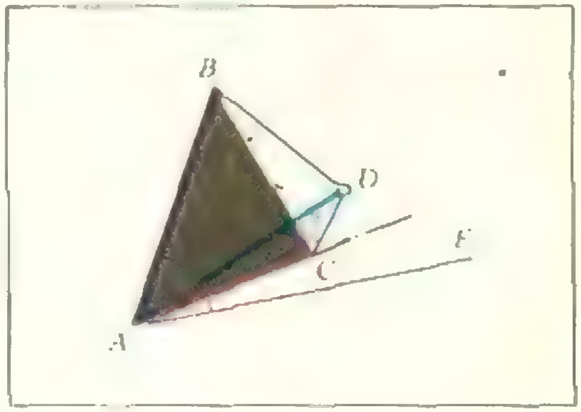


Рис. 2.

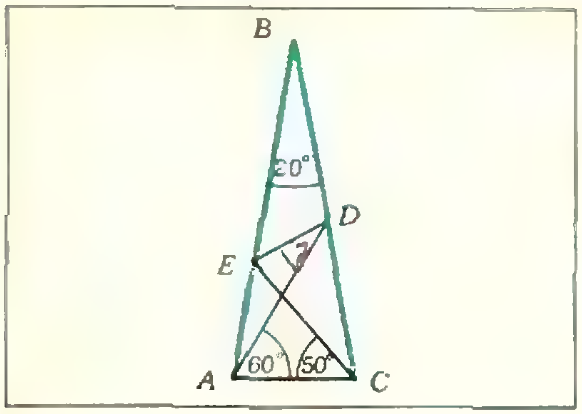


Рис. 3.

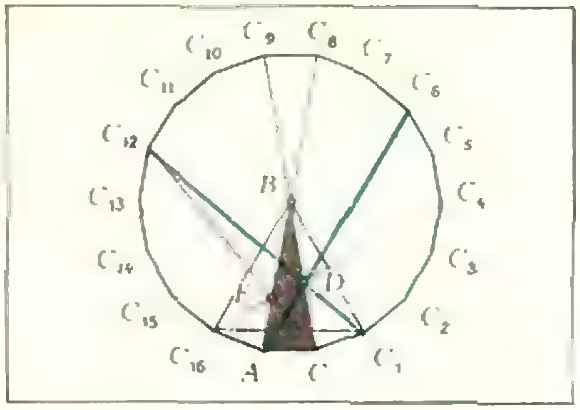


Рис. 4.

прямая AC служит биссектрисой угла DAE), причем $|AD| = |AB|$. Найти $\widehat{ADC}$ (он снова оказывается равным 30°).

Следующая задача предлагалась на XV Московской математической олимпиаде.

Задача 3. *Из вершин A и C равнобедренного треугольника ABC с углом при вершине $\widehat{ABC} = 20^\circ$ (рис. 3) проводятся две прямые до пересечения с противоположными сторонами треугольника соответственно в точках D и E так, что угол CAD равен 60°, а угол ACE равен 50°. Определить угол $\widehat{ADE}$.*

Решение. Составим из равнобедренных треугольников, равных треугольнику ABC, правильный 18-угольник $ACC_1C_2 \ldots C_{15}C_{16}$ (см. рис. 4) с центром в вершине B исходного треугольника. Проведем диагонали AC_8, AC_6, CC_9, CC_{12}, C_1C_{12}, C_1C_{16}, C_4C_{13} этого 18-угольника. Диагонали AC_6 и C_1C_{12} симметричны относительно диагонали CC_9 и пересекаются в точке D. Аналогично доказывается, что диагонали CC_{12}, C_4C_{16} и AC_8 пересекаются в общей точке E. Заметим теперь, что $[C_4C_{16}]$ и $[BC_1]$ — диагонали ромба $BC_4C_1C_{16}$; следовательно, отрезок C_4C_{16} перпендикулярен отрезку BC_1 и проходит через его середину; но так как $\Delta\ BC_1D$ равнобедренный ($\sphericalangle DBC_1 \cong \sphericalangle DC_1B$), то C_4C_{16} содержит его высоту, и, значит, проходит через точку D. Теперь уже ясно, что $\widehat{ADE} = 30^\circ$ (он равен полусумме дуг AC_{16} и C_1C_6 окружности, в которую вписан наш правильный 18-угольник).

Кстати, заметим, что угол ECD также равен 30° и что треугольник AEC — равнобедренный ($|AE| = |AC|$).

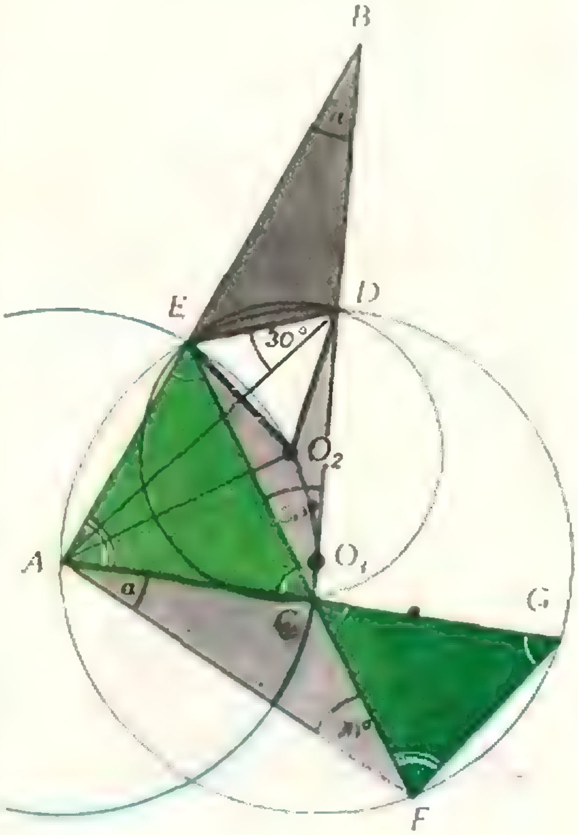


Рис. 5

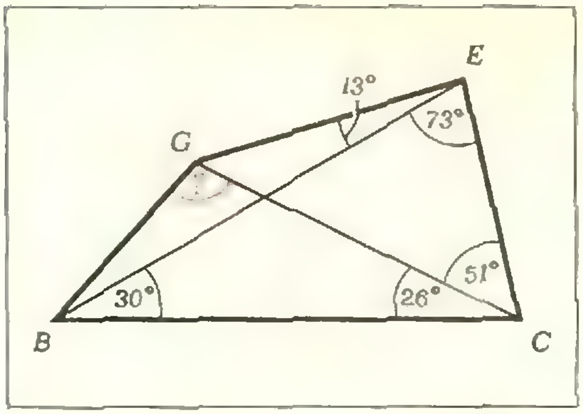


Рис. 6.

Обобщим теперь условие задачи 3.

Задача 4. *На сторонах AB и BC треугольника ABC взяты точки E и D соответственно так, что* $\widehat{ADE} = \widehat{ECD} = 30^\circ$. *Известно, что треугольник AEC — равнобедренный* ($|AE| = |AC|$; *рис.* 5). *Считая, что* $\widehat{ABC} = \alpha$, *найти остальные углы треугольника ABC. Каким может быть угол* α?

Решение. Рисунок 5 подсказывает, как по данным точкам на плоскости A, E и D и $\widehat{ADE} = 30^\circ$, в соответствии с условием задачи, построить треугольник ABC. Продолжим отрезки AC и EC до пересечения с окружностью, описанной вокруг треугольника AED, в точках G и F соответственно (на рисунке 5 — это окружность с центром в точке O_1).

Треугольник ACF подобен треугольнику CEB ($\widehat{AFC} = \widehat{EDA} = \widehat{ECB} = 30^\circ$; $\widehat{ACF} = 180^\circ - \widehat{GCF} = 180^\circ - \widehat{ACE} = 180^\circ - \widehat{AEC} = \widehat{BEC}$); значит, $\widehat{FAC} = \alpha$. Поэтому

$$\widehat{ACB} = \widehat{ACE} + 30^\circ = \\ = \alpha + 30^\circ + 30^\circ = \alpha + 60^\circ,$$

$$\widehat{CAB} = 120^\circ - 2\alpha.$$

Из последнего равенства получаем, что $\alpha < 60^\circ$.

Теперь — обещанная задача, в которой встречается угол 47°.

Задача 5. *В четырехугольнике BGEC (BE и GC — его диагонали, см. рисунок 6)* $\widehat{EBC} = 30^\circ$, $\widehat{BCG} = 26^\circ$, $\widehat{GCE} = 51^\circ$, $\widehat{GEB} = 13^\circ$. *Найти величину угла BGC.*

Решение. На сторонах BC и EC данного четырехугольника построим по правильному треугольнику: $\triangle BAC$ и $\triangle EFC$ (на рисунке 7 их контуры обозначены соответственно красным и синим). От точки E отложим на стороне GE отрезок DE такой, что $|DE| = |EC|$, и соединим точку A с точками D и E. Получим правильный треугольник ADE, равный треугольнику EFC (вся же фи-

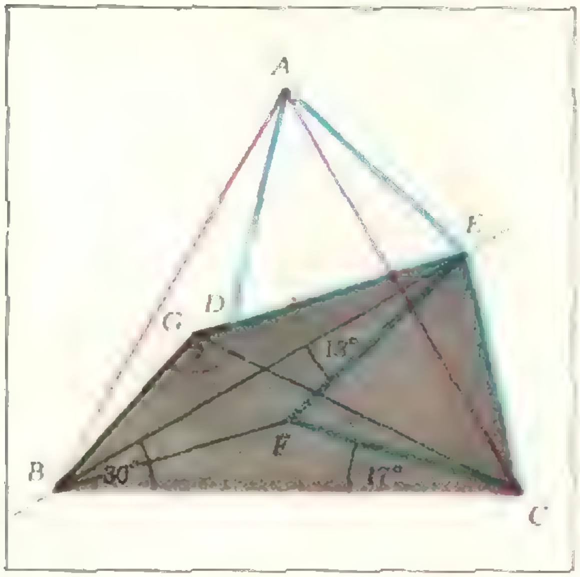


Рис. 7.

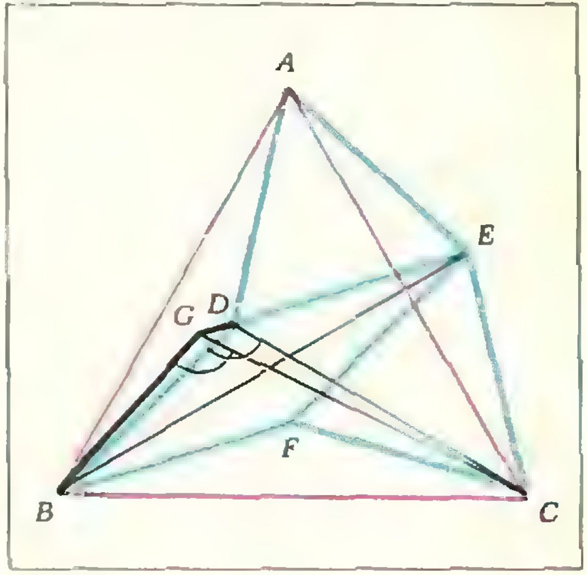


Рис. 8.

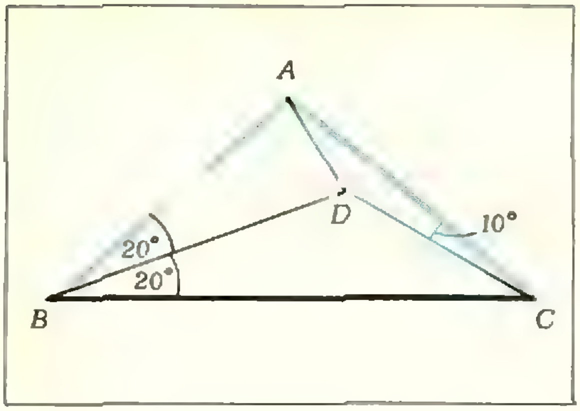


Рис. 9.

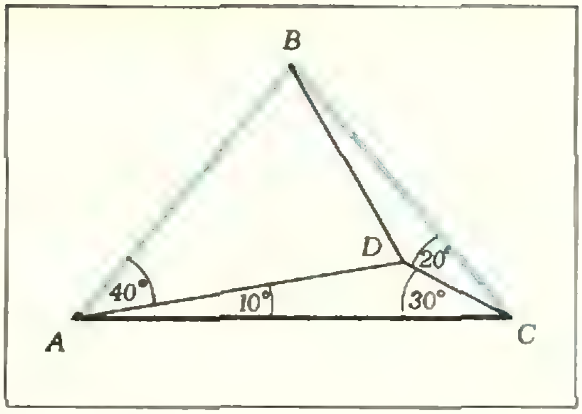


Рис. 10.

гура $BAEC$ симметрична относительно (BE)).

Соединим точку F с точкой B, точку D — с точками B и C (см. рис. 8). Треугольник ADB равен треугольнику AEC (по двум сторонам и углу между ними); так как ΔAEC — равнобедренный, то и ΔADB — тоже равнобедренный. Треугольники ADB и BFC симметричны относительно (BE), и поэтому тоже равны; $\widehat{BAD} = \widehat{BCF} = 17^\circ$. Значит, $\widehat{ADB} = 146^\circ$, а $BDE = 360^\circ - \widehat{ADB} - 60^\circ = 154^\circ$, то есть $\widehat{BDC} = 180^\circ - \widehat{BDE} = 180^\circ - 154^\circ = 26^\circ = \widehat{BCG}$, и поэтому вокруг четырехугольника $BGDC$ можно описать окружность. Угол BGC и угол BDC в этой окружности опираются на одну и ту же дугу, и поэтому равны. Но $\widehat{BDC} = 154^\circ - \widehat{EDC}$, где $\widehat{EDC}$ — угол при основании равнобедренного треугольника $\widehat{DEC}$, у которого угол при вершине равен 86°; следовательно, $\widehat{EDC} = 47^\circ$, а $\widehat{BDC} = \widehat{BGC} = 107^\circ$.

Условие этой задачи также поддается обобщению.

Задача 5′. *В четырехугольнике* $BGEC$ (BE и GC *— его диагонали*)

$$\widehat{EBC} = 30^\circ,\ \widehat{GCB} = \alpha,\ \widehat{GEB} = \frac{\alpha}{2},$$

$$\widehat{GCE} = 90^\circ - {}^3/_2\,\alpha.$$

Докажите, что $\widehat{BGC} = 120^\circ - \alpha/_2$.

В заключение мы предлагаем читателям несколько задач.

6. На сторонах AB и BC равнобедренного треугольника ABC ($|AB| = |BC|$) с углом при вершине 20° взяты точки E и D такие, что $\widehat{DAC} = 30^\circ$, $\widehat{ECD} = 20^\circ$. Найти $\widehat{CED}$.

7. На стороне AB треугольника ABC взята точка M так, что $|AM| = \frac{1}{3}|AB|$. Известно, что $\widehat{ACM} = 15^\circ$, $\widehat{CMB} = 60^\circ$. Определить углы треугольника ABC.

8. Из вершин A и B квадрата $ABCD$ проведены прямые AE и BE так, что точка E — внутри квадрата и $\widehat{DAE} = 15^\circ$, $\widehat{ABE} = 30^\circ$. Найти $\widehat{CED}$.

9. Из вершин B и C равнобедренного треугольника BAC ($|BA| = |AC|$, рис. 9), с углом при основании 40° проведены прямые BD и CD так, что угол $DBC = 20^\circ$, угол $ACD = 10^\circ$. Найти угол CAD.

10. Из вершин A и C равнобедренного треугольника ABC ($|AB| = |BC|$, рис. 10) с углом при основании 50° проведены прямые AD и CD так, что угол $DAC = 10^\circ$ и угол $BCD = 20^\circ$.
Найти угол DBC.

задачник кванта

Решения задач из этого номера можно посылать не позднее 1 сентября 1975 г. по адресу: 117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15, издательство «Наука», журнал «Квант». После адреса на конверте напишите, решения каких задач вы посылаете, например: «Задачник «Кванта», М331, М332» или «... Ф343». Решения задач по каждому из предметов (математике и физике), а также новые задачи просьба присылать в отдельных конвертах. Задачи из разных номеров журнала присылайте также в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки ваших решений). Условия оригинальных задач, предлагаемых для публикации, присылайте в двух экземплярах вместе с вашими решениями этих задач (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»). После формулировки задачи мы обычно указываем, кто предложил нам эту задачу. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Наиболее трудные задачи отмечены звёздочкой.

В этом номере «Задачник «Кванта» составлен из задач последней Всесоюзной олимпиады и их обобщений.

Задачи

М331—М335; Ф343—Ф347

М331. а) Треугольник $A_1B_1C_1$ получился из треугольника ABC поворотом вокруг центра описанной окружности на некоторый угол, меньший 180°. Докажите, что точки пересечения соответствующих прямых: (AB) и (A_1B_1), (BC) и (B_1C_1), (CA) и (C_1A_1)— являются вершинами треугольника, подобного треугольнику ABC.

б) Четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$ получился из четырехугольника $ABCD$ вписанного в окружность с центром O, поворотом вокруг центра O на некоторый угол, меньший 180°. Докажите, что точки пересечения соответствующих прямых: (AB) и (A_1B_1), (BC) и (B_1C_1), (CD) и (C_1D_1), (DA) и (D_1A_1) — являются вершинами параллелограмма. (8—10 кл.)

З. А. Скопец

М332. Можно ли составить куб размерами $k \times k \times k$ из белых и черных кубиков $1 \times 1 \times 1$ так, чтобы для каждого кубика ровно два из его соседей имели бы тот же цвет, что и он сам? (Два кубика считаются соседними, если они имеют общую грань.) (9 кл.)

А. Г. Гейн

М333. Три мухи ползают по сторонам треугольника ABC так, что центр тяжести образуемого треугольника остается на одном месте. Докажите, что он совпадает с центром тяжести треугольника ABC, если известно, что одна из мух проползла по всей границе треугольника. (Центром тяжести треугольника называется точка пересечения его медиан.) (8 кл.)

С. В. Фомин

М334. Дан многочлен $P(x)$ с
а) натуральными коэффициентами,
б) * целыми коэффициентами.

Для каждого натурального числа n через a_n обозначим сумму цифр в десятичной записи числа $P(n)$. Докажите, что найдется число, которое встречается в последовательности a_1, a_2, a_3,... бесконечное число раз. (9 кл.)

И. Н. Бернштейн

М335*. а) В квадрате 7×7 клеток отмечены центры k клеток. При этом никакие четыре отмеченные точки не являются вершинами прямоугольника со сторонами, параллельными сторонам квадрата. При каком наибольшем k это возможно?

б) Решите ту же задачу для квадрата 13×13 клеток. (8—10 кл.)

С. А. Гашков и А. А. Григорян

Ф343. Угол, под которым видно Солнце с Земли (угловой диаметр), равен приблизительно $\alpha \approx 10^{-2}$ *рад*. Радиус Земли $R_1 \approx 6400$ *км*. Ускорение свободного падения на Земле $g \approx 10$ *м/с*^{2}. Определите из этих данных отношение средних плотностей Земли и Солнца, принимая во внимание, что 1 *год* $\approx 3 \cdot 10^7$ *с*.

Примечание. Объем шара вычисляется по формуле $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, где R — радиус шара. (8 кл.)

Ф344. Заряд Q равномерно распределен по тонкому диэлектрическому кольцу, которое лежит на гладкой горизонтальной плоскости. Индукция магнитного поля, перпендикулярного плоскости кольца, меняется от 0 до B_0. Какую угловую скорость вращения приобретает при этом кольцо? Масса кольца равна m. (9 кл.)

Ф345. Оцените мощность двигателя, необходимую для поддержания в воздухе вертолета массы $M = 500$ *кг* с лопастями длиной $l = 3$ *м*.

Считать, что весь воздух под вращающимися лопастями движется однородным потоком вниз. (8—9 кл.)

Ф346. Одна из обкладок плоского конденсатора площадью S подвешена на пружине. Другая обкладка закреплена неподвижно. Расстояние между пластинами в начальный момент равно l_0. Конденсатор на короткое время подключили к батарее, и он зарядился до напряжения U. Какой должна быть жесткость пружины k, чтобы не происходило касания пластин? Смещением пластины за время заряда можно пренебречь. (9 кл.)

Ф347. Космический корабль вращается вокруг Луны по круговой орбите радиуса $R = 3{,}4 \cdot 10^6$ *м*. С какой скоростью нужно выбросить из корабля вымпел по касательной к траектории корабля, чтобы он упал на противоположной стороне Луны? Через какое время вымпел упадет на Луну? Принять, что ускорение свободного падения тел вблизи поверхности Луны в 6 раз меньше земного. Радиус Луны принять равным $1{,}7 \cdot 10^6$ *м*. (9 кл.)

Решения задач

М296 — М299; Ф303 — Ф311, Ф299

М296. *В таблицу $n \times n$ записаны n^2 чисел, сумма которых неотрицательна. Докажите, что можно переставить столбцы таблицы так, что сумма n чисел по диагонали, идущей из левого нижнего угла в правый верхний, будет неотрицательна.*

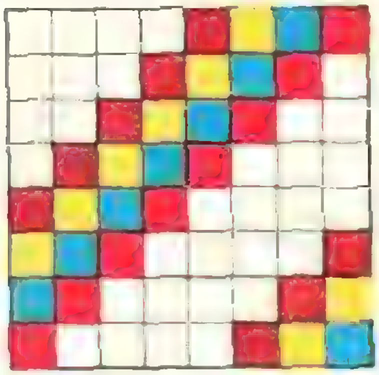


Рис. 1.

Назовем *циклическим сдвигом* такое преобразование таблицы: 1-й столбец переставляется на место 2-го, 2-й на место 3-го, . . . , наконец, последний, n-й — на место 1-го. Обозначим через s_0 сумму чисел, стоящих на диагонали таблицы (в красных клетках на рис. 1), через s_1 — сумму чисел, которые попадут на диагональ после циклического сдвига (в голубых клетках), через s_2 — сумму чисел, которые попадут на диагональ, если повторить циклический сдвиг еще раз (в желтых клетках), и вообще, через s_k — сумму чисел, которые попадут на диагональ, если проделать циклический сдвиг k раз. Ясно, что сумма всех чисел в таблице равна

$$s = s_0 + s_1 + \ldots + s_{n-1},$$

потому что если проделать циклический сдвиг 0, 1, . . . , $n-1$ раз, то за это время каждое число в таблице побывает на диагонали ровно однажды (а если проделать его n раз, то получится первоначальное расположение).

По условию s неотрицательно, следовательно, некоторое s_k должно быть неотрицательно. Проделав циклический сдвиг k раз, мы получим требуемую перестановку столбцов.

◆

М299.*) *При каких n правильный n-угольник можно разместить на листе бумаги в линейку так, чтобы все вершины лежали на линиях? (Линии — параллельные прямые, расположенные на одинаковых расстояниях друг от друга.)*

Предположим, что правильный n-угольник удалось разместить на линованной бумаге. Пусть O — центр этого многоугольника. Сделаем поворот плоскости на угол $360°/n$ с центром в точке O и нарисуем на одном чертеже и прежние, и новые (получившиеся после поворота) параллельные линии (рис. 2: n-угольник рисовать дважды не нужно, поскольку он совмещается после такого поворота сам с собой). Теперь каждая вершина n-угольника лежит в точке пересечения двух линий сетки, то есть n-угольник удалось разместить так, что все его вершины попали в *узлы* некоторой *решетки*; но, как доказано в статье А. А. Егорова «Решетки и правильные многоугольники» («Квант», 1974, № 12), это возможно лишь при $n=3, 4$ или 6.

Таким образом, только при этих n можно разместить правильный n-угольник на линованной бумаге.

Н. Б. Васильев

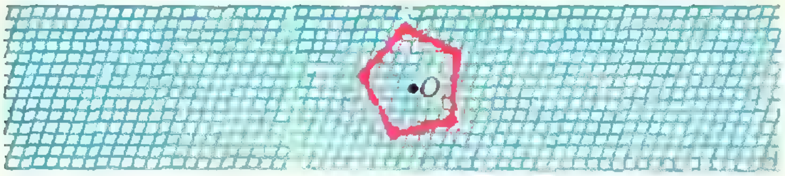


Рис. 2.

---

*) Решение задачи М297 содержится в заметке В. М. Фишмана «Решение задач с помощью геометрических преобразований», задачи М298 — в заметке В. Н. Вагутена «Близкие дроби», которая будет опубликована в «Кванте» № 8, 1975.

Ф303. *Точечный источник света находится на некотором расстоянии под тонкой собирающей линзой (рис. 3). Где и как нужно установить плоское зеркало для того, чтобы из линзы выходил параллельный пучок света по направлению, показанному стрелкой? Построить ход лучей.*

Пусть $F'F''$ — фокальная плоскость линзы. Проведем побочную оптическую ось AA', параллельную направлению, заданному стрелкой (см. рис. 3). Если источник света расположен в фокальной плоскости линзы в точке S' пересечения ее с осью AA', то линза собирает его лучи в параллельный пучок, направленный вдоль оси AA', то есть из линзы выходит параллельный пучок света в направлении, указанном стрелкой.

В нашем случае источником для линзы будет изображение источника S в плоском зеркале. Чтобы это изображение находилось в точке S', зеркало должно быть расположено посередине отрезка SS' перпендикулярно к нему. Ход лучей показан на рисунке 3.

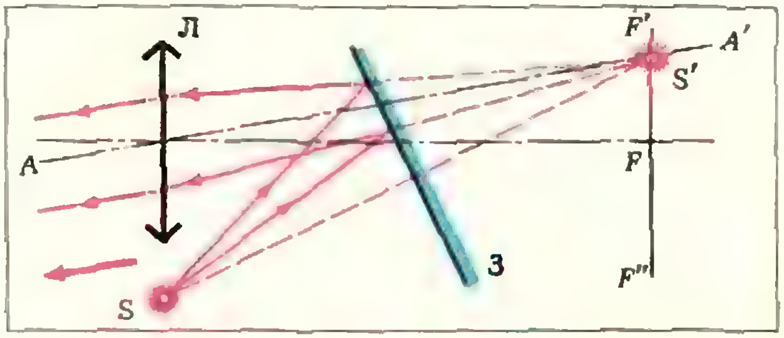


Рис. 3.

◆

Ф304. *Насос подает массу m воды в час на высоту H по трубе диаметром d. Какова должна быть мощность насоса N? Можно ли с помощью насоса меньшей мощности подавать массу m воды в час на высоту H?*

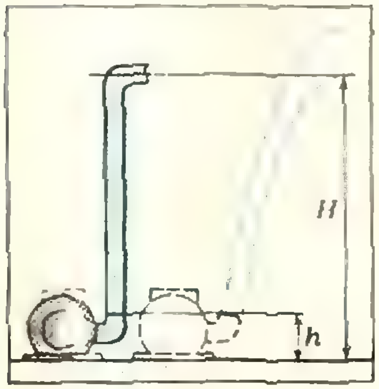


Рис. 4.

За время Δt насос подает на высоту H массу воды $m\Delta t$, совершая работу A, равную изменению механической энергии воды. Так как внизу вода не обладала кинетической энергией, а насос «гонит» ее по трубе с некоторой скоростью v, то

$$A = \frac{(m\Delta t)\, v^2}{2} + (m\Delta t)\, gH.$$

Следовательно, мощность насоса $N = \dfrac{mv^2}{2} + mgH$.

Найдем скорость v. За время Δt через поперечное сечение трубы площади $S = \dfrac{\pi d^2}{4}$ проходит объем воды $V = v\Delta t\, \dfrac{\pi d^2}{4}$, масса которой равна $v\Delta t\, \dfrac{\pi d^2}{4}\, \rho$ (ρ — плотность воды). С другой стороны, эта масса равна $m\Delta t$, то есть $v\, \dfrac{\pi d^2}{4}\, \rho = m$, откуда $v = \dfrac{4m}{\pi d^2 \rho}$.

Таким образом, мощность насоса

$$N = \frac{8m^3}{\pi^2 d^4 \rho^2} + mgH.$$

Можно ли с помощью насоса меньшей мощности подавать такую же массу воды в час на ту же высоту H? Из выражения для N *видно, что чем больше диаметр трубы d*, тем меньше необходимая мощность насоса.

Но можно уменьшить величину необходимой мощности, не меняя значений параметров, заданных в условии задачи. Отрежем на некоторой высоте $h \ll H$ всю верхнюю часть трубы. Пусть из оставшейся части трубки вода вылетает с некоторой скоростью u (см. рис. 4).

Необходимая для этого мощность насоса $N' = \frac{mu^2}{2}$ (так как $h \ll H$, потенциальной энергией mgh пренебрегаем). Для того чтобы вода поднималась на высоту H, необходимо, чтобы ее скорость при вылете из трубы была не меньше, чем $u = \sqrt{2gH}$. Таким образом, можно подавать в час массу воды m на высоту H с помощью насоса мощностью

$$N' = m\frac{u^2}{2} = mgH < N.$$

◆

***Ф305.** В сосуд с водой опускают Г-образный стеклянный капилляр радиуса r, полностью смачиваемый водой (рис. 5). Зависимость коэффициента поверхностного натяжения воды от температуры показана на рисунке 6. В каком диапазоне температур вся вода вытечет из сосуда, если r=0,1 мм, h=14,1 см и H = 15 см? Толщиной стенок капилляра пренебречь.*

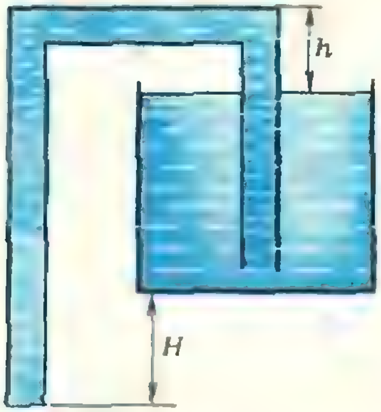


Рис. 5.

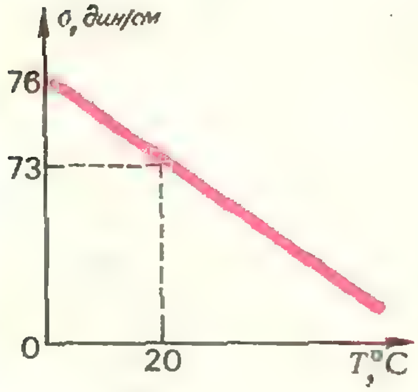


Рис. 6.

Для того чтобы вода вытекла из сосуда через капилляр, она должна, прежде всего, подняться по правому колену капилляра до его горизонтального участка. В начальный момент высота поднятия должна быть равна h, а в конце, когда почти вся вода уже вытечет из сосуда, жидкость должна подняться на высоту $h+l$, где l — высота начального уровня воды в сосуде. Это возможно, если коэффициент поверхностного натяжения σ таков, что высота поднятия воды в капилляре радиуса r не меньше $h+l$, то есть

$$\frac{2\sigma}{\rho g r} > h + l, \text{ или } \sigma > \frac{1}{2}\rho g r\,(h+l).$$

Поднявшись в правом колене, вода заполнит левое колено, на конце которого образуется выпуклый мениск, могущий удержать определенный столб воды. Вода в верхней части капилляра (от его горизонтального участка до уровня воды в сосуде) находится в равновесии, поэтому силы добавочного давления под мениском должны удержать столб воды высотой $H+l$ в начальный момент и высотой H — в конечный момент. Радиус мениска не может быть меньше радиуса капилляра r, а значит, добавочное давление под мениском не может быть больше $\frac{2\sigma}{r}$. Следовательно, вода будет вытекать из капилляра, если гидростатическое давление окажется больше добавочного, то есть

$$\rho g(H+l) > \frac{2\sigma}{r}, \text{ или } \sigma < \frac{1}{2}\rho g r\,(H+l).$$

Таким образом, из сосуда через капилляр вытечет вся вода, если

$$\frac{1}{2}\rho g r\,(h+l) < \sigma < \frac{1}{2}\rho g r\,(H+l),$$

или

$$\frac{1}{2}\rho g r h < \sigma < \frac{1}{2}\rho g r H.$$

Для того чтобы перейти от диапазона значений коэффициента поверхностного натяжения к диапазону температур, воспользуемся графиком, приведенным на рисунке 6. Из графика видно, что зависимость σ от T линейная, то есть

$$\sigma = \sigma_0 + \alpha T, \qquad (*)$$

где $\sigma_0 = 76$ дин/см. При температуре $T = 20$°C $\sigma = 73$ дин/см, следовательно,

$$73\ дин/см = 76\ дин/см + \alpha\cdot 20 град,$$

откуда

$$\alpha = -0{,}15\ дин/(см\cdot град).$$

Граничные значения диапазона σ равны

$$\sigma_{\min} = \frac{1}{2}\rho g r h = 70{,}5\ дин/см,$$

$$\sigma_{\max} = \frac{1}{2}\rho g r H = 75\ дин/см.$$

Теперь запишем уравнение (*) для температур $T_{\max}$ и $T_{\min}$, соответствующих значениям $\sigma_{\min}$ и $\sigma_{\max}$:

$$70{,}5 = 76 - 0{,}15\,T_{\max},$$

$$75 = 76 - 0{,}15\,T_{\min}.$$

Отсюда

$$T_{\max} \approx 36{,}7^\circ C \quad и \quad T_{\min} \approx 6{,}7^\circ C.$$

Итак, вся вода вытечет из сосуда через капилляр, если

$$6{,}7^\circ C < T < 36{,}7^\circ C.$$

◆

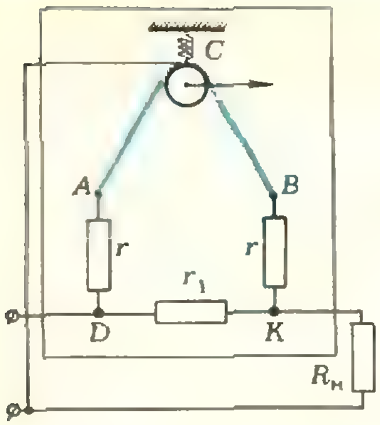


Рис. 7

Ф308. *На рисунке 7 изображена схема теплового ваттметра ($r_1 \ll r$, $r_1 \ll R_н$). Тонкая проволока AB, накаливаемая током, перекинута через блок, оттягиваемый кверху пружинкой. К блоку прикреплена стрелка, которая поворачивается при повороте блока. Показать, что поворот стрелки прибора прямо пропорционален мощности тока P, потребляемой нагрузкой ($R_н$).*

Считать, что: 1) количество тепла, которое отдает нагретая проволока окружающей среде, пропорционально разности температур проволоки и среды; 2) изменение сопротивлений участков проволоки AB из-за удлинения и изменения их температуры пренебрежимо мало.

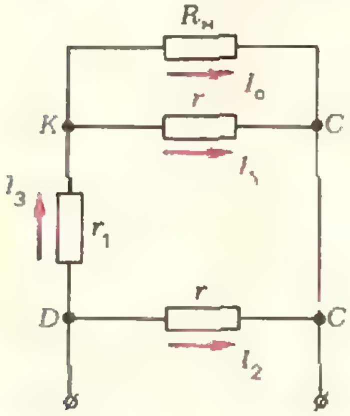


Рис. 8.

Угол поворота стрелки прибора пропорционален разности удлинений участков проволоки AC и CB. Эти удлинения определяются токами, идущими по соответствующим участкам.

Обозначим через I_0 ток, текущий по нагрузке $R_н$, и свяжем с ним токи I_1 и I_2, текущие по участкам CB и AC. Перерисуем электрическую схему подключения ваттметра, как показано на рисунке 8. Поскольку сопротивление проволоки много меньше сопротивления r, будем считать, что сопротивления участков AC и CB этой проволоки включены в значения r, так что сопротивления участков цепи DC и KC равны r.

Так как напряжения на сопротивлении $R_н$ и на сопротивлении r участка KC равны, то

$$I_0 R_н = I_1 r, \text{ или } I_1 = I_0\frac{R_н}{r}.$$

Ток $I_2 = \dfrac{U_{DC}}{r}$, где U_{DC} — напряжение на участке DC. Оно равно $U_{DC} = U_{KC} + I_3 r_1$, где $U_{KC} = I_0 R_н$, а

$$I_3 = I_0 + I_1 = I_0\left(1 + \frac{R_н}{r}\right).$$

Тогда

$$I_2 = I_0\left(\frac{R_н r_1}{r^2} + \frac{r_1}{r} + \frac{R_н}{r}\right).$$

Посмотрим теперь, как связано удлинение проволоки с током, который идет по этой проволоке. При тепловом равновесии количество тепла, выделяющееся в проволоке, равно количеству тепла, которое отдается среде:

$$I^2 R = k\Delta t,$$

где Δt — разность температур проволоки и среды, R — сопротивление половины проволоки и k — коэффициент пропорциональности. С другой стороны, увеличение длины проволоки происходит по закону

$$l = l_0(1 + \alpha\Delta t),$$

где α — коэффициент теплового расширения проволоки. Из последних двух равенств

$$\Delta l = l_0\alpha\Delta t = \frac{I^2 R}{k} l_0\alpha = k_1 I^2$$

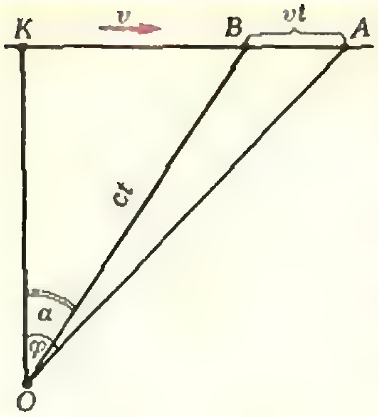


Рис. 9.

$\left(k_1 = l_0\alpha \frac{R}{k}\right)$, то есть удлинение проволоки пропорционально квадрату силы тока. Это означает, что удлинение участка CB проволоки $\Delta l_1 \sim I_1^2$, а участка AC проволоки $\Delta l_2 \sim I_2^2$.

Таким образом, угол поворота стрелки прибора, связанный с разностью удлинений участков AC и CB, пропорционален величине

$$I_2^2 - I_1^2 = I_0^2\left(\frac{r_1^2}{r^2} + \frac{r_1^2}{r^2}\,\frac{R_н^2}{r^2} + 2\frac{r_1^2}{r^2}\,\frac{R_н}{r} + 2\frac{r_1}{r}\,\frac{R_н^2}{r^2} + 2\frac{R_н}{r}\,\frac{r_1}{r}\right).$$

Так как $r_1 \ll r$, то $\frac{r_1}{r} \ll 1$ и можно пренебречь первым, вторым и третьим членами по сравнению с четвертым и пятым. Кроме того, для того чтобы подключение ваттметра практически не влияло на напряжение на нагрузке, r должно быть много больше $R_н$. Это означает, что $\frac{R_н}{r} \ll 1$ и $\left(\frac{R_н}{r}\right)^2 \ll \frac{R_н}{r}$, так что можно пренебречь четвертым членом по сравнению с пятым. В результате получим

$$I_2^2 - I_1^2 = 2I_0^2 R_н \frac{r_1}{r^2} = 2\frac{r_1}{r^2}P,$$

то есть разность $I_2^2 - I_1^2$ пропорциональна мощности, выделяющейся на нагрузке. Следовательно, разность удлинений частей проволоки и, соответственно, угол поворота стрелки прибора пропорциональны мощности тока, потребляемой нагрузкой.

◆

Ф307. *Самолет пролетает с постоянной скоростью v по горизонтальной прямой, проходящей над головой наблюдателя. Какой угол α с вертикалью составляет направление, по которому к наблюдателю доносится звук мотора в тот момент, когда наблюдатель видит самолет в направлении, составляющем угол φ с вертикалью? Скорость звука c. Рассмотреть случаи $v > c$ и $v < c$.*

Пусть наблюдатель находится в точке O (рис. 9), видит самолет в точке A и слышит звук, излученный самолетом в тот момент, когда самолет находился в точке B. Обозначим через t время, за которое звук из точки B дошел до наблюдателя, тогда $BO = ct$ и $BA = vt$. Из прямоугольного треугольника AOK

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{KB + BA}{KO} = \operatorname{tg}\alpha + \frac{vt}{ct\cos\alpha}. \qquad (1)$$

Возведя равенство (1) в квадрат, обозначив $\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\alpha$ через x и учтя, что $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$, получим

$$x^2 - 2\frac{\operatorname{tg}\varphi}{1-\frac{c^2}{v^2}}\,x + \frac{1}{\cos^2\varphi\left(1-\frac{c^2}{v^2}\right)} = 0. \qquad (2)$$

Отсюда

$$x_{1,2} = \frac{\operatorname{tg}\varphi}{1-\frac{c^2}{v^2}} \pm \sqrt{\frac{\operatorname{tg}^2\varphi}{\left(1-\frac{c^2}{v^2}\right)^2} - \frac{1}{\cos^2\varphi\left(1-\frac{c^2}{v^2}\right)}}, \qquad (3)$$

причем уравнению (1) удовлетворяют только положительные значения x.

Рассмотрим сначала случай, когда скорость самолета v меньше скорости звука c. Так как $c^2/v^2 > 1$, то $x_1 > 0$ и $x_2 < 0$, то есть подходит только одно значение $x = x_1$. «Слышимый» самолет просто отстает от видимого.

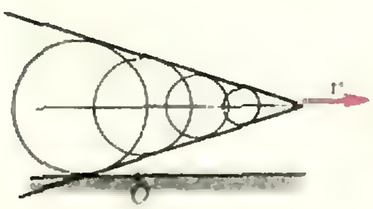


Рис. 10.

Интереснее результат в случае сверхзвукового самолета ($v>c$). Действительные корни уравнения (2) есть только при $\cos\varphi<\frac{c}{v}$, причем положительны сразу оба корня ($\operatorname{tg}\varphi>0$). Что это означает? Разберемся в этом более подробно.

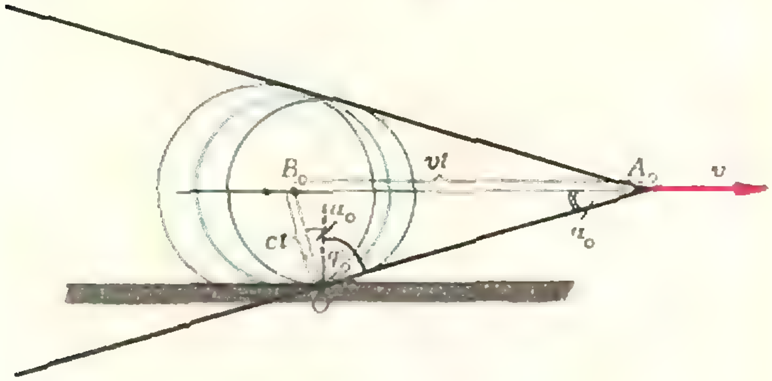


Рис. 11.

Каждая точка траектории самолета является источником сферической звуковой волны. Огибающая волновых фронтов представляет собой коническую поверхность (рис. 10), которая движется вперед со скоростью самолета v. Впервые наблюдатель услышит звук в тот момент, когда в точку O придет один из волновых фронтов. Если самолет в этот момент будет находиться в точке A_0, то наблюдатель будет слышать звук, идущий к нему из точки B_0 (рис. 11). Из рисунка 11 видно, что $\sin\alpha_0=\cos\varphi_0=\frac{ct}{vt}=\frac{c}{v}$. При удалении самолета угол φ увеличивается, а $\cos\varphi$ — уменьшается (так что, действительно, самолет слышен при углах φ таких, что $\cos\varphi\leqslant\frac{c}{v}$).

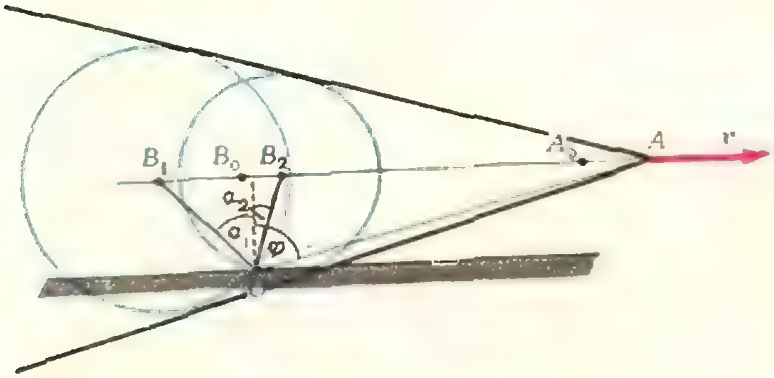


Рис. 12.

Начиная с этого момента, в точку O будут приходить фронты звуковых волн, излученных самолетом в двух разных точках его траектории (рис. 12). В тот момент, когда самолет находится в точке A, наблюдатель будет слышать звук, который был излучен самолетом в точках B_1 и B_2 (углы α_1 и α_2 определяются из формулы (3)), то есть теперь уже два волновых фронта проходят через точку O. Таким образом, при удалении самолета от точки A_0 наблюдателю будет казаться, что из точки B_0 движутся в разные стороны два источника звука.

Ф308. *Фотометр представляет собой лист бумаги с жирным пятном. Этот лист устанавливают между двумя точечными источниками света. Сила света одного источника $I_1 = 20$ св, силу света другого источника I_2 требуется определить. Для этого вначале подбирают расстояния l_1 и l_2 источников от листа так, чтобы пятно не выделялось на фоне бумаги, если смотреть на него со стороны первого источника. Оказалось, что $l_2 = 2l_1$. Затем подбирают расстояния l_1' и l_2' так, чтобы пятно не выделялось на фоне бумаги, если смотреть со стороны второго источника. Оказалось, что $l_1' = l_2' = l$. Определить силу света второго источника.*

Лист ставится перпендикулярно линии, соединяющей источники.

Подсказка. Каждый участок бумаги можно охарактеризовать коэффициентом пропускания и коэффициентом отражения света.

Пятно не выделяется на фоне бумаги, если световые потоки $\Phi_п$ и $\Phi_б$, идущие соответственно с единицы площади пятна и чистой бумаги и попадающие в глаз наблюдателя, одинаковы. Бумага и пятно отражают и пропускают падающий на них свет диффузно, то есть равномерно во все стороны. Поэтому очевидно, что световые потоки $\Phi_п$ и $\Phi_б$ пропорциональны освещенности пятна $E_п$ и освещенности бумаги $E_б$ соответственно.

Если смотреть на пятно со стороны первого источника, то освещенность пятна складывается из освещенности за счет лучей, идущих от первого источника и отраженных пятном —

$$E_1 = r_п \frac{I_1}{l_1^2}$$

($r_п$—коэффициент отражения света пятном), и освещенности за счет лучей, идущих от второго источника и прошедших через пятно — $E_2 = \alpha_п \frac{I_2}{l_2^2}$ ($\alpha_п$ — коэффициент пропускания пятна):

$$E_п = E_1 + E_2 = r_п \frac{I_1}{l_1^2} + \alpha_п \frac{I_2}{l_2^2}.$$

Аналогично, если коэффициент отражения света чистыми участками бумаги равен $r_б$, а коэффициент пропускания этими участками равен $\alpha_б$, то освещенность чистых участков бумаги равна

$$E_б = r_б \frac{I_1}{l_1^2} + \alpha_б \frac{I_2}{l_2^2}.$$

Приравнивая $E_п$ и $E_б$, получим уравнение

$$r_п \frac{I_1}{l_1^2} + \alpha_п \frac{I_2}{l_2^2} = r_б \frac{I_1}{l_1^2} + \alpha_б \frac{I_2}{l_2^2}, \qquad (1)$$

или, учитывая, что $l_2 = 2l_1$,

$$4r_п I_1 + \alpha_п I_2 = 4r_б I_1 + \alpha_б I_2. \qquad (2)$$

Таким же образом можно получить условие равенства освещенностей пятна и чистой бумаги для второго случая, когда на пятно смотрят со стороны второго источника:

$$\alpha_п \frac{I_1}{l_1'^2} + r_п \frac{I_2}{l_2'^2} = \alpha_б \frac{I_1}{l_1'^2} + r_б \frac{I_2}{l_2'^2}. \qquad (3)$$

Так как в этом случае $l_1' = l_2'$, то

$$\alpha_п I_1 + r_п I_2 = \alpha_б I_1 + r_б I_2. \qquad (4)$$

В два уравнения (2) и (4) входят пять неизвестных, определить их все невозможно. Однако можно найти одно из них, а именно I_2. Для этого перенесем в уравнении (2) члены, содержащие I_1, в левую часть уравнения, а члены, содержащие I_2, — в правую часть. Получим

$$4I_1(r_п - r_б) = I_2(\alpha_б - \alpha_п). \qquad (5)$$

Аналогично поступим с уравнением (4):

$$I_1(\alpha_б - \alpha_п) = I_2(r_п - r_б). \qquad (6)$$

Определив теперь из уравнения (5) отношение $\frac{\alpha_б - \alpha_п}{r_п - r_б}$ и подставив его в уравнение (6), получим

$$\frac{4I_1}{I_2} = \frac{I_2}{I_1}, \text{ или } I_2 = 2I_1 = 40 \text{ св.}$$

Ф309. *Змея заползла наполовину в неподвижную узкую трубку, лежащую на плоскости. Вторая половина змеи извивается произвольно по плоскости. Считая змею тонким однородным шнуром длины l, найти, в какой области может оказаться центр тяжести всей змеи.*

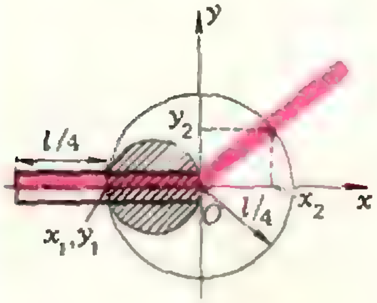


Рис. 13.

Центр тяжести той половины змеи, которая находится в трубе, расположен на расстоянии $\frac{l}{4}$ от края трубы. Его координаты $(x_1,\ y_1)$ равны (рис. 13)

$$x_1 = -\frac{l}{4} \text{ и } y_1 = 0.$$

Центр тяжести второй половины змеи, произвольно извивающейся по плоскости, может находиться в любой точке внутри круга радиуса $\frac{l}{4}$ с центром в начале координат, то есть его координаты $(x_2,\ y_2)$ удовлетворяют неравенству

$$x_2^2 + y_2^2 \leqslant \left(\frac{l}{4}\right)^2. \qquad (*)$$

Так как массы обеих частей змеи одинаковы, то координаты центра тяжести всей змеи определяются следующими соотношениями:

$$x_\text{ц} = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{x_2}{2} - \frac{l}{8}, \quad y_\text{ц} = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{y_2}{2}.$$

Выразим из этих равенств x_2 и y_2 через $x_\text{ц}$ и $y_\text{ц}$:

$$x_2 = 2x_\text{ц} + \frac{l}{4},\ y_2 = 2y_\text{ц}.$$

Подставив эти значения в неравенство (*), получим

$$\left(2x_\text{ц} + \frac{l}{4}\right)^2 + 4y_\text{ц}^2 \leqslant \left(\frac{l}{4}\right)^2, \text{ или } \left(x_\text{ц} + \frac{l}{8}\right)^2 + y_\text{ц}^2 \leqslant \left(\frac{l}{8}\right)^2.$$

Это означает, что центр тяжести всей змеи может находиться в любой точке круга радиуса $\frac{l}{8}$ с центром, координаты которого $x = -\frac{l}{8}$ и $y = 0$ (на рис. 13 этот круг заштрихован).

◆

Ф310. *Концы пружины закреплены. Как, не освобождая концов пружины, деформировать ее так, чтобы пружина после такой обработки стремилась а) сократиться? б) удлиниться?*

Рассмотрим вначале незакрепленную пружину и будем ее деформировать, то есть растягивать или сжимать. Количественно деформацию можно охарактеризовать величиной абсолютной деформации $\Delta l = |l - l_0|$ (l_0 — длина пружины в недеформированном состоянии) или величиной относительной деформации $\frac{\Delta l}{l_0}$. Что произойдет с пружиной после прекращения действия внешних сил? Оказывается, возможны два случая: или деформация полностью исчезает (пружина восстанавливает свою длину), или она частично остается, то есть получается остаточная деформация (длина пружины не восстанавливается). В первом случае деформацию называют упругой, а во втором — пластичной. От чего же зависит, будет деформация упругой или пластичной? Опыт показывает, что характер деформации зависит, прежде всего, от величины самой деформации (а также от материала пружины и от состояния этого материала — от его температуры, предшествующей обработки и т. п.). При малых относительных деформациях пружина является упругой, то есть целиком восстанавливает свою форму и размеры после освобождения ее концов. Если же относительные деформации велики, пружина становится пластичной, возникает остаточная деформация. Длина пружины становится больше, чем l_0, если пружину растягивали, и меньше, чем l_0, если ее сжимали. Воспользуемся этим свойством пружины для решения задачи.

Ф309. *Змея заползла наполовину в неподвижную узкую трубку, лежащую на плоскости. Вторая половина змеи извивается произвольно по плоскости. Считая змею тонким однородным шнуром длины l, найти, в какой области может оказаться центр тяжести всей змеи.*

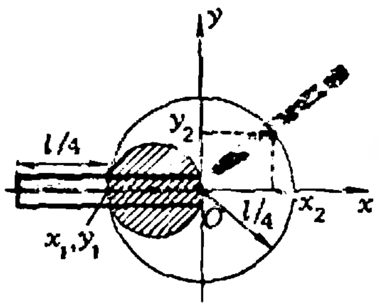


Рис. 13.

Центр тяжести той половины змеи, которая находится в трубе, расположен на расстоянии $\frac{l}{4}$ от края трубы. Его координаты (x_1, y_1) равны (рис. 13)

$$x_1 = -\frac{l}{4} \text{ и } y_1 = 0.$$

Центр тяжести второй половины змеи, произвольно извивающейся по плоскости, может находиться в любой точке внутри круга радиуса $\frac{l}{4}$ с центром в начале координат, то есть его координаты (x_2, y_2) удовлетворяют неравенству

$$x_2^2 + y_2^2 \leqslant \left(\frac{l}{4}\right)^2. \qquad (*)$$

Так как массы обеих частей змеи одинаковы, то координаты центра тяжести всей змеи определяются следующими соотношениями:

$$x_ц = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{x_2}{2} - \frac{l}{8}, \quad y_ц = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{y_2}{2}.$$

Выразим из этих равенств x_2 и y_2 через $x_ц$ и $y_ц$:

$$x_2 = 2x_ц + \frac{l}{4}, \; y_2 = 2y_ц.$$

Подставив эти значения в неравенство $(*)$, получим

$$\left(2x_ц + \frac{l}{4}\right)^2 + 4y_ц^2 \leqslant \left(\frac{l}{4}\right)^2, \text{ или } \left(x_ц + \frac{l}{8}\right)^2 + y_ц^2 \leqslant \left(\frac{l}{8}\right)^2.$$

Это означает, что центр тяжести всей змеи может находиться в любой точке круга радиуса $\frac{l}{8}$ с центром, координаты которого $x = -\frac{l}{8}$ и $y = 0$ (на рис. 13 этот круг заштрихован).

◆

Ф310. *Концы пружины закреплены. Как, не освобождая концов пружины, деформировать ее так, чтобы пружина после такой обработки стремилась а) сократиться? б) удлиниться?*

Рассмотрим вначале незакрепленную пружину и будем ее деформировать, то есть растягивать или сжимать. Количественно деформацию можно охарактеризовать величиной абсолютной деформации $\Delta l = |l - l_0|$ (l_0 — длина пружины в недеформированном состоянии) или величиной относительной деформации $\frac{\Delta l}{l_0}$. Что произойдет с пружиной после прекращения действия внешних сил? Оказывается, возможны два случая: или деформация полностью исчезает (пружина восстанавливает свою длину), или она частично остается, то есть получается остаточная деформация (длина пружины не восстанавливается). В первом случае деформацию называют упругой, а во втором — пластичной. От чего же зависит, будет деформация упругой или пластичной? Опыт показывает, что характер деформации зависит, прежде всего, от величины самой деформации (а также от материала пружины и от состояния этого материала — от его температуры, предшествующей обработки и т. п.). При малых относительных деформациях пружина является упругой, то есть целиком восстанавливает свою форму и размеры после освобождения ее концов. Если же относительные деформации велики, пружина становится пластичной, возникает остаточная деформация. Длина пружины становится больше, чем l_0, если пружину растягивали, и меньше, чем l_0, если ее сжимали. Воспользуемся этим свойством пружины для решения задачи.

Ф299. *По гибкому шлангу сечением S течет жидкость плотности ρ со скоростью v. Найти натяжение нити AB, соединяющей концы A и B шланга, если известно, что она является диаметром полуокружности, которую образует шланг (рис. 14).*

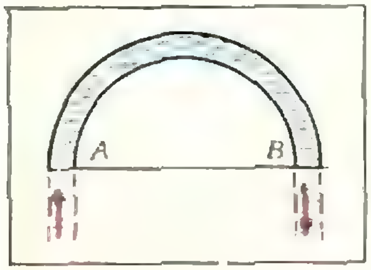


Рис. 14.

Рассмотрим предварительно другую задачу. Пусть гибкий шланг, в котором идет речь в условии, свернут в кольцо таким образом, что линия AB является диаметром окружности. Пусть жидкость течет в кольце равномерно без трения, а сила тяжести отсутствует.

Тогда стенки шланга должны быть растянуты так, что равнодействующая сил натяжения, приложенных к небольшому участку шланга, как раз уравновешивает силу давления жидкости. При этом силы натяжения направлены всюду по касательной к стенке шланга, и следовательно, нижняя половина кольца действует на верхнюю только с силами, направленными по вертикали.

Согласно общим принципам решения механических задач нижнюю половину кольцевого шланга можно теперь отбросить, считая, что на верхнюю половину действуют силы, равные тем силам, с которыми нижняя половина шланга действовала на верхнюю. Так как эти силы не имеют составляющих, направленных по диаметру AB, то для удержания в равновесии шланга в форме полуокружности с текущей жидкостью, нить AB не нужна.

Следовательно, ее натяжение равно нулю.

Б. Б. Буховцев

В этом номере мы приводим список читателей, приславших верные решения задач **М286—М295 и Ф303—Ф312** (жирная цифра после фамилии — последняя цифра номера решенной задачи).

Математика

В большинстве писем содержалось верное решение задачи М294. Остальные задачи решили: *Д. Азов* (Челябинск) 6—9, 1—3; *А. Александрин* (Валуйки) 1, 3; *Б. Аллой* (Ленинград) 8; *М. Андреев* (Москва) 6; *О. Аполонский* (Жуковский) 1, 2; *П. Баньковский* (Уральск) 1; *В. Басманов* (Воронеж) 6, 7, 9—3; *П. Белев* (п/о Монгохто Хабаровского кр.) 2, 3; *М. Бирман* (Саратов) 6, 8, 0; *А. Блох* (Харьков) 6—3, 5; *А. Богорад* (Ленинград) 2, 3, 5; *Л. Бродский* (Москва) 8, 1—3; *А. Варпаховский* (Ленинград) 1—3; *Я. Верховский* (Рыбное) 6; *Ю. Виницкий* (Ташкент) 7, 8, 0, 1, 3; *В. Винокуров* (Москва) 6—9, 2, 3; *В. Вичирко* (Ленинград) 1—3; *И. Вольвовский* (Москва) 3; *Л. Воробьев* (Витебск) 1, 2; *А. Ворович* (Москва) 2, 3; *Л. Гандельсман* (Ленинград) 6—8, 0; *М. Гандельсман* (Ленинград) 6, 8; *М. Гедалин* (Тбилиси) 2; *М. Георгиева* (Болгария) 6—3, 5; *Е. Глезин* (Ленинград) 6, 8, 0; *О. Глушко* (Москва) 6, 0; *Е. Горбатый* (Одесса) 1—3; *С. Горший* (Таганрог) 6, 8, 9, 1, 3, 5; *С. Гродский* (Корсунь-Шевченковский) 3; *В. Гусейнов* (Нахичевань) 6, 9, 1—3; *А. Диденко* (Краснодар) 0, 2; *Ю. Докучаев* (Ленинград) 8, 0; *А. Древич* (Гродно) 1; *М. Дякон* (с. Хилиуцы Молд. ССР) 1; *В. Ерпылев* (Ашхабад) 1—3; *И. Заверткин* (Орск) 1—3; *А. Заргаров* (Баку) 3; *А. Заргарян* (Тбилиси) 1, 2; *Д. Зелевинский* (Москва) 1—3; 5; *С. Золотарев* (Москва) 2, 3; *М. Имерлишвили* (Тбилиси) 6, 0—3; *Н. Искендеров* (Акстафа) 1; *И. Калика* (Киев) 2; *А. Камалян* (Иджеван) 8, 9, 2, 3; *В. Каменецкий* (Москва) 2; *В. Карачик* (Ташкент) 6, 8, 9; *Л. Клименок* (Москва) 3; *В. Клочков* (Челябинск) 1, 2; *В. Кобылецкий* (Баку) 1, 2; *В. Конев* (Ангарск) 6, 1—3; *А. Кресин* (Баку) 2; *Т. Кулиев* (Баку) 8—3; *А. Лейдерман* (Могилев-Подольский) 1—3; *Р. Леманн* (ГДР) 2, 3; *В. Липкин* (Москва) 6, 7, 1, 2; *С. Лифиц* (Харьков) 6—2; *Г. Лупырь* (Баку) 8, 9; *М. Любич* (Харьков) 6, 8—3; *С. Махчукян* (Ереван) 3; *В. Медведь* (Молодечно) 6, 8, 2; *А. Меликов* (Сумгаит) 3; *Ю. Михалев* (Белая Холуница) 3; *М. Морайне* (Польша) 6—8, 1—3; *И. Морозов* (Горький) 8, 0; *Н. Мощук* (Новосибирск) 2; *Ф. Мурсагулиев* (Сиазань) 1; *В. Нейман* (Ленинград) 2; *А. Непряхин* (Мингечаур) 1—3; *Н. Нецветаев* (Ленинград) 6, 8—3, 5; *О. Огиевский* (Дубна) 6, 7, 2, 3; *О. Окунев* (Казань) 2, 3; *Е. Павленко* (Армавир) 1, 3; *И. Панин* (Апатиты) 6, 8, 9, 1, 3; *И. Пенков* (Москва) 1, 3; *Р. Петерсхаген* (ГДР) 7, 8; *А. Плахов* (Москва) 2, 3; *В. Пойда* (с. Голятин Закарпатской обл.) 1; *В. Полетаев* (Уфа) 1; *М. Половинник* (Мена) 3; *Е. Полтавец* (Миргород) 1, 3; *С. Попов* (Москва) 6, 0, 2; *В. Порев* (Киев) 3; *Р. Портной* (Черновцы) 8, 0; *С. Пославский* (Харьков) 6, 8, 9, 2, 3; *Ю. Пошехонов* (Энгельс) 6—3, 5; *А. Разборов* (Люберцы) 6, 8, 1—3; *М. Райтер* (Ленинград) 6, 8, 0—3; *В. Рогава* (Тбилиси) 2; *В. Романов* (Димитровград) 0—2; *Л. Рубинштейн* (Калининград) 1—3; *И. Рудой* (Харьков) 1, 2; *А. Сидоров* (Винница) 1; *С. Соловьев* (Орел) 2, 3; *А. Соломахов* (Москва) 2, 3; *Б. Смоляк* (Ленинград) 6—3, 5; *М. Спиваковский* (Москва) 8, 0; *И. Степанкин* (Мингечаур) 3; *В. Тарасов* (Ленинград) 0—3; *А. Тебекин* (с. Архангельское Воронежской обл.) 1—3; *Е. Титов* (Ленинград) 6, 0, 2, 3; *А. Тонких* (с. Октябрьское Липецкой обл.) 1, 3; *С. Трегуб* (Ташкент) 8, 0—3; *А. Туровский* (Псков) 2, 3; *С. Фарян* (Ереван) 3; *С. Филимонов* (Ленинград) 3; *Ю. Философов* (Саратов) 7, 8, 0—2, 5; *С. Финашин* (Ленинград) 6—3, 5; *В. Харатоник* (Польша) 6—8, 0—3; *С. Харовский* (с. Великие Черноконцы Тернопольской обл.) 1; *А. Хомич* (Брест) 1—3; *Д. Хухунайшвили* (Тбилиси) 2; *И. Цукерман* (Ленинград) 6, 8, 0—3; *А. Черебатов* (Омск) 2, 3; *Т. Чилачава* (Тбилиси) 1; *В. Чурук* (Минск) 2, 3; *Р. Шарипов* (Каракуль) 3; *Г. Шервашидзе* (Тбилиси) 1—3; *Г. Шмелев* (Ярославль) 6—0; *Н. Шмырин* (Реж) 3; *В. Шпаковский* (Пинск) 1; *В. Шпильрайн* (Москва) 2; *М. Щербина* (Харьков) 6—3; *А. Эстерлис* (Тбилиси) 6, 8, 1, 2; *И. Юнус* (Харьков) 6—3, 5; *С. Юркевич* (Ленинград) 1, 2; *Б. Юсин* (Москва) 6, 8, 0, 1, 3, 5; *С. Яковенко* (Москва) 3; *В. Ясинский* (с. Мазуровка Винницкой обл.) 1; *Б. Яцало* (с. Морочно Ровенской обл.) 1—3.

Физика

Почти все читатели справились с задачами **Ф303**, **Ф309** и **Ф311**. Остальные задачи правильно решили: *Х. Абдуллин* (Алма-Ата) 4, 5; *М. Агеев* (Тула) 4, 7, 8; *Д. Азов* (Челябинск) 4; *Г. Айзин* (Брест) 4, 5; *А. Александрин* (Валуйки) 4, 7; *А. Алексеев* (ст. Выселки Краснодарского кр.) 4, 5; *К. Андроник* (Кишинев) 4—8; *А. Апаев* (Карачаевск) 4, 5; *И. Архипов* (Минск) 8; *И. Астров* (Таллин) 4, 5; *М. Бабаев* (Баку) 0; *И. Бабакулов* (Каттакурган) 4, 0; *А. Баклай* (Пинск) 4, 5; *А. Балаган* (Кривой Рог) 8; *С. Балашов* (Москва) 4; *Р. Басыров* (д. Н. Каракитяны ТАССР) 5, 7, 0; *В. Бедняков* (Москва) 4, 7; *В. Бенхан* (Калинин) 8, 0; *О. Берг* (Воронеж) 4—7; *М. Бирман* (Саратов) 8; *Ю. Богомолов* (Казань) 5, 7, 8, 0, 2; *И. Борисов* (Одесса) 8, 0; *В. Борю* (Запорожье) 4, 8, 0, 2; *О. Бушкова* (Степногорск Целиноградской обл.) 8; *В. Вайчайтис* (Куршенай) 5, 0; *В. Вичирко* (Ленинград) 7; *Р. Габбасов* (Уфа) 5; *И. Галишников* (Волгоград) 4, 6—8; *М. Гедалин* (Тбилиси) 0; *И. Гиндлер* (Хмельницкий) 7; *А. Говяда* (Киев) 8, 0; *О. Годин* (Симферополь) 4, 5, 7; *С. Горишний* (Таганрог) 4—7, 2; *А. Горшков* (Иваново) 4—8, 0; *С. Гранин* (Таллин) 5; *А. Григорьев* (Ессентуки) 4; *И. Гришаев* (Саратов) 4, 5, 7; *А. Грицук* (Дрогичин) 7; *В. Губени* (Угнёв) 8; *М. Гумашян* (Ереван) 8; *М. Гундяк* (Киев) 2; *В. Дементьев* (Кировск) 5; *Е. Демихов* (Усмань) 8; *У. Джуманиязов* (Хазараспский р-н Хорезмской обл.) 4; *Р. Динисламов* (с. Белокатай БАССР) 5; *Ю. Докучаев* (Ленинград) 6, 8; *В. Ефимов* (Березники) 6, 7; *И. Заверткин* (Орск) 4, 5, 8; *С. Загидулин* (Феодосия) 5; *А. Загитов* (Воронеж) 7; *В. Земляных* (Даугавпилс) 8, 0; *П. Золотарев* (Ташкент) 5, 7; *В. Зосимов* (Элиста) 4, 5, 7, 8, 0, 2; *В. Кайманович* (Ленинград) 8; *М. Калайчева* (п. Цалка ГрССР) 7; *В. Карпухов* (Челябинск) 8; *А. Карнаух* (Белгород) 5; *Б. Кацман* (Мытищи) 8; *Ю. Киселев* (Саратов) 5, 7; *Ю. Кленов* (Целиноград) 4, 5; *Я. Коган* (Глазов) 8; *Л. Коган* (Черновцы) 7; *А. Копнов* (Новочеркасск) 5, 8; *В. Контарин* (Таллин) 7, 8, 2; *С. Копыловский* (п. Знобь-Новгородское Сумской обл.) 8, 0, 2; *Д. Корин* (Киев) 6; *Ю. Коровин* (Курск) 8, 0, 2; *И. Корытный* (Львов) 5, 7; *Н. Костенко* (с. Гатна Киевской обл.) 0; *А. Костенко* (Кировск) 4, 5; *А. Крохин* (Харьков) 0; *В. Крутяков* (Волгоград) 5; *А. Кузубов* (Краснодар) 5; *А. Майоров* (Ярославль) 4, 5; *М. Майхрук* (с. Белобожница Тернопольской обл.) 5, 6; *А. Маковей* (ст. Каневская Краснодарского кр.) 4; *Е. Мартынова* (Нежин) 5; *А. Матяш* (Астрахань) 0; *О. Махов* (Орск) 2; *А. Мелкумян* (Физули) 8; *С. Мельник* (Харьков) 4, 5, 7, 8, 2; *О. Метелица* (Москва) 4, 8, 0; *Л. Миродашвили* (Тбилиси) 4; *Г. Мирзоян* (Горис) 6, 7; *Ю. Михалев* (Белая Холуница) 7; *А. Мишин* (Ленинград) 4, 7; *С. Морозов* (Узловая) 5—7; *И. Мунулиев* (Семипалатинск) 5, 7; *Ю. Онищенко* (Люберцы) 4—8; *А. Охримчук* (Выкса) 4, 6, 7; *Б. Очиров* (Новосибирск) 0, 2; *В. Пахомов* (Днепропетровск) 4; *В. Пестунов* (Кировоград) 5; *В. Пиотух* (Севастополь) 5—8; *М. Половинник* (Мена) 7; *А. Полянский* (Челябинск) 8, 0; *А. Прохоров* (Барнаул) 7; *М. Пятков* (с. М. Алтаево Оренбургской обл.) 5; *А. Радул* (Кишинев) 7; *А. Ребров* (Саратов) 4; *Б. Рева* (Таллин) 8; *В. Римши* (Пасвалис) 5; *Л. Римши* (Пасвалис) 5; *Э. Розенкранц* (Магнитогорск) 4; *И. Рудой* (Харьков) 4, 5; *А. Сидоров* (Винница) 4, 5; *Р. Сирота* (Харьков) 4, 5; *А. Смоляк* (Красноярск) 8; *И. Соколов* (Москва) 4—6, 8, 0; *В. Старшенко* (Запорожье) 0; *О. Стехин* (Васильков) 4, 7; *А. Сушилин* (Рига) 4; *А. Танчишвили* (Тбилиси) 4; *Л. Татунашвили* (Тбилиси) 4, 5; *З. Текеева* (Карачаевск) 4, 5; *И. Теплицкий* (Чирчик) 4, 5, 7; *М. Тетельман* (Тирасполь) 8; *А. Тимошенко* (д. Поболово Гомельской обл.) 8; *А. Тихонов* (Вологда) 4; *В. Трянин* (Городец) 4; *Г. Турабилидзе* (Кутаиси) 4; *Н. Федин* (Омск) 4, 5, 8, 0; *С. Флоря* (Чимишлийский р-н МолдССР) 4; *В. Фомин* (Орск) 4, 5, 7; *А. Хомич* (Брест) 4, 5, 7; *Л. Цимринг* (Горький) 5, 6, 8; *С. Чавумян* (Ереван) 5, 8; *В. Черепанов* (Верхнеуральск) 7; *Ю. Черныш* (Минск) 4, 7, 8; *С. Шаташвили* (Тбилиси) 5; *С. Шихарев* (ст. Раевская Краснодарского кр.) 4; *Г. Шмелев* (Ярославль) 4, 5; *И. Шмырин* (Реж) 8; *О. Щербаков* (Лида) 8; *Е. Юдин* (Ессентуки) 4; *В. Ясинский* (с. Мазуровка Винницкой обл.) 4.

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

Математические специальности в техникумах

Средние специальные учебные заведения являются составной частью системы народного образования СССР. В системе среднего специального образования осуществляется подготовка более чем по 450 специальностям. Это дает возможность подрастающему поколению получить, наряду с общим образованием в объеме средней школы, необходимую профессию. Таким образом, средняя специальная школа решает две основные задачи: первая — это подготовка специалистов для всех отраслей народного хозяйства с учетом возрастающих требований современного производства, науки и техники, вторая — участие в выполнении закона о всеобщем среднем образовании молодежи страны.

В настоящее время в Советском Союзе успешно работают почти 4300 техникумов и училищ, в которых занимается около 4,5 млн. юношей и девушек — представителей всех национальностей нашей страны. По сравнению с дореволюционным периодом число учебных заведений возросло в 10 раз, а контингент обучающихся — в 100 раз.

Во исполнение решений XXIV съезда КПСС по дальнейшему совершенствованию народного образования в стране в последние годы Центральный комитет КПСС и Совет Министров СССР приняли ряд постановлений, в том числе постановление «О мерах по дальнейшему совершенствованию руководства средними специальными учебными заведениями и об улучшении качества подготовки специалистов со средним специальным образованием» (22 августа 1974 г.), в котором подчеркивается важная роль средних специальных учебных заведений в деле подготовки специалистов среднего звена для всех отраслей народного хозяйства.

Свидетельством большой заботы и глубокого внимания к работникам и выпускникам техникумов и училищ является Обращение ЦК КПСС к участникам всесоюзного совещания работников средних специальных учебных заведений, состоявшегося в Москве 25—27 февраля 1975 года. В нем, в частности, говорится: «Педагогические коллективы средних специальных учебных заведений призваны формировать научное, марксистско-ленинское мировоззрение учащихся, постоянно повышать уровень их специальной, профессиональной и общеобразовательной подготовки, теснее связывать процесс обучения и воспитания с практикой коммунистического строительства. Необходимо внедрять научные принципы обучения и воспитания, всемерно развивать творческое отношение к овладению знаниями, навыки самостоятельной организаторской и общественно-политической работы. Выпускники средних специальных учебных заведений должны ориентироваться в коренных изменениях, происходящих в области техники и технологии, глубоко знать экономику и организацию производства, уметь со знанием дела обслуживать новое оборудование и сложные автоматизированные системы. «Советский специалист сегодня, — говорил Генеральный секретарь ЦК КПСС тов Л. И. Брежнев, — это человек, который хорошо овладел основами марксистско-ленинского учения, ясно видит политические цели партии и страны, имеет широкую научную и практическую подготовку, в совершенстве владеет своей специальностью.» *)

Большой спрос на специалистов-практиков-математиков со средним техническим образованием привел к тому, что в техникумах более углубленно и более широко, с разнообразными прикладными аспектами стала изучаться математика. Введены и вводятся новые специальности. Три из них предполагают углубленное изучение математики и физики.

Специальность № 1750 — «прикладная математика». Об этой специальности подробно было рассказано в «Кванте», 1974, № 6. Напомним, что программа по математике (алгебра и начала анализа, геометрия), которая при обычной математической подготовке в средних специальных учебных заведениях предусматривает 350—400 часов, здесь рассчитана на 540 часов; расширена часть «математический анализ», выделе-

---

*) «Правда», 26 февраля 1975 г.

ны в самостоятельный курс «линейная алгебра и аналитическая геометрия». Кроме того, в этой специальности есть еще много других математических предметов. Курс обучения длится 2 года 10 месяцев для окончивших 8 классов и 1 год 10 месяцев для окончивших 10 классов. Окончившие техникум по этой специальности получают квалификацию «вычислитель-математик».

Специальность № 1735 — «программирование для быстродействующих математических машин». Программа обучения (3 года 6 месяцев для окончивших 8 классов, 2 года 6 месяцев для окончивших 10 классов) предусматривает расширенную общематематическую подготовку в количестве 668 часов. Кроме того, по этой специальности преподаются следующие предметы, связанные с математикой: численные методы, программирование и алгоритмические языки, математическая статистика, основы экономики и математические методы в планировании. Окончившие обучение по этой специальности направляются на работу в вычислительные центры, лаборатории, конструкторские бюро, отделы программирования как помощники инженера; при этом они получают квалификацию «техник-математик-программист».

Специальность № 0661 — «обработка информации в автоматизированных системах управления (АСУ)» — совсем новая, ее введение предполагается в этом году. Окончившие 8 классов будут обучаться по этой специальности 3 года 10 месяцев, а окончившие 10 классов — 2 года 8 месяцев. Курс математики рассчитан на 517 часов. Кроме того, преподаются следующие предметы, связанные с математикой: вычислительная математика, основы программирования и алгоритмические языки, математическое обеспечение АСУ. Окончившие техникум по этой специальности получат квалификацию «оператор системы информации АСУ» и будут распределяться на работу в вычислительные центры, лаборатории и отделы тех учреждений, которые разрабатывают или используют автоматизированные системы управления.

Углубленное изучение математики способствует повышению уровня преподавания и других дисциплин, в частности, физики.

Для указанных специальностей создана новая программа: «Физика с основами электротехники», рассчитанная на 279 часов. Учебный план предусматривает изучение физики в течение трех семестров.

Особенность программы состоит в том, что в ней идеи классической и современной физики рассматриваются одновременно. В частности, основные понятия теории относительности вводятся параллельно с повторением элементов механики и далее используются при изучении электродинамики и физики атома и атомного ядра. После этого рассматривается единая теория колебаний и волн. Здесь особо следует отметить важность и целесообразность использования основ математического анализа, которыми владеют учащиеся специальностей №№ 1750, 1735, 0661, что позволяет избежать догматизма при изучении целого ряда вопросов, например, таких, как индуктивное и емкостное сопротивление, действующее значение переменного тока, закон Ома для цепи переменного тока и др.

Заканчивается курс статистическими закономерностями молекулярной физики, квантовой механики, атомными и ядерными процессами.

Усиление роли математических методов при изучении физики обусловливает повышение роли демонстрационного эксперимента, значительное его усложнение. В частности, программа предусматривает широкое использование осциллографических методов, большое количество лабораторных работ, качество которых значительно выше, чем в программах по физике для других специальностей. Особенно это относится к работам из разделов «Электродинамика», «Колебания. Переменный электрический ток».

Средние специальные учебные заведения, имеющие специальность «Прикладная математика»

1. Московский математический техникум — г. Москва, 105264, Измайловский бульвар, д. 19. Общежития техникум не имеет, **принимаются в техникум только лица, постоянно прописанные в Москве и Московской области.**

2. Ленинградский механический техникум — г. Ленинград, Песочная набережная, д. 14. **Общежития техникум не имеет.**

3. Днепропетровский техникум автоматики и телемеханики — г. Днепропетровск, ул. Дзержинского, д. 2/4.

4. Ростовский электротехнический техникум — г. Ростов-на-Дону, 24-я линия, д. 2/15.

5. Среднетехнический факультет Тульского политехнического института — г. Тула, проспект Ленина, д. 90.

6. Ковровский энерго-механический техникум — Владимирская область, г. Ковров, ул. Шмидта, д. 48.

* * *

Специальность «программирование для быстродействующих математических машин» преподается в очень большом количестве техникумов, их список можно найти в справочнике для поступающих в средние специальные учебные заведения.

Г. Ю. Граковский, Ю. Д. Кабалевский, П. И. Самойленко

Вступительные экзамены в вузы

В этом номере, как обычно, мы помещаем варианты вступительных экзаменов по математике и физике 1974 года в университеты, педагогические институты и втузы. Мы рекомендуем вам вначале попробовать самим решить эти задачи, и если что-нибудь вам будет неясно, то посмотреть ответы.

Уральский государственный университет им. А. М. Горького

В «Кванте», 1973, № 7 мы уже рассказывали об Уральском ордена Трудового Красного Знамени государственном университете им. А. М. Горького. В этом номере мы приводим образцы вариантов письменного экзамена по математике и билетов устного экзамена по физике на математико-механическом и физическом факультетах в 1974 году.

Математика

Математико-механический факультет

Вариант 1

1. Существуют ли такие значения параметра a, при которых всякое решение неравенства

$$\sqrt{x^2+4x+3} \geqslant -1-x$$

является решением уравнения

$$|x-a|-|x+1|=2$$

и, наоборот, всякое решение уравнения является решением неравенства?

2. Прямые l_1 и l_2 пересекаются в вершине B треугольника ABC. Построить треугольник ABC, если кроме этих прямых на плоскости отмечено место нахождения вершины A и известно, что медиана треугольника лежит на l_1, а высота — на l_2.

3. Решить неравенство

$$\frac{1}{\log_{x^2}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}x-x^2\right)} \leqslant \log_x x^2.$$

4. Дано, что $\alpha=\beta+\gamma$. Доказать, что $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma+2\cdot\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma=2$.

Вариант 2

1. Существуют ли такие значения параметра a, при которых каждое решение неравенства

$$\sqrt{x^2+4x+7} \leqslant x+3$$

является решением уравнения

$$2^{x+2}-|2^{x+1}-a|=2^{x+1}+1$$

и, наоборот, каждое решение уравнения является решением неравенства?

2. На плоскости отмечены три точки, две из которых являются серединами сторон треугольника, а третья — точкой пересечения его медиан. Остальные элементы треугольника стерли. С помощью циркуля и линейки восстановить треугольник.

3. Решить неравенство

$$|\log_{|x|}(4+3x-x^2)-1| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2}\log_{\sqrt{x-1}}(x-1).$$

4. Дано, что α, β, γ — внутренние углы некоторого треугольника, а $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{tg}\beta$, $\operatorname{tg}\gamma$ образуют арифметическую прогрессию. Доказать, что

$$2\cos\beta=\cos(\alpha-\gamma).$$

Физический факультет

Вариант 3

1. Решить неравенство

$$ax^2-2ax-3<0.$$

2. В основании пирамиды, высота которой равна H, лежит прямоугольный треугольник с катетами a и b. Вершины основания и середины боковых ребер пирамиды лежат на одной сфере. Доказать, что углы наклона боковых ребер к основанию равны между собой. Найти углы наклона боковых граней пирамиды к основанию.

3. Решить неравенство

$$\log_{1-x^2}(x+1)^4 \leqslant \log_{\sqrt{2x-1}}|1-2x|.$$

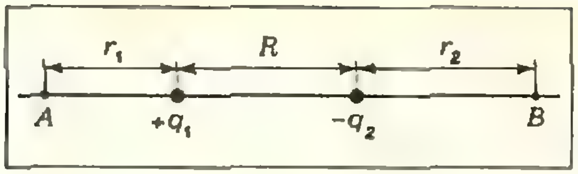


Рис. 1.

4. Решить уравнение

$$2\sin 2x - m^2 \sin x + \sin 3x = 0.$$

Вариант 4

1. Решить неравенство

$$-\frac{x}{a} > \frac{1}{x^3}.$$

2. В большем основании усеченной пирамиды лежит прямоугольник, диагональ которого равна d; площадь меньшего основания пирамиды равна S. Известно, что около этой пирамиды можно описать сферу. Доказать, что все боковые ребра пирамиды равны между собой. Найти объем пирамиды, если длина бокового ребра равна l, а угол наклона этого ребра к плоскости основания равен α.

3. Решить неравенство

$$\log_{\left|x-\frac{1}{2}\right|}(2x+3-x^2) \leqslant$$
$$\leqslant \log_{|1-2x|}(2x-1).$$

4. Решить уравнение

$$4\sin 2x + m\cos x = \cos 3x.$$

Физика

Математико-механический факультет

Билет 1

1. Основные положения молекулярно-кинетической теории, ее опытное обоснование. Броуновское движение.

2. Получение переменного тока. Генератор переменного тока. Действующие значения напряжения и силы тока.

3. Определить работу, совершаемую при перемещении точечного заряда e из точки A в точку B в поле, созданном двумя разноименными точечными зарядами $+q_1$ и $-q_2$, расстояние между которыми R. Расстояние точки A от первого заряда равно r_1, а точки B от второго заряда — r_2 (рис. 1).

Билет 2

1. Равномерное движение по окружности. Линейная и угловая скорости. Связь между ними. Единица угловой скорости. Центростремительное ускорение.

2. Электролиз. Законы Фарадея для электролиза.

3. На деревянном клине с углом 30° лежит груз (рис. 2). Коэффициент трения между деревом и грузом $k=0{,}8$. Какое ускорение a в горизонтальной плоскости следует сообщить клину, чтобы груз мог с него соскользнуть?

Билет 3

1. Закон всемирного тяготения. Гравитационная постоянная. Сила тяжести.

2. Сопротивление проводников. Удельное сопротивление. Зависимость удельного сопротивления от температуры. Реостаты.

3. В воде на глубине 1 *м* находится шарообразный пузырек воздуха. На какой глубине этот пузырек имеет вдвое меньший радиус? Атмосферное давление нормальное (760 *мм рт. ст.*).

Физический факультет

Билет 4

1. Переменное движение. Средняя и мгновенная скорости. Ускорение. График скорости равнопеременного движения с начальной скоростью.

2. Магнитное взаимодействие токов. Магнитное поле. Сила, действующая на проводники с током в магнитном поле.

3. На невесомом стержне укреплены два шарика с массами m_1 и m_2 (рис. 3). $OA = AB = l$, начальный угол отклонения стержня от вертикали равен α_0, начальная уг-

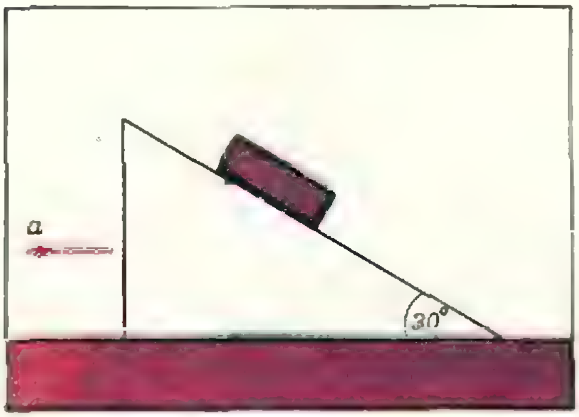


Рис. 2

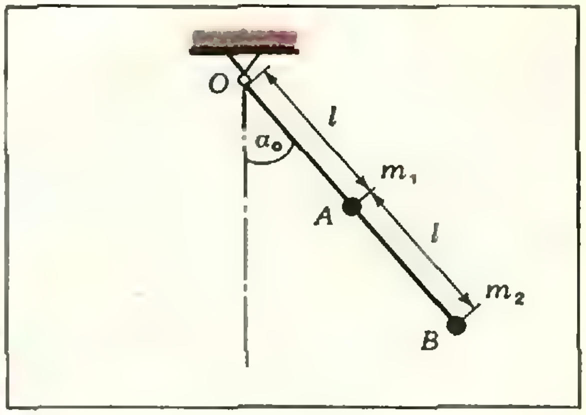


Рис. 3.

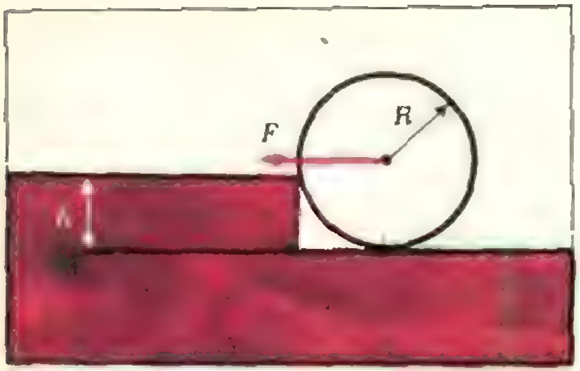


Рис. 4.

ловая скорость стержня равна нулю. Найти угловую скорость стержня в момент, когда он проходит через вертикальное положение.

Билет 5

1. Первый закон Ньютона.
2. Поток магнитной индукции. Электромагнитная индукция. Электродвижущая сила индукции.
3. Маятник длиной 50 *см* колеблется в кабине самолета. Каков период его колебаний, если: а) самолет движется равномерно; б) летит горизонтально с ускорением 2,5 *м/с*²; в) планирует вниз под углом 15° к горизонту.

Билет 6

1. Третий закон Ньютона. Количество движения (импульс). Закон сохранения количества движения. Реактивное движение.
2. Источники света. Скорость света и ее опытное определение.
3. Какова должна быть минимальная сила F (рис. 4), направленная горизонтально и приложенная к оси колеса массой m и радиусом R, чтобы оно могло подняться на ступеньку высотой h?

Э. А. Голубов

Куйбышевский государственный университет

Для Куйбышевского государственного университета 1974 год замечателен первым выпуском молодых специалистов (специальности: математика, механика, физика, химия, биология, русский язык и литература, правоведение) и открытием вечернего отделения университета (специальности: математика, физика, правоведение).

Ниже приводятся некоторые варианты вступительного письменного экзамена по математике в Куйбышевский государственный университет в 1974 году, после номера варианта в скобках указано, абитуриенты каких специальностей писали этот вариант: ММ — «математика и механика», Ф — «физика». Абитуриенты этих специальностей, успешно выдержавшие письменные испытания, сдавали затем устный экзамен по математике. Абитуриенты же специальностей «химия» и «биология» (Х, Б) в 1974 году сдавали лишь один вступительный экзамен по математике, но «смешанный»: в варианты письменного экзамена были включены вопросы устного экзамена (доказательство теорем, свойств операций и функций, построение графиков, ...). О возможности такого характера экзамена по математике абитуриенты химико-биологического факультета были извещены заранее.

Вариант 1 (М М)

1. Основанием пирамиды служит равнобочная трапеция с основаниями a и b и углом φ между диагоналями. Углы наклона боковых граней пирамиды, содержащих параллельные стороны трапеции, к плоскости основания относятся, как 1:2. Найти объем пирамиды, если ее вершина проектируется в точку пересечения диагоналей основания.

2. Пусть числа a, b, c, d образуют арифметическую прогрессию. Доказать, что

$$(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)+m^2\geqslant 0$$

при любых действительных значениях x, если взять такое m, что

$$2m\geqslant |ad-bc|.$$

Как можно обобщить условие задачи, чтобы основная идея ее решения сохранилась?

3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}(1+\log_x y)\log_3 x=4,\\ 2\log_{y^4}x^2-\dfrac{1}{2}\log_{\sqrt{x}}y^4=\dfrac{10}{3}.\end{cases}$$

4. Решить уравнение

$$x^2+2x\cos(x-m)+1=0.$$

Вариант 2 (М М)

1. На одной из граней двугранного угла $\varphi<\dfrac{\pi}{2}$ лежит квадрат. Одна из сторон квадрата образует угол α с ребром двугранного угла. Определить величины углов между диагоналями квадрата и другой гранью двугранного угла.

2. Решить неравенство

$$\log_{\frac{x}{2}}8+\log_{\frac{x}{4}}8<\frac{\log_2 x^4}{\log_2 x^2-4}.$$

3. Решить уравнение

$$\sin^{29}3x-\cos^{17}10x=2.$$

4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{1}{3}\sqrt[y]{9}=\left(\dfrac{1}{81}\right)^{-\frac{x}{4y}}\\ 16\sqrt[x]{2^{x+3y}}=4^{\frac{x}{y}}.\end{cases}$$

Вариант 3 (Ф)

1. Решить неравенство

$$5x^2\cdot 4^{8x^2+3x}+8x-2^{16x^2+6x}>$$
$$>10x^2-2+x\cdot 4^{8x^2+3x+1}.$$

2. Какой угол составляет с плоскостью основания образующая правильного усеченного конуса, если r и $r\sqrt{30}$ — соответственно радиусы шаров, вписанного в этот усеченный конус и описанного около него?

3. Решить уравнение

$$2\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\cos^2 x\right)=1-\cos(\pi\sin 2x).$$

4. Решить уравнение

$$\sqrt{\log_x\sqrt{2x}}\,\log_2 x=-1.$$

Вариант 4 (Ф)

1. Решить уравнение

$$(\log_2 x)^3(\log_3 x-2\log_3 2)\log_5 2=$$
$$=(11\log_5 x-8\log_5 2)\log_2 x\cdot\log_3 2-$$
$$-16\log_3 2\cdot\log_5 2.$$

2. В некоторой неправильной пирамиде все внутренние двугранные углы при основании равны α. Площадь основания равна S, и периметр основания равен $2p$. Найти объем и полную поверхность этой пирамиды.

3. Решить уравнение

$$|\operatorname{tg} x+a\operatorname{ctg} x|=\frac{4}{\sqrt{3}},$$

где $a\neq\pm 1$.

4. Решить неравенство

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{(x^4-2x^2+1)^{\frac{1}{2}}}<4^{\frac{x-1}{2}}.$$

Вариант 5 (X, Б)

1. Решить неравенство

$$\log_{0,25}\frac{2x-1}{x+1}<-2\cos 36^\circ\cos 72^\circ.$$

2. В прямом круговом конусе образующая равна l, а высота в m раз больше радиуса шара, вписанного в конус. Найти отношение полной поверхности конуса к поверхности шара, описанного около этого конуса.

3. При бурении скважины каждый последующий метр проходки обходится на 4 рубля дороже, чем предыдущий. Вследствие этого проходка последнего метра и третьего от конца, взятых вместе, обходится во столько же, сколько стоила бы проходка всей скважины, если бы каждый метр проходки независимо от глубины стоил столько же, сколько стоит первый метр проходки. Средняя стоимость одного метра проходки равна 100 руб. Какова глубина скважины?

4. а) Доказать признак параллельности двух плоскостей.

б) Дать определение, перечислить все свойства и построить график функции $y=\lg x$.

Ю. С. Бабурин

Московский институт электронного машиностроения

В «Кванте», 1973, № 7 мы уже рассказывали о МИЭМе. В этом номере мы публикуем варианты вступительного письменного экзамена по математике в МИЭМ в 1974 году.

Вариант 1

1. Две бригады, работая совместно, должны были засеять поле в 234 *га* за 117 часов. Однако, когда первая из них засеяла 39 *га*, ее производительность увеличилась на 6,25 *га/ч*. Когда вторая бригада засеяла 39 *га*, ее производительность также возросла на 1,5 *га/ч*. В результате поле было засеяно за время $T=55$ *ч*. Найти производительность каждой бригады. Найти все значения T, при которых задача имеет решение.

2. Решить уравнение

$$2(\cos x+\sin x)\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\cos 2x.$$

3. Решить неравенство

$$\log_{(x+1)^2}(x+3)>1.$$

4. При каких значениях a корни уравнения

$$x^2-(2a+1)x+3a=0$$

лежат между числами 1 и 4?

5. В правильной четырехугольной пирамиде через сторону основания проведена плоскость, перпендикулярная противолежащей боковой грани и делящая эту грань на треугольник и трапецию, площади которых относятся, как 1:3. Определить полную поверхность пирамиды, если сторона ее основания равна a.

Вариант 2

1. Водитель должен был перевезти 120 станков из одного города в другой. После того, как он перевез 48 станков, ему дали другой, более мощный грузовик, берущий за один рейс на 4 станка больше. В результате общее число рейсов, сделанных водителем, уменьшилось на три. Сколько станков за один рейс брал первый грузовик?

2. Решить уравнение

$$1-3\cos x+\cos 2x=\frac{\operatorname{cosec}(\pi-x)}{\operatorname{ctg} 2x-\operatorname{ctg} x}.$$

3. Решить неравенство

$$2x+\sqrt{a^2-x^2}>0.$$

4. При каких значениях m уравнение

$$\lg mx = 2\lg(x+3)$$

имеет два различных действительных корня?

5. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна a, двугранный угол при основании равен α. Найти площадь сечения пирамиды плоскостью, делящей пополам двугранный угол при основании.

В. А. Тонян

Ярославский политехнический институт

О Ярославском политехническом институте рассказывалось в «Кванте», 1974, № 7. В этом номере мы публикуем варианты письменных работ по математике и задачи устного экзамена по физике, предлагавшиеся в ЯПИ в 1974 году.

Математика

Вариант 1

1. В основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник, у которого острый угол равен [illegible] и радиус вписанного круга равен r. Каждая из боковых граней образует с основанием угол α. Найти объем пирамиды.

2. Решить уравнение

$$\frac{1}{\log_8(3+x)}+\frac{[illegible]\log_{0,25}(4-x)}{\log_2(3+x)}=1.$$

3. Найти область определения функции

$$y=\arcsin(4x^2+2x-1)+\sqrt[4]{\frac{(x-2)(x-3)}{x^2}}.$$

4. Решить уравнение

$$\sin^3x-\cos^3x=\sin^2x-\cos^2x.$$

Вариант 2

1. В правильной четырехугольной пирамиде через сторону основания под углом β к нему проведена плоскость. Определить площадь полученного сечения, если апофема пирамиды равна a, и боковая грань наклонена к плоскости основания под углом α.

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}\sqrt{x-y}+\dfrac{1}{2}\sqrt{x+y}=\dfrac{26-y}{\sqrt{x-y}},\\ 10^{3-\lg(x-y)}=250.\end{cases}$$

3. Решить неравенство

$$\frac{[illegible]}{1-\log_{1/2}\sqrt{x}}-\frac{1}{\frac{1}{2}\log_2x-1}>2.$$

4. Решить уравнение

$$2\sin^4 2x-\sin^2 2x\cdot\sin 4x=2\sin^2 2x-\sin 4x.$$

Вариант 3

1. Определить объем и боковую поверхность прямой призмы, у которой в основании лежит равнобедренный треугольник с углом при вершине α и противоположной стороной b, если диагональ одной из равных боковых граней наклонена к плоскости основания под углом β.

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}x-y+\sqrt{\dfrac{x-y}{x+y}}=\dfrac{20}{x+y},\\ x^2+y^2=34.\end{cases}$$

3. Найти область определения функции

$$y=\lg(\sqrt{x^2-5x+6}-x-2).$$

4. Решить уравнение

$$\cos\frac{4}{3}x+\sin^2\frac{3}{2}x+2\sin^2\frac{5}{6}x=\cos^2\frac{3}{2}x.$$

Физика

1. Кусок стекла падает в воде с ускорением $a=5{,}8$ *м/с²*. Какова плотность стекла ρ? Плотность воды $\rho_1=10^3$ *кг/м³*.

2. Какой мощностью N обладает воздушный поток, набегающий на автомобиль «Волга» при скорости движения $v=100$ *км/ч*, если площадь лобовой поверхности машины $S=2{,}5$ *м²*? Плотность воздуха $\rho=1{,}29$ *кг/м³*.

3. Трамбовочный каток радиусом $R=0{,}5$ *м* перекатывается через лежащий на дороге камень высотой $h=5$ *см*. Масса катка $m=2\cdot10^3$ *кг*. Определить горизонтальную силу тяги F, необходимую для передвижения катка через камень.

4. Камень брошен под углом $\alpha=60°$ к горизонту. Кинетическая энергия камня в начальный момент $T_0=100$ *дж*. Какова кинетическая (T) и потенциальная ($П$) энергия камня в наивысшей точке его траектории? Сопротивление воздуха не учитывать.

5. Воздух из магдебургских полушарий откачан до давления $p_1=8$ *мм рт. ст.* Радиус полушарий $R=50$ *см*. Какую силу F нужно приложить, чтобы разъединить полушария? Атмосферное давление $p=758$ *мм рт. ст.*

6. Какие силы F надо приложить к концам стального стержня с площадью поперечного сечения $S=10$ *см²*, чтобы не дать ему удлиниться при нагревании от $t_1=0$°C до $t_2=40$°C? Модуль Юнга стали $E=2{,}1\times10^{11}$ *н/м²*. Коэффициент линейного расширения стали $\alpha=12\cdot10^{-6}$ *град*$^{-1}$.

7. Воздух, масса которого $m=4$ *кг*, находится в цилиндре при температуре $t_1=20$°C. Какая будет совершена работа при его изобарном нагревании до температуры $t_2=100$°C? Молекулярная масса воздуха

$\mu=29$. Универсальная газовая постоянная $R=8{,}31\cdot10^3$ *дж/(кмоль·град)*.

8. Санки массой $m=5$ *кг* скатываются с горы, которая образует с горизонтом угол $\alpha=30^\circ$. Пройдя расстояние $l=50$ *м*, санки развивают скорость $v=4$ *м/с*. Определить количество теплоты Q, выделенной при трении полозьев о снег.

9. В смесь, состоящую из льда массой $m_1=5$ *кг* и воды массой $m_2=4$ *кг* при температуре $t_1=0^\circ$C, впускают водяной пар массой $m_3=0{,}5$ *кг* при температуре $t_2=100^\circ$C. Определить температуру θ смеси и массу m растаявшего льда. Удельная теплота плавления льда $\lambda=3{,}3\cdot10^5$ *дж/кг*. Удельная теплоемкость воды $c=4{,}19\cdot10^3$ *дж/(кг·град)*. Удельная теплота парообразования воды $L=22{,}6\cdot10^5$ *дж/кг*.

10. При никелировании пользуются током, плотность которого $j=0{,}14$ *а/дм²*. Сколько времени t требуется для отложения слоя никеля толщиной $h=0{,}05$ *мм*? Электрохимический эквивалент никеля $k=0{,}3\cdot10^{-6}$ *кг/к*. Плотность никеля $\rho=8{,}9\cdot10^3$ *кг/м³*.

11. Определить э. д. с. индукции E на концах оси железнодорожного вагона, имеющей длину $l=1{,}6$ *м*, если скорость поезда на горизонтальном участке пути $v=45$ *км/ч*, а вертикальная составляющая индукции магнитного поля Земли $B=2\cdot10^{-5}$ *тл*.

12. Колебательный контур состоит из катушки с индуктивностью $L=1$ *мгн* и воздушного конденсатора, обкладки которого — две круглые пластины диаметром $D=20$ *см* каждая. Расстояние между пластинами $d=1$ *см*. Определить период колебания контура. Электрическая постоянная $\varepsilon_0=8{,}85\times10^{-12}$ *ф/м*.

13. На расстоянии a от точечного источника света помещен экран. Во сколько раз n изменится освещенность в центре экрана, если по другую сторону от источника света на таком же расстоянии a поставить параллельно экрану плоское зеркало? Считать, что коэффициент отражения равен единице, то есть все лучи, падающие на зеркало, отражаются.

14. На оптической скамье расположены две собирающие линзы с фокусными расстояниями $F_1=12$ *см* и $F_2=15$ *см*. Расстояние между линзами $l=36$ *см*. Предмет находится на расстоянии $d_1=48$ *см* от первой линзы. На каком расстоянии f_2 от второй линзы получится изображение предмета?

15. Цезиевый катод фотоэлемента освещается светом с длиной волны $\lambda=600$ *нм*. Определить скорость вырываемых из катода фотоэлектронов, если красная граница фотоэффекта для цезия $\lambda_0=650$ *нм*. Постоянная Планка $h=6{,}62\cdot10^{-34}$ *дж·с*. Масса электрона $m=9{,}1\cdot10^{-31}$ *кг*. Скорость света $c=3\times10^8$ *м/с*.

В. С. Колпаков, Р. Н. Сахарова

Новосибирский институт инженеров железнодорожного транспорта

Новосибирский институт инженеров железнодорожного транспорта является одним из ведущих вузов страны по подготовке научных и инженерных кадров, по проведению исследований в области железнодорожного транспорта. НИИЖТ имеет в своем составе дневное отделение, вечерний факультет, заочный факультет и вечерние подготовительные курсы. В институте 7 факультетов, готовящих специалистов по 14 специальностям: строительство железных дорог, путь и путевое хозяйство; мосты и тоннели; строительные, дорожные машины и оборудование; эксплуатация железных дорог; промышленное и гражданское строительство; водоснабжение и канализация; экономика и организация железнодорожного транспорта; бухгалтерский учет; экономика и организация строительства на железнодорожном транспорте (Э); электрификация железнодорожного транспорта; тепловозы и тепловозное хозяйство; вагоностроение и вагонное хозяйство (В); автоматика, телемеханика и связь на железнодорожном транспорте (АТ); организация механизированной обработки экономической информации (МОИ).

Поступающие в институт на технические и инженерно-экономические специальности сдают вступительные экзамены по математике (письменно и устно), физике (устно), русскому языку и литературе (письменно). На письменный экзамен отводится 3 астрономических часа.

Поступающие на специальность «бухгалтерский учет» сдают экзамены по математике (устно), истории, географии, русскому языку и литературе.

Ниже предлагаются примерные варианты письменного экзамена по математике и билеты устного экзамена по физике в 1974 году.

Математика

Вариант I

(специальности АТ, МОИ, В, Э)

1. Решить уравнение

$$9^{\sqrt{x^2-2x}-x}-7\cdot3^{\sqrt{x^2-2x}-x-1}=2.$$

2. Решить уравнение

$$\sin^2(2\pi-x)-2\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)-\cos x\times$$
$$\times\cos\left(\frac{3}{2}\pi-x\right)+\sin\left(x-\frac{9}{2}\pi\right)+1=0.$$

3. Решить неравенство

$$\log_{\frac{1}{4}}\left|\frac{x+1}{x-1}\right| > -1.$$

4. Найти три первых члена бесконечно убывающей геометрической прогрессии, сумма которой $40\frac{1}{2}$, а сумма первых четырех членов равна 40.

5. Около шара радиуса R описана правильная шестиугольная пирамида, боковая грань которой составляет с плоскостью основания угол α. Определить боковую поверхность и объем пирамиды.

Вариант 2

(все остальные специальности)

1. Решить уравнение

$$\log_2^2 8x - \log_2^2 4x + \log_2^2 2x = \log_2 64.$$

2. Решить уравнение

$$\cos(x + 4\pi) + \sin\left(\frac{9}{2}\pi - 2x\right) - \sin\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

3. Решить неравенство

$$\sqrt{2x + 15} < x.$$

4. Сумма квадратов корней уравнения $4x^2 - ax + 1 = 0$ равна $\frac{17}{16}$, найти a.

5. Боковые ребра правильной треугольной пирамиды составляют угол α с плоскостью основания и имеют длину l. Через одну из сторон основания проведено сечение, составляющее с плоскостью основания угол β ($\beta < \alpha$). Вычислить площадь сечения.

Физика

Билет 1

1. Равномерное движение по окружности. Линейная и угловая скорости. Центростремительная сила и центростремительное ускорение.

2. Понятие о волновой и квантовой природе света.

3. Два точечных заряда $+q_1$ и $-q_2$ расположены в воздухе на расстоянии d друг от друга. Найти напряженность и потенциал поля, создаваемого этими зарядами в точке A, находящейся на расстоянии r_1 от положительного заряда и r_2 от отрицательного заряда. (Точка A не лежит на прямой, соединяющей заряды q_1 и q_2.)

Билет 2

1. Работа силы. Механическая энергия. Связь работы с изменением энергии. Единицы измерения энергии и работы.

2. Цепная реакция. Выделение энергии при делении тяжелых ядер.

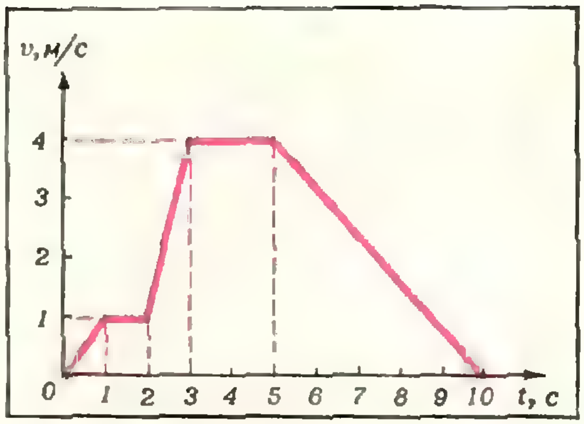


Рис. 5.

3. Движение точки задано графиком скорости (рис. 5). Определить среднюю скорость и среднее ускорение точки за 5 секунд. По данному графику скорости точки построить график ускорения.

Билет 3

1. Законы Бойля—Мариотта, Гей-Люссака, Шарля. Графики этих законов. Объединенный закон Бойля—Мариотта—Гей-Люссака.

2. Магнитный поток. Электромагнитная индукция. Э. д. с. индукции. Закон Ленца. Устройство генератора переменного тока.

3. Поезд идет со скоростью 180 *км/ч*. Подходя к станции, он начинает равномерно тормозить. Каково наименьшее время t торможения поезда до полной остановки, безопасное для спящих пассажиров? Коэффициент трения пассажира о полку $k = 0{,}2$.

Л. П. Боровских

Львовский политехнический институт

Львовский ордена Ленина политехнический институт — один из старейших высших технических учебных заведений страны, он был основан в 1844 году как техническая Академия, которая в 1877 году была переименована в Высшую политехническую школу, а в 1921 году — во Львовскую политехнику.

Бурное развитие вуза началось с сентября 1939 года, после воссоединения западных областей Украины в едином Украинском Советском Социалистическом государстве, когда Львовская политехника была реорганизована в политехнический институт.

Сейчас в институте имеются следующие стационарные факультеты: энергетический, электромеханический, радиотехнический, автоматики, электрофизический, теплотехнический, механико-технологический, механико-машиностроительный, инженерно-строительный, архитектурный, геодезический, инженерно-экономический, химико-технологический, технологии органических веществ. На всех факультетах студенты получают физико-математическую подготовку в объеме программ инженерно-технических и инженерно-экономических вузов.

На факультете автоматики ведется подготовка специалистов по прикладной математике с присвоением квалификации «инженер-математик». Из 50 дисциплин, которые изучаются студентами по этой специальности, более половины — математические: программирование для ЭВМ, математическая логика, численные методы и алгоритмы, линейная алгебра и аналитическая геометрия, общая алгебра, математический анализ, дифференциальные уравнения, теория графов и комбинаторика, функциональный анализ, уравнения математической физики, случайные процессы, теория вероятностей и математическая статистика и многие другие.

Выпускники этой специальности направляются на работу в проектные конструкторские бюро, вычислительные центры, научно-исследовательские институты.

Ниже помещены примеры вариантов письменных экзаменов по математике и физике во Львовском политехническом институте в 1974 году.

Математика

Вариант 1

1. Треугольник ABC, в котором тупой угол при вершине A равен α, а угол при вершине B равен β, вращается вокруг стороны AB, равной c. Найти объем тела вращения.

2. Три числа образуют геометрическую прогрессию. Если второе число увеличить на 2, то прогрессия станет арифметической, а если после этого увеличить последнее число на 9, то прогрессия снова станет геометрической. Найти эти числа.

3. Решить уравнение

$$\cos^2 x - (\sin 35^\circ + \cos 35^\circ)\cos x + \frac{1}{2}\sin 70^\circ = 0.$$

4. Решить уравнение

$$\log_x 8 - \log_{4x} 8 = \log_{2x} 16.$$

Вариант 2

1. Основанием пирамиды является трапеция, верхнее основание и боковые стороны которой равны между собой, нижнее основание равно [illegible] и тупой угол равен α. Все боковые ребра образуют с плоскостью основания угол β. Найти объем пирамиды.

2. Моторная лодка за [illegible] часов 15 минут проходит расстояние 60 *км* между двумя пунктами туда и обратно без остановок. Найти скорость течения реки, если собственная скорость лодки равна 20 *км/ч*.

3. Решить уравнение

$$\cos 2x \cos x = \cos 5x \cos 4x.$$

4. Решить неравенство

$$\lg\frac{x+1}{2x-3} \geqslant 0.$$

Вариант 3

1. Основанием пирамиды служит прямоугольный треугольник, один из острых углов которого равен α, а радиус вписанной окружности равен r. Каждая из боковых граней образует с плоскостью основания угол α. Найти объем пирамиды.

2. За 3,5 часа работы один штамповочный пресс может изготовить 42% всех заказанных деталей. Второй пресс за 9 часов работы может изготовить 60% всех деталей, а скорость выполнения работы на третьем прессе относится к скорости выполнения работы на втором, как 6:5. За сколько времени будет выполнен весь заказ, если все три пресса будут работать одновременно?

3. Решить уравнение

$$-\sin^2 x + \cos^2 x = \cos\frac{x}{2}.$$

4 Решить неравенство

$$\frac{1}{5-\lg x} + \frac{2}{1+\lg x} < 1.$$

Физика

Вариант 1

1. Удельная теплота парообразования.

2. Электроемкость. Электроемкость сферы. Конденсаторы.

3. Жонглер бросил вертикально вверх шарик. Когда шарик достиг верхней точки своего пути, был брошен второй шарик с той же начальной скоростью. На какой высоте h встретятся шарики, если высота бросания $H=4{,}9$ *м*?

4. Какова толщина H плоскопараллельной стеклянной пластинки, если точку, нанесенную чернилами на нижней стороне пластинки, наблюдатель видит на расстоянии $h=5$ *см* от верхней поверхности? Луч зрения перпендикулярен поверхности пластинки. Показатель преломления стекла $n=1{,}6$. Для малых углов $\operatorname{tg}\alpha \approx \sin\alpha \approx \alpha$.

Вариант 2

1. Свободное падение тел. Ускорение свободно падающего тела.

2. Броуновское движение.

3. Между вертикальными пластинами плоского конденсатора, находящегося в воздухе, подвешен на тонкой шелковой нити маленький шарик, несущий заряд $q_0=10$ ед. заряда СГСЭ. Какой величины заряд надо сообщить пластинам конденсатора, чтобы шарик отклонился от вертикали на угол $\alpha=45^\circ$? Масса шарика $m=4$ *г*, площадь каждой пластины конденсатора $S=314$ *см*^{2}.

Массой нити пренебречь. $g=9{,}8$ *м/с*², $\varepsilon_0=8{,}85\cdot10^{-12}$ *ф/м*.

4. Проекционный аппарат имеет объектив с фокусным расстоянием $F=5$ *см*. Квадратный диапозитив площадью $S=10$ *см*², находящийся на расстоянии $d=5{,}1$ *см* от линзы, пропускает световой поток $\Phi=10$ *лм*. Определить освещенность изображения диапозитива на экране. Считать, что световой поток не рассеивается.

Вариант 3

1. Движение молекул газов, жидкостей и твердых тел.

2. Законы преломления света.

3. Человек массой $m_1=80$ *кг* переходит с носа на корму в лодке длиной $l=5$ *м*. Чему равна масса лодки, если она за время этого перехода переместилась в стоячей воде в обратном направлении на $s=2$ *м*? Начальная скорость лодки относительно воды равна нулю.

4. Какое количество электричества пройдет по проводам, соединяющим обкладки плоского конденсатора с зажимами аккумулятора, при погружении конденсатора в керосин? Площадь пластины конденсатора $S=150$ *см*², расстояние между пластинами конденсатора $d=5$ *мм*, э. д. с. аккумулятора $E=9{,}42$ *в*, диэлектрическая проницаемость керосина $\varepsilon=2$. Электрическая постоянная $\varepsilon_0=8{,}85\cdot10^{-12}$ *ф/м*.

Н. Н. Карелин, И. С. Осипишин, М. А. Паленичка

Ижевский механический институт

Ижевский механический институт имеет пять дневных факультетов и готовит инженеров по следующим специальностям.

Механико-технологический факультет: технология машиностроения; металлорежущие станки и инструменты; машины и технология обработки металлов давлением; оборудование и технология сварочного производства.

Приборостроительный факультет: электронные вычислительные машины; конструирование и производство радиоаппаратуры.

Машиностроительный факультет: автоматические и полуавтоматические машины; аппаратостроение.

Инженерно-экономический факультет: экономика и организация машиностроительной промышленности; организация механизированной обработки экономической информации.

Инженерно-строительный факультет: промышленное и гражданское строительство; сельскохозяйственное строительство.

Ниже помещены варианты вступительного письменного экзамена по математике 1974 года в наш институт.

Вариант 1

1. Основанием прямой призмы служит равнобедренный треугольник, основание которого равно a, и угол при основании равен α. Определить объем призмы, если ее боковая поверхность равна сумме площадей ее оснований.

2. Решить уравнение

$$x^{\frac{1}{4}(7+\lg x)}=10^{1+\lg x}.$$

3. Решить неравенство

$$\frac{x-7}{\sqrt{4x^2-19x+12}}<0.$$

4. Решить уравнение

$$\operatorname{tg}2x+\operatorname{ctg}x=8\cos^2x.$$

Вариант 2

1. В шар радиуса R вписан конус, образующая которого наклонена к плоскости основания под углом α. Найти объем конуса.

2. Решить уравнение

$$2\sqrt{x+1}-\frac{4}{\sqrt{x+1}}=\sqrt{2x-2}.$$

3. Решить уравнение

$$\sec x-1=2\sin\frac{x}{2}.$$

4. Решить неравенство

$$\log_{0{,}3}(x^2+2x)<0.$$

Вариант 3

1. Основание прямоугольного параллелепипеда — прямоугольник, вписанный в круг радиуса R, причем одна из сторон основания опирается на дугу, равную 2α. Найти объем этого параллелепипеда, если его боковая поверхность равна S.

2. Решить уравнение

$$\lg^2(100x)+\lg^2(10x)+\lg^2x=14.$$

3. Решить неравенство

$$\sqrt[1-x]{0{,}5^{2x}}-\sqrt{0{,}25^{x-6}}<0,$$

4. Решить уравнение

$$1-\cos^2 2x=\sin 3x-\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right).$$

Ю. В. Комленко

РЕЦЕНЗИИ.
БИБЛИОГРАФИЯ

О диффузии в кристаллах

«Эта книга не учебник, не справочник, не монография, а рассказ об одной из сторон жизни кристаллов»— так начинает профессор Я. Е. Гегузин свою книгу*). Точнее, это не рассказ, а 80 коротких рассказов-очерков об одном из видов теплового движения атомов в кристаллах — о блуждании атомов по кристаллу. За кажущимся холодным покоем кристаллов скрывается активное движение атомов, многообразное и непрекращающееся. Атомы не только колеблются, то есть как бы топчутся около своих мест. Они могут меняться местами, блуждать по кристаллу. Если кристалл свободен от различных неоднородностей и на него не действуют никакие внешние силы, то блуждание атомов по кристаллу происходит беспорядочно, случайно. Но если в кристалле появляется малейший признак «непорядка» — царапина, пóра, если кристалл сжат или растянут, кристаллу придана несвойственная ему форма, если число примесных атомов в одной части кристалла больше, чем в другой, — одним словом, если состояние кристалла неравновесное, сейчас же потоки атомов становятся направленными — начинается диффузия. Направленным может быть движение примесных или собственных атомов кристалла. В последнем случае говорят о самодиффузии. Все потоки атомов подчиняются теперь одной определенной цели: залечить раны кристалла, избавить кристалл от неравновесности, дать ему возможность вернуться в равновесное состояние или хотя бы приблизиться к равновесию. Если есть в кристалле отклонение от равновесия, то движение атомов приобретает как бы разумную целеустремленность: скорее, кратчайшим путем установить равновесие.

Почему? По всей книге автор широко пользуется образной аналогией: «...Мне представляется гора, с вершины которой к подножию скатываются камни... У каждого камня есть избыточная энергия, которая освободится, когда камень скатится к подножию горы... Камней много, они катятся, сталкиваются..., после чего одни движутся к подножию еще стремительнее, а другие начинают двигаться вверх. Участь каждого из камней может быть различной и переменной. Однако все они в конечном счете стремятся к подножию горы». Кристалл со многими признаками неравновесности автор уподобляет горе и камням на ее вершине. Каждый признак неравновесности кристаллического тела — это камень на вершине горы, а процесс направленного движения атомов — процесс диффузионного устранения неравновесности — подобен скатыванию камня к подножию. Камень скатывается к подножию горы — освобождается та избыточная энергия, которой обладал камень, находясь на вершине. Кристалл освобождается от неравновесности — выделяется лишняя энергия, кристалл из неустойчивого состояния переходит в более устойчивое. «И может оказаться, — пишет Я. Е. Гегузин, — что кристалл сочтет целесообразным один из признаков неравновесности усугубить для того, чтобы иная неравновесность сгладилась быстрее и более полно».

Очерки Я. Е. Гегузина повествуют о множестве своеобразных явлений, сопровождающих диффузию или объясняемых диффузией. «Для диффузии нужна пустота» — называется один из очерков. Оказывается, в структуре кристалла для блуждающих атомов как бы специально заготовлены пустые места — так называемые вакансии, «атомы пустоты»: в каком-то месте в структуре кристалла не хватает атома.

Как ведут себя эти вакансии? Представьте себе пустое место в ряду зрителей в кино, где-то в середине ряда. Вы хотите занять его. Можно, конечно, пройти вдоль всего ряда, мешая другим зрителям, а можно поступить иначе: попросите их подвинуться — каждый передвинется на соседнее место, а в результате пустое, вакантное место как бы выплывет к вам из середины ряда, как бы само пустое место путешествует по ряду. Так путешествуют вакансии в кристалле. И не думайте, что это бывает редко. Я. Е. Гегузин приводит некоторые цифры: в кристалле золота при температуре, близкой к температуре плавления (1130 °К), каждая вакансия за одну секунду совершает 10^{10} скачков, она движется со средней скоростью около 10 *км/ч*. Но значит ли это, что она мгновенно «выскакивает» из кристалла? Ничего подобного! Вакансия движется беспорядочно из стороны в сторону, и поэтому, хотя в течение одной секунды она 10^{10} раз меняет свое место, ее перемещение составляет всего 10 микрон. «Суетливость, пожалуй, беспримерная», — замечает по этому поводу Я. Е. Гегузин. Атомы ведут себя спокойнее вакансий, но и они миллионы раз в секунду меняют свои места.

---

*) Гегузин Я. Е. Очерки о диффузии в кристаллах. Изд. 2-е, дополненное. М., «Наука», 1974.

Человек может воздействовать на движение атомов и вакансий, может управлять диффузией в кристалле, как ему нужно: вводить примеси в кристалл, менять прочность металла, склеивать и сваривать металлы и другие твердые тела и т. д. и т. п.

Диффузию в газе или в жидкости легко увидеть: дым рассеивается в воздухе, чернила расплываются в воде — все это процессы диффузии. В твердых телах процессы диффузии происходят медленнее, и их нельзя увидеть непосредственно, как исчезающую в воздухе струйку дыма. Книга Я. Е. Гегузина хороша тем, что она дает читателю возможность увидеть, почувствовать, как бы руками пощупать невидимые глазу процессы диффузии в твердом теле. Автор описывает опыты, в которых становится видимым результат движения атомов или вакансий в твердых телах. Опыты эти порой удивительны: изогнутый кристалл сам разгибается только оттого, что его нагрели; грузик на металлической проволоке ползет вверх; атомы катятся по поверхности кристалла, как перекати-поле (степное растение, отрывающееся от корня и переносимое ветром по степи); одно вещество распространяется по поверхности другого, как будто развертывается ковер; крупинки золота на поверхности кристалла каменной соли «поедают» друг друга; в другом опыте крупинки золота мечутся по поверхности кристалла каменной соли; кристалл течет, как жидкость, а жидкость разрушается хрупко, как стекло; движущийся в кристалле слюды атом урана как бы записывает свой путь, и по этой записи исследователь определяет возраст кристалла слюды.

Как пишет Я. Е. Гегузин, опыты эти «непременно надо увидеть. Увидеть, почувствовать и прийти в восторг». Автор так увлечен своей темой, что и читатель заражается этим восторгом, этой радостью исследователя, открывающего новое.

Автор не стремится дать законченную картину описываемого явления. Первое издание книги вышло четыре года назад. Второе издание автор дополнил новым материалом, добавил главу о квантовой диффузии (не самую удачную в книге), но и на этот раз, заканчивая книгу, он снова обращает внимание читателя на то, о чем в книге не рассказано, подчеркивает, как много еще надо узнать, увидеть, исследовать.

Каждый из очерков — это самостоятельный рассказ, но все они связаны единством темы: физическая сущность процесса диффузии, возможность воздействовать на этот процесс, богатство явлений диффузии в кристаллах. Множество ярких, наглядных аналогий, запоминающихся образов, примеров делают книгу интересной и увлекательной. Жаль только, что рисунки в книге не всегда столь наглядны, как их описание.

Хотя автор оговаривается, что он ограничивает тему книги только диффузией, на самом деле ее содержание шире: из этой книги можно почерпнуть множество сведений и о строении кристаллов, и о новых экспериментальных фактах, и о методах физической статистики и кинетики. Книга написана ярко, живо, увлекательно; несомненно, она доставит удовольствие читателю.

М. П. Шаскольская

Геометрические неравенства

1. Обозначим через m_a, m_b, m_c длины медиан, проведенных к сторонам a, b, c треугольника. Докажите, что

$$\frac{3}{8}(ab+bc+ca) \leqslant m_am_b+m_bm_c+m_cm_a \leqslant \frac{5}{4}(ab+bc+ca).$$

Существует недоказанное предположение, что коэффициент 3/8 можно заменить на 9/20.

2. Обозначим через h_a, h_b, h_c длины высот, проведенных к сторонам a, b, c треугольника ABC. Докажите, что

$$\left(a^2+b^2-h_c^2\right)^{\frac{1}{2}}+\left(b^2+c^2-h_a^2\right)^{\frac{1}{2}}+\left(c^2+a^2-h_b^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant 6R,$$

где R радиус окружности, описанной вокруг треугольника ABC.

3. Обозначим через w_a, w_b, w_c длины биссектрис, проведенных к сторонам a, b, c треугольника. Докажите, что

$$\frac{a}{w_b+w_c}+\frac{b}{w_c+w_a}+\frac{c}{w_a+w_b} \geqslant \sqrt{3},$$

$$\frac{w_a}{b+c}+\frac{w_b}{c+a}+\frac{w_c}{a+b} \leqslant \frac{3}{4}\sqrt{3}.$$

Н. В.

«Квант» для младших школьников

Задачи

1. В комнате, в которой заседал совет дружины, были стулья на 4 ножках и табуретки на 3 ножках. Когда все пионеры уселись, то свободных мест не осталось, а сумма количества ног у сидящих и ножек у сидений оказалась равной 39.

Сколько в комнате было стульев и сколько табуреток?

2. Аквалангист под водой потерял ориентацию. Как он может определить, где верх, а где низ?

3. Московские школьники Николай и Владимир встретились у Владимира. Николай сказал: «Если от двузначного номера моего дома отнять число, образующееся после перестановки его цифр, то получится номер твоего дома. В каком доме я живу?»

Владимир сказал: «Это легкая задача», — и сразу ее решил.

В каких домах жили школьники?

4. Для того чтобы скошенное сено высохло, его часто ворошат. Почему это помогает?

5. Как надо поставить знаки «+» между цифрами числа 987654321, чтобы в сумме получилось 99?

Сколько решений имеет эта задача?

Рисунки Э. Назарова

РАЗГОВОР В ТРАМВАЕ

А.П.САВИН, Л.М.ФИНК

Я ехал по Ленинграду в трамвае со своим племянником Мишей. Опустив в кассу 6 копеек, я оторвал два билета.

— Чур этот билет мой! — сказал Миша.

— Пожалуйста, бери любой из них. Они ведь совершенно одинаковые, с любым из них можно проехать весь маршрут.

— Одинаковые, да не совсем. Этот билет самый обыкновенный, на нем номер 286 357. А следующий билет с номером 286 358 — «счастливый», сумма первых трех цифр совпадает с суммой последних трех.

Тут я вспомнил, что уже не раз слышал о распространенном поверье: билет с одинаковыми суммами цифр приносит счастье. В данном случае Мише достался билет 286 358, в котором $2+8+6=3+5+8$.

— И часто тебе попадаются «счастливые» билеты? — спросил я.

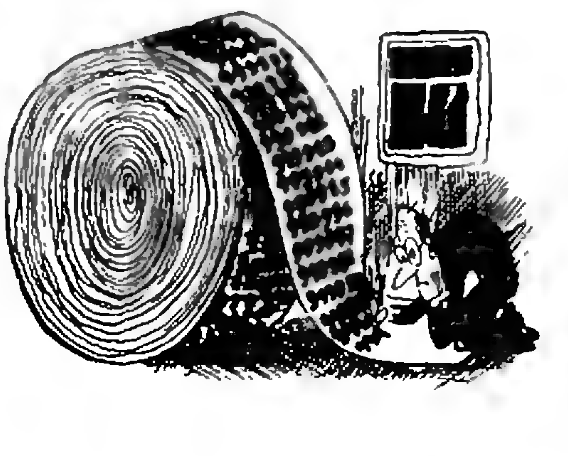
— Да нет, очень редко. Примерно раз в месяц. А так как я езжу в институт и обратно каждый день, кроме выходных, то, значит, в среднем один «счастливый» билет приходится на 50 обычных.

— Чепуха, — вмешался один из наших попутчиков. — Я вошел на предыдущей остановке и в той же кассе вытянул тоже «счастливый» билет — 286 349. Да и сейчас кто-то отрывает билет 286 367, тоже «счастливый»; скоро появится — 286 376, затем 286 385. Так что в каждом десятке билетов есть один «счастливый».

— Это не вполне верно, — возразил новый пассажир, оторвавший «счастливый» билет 286 367. — Ваш пример ничего не доказывает. В следующем десятке будет еще один «счастливый» билет — 286 394. А затем «счастливых» билетов долго не будет, вплоть до номера 286 439, так что здесь между двумя «счастливыми» билетами будет интервал в 45 билетов. Таких примеров можно привести много. В этой же катушке билетов, начальные цифры которых 286, между билетами 286 097 и 286 169, то есть среди 71 билета, нет ни одного «счастливого».

— Вот и я говорю, — подхватил Миша, — в среднем один «счастливый» билет попадается на полсотни.

— Это тоже опрометчивое заявление, — заметил я. — Чтобы правильно ответить на этот вопрос, нужно его исследовать. А сначала нужно точно его сформулировать. Скажем, так: *сколько существует «счастливых» шестизначных чисел от 000 000 до 999 999, то есть чисел, у которых равны суммы цифр первых трех и последних трех разрядов?*



— Ну что же, — сказал Миша после недолгого размышления, — я сейчас не могу точно ответить на этот вопрос, но могу описать способ, позволяющий его решить, по крайней мере, в принципе. Выпишем подряд все числа от 000 000 до 999 999 и проверим каждое из них. Таким образом мы сможем пересчитать число «счастливых» билетов.

— Да, такой метод решения возможен. Он называется *методом перебора*. Им можно решать задачи, в которых исследуются свойства конечного набора каких-либо чисел или других объектов. Однако метод перебора имеет два недостатка. Прежде всего, он очень трудоемок. Рассуди сам, необходимо проверить миллион чисел. Если на проверку каждого из них тратить всего 1 секунду, то потребуется 1 000 000 секунд, то есть почти 278 часов. При восьмичасовой ежедневной работе это займет 35 дней.

— Но ведь можно поручить это электронной вычислительной машине!

— Можно, конечно, но стоит ли «палить из пушки по воробьям»? Кроме того, метод перебора имеет и другой недостаток, который сохраняется и при расчете на ЭВМ. При переборе получается решение только одной конкретной задачи, которое обычно не позволяет произвести обобщения или вскрыть какие-либо неизвестные закономерности. Поэтому-то переборные методы решения в известном смысле неинтересны.

— Разрешите мне опять вмешаться в ваш разговор, — сказал обладатель счастливого билета 286 367. — Я заинтересовался вашей задачей и уже нашел ее решение, правда, не точное, а приближенное, вернее то, что мы, математики, называем оценкой. Да, я не представился, зовут меня Георгий Владимирович, я доцент кафедры математики одного из технических вузов. Так вот, молодой человек, — обратился он к Мише, — давайте введем новое определение «счастливого» билета, или, лучше даже, введем новый термин, например, «красивый» билет. Будем называть билет «красивым», если *сумма первых трех цифр дает тот же остаток при делении на 9, что и сумма следующих трех цифр*. Понятно?

— Понятно, — ответил Миша, — но почему именно на 9?

— А потому, что в нашей десятичной системе счисления всякое число дает тот же остаток при делении на 9, что и сумма его цифр. Это свойство дает возможность легко найти число «красивых» билетов. Действительно, среди чисел от 1 до 999 ровно 111 дают при делении на 9 остаток 1, столько же остаток 2, и так далее.

Сколько же существует различных «красивых» чисел с остатком 1? На первом месте может стоять 111 чисел и для каждого из них следом можно поставить любое из тех же 111 чисел. Таким образом, получаем $111 \cdot 111 = 12\,321$ «красивых» билетов с остатком 1. Такое же число «красивых» билетов дают остатки 2, 3 и так далее. А к числам с остатком 0 или, как мы привыкли говорить, делящимся без остатка, нужно еще прибавить число 000, поэтому их будет не 111, а 112, откуда следует, что «красивых» чисел с остатком 0 будет $112 \cdot 112 = 12\,544$. Итак, всего «красивых» чисел будет $8 \cdot 12\,321 + 12\,544 = 111\,112$.

А при чем же здесь «счастливые» билеты? — спросил Миша.

— Это уже совсем просто! Ведь если равны суммы цифр, то равны и их остатки при делении на 9, следовательно, каждый «счастливый» билет является «красивым». Однако не всякий «красивый» билет будет «счастливым». Например, билет 100 748 будет «красивым», но не будет «счастливым». Итак, если обозначить число «счастливых» билетов через C, то можно написать неравенство

$$C < 111\,112.$$

— Но это все-таки не полное решение задачи, — сказал Миша. — Мы получаем, что «счастливых» билетов меньше 111 112, но не знаем, насколько. А можно ли показать, что их больше какого-то числа? Я слышал, что это называется «оценкой снизу».

—Можно дать и оценку снизу,— ответил Георгий Владимирович,—боюсь только, что она будет довольно грубой. Назовем «прекрасными» билетами такие, у которых номер состоит из двух совершенно одинаковых половинок, например 287 287. Таких билетов ровно 1000, а именно, 000 000, далее 001 001, 002 002, ... до 999 999. «Прекрасных» билетов, естественно, меньше, чем «счастливых», поэтому мы можем записать такую оценку:

$$1000 < C < 111\,112.$$

Здесь оценка сверху более чем в 100 раз превышает оценку снизу, так что вряд ли такой результат можно считать решением поставленной задачи.

— Пожалуй, оценку сверху можно несколько улучшить, — сказал я, — используя признак делимости на 11.

— Что это за признак? — спросил Миша. — Мы его не проходили.

— Он очень прост. Сложим все цифры, стоящие в нечетных разрядах, потом отдельно сложим числа, стоящие в четных разрядах. Так вот, если разность полученных сумм делится на 11, то и все число делится на 11, и наоборот, любое число, делящееся на 11, обладает этим свойством.

— Какое же отношение этот признак имеет к «счастливым» билетам?— удивленно спросил Миша.

— Самое прямое, но скажи сначала, слышал ли ты о билетах, «счастливых по-московски»?

— Ах, да! Москвичи считают билет «счастливым», если сумма цифр, стоящих на четных местах, равна сумме цифр, стоящих на нечетных местах. Вот чудаки!

— Во-первых, чудаком являешься ты, если веришь, что «счастливые» билеты могут приносить удачу, а во-вторых, москвичи называют «счастливыми» те же самые билеты, что и ленинградцы, а билеты, которые мы называем «счастливыми по-московски», они называют «счастливыми по-ленинградски». Так «американские горки» в Америке называют «русскими». Но не в этом дело. Совсем легко проверить, что номера билетов, которые ты называешь «счастливыми по-московски», делятся на 11. Верно?

— Верно, — ответил Миша.

— И этих билетов не больше, чем чисел от 0 до 999 999, делящихся на 11.

— То есть не больше 90 910! — воскликнул Георгий Владимирович.

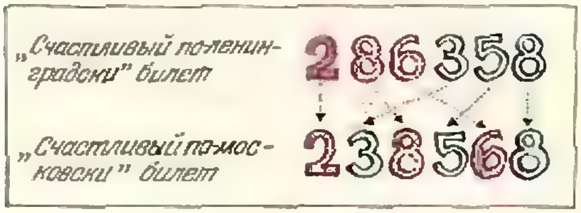
— А каких билетов больше, — спросил Миша, — «счастливых» или «счастливых по-московски»?

— Совсем нетрудно установить, что одних столько же, сколько и других, — ответил я.

— Скажете тоже, «нетрудно», — хмыкнул Миша, — мы же не знаем, столько тех и других.

"RUSSIAN MOUNTAINS"
„АМЕРИКАНСКИЕ ГОРКИ"

— А это и не нужно, — заметил Георгий Владимирович. — Расставь первые три цифры «счастливого» билета на четные места, последние три цифры на нечетные места, и ты получишь из «счастливого» билета билет, «счастливый по-московски». И обратно, если у билета, «счастливого по-московски», собрать все цифры, стоящие на четных местах, в первой половине номера, а остальные — во второй, то ты получишь «счастливый» билет. Таким образом, мы установили взаимно однозначное соответствие между теми и другими билетами. А отсюда следует, что их одинаковое количество. Верно?


„Счастливый по-ленинградски" билет
286358
„Счастливый по-московски" билет
238568

— Верно! — воскликнул Миша.— Вот здорово! Значит, мы доказали, что «счастливых» билетов меньше, чем 90 910.

— А какова будет сумма цифр у номера, если в «счастливом» билете заменить три последние цифры на разности между 9 и этими цифрами?— спросил Георгий Владимирович.

— Сейчас, — задумался Миша, — та-а-к, ... трижды девять — двадцать семь...минус...плюс... Получается 27! А ведь опять получается взаимно однозначное соответствие! Георгий Владимирович, отсюда следует, что «счастливых» билетов столько же, сколько билетов с суммой цифр 27.

— Правильно, —ответил он.

— Но сколько же все-таки «счастливых» билетов? — взглянув на меня, спросил Миша.

— Ответ я тебе скажу сейчас: 55 252, то есть в среднем каждый 18-й билет «счастливый». А почему их столько, я расскажу тебе как-нибудь в следующий раз. Прощайся с Георгием Владимировичем и пойдем—нам пора выходить.

Задачи наших читателей

1. Найти углы прямоугольного треугольника, если известно, что отношение высоты, опущенной на гипотенузу, к медиане, проведенной к катету, имеет наибольшее возможное значение.

Е. А. Боков

2. На листе бумаги нарисована окружность, центр ее не указан. При помощи двусторонней линейки вписать в эту окружность квадрат.

А. В. Аляев

3. Без помощи таблиц доказать, что

$$\operatorname{tg} 50^\circ > \frac{13}{11}.$$

С. И. Майзус

4. Доказать неравенство

$$\left(1+\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{9}\right)\cdots\times$$
$$\times\left(1+\frac{1}{n^2}\right)<2.$$

С. Т. Берколайко

5. Доказать, что угол в n°, где n — произвольное натуральное число, не делящееся на 3, можно разделить на n равных частей с помощью циркуля и линейки.

Л. М. Земсков

6. Сумма углов, лежащих при основании трапеции, равна 90°. Докажите, что расстояние между серединами оснований трапеции равно расстоянию между серединами ее диагоналей.

Б. И. Алейников

7. В каких пределах заключено отношение медиан, проведенных к катетам прямоугольного треугольника?

Ф. Гайнуллин

8. Дан треугольник ABC, в котором угол A вдвое больше угла B. Определить высоту CK, опущенную из вершины C на сторону AB, если известно, что $|AC| = 3$ *см*, $|AB| = 5$ *см*.

А. В. Хусаинов

ОТВЕТЫ. УКАЗАНИЯ. РЕШЕНИЯ

К статье «Узел на столе математика»

1—2. Указание. Воспользуйтесь вашим куском бечевки.

3. Рисунок 1 поможет вам проделать все необходимые операции с бечевкой.

4. Чтобы дать вполне строгие доказа*тельства сформулированных утверждений,* нужно владеть довольно сложной топологической техникой. Однако в общем-то вполне очевидно, что плоская замкнутая кривая без точек самопересечения (то есть диаграмма узла без точек скрещивания) всегда может быть «раздута» в окружность. Очевидно также, что если диаграмма узла имеет единственную точку скрещивания, то она всегда является плоской восьмеркой (не путайте с узлом-восьмеркой!), то есть «перегнутой» окружностью (см. рис. 2, *а*). Нарисовав две точки скрещивания с выходящими из них «обрезками» бечевки и попытавшись соединить эти «обрезки» друг с другом (чтобы получить диаграмму узла с двумя точками скрещивания), вы легко убедитесь в том, что так можно получить либо две пересекающиеся окружности (то есть диаграмму зацепления, а не узла), либо дважды перегнутую окружность (то есть тривиальный узел) — см. рисунки 2, *б*, *в*. Аналогичные, но чуть более кропотливые, рассуждения с диаграммами уз*лов с тремя и четырьмя точками скрещи*вания проведите самостоятельно.

5. Легко проверить, что замкнутая пятизвенная ломаная на с. 12 является «невозможным объектом» (об этих «объектах» рассказывалось в журнале «Квант», 1971, № 5, в статье Л. и Р. Пенроузов «Невозможные объекты».) Чтобы рисунок 9 на с. 12 был проекцией реальной ломаной, его надо мысленно дополнить не менее чем тремя отрезками, перпендикулярными плоскости рисунка (и потому «невидимыми») и соединяющими «видимые» отрезки в трех уголках «звезды». Так же легко проверить, что «изломанность» клеверного листа равна 6, и все трех-, четырех- и пятизвенные замкнутые пространственные ломаные — тривиальные узлы.

6. Это узлы 3_1, 5_1 и 7_1 из таблицы узлов (см. с. 17).

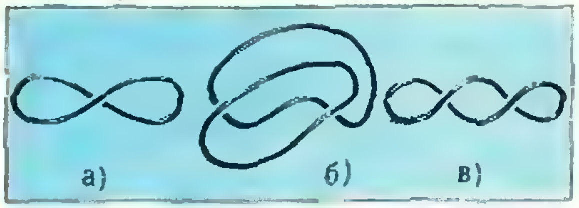


Рис. 2.

8. Всякий узел на торе (завязан ли при этом сам тор или нет, не играет никакой роли) можно представлять себе как «обмотку» тора, характеризующуюся двумя целыми числами — числом «оборотов» вдоль «параллели» тора и числом «оборотов» вдоль «меридиана» (см. рис. 3). Хотя бы одно из этих чисел отлично от нуля; пусть, например, это будет число n «оборотов» вдоль параллели. Выберем какое-то одно (из двух возможных) направление движения вдоль узла и рассмотрим моменты прохождения через какой-то фиксированный меридиан тора, точнее, точки пересечения узла с этим меридианом, но с учетом порядка прохождения через эти *точки при движении вдоль узла.* Почти очевидно (хотя строго доказать это и не просто), что число таких точек как раз равно числу «оборотов» n узла вдоль параллели,

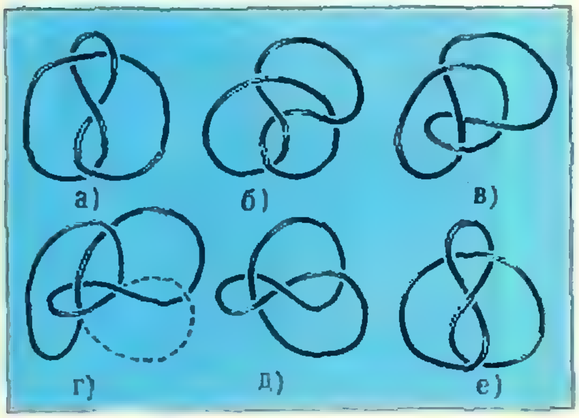


Рис. 1.

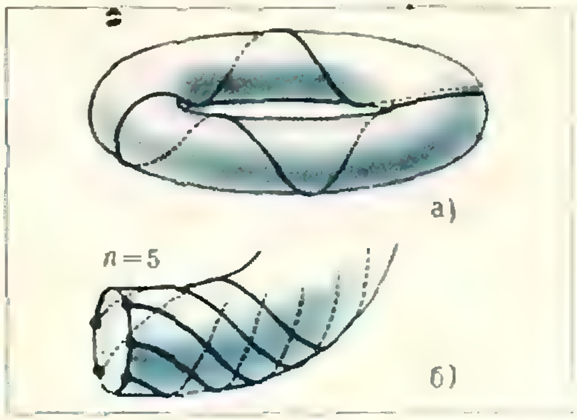


Рис. 3.

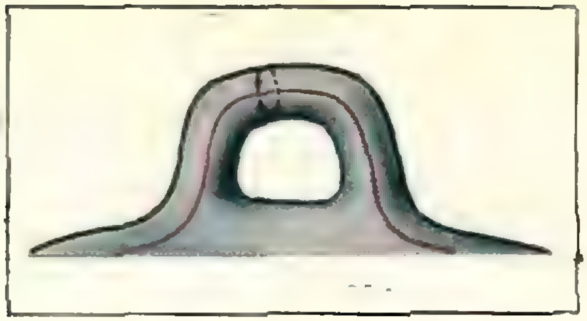


Рис. 4.

если, слегка «подправив» узел на торе, убрать те точки пересечения узла с меридианом, когда узел, «перейдя» через меридиан, «тут же» возвращается обратно. Разрежем теперь тор вдоль нашего узла и вдоль выбранного нами меридиана; тор распадется на полоски, число которых равно n. Будем теперь склеивать эти полоски вдоль разреза по меридиану в том порядке, в каком мы попадаем на полоски, двигаясь вдоль узла в выбранном направлении и считая отрезки узла, например, левой кромкой соответствующих полосок. Легко понять, что все полоски склеятся таким образом в одну ленту, краем которой будет наш узел. Эта лента и есть тот «кусок» (единственный!) поверхности, который получается после разрезания тора вдоль нашего узла.

9. Бабушкин узел есть композиция двух левых клеверных листов, сквер-узел — композиция левого и правого клеверных листов.

10. Указание. Воспользуйтесь все той же бечевкой.

12. Если узел разрезает сферу с ручками на две части и при этом не разрезает «вдоль» на две или большее число частей какую-то из ручек, то он либо проходит вдоль этой ручки только однажды, и тогда по меридиану этой ручки можно с одной стороны узла попасть на другую (см. рис. 4), то есть узел не будет разрезать поверхность на две части; либо узел вообще «не заходит» на ручку, и тогда эту ручку можно удалить, заклеив «дырки» в местах ее соединения со сферой «заплатами». Итак, если узел разрезает на две части сферу с наименьшим возможным для данного узла числом ручек, то, двигаясь вдоль узла, мы пройдем вдоль каждой из ручек не менее двух раз; в действительности (попробуйте доказать это сами) узел проходит вдоль каждой ручки ровно два раза. Эти два отрезка узла на ручке и будут ее кантом.

13. Доказательство проводится по индукции. Пусть p — число ручек. Чтобы сделать рассуждения более наглядными, будем представлять себе сферу сплющенной, то есть кругом, при этом кант (экватор) превратится в окружность этого круга; ручки же превратятся в полоски, а их кант — в края этих полосок. При приклеивании полосок-ручек (см. рис. 5) разрешается их перекручивать и переплетать друг с другом; единственное требование — число «перекручиваний» для каждой полоски должно быть четным, иначе с одной стороны круга-сферы мы сможем по полоске-ручке попасть на другую, не пересекая узла-канта, то есть узел не будет разрезать сферу на две части. Рассмотрим теперь произвольный круг с приклеенными к нему таким способом p полосками (мы не требуем, чтобы кант, то есть край этой поверхности, был узлом — он может быть и зацеплением); обозначим через h число кривых, на которые распадается край-кант (при $h=1$ этот кант будет узлом). Посмотрим, что происходит с числом h при приклеивании очередной полоски-ручки: если полоска приклеивается в участках (всегда двух) края-канта, принадлежащих одной кривой (из тех, на которые распадается кант), то число кривых *увеличится* ровно на одну (проверьте это!), если же эти два участка принадлежат *разным* кривым, то после приклеивания полоски ее край станет «мостиком» между этими кривыми, они сольются в одну и общее число кривых *уменьшится* на единицу. Итак, в любом случае число кривых h изменяется (уменьшается или уве-

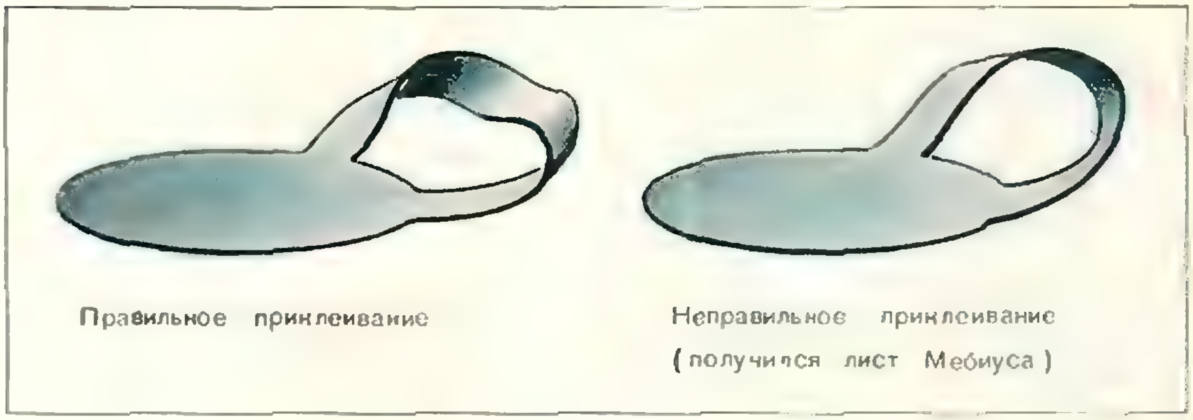


Рис. 5.

личивается) ровно на 1. Если вспомнить теперь, что при $p=0$ (сфера без ручек) число h равно 1, то для всех четных p число h будет нечетным (и поэтому край может быть узлом), а при нечетных p число h будет четным и большим 0, и край всегда будет зацеплением, но не узлом.

14. Неравенства доказываются «приклеиванием» узлов (а в случае «кондитерского числа» — и сфер).

15. Доказательство не проходит из-за того, что теперь разделенные узлы могут соединяться между собой отрезками, лежащими на двух (а не на одной) «трубках», поэтому «заклеивание» приведет к появлению лишней ручки.

К статье «Решение задач с помощью геометрических преобразований»

3. При решении нам понадобится лемма, являющаяся частным случаем нашей задачи.

Лемма. *На плоскости даны два правильных треугольника ABD и A_1B_1D с общей вершиной D* (рис 6). *Пусть точки A_2 и B_2 получаются из точек A_1 и B_1 поворотом на угол α вокруг точек A и B соответственно. Тогда треугольник A_2B_2D тоже правильный.*

Докажите эту лемму (указание: рассмотрите поворот на 60° вокруг точки D).

Возвращаясь к основной задаче, докажем, что точка C движется с той же угловой скоростью по окружности с центром в точке O_3, являющейся вершиной правильного треугольника $O_1O_2O_3$. Пусть A и B — первоначальные положения точек, A_1 и B_1 получаются из них поворотом на угол α вокруг *центров O_1 и O_2 соответственно, C и C_1* — вершины правильных треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ (рис. 7). Нам достаточно доказать, что точка C_1 получается из точки C поворотом на угол α вокруг точки O_3. Переведем точку C в точку C_1 с помощью следующих трех поворотов. Рассмотрим поворот вокруг точки B на 60°; он переводит точку C в точку A. Далее, поворот вокруг точки O_1 на угол α переводит точку A в точку A_1. Наконец, поворот вокруг точки B_1 на −60° переводит точку A_1 в точку C_1. Композицией этих трех поворотов является поворот на угол α вокруг некоторой точки, переводящий точку C в точку C_1. Проследив перемещения точки O_3 при этих трех поворотах и воспользовавшись леммой, получаем, что точка O_3 в результате выполнения трех указанных преобразований переходит в себя и, следовательно, является центром результирующего поворота. Так как это верно для любого угла α, то задача решена.

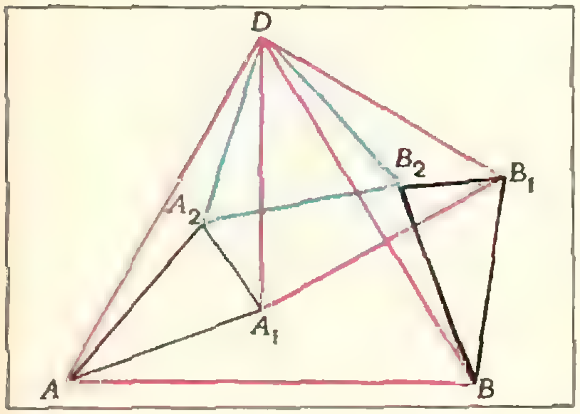


Рис. 6.

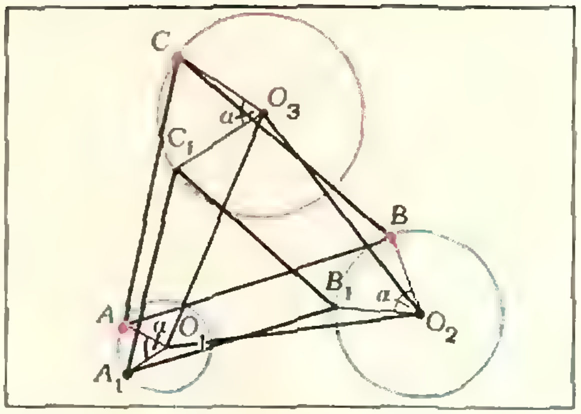


Рис. 7.

К статье «Вступительные экзамены в вузы»

Уральский государственный университет им. А. М. Горького

Математика

Вариант 1

1. Решение неравенства имеет вид $x \geqslant -1$. При $x>a$, $x>-1$ уравнение принимает вид $x-a-x-1=2$, откуда $a=-3$. Легко проверить, что решением уравнения $|x+3|-|x+1|=2$ является область $x \geqslant -1$. Итак, $a=-3$.

2. Поскольку высота треугольника ABC перпендикулярна прямой l_2, опустим из данной точки A перпендикуляр на l_2. Пусть этот перпендикуляр пересечет l_1 в точке E. Тогда, поскольку медиана лежит на l_1, $AE=EC$ (E — середина AC) и точка C восстанавливается однозначно.

3. ОДЗ неравенства: $0<x<\frac{2}{3}$. Правая часть решаемого неравенства в ОДЗ равна 2. Так как $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}x-x^2=\frac{49}{144}-\left(x-\frac{1}{12}\right)^2<1$ и $x^2<1$, то $\log_{x^2}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}x-x^2\right)>0$. Учитывая это, заменяем исходное неравенство на эквивалентное ему $\frac{1}{2} \leqslant \log_{x^2}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}x-x^2\right)$.

Решением последнего неравенства являются лучи $x \leqslant -\frac{5+\sqrt{73}}{12}$, $x > \frac{\sqrt{73}-5}{12}$. Принимая во внимание ОДЗ и то, что $0 < \frac{\sqrt{73}-5}{12} < \frac{2}{3}$, получим $\frac{\sqrt{73}-5}{12} \leqslant x < \frac{2}{3}$.

4. Указание. Использовать формулы: $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ и $\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}\left[\cos(x+y) + \cos(x-y)\right]$.

Вариант 2

1. $a = 1$.

2. Пусть D—середина стороны BC треугольника ABC, E—середина стороны AC, K—точка пересечения его медиан. Пользуясь тем, что медианы, пересекаясь в точке K, делятся в ней в отношении 1:2, считая от точки D или E, легко построить точки A и B. Вершину C строим, исходя из того, что $DC = DB$.

3. $\frac{3+\sqrt{41}}{4} \leqslant x \leqslant \frac{3+\sqrt{21}}{2}$.

Вариант 3

1. При $a \leqslant -3$ $x < \frac{a+\sqrt{a^2+3a}}{a}$, $x > \frac{a-\sqrt{a^2+3a}}{a}$; при $-3 < a \leqslant 0$, x—любое действительное число; при $a > 0$ $\frac{a-\sqrt{a^2+3a}}{a} < x < \frac{a+\sqrt{a^2+3a}}{a}$.

2. Указание. Четырехугольник, образованный двумя вершинами основания пирамиды и серединами выходящих из этих вершин ребер пирамиды, вписан в окружность. Отсюда выводится, что этот четырехугольник является равнобедренной трапецией. Углы наклона граней пирамиды к плоскости основания соответственно равны $\frac{\pi}{2}$, $\operatorname{arctg}\frac{2H}{a}$, $\operatorname{arctg}\frac{2H}{b}$.

3. $\frac{1}{2} < x < 1$.

4. При $-\sqrt{7} < m < \sqrt{7}$ $x_1 = \pi k$, $x_2 = \pm\arccos\frac{-1+\sqrt{m^2+2}}{2} + 2\pi k$; при $m \leqslant -\sqrt{7}$ и $m \geqslant \sqrt{7}$ $x = \pi k$ (k — целое).

Указание. Привести уравнение к виду $\sin x\,(4\cos^2 x + 4\cos x - 1 - m^2) = 0$.

Вариант 4

1. При $a < 0$ $-\sqrt[4]{-a} < x < 0$, $x > \sqrt[4]{-a}$; при $a = 0$ неравенство не имеет смысла; при $a > 0$ $x < 0$.

2. $\frac{1}{3} lS \sin\alpha \left[1 + \frac{d}{d-2l\cos\alpha} + \left(\frac{d}{d-2l\cos\alpha}\right)^2\right]$.

3. $\frac{1}{2} < x < 1$, $1 < x < \frac{3}{2}$, $\frac{1+\sqrt{15}}{2} \leqslant x < 3$.

4. При $m \leqslant -11$, $m \geqslant 5$ $x = \frac{\pi}{2}(2k+1)$; при $-11 < m < 5$ $x_1 = \frac{\pi}{2}(2k+1)$, $x_2 = (-1)^k \arcsin\frac{\sqrt{5-m}-2}{2} + \pi k$ (k — целое).

Указание. Уравнение приводится к виду $\cos x\,(4\sin^2 x + 8\sin x + m - 1) = 0$.

Физика

Билет 1

3. $A = \frac{\text{[illegible]}}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{r_1} - \frac{q_2}{R+r_1} - \frac{q_1}{R+r_2} + \frac{q_2}{r_2}\right)$.

Билет 2

3. $a \geqslant g\frac{k\cos\alpha - \sin\alpha}{k\sin\alpha + \cos\alpha}$.

Указание. Записать уравнения движения груза по горизонтали и вертикали.

Билет 3

3. $h_2 = \frac{7p_0}{\rho g} + 8h_1 = 78$ м.

Билет 4

3. $w = \sqrt{\frac{2g(1-\cos\alpha_0)(m_1+2m_2)}{l(m_1+4m_2)}}$.

Билет 5

3. а) $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \approx 1{,}42$ с;

б) $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{\sqrt{g^2+a^2}}} \approx 1{,}40$ с;

в) $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g\cos\alpha}} \approx 1{,}44$ с.

Билет 6

3. $F = mg\dfrac{\sqrt{(2R-h)\,h}}{R-h}$.

Куйбышевский государственный университет

Вариант 1

1. $\dfrac{(a+b)^2}{24}\sqrt{b\,(b-2a)}\,\mathrm{tg}^2\dfrac{\varphi}{2}$

(φ — величина угла, опирающегося на боковую сторону трапеции; $b>2a$).

2. Решение. Пусть $b=a+p$, $c=a+2p$, $d=a+3p$, где p — разность арифметической прогрессии; тогда $|ad-bc|=2p^2$ и $A(x)\equiv(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)+m^2=z^2+2p^2z+m^2$, где $z=(x-a)^2-3p\,(x-a)$. Так как дискриминант $\Delta=4p^4-4m^2=4\,(p^2+m)(p^2-m)\leqslant 0$, если $2m\geqslant 2p^2=|ad-bc|$, то квадратный трехчлен $z^2+2p^2z+m^2$ неотрицателен при всех действительных значениях z и $2m\geqslant|ad-bc|$. Следовательно, выражение $A(x)$ неотрицательно при всех действительных значениях x, если $2m\geqslant|ad-bc|$.

3. $x_1 = 81^{\sqrt{61}-7}$, $\quad y_1 = 81^{8-\sqrt{61}}$;

$x_2 = 81^{-7-\sqrt{61}}$, $\quad y_2 = 81^{8+\sqrt{61}}$.

4. $x=-1$ при $m=-1+2k\pi$ и $x=1$ при $m=1-\pi+2k\pi$, где k — любое целое число.

Вариант 2

1. $\arcsin\left|\sin\varphi\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)\right|$ и

$\arcsin\left[\sin\varphi\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)\right]$.

2. $0<x<2$ и $4<x<+\infty$.

3. $x=\left(\dfrac{3}{2}+2k\right)\pi$, где $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

4. $x_1 = 3/2$, $y_1 = 1/2$; $x_2 = -2$, $y_2 = 4$.

Вариант 3

1. $-\infty<x<-1/2$, $\quad -1/5<x<1/8$ и $1<x<+\infty$

2. $\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{3}{5}$.

3. $x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$, $x=n\pi\pm\mathrm{arctg}\,\dfrac{1}{2}$, где k, $n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

4. $x = 0{,}25$

Вариант 4

1. $x_1 = 2^{-\frac{\sqrt{17}+1}{2}}$, $x_2=\dfrac{1}{2}$,

$x_3 = 2^{\frac{\sqrt{17}-1}{2}}$, $x_4 = 16$.

2. $V=\dfrac{S^2}{3p}\mathrm{tg}\,\alpha$. $S_{\text{полн}} = 2S\cos^2\dfrac{\alpha}{2}\sec\alpha$.

3. $x=\pm\mathrm{arctg}\,\dfrac{\sqrt{4-3a}\pm 2}{\sqrt{3}}+k\pi$ (k — целое, 4 серии) при $a<\dfrac{4}{3}$, $a\neq 0$; при $a=\dfrac{4}{3}$ или $a=0$ перед 2 берется только знак «плюс» (получаются по 2 серии); при $a>\dfrac{4}{3}$ корней нет. Указание. Обозначить $\mathrm{tg}\,x$ через t и решить уравнения $t^2\pm\dfrac{4}{\sqrt{3}}\,t+a=0$, учесть, что $t\neq 0$.

4. $-\infty<x<-1$, $0<x<1$ и $1<x<+\infty$.

Вариант 5

1. $x<-1$.

2. $S_{\text{кон}}:S_{\text{шара}} = \dfrac{m^2(m-2)}{(m-1)^4}\left(m>2\right)$.

3. 47 *м*.

Московский институт электронного машиностроения

Вариант 1

1. Обозначим через x (*га/ч*) — производительность первой бригады, y (*га/ч*) — второй. Тогда $117\,(x+y)=234$, откуда $x+y=2$.

Чтобы засеять 39 *га*, бригадам требуется соответственно $\dfrac{39}{x}$ и $\dfrac{39}{y}$ *ч*. Значит, бригады работали с повышенной производительностью $\left(T-\dfrac{39}{x}\right)$(*ч*) и $\left(T-\dfrac{39}{y}\right)$(*ч*) соответственно. За это время они засеяли $234-2\cdot 39=156$ (*га*). Итак,

$$\left(T-\frac{39}{x}\right)\left(x+\frac{25}{4}\right)+\left(T-\frac{39}{y}\right)\times\left(y+\frac{3}{2}\right)=156.$$

Подставляя сюда $y=2-x$ и упрощая, имеем

$$\frac{25}{x}+\frac{6}{2-x}=T-24.$$

Если $T=55$, то получаем уравнение

$$31x^2-81x+50=0.$$

Отсюда $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{50}{31}$; $y_1 = 1$, $y_2 = \frac{12}{31}$. Если $x = \frac{50}{31}$, $y = \frac{12}{31}$, то второй бригаде, чтобы засеять 39 *га*, надо $\frac{39 \cdot 31}{12} = 100\frac{3}{4}$ (*ч*), что противоречит условию. Значения $x = y = 1$ (*га/ч*) удовлетворяют условию задачи.

Теперь надо выяснить, при каких T система

$$\begin{cases} \frac{25}{x} + \frac{6}{2-x} = T - 24, \\ 2 > x > 0, \\ T > \frac{39}{x}, \\ T > \frac{39}{2-x} \end{cases} \qquad (1)$$

имеет решение. Найдем, прежде всего, возможные значения x. Неравенство $T > \frac{39}{x}$ с учетом первого уравнения эквивалентно неравенству

$$\frac{25}{x} + \frac{6}{2-x} > \frac{39}{x} - 24$$

С учетом соотношений $0 < x < 2$ приходим к неравенству

$$6x^2 - 17x + 7 < 0,$$

откуда $\frac{1}{2} < x < \frac{7}{3}$. Но так как $x < 2$, то

$$\frac{1}{2} < x < 2. \qquad (2)$$

Аналогично, условие $T > \frac{39}{2-x}$ эквивалентно неравенству

$$12x^2 + 5x - 25 < 0,$$

откуда $-\frac{5}{3} < x < \frac{5}{4}$. Но так как $x > 0$, то

$$0 < x < \frac{5}{4}. \qquad (3)$$

Сопоставляя (2) и (3), получаем

$$\frac{1}{2} < x < \frac{5}{4}. \qquad (4)$$

Обратно, если x удовлетворяет (4), то, взяв $T = \frac{25}{x} + \frac{6}{2-x} + 24$, мы удовлетворим систему (1). Остается найти область значений функции

$$T = f(x) = \frac{25}{x} + \frac{6}{2-x} + 24, \text{ если } \frac{1}{2} < x < \frac{5}{4}.$$

Покажем, что в этом интервале $f(x)$ монотонно убывает. Действительно,

$$f(x_1) - f(x_2) = \\ = -\frac{x_1 - x_2}{x_1 x_2 (2 - x_1)(2 - x_2)} [19x_1 x_2 - \\ - 50(x_1 + x_2) + 100].$$

Достаточно проверить, что выражение в квадратной скобке положительно. Действительно, оно равно

$$19\left(\frac{50}{19} - x_1\right)\left(\frac{50}{19} - x_2\right) - \frac{600}{19} > \\ > 19\left(\frac{50}{19} - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{600}{19} > 0.$$

Значит, $f(x)$ изменяется от $T_{\min} = f\left(\frac{5}{4}\right) = 52$ до $T_{\max} = f\left(\frac{1}{2}\right) = 78$.

Ответ. Производительность бригад одинакова и равна 1 *га/ч*; 52 *ч* $\leqslant T \leqslant$ 78 *ч*.

2. $x_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, $x_2 = 2k\pi$,

$x_3 = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

3. $0 < x < 1$.

4. $\frac{2 + \sqrt{3}}{2} \leqslant a < 2\frac{2}{5}$.

5. $3a^2$. Указание. Рассмотреть сечение пирамиды плоскостью, проходящей через высоту пирамиды и середины двух сторон основания, через одну из которых по условию задачи проведена плоскость; учесть, что отношение площади треугольника, отсеченного от боковой грани проведенной плоскостью, к площади грани равно 1:4, этот треугольник подобен грани с коэффициентом 1:2.

Вариант 2

1. Пусть первый грузовик брал за один рейс x станков. Обозначим через y число рейсов, которые должен был бы сделать первый грузовик, чтобы перевезти оставшиеся 72 станка. Тогда получаем следующую систему:

$$\begin{cases} \frac{72}{x} \leqslant y < \frac{72}{x} + 1, \\ \frac{72}{x+4} \leqslant y - 3 < \frac{72}{x+4} + 1. \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{cases} \dfrac{72}{x} < \dfrac{72}{x+4} + 4, \\ \dfrac{72}{x+4} + 3 < \dfrac{72}{x} + 1. \end{cases}$$

Таким образом, $2 < \dfrac{72}{x} - \dfrac{72}{x+4} < 4$, или $72 < x^2 + 4x < 154$, откуда $76 < (x+2)^2 < 158$, $9 \leqslant x + 2 \leqslant 12$ и $7 \leqslant x \leqslant 10$. Но по условию $\dfrac{48}{x}$ — число целое, поэтому $x = 8$.

2. $x = \pm \dfrac{\pi}{3} + 2\,k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$

3. Если $a = 0$, то решений нет; если $a \neq 0$, то $-\dfrac{|a|}{\sqrt{5}} < x \leqslant |a|$.

4. $m > 12$.

5. $\dfrac{a^2 \sin^2 \alpha \cos \dfrac{\alpha}{2}}{\sin^2 \dfrac{3\alpha}{2}}$.

Указание.
Рассмотреть сечение пирамиды, проходящее через высоту и перпендикулярное стороне основания пирамиды (нижнему основанию трапеции, полученной в сечении пирамиды плоскостью, о которой говорится в условии задачи). В этом треугольнике известны все углы, отсюда легко найти все линейные элементы. Далее, рассматривая боковую грань, легко найти длину верхнего основания трапеции.

Ярославский политехнический институт

Математика

Вариант 1

1. $V = \dfrac{r^3 \operatorname{tg}^2 \alpha (1 + \sin \alpha)}{6 \sin^2 \dfrac{\alpha}{2}}$. 2. $x = 3$.

3. $-1 \leqslant x \leqslant -\dfrac{1}{2}$, $0 < x \leqslant \dfrac{1}{2}$. 4. $x_1 = \dfrac{\pi}{4} + \pi k$, $x_2 = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k$, $x_3 = 2\pi k$ (k—целое). Указание. Привести уравнение к виду $(\sin x - \cos x)(1 - \sin x)(1 - \cos x) = 0$

Вариант 2

1. $\dfrac{a^2 \sin^2 2\alpha \cos \beta}{\sin^2 (\alpha + \beta)}$. 2. $x = 20$. $y = 16$. 3. $\dfrac{1}{4} < x < 4$. 4. $x_1 = \dfrac{k\pi}{4}$, $x_2 = \dfrac{(4k+1)\pi}{8}$ (k—целое). Указание. Привести уравнение к виду $\sin 4x \cos 2x (\cos 2x - \sin 2x) = 0$.

Вариант 3

1. $V = \dfrac{b^3 \cos \dfrac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \beta}{8 \sin^2 \dfrac{\alpha}{2}}$, $S_{бок} = \dfrac{b^2 \cos^2 \left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\alpha}{4}\right) \operatorname{tg} \beta}{\sin^2 \dfrac{\alpha}{2}}$. 2. $x_1 = 5$, $y_1 = 3$, $x_2 = 5$, $y_2 = -3$. Указание. Из первого уравнения следует, что $x^2 - y^2 = 16$. 3. $x < \dfrac{2}{9}$. 4. $x_1 = \dfrac{3\pi (2k+1)}{4}$, $x_2 = \dfrac{2k\pi}{3}$, $x_3 = \dfrac{6m\pi}{5}$ ($m \neq 5n$, m, n, k—целые).

Указание. Привести уравнение к виду $\sin \dfrac{3x}{2} \sin \dfrac{5x}{6} \cos \dfrac{2x}{3} = 0$ и записать ответ так, чтобы серии не пересекались.

Физика

1. $\rho = \dfrac{\rho_1 g}{g - a} = 2{,}45 \cdot 10^3$ *кг/м³*.

2. $N = \dfrac{\rho S v^3}{2} = 34{,}8$ *квт*.

3. $F \geqslant \dfrac{mg \sqrt{h(2R - h)}}{R - h} = 9500$ *н*.

4. $T = T_0 \cos^2 \alpha = 25$ *дж*, $П = T_0 - T = 75$ *дж*.

5. $F \geqslant \pi R^2 (p - p_1) = 78{,}5$ *кн*.

6. $F = ES\alpha (t_2 - t_1) \approx 101$ *кн*.

7. $A = \dfrac{m}{\mu} R (T_2 - T_1) = 92$ *кдж*.

8. $Q = m\left(gl \sin \alpha - \dfrac{v^2}{2}\right) \approx 1{,}2$ *кдж*.

9. $\theta = 0\,^{\circ}\mathrm{C}$, $m = \dfrac{m_3 [L + c(t_2 - t_1)]}{\lambda} \approx 4{,}1$ *кг*.

10. $t = \dfrac{h\rho}{kj} \approx 29{,}4$ *ч*.

11. $E = Bvl = 4 \cdot 10^{-4}$ *в.*

12. $T = \pi D \sqrt{\dfrac{L\varepsilon_0\varepsilon\pi}{d}} = 1{,}06 \cdot 10^{-9}$ *с.*

13. $n = \dfrac{10I}{9a^2} : \dfrac{I}{a^2} \approx 1{,}1.$

При наличии зеркала освещенность центра экрана увеличится в $n = 1{,}1$ раза.

14. $f_2 = \dfrac{F_2(ld_1 - lF_1 - d_1F_1)}{(d_1 - F_1)(l - F_2) - d_1F_1} = 60$ *см.*

15. $v = \sqrt{\dfrac{2hc(\lambda_0 - \lambda)}{m\lambda_0\lambda}} = 2{,}36 \cdot 10^5$ *м/с.*

Новосибирский институт инженеров железнодорожного транспорта

Математика

Вариант 1

1. $x = -1/4$. 2. $x_1 = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$, $x_2 = 2k\pi$ (k — целое). 3. $-\infty < x < -1$, $-1 < x < 3/5$, $5/3 < x < +\infty$.

4. (27, 9, 3) и (54, — 18,6).

5. $V = \dfrac{16\sqrt{3}\,R^3\cos^6\dfrac{\alpha}{2}}{3\sin^2\alpha\,\cos\alpha}$,

$$S_{бок} = \frac{8\sqrt{3}\,R^2\cos^4\dfrac{\alpha}{2}}{\sin^2\alpha\cos\alpha}.$$

Вариант 2

1. $x_1 = 1$, $x_2 = 1/16$.

2. $x_1 = \pm\dfrac{\pi}{4} + k\pi$, $x_2 = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi$ (k — целое).

3. $5 < x < \infty$. 4. $a_1 = 5$, $a_2 = -5$.

5. $S_{сеч} = \dfrac{3\sqrt{3}\,l^2\cos^2\alpha\sin\alpha}{4\sin(\alpha + \beta)}$.

Физика

Билет 1

3. Напряженность поля в точке A равна (см. рис. 8)

$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 - 2E_1E_2\cos\alpha},$$

где $E_1 = \dfrac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2}$, $E_2 = \dfrac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_2^2}$,

$$\cos\alpha = \frac{r_1^2 + r_2^2 - d^2}{2r_1r_2}.$$

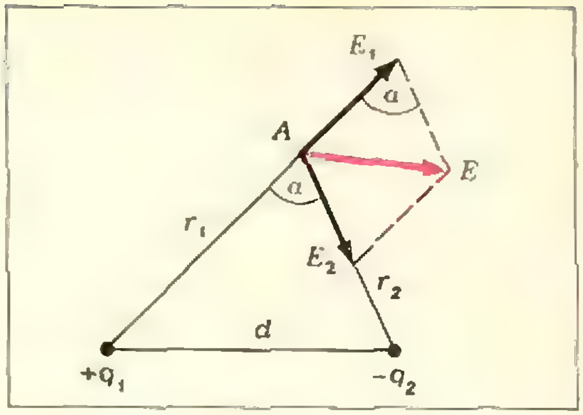


Рис. 8.

Указание. Воспользоваться теоремой косинусов.

Потенциал в точке A равен $\varphi = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \times \left(\dfrac{q_1}{r_1} - \dfrac{q_2}{r_2}\right)$.

Билет 2

3. $v_{ср} = \dfrac{s}{t} = \dfrac{12\ м}{5\ с} = 2{,}4$ *м/с;*

$a_{ср} = \dfrac{v}{t} = \dfrac{4\ м/с}{5\ с} = 0{,}8$ *м/с²*. График зависимости ускорения от времени приведен на рисунке 9.

Указание. Путь s, пройденный точкой за 5 *с*, найти по графику скорости, а скорость v — по графику ускорения.

Билет 3

3. $t = \dfrac{v}{kg} \approx 25$ *с.*

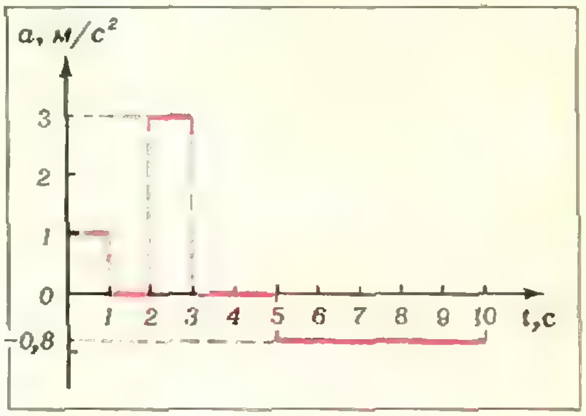


Рис. 9.

Львовский политехнический институт

Математика

Вариант 1

1. $\dfrac{\pi c^3 \sin^2\alpha \sin^2\beta}{3\sin^2(\alpha+\beta)}$. 2. $(4,\ 8,\ 16)$ и $\left(\dfrac{4}{25},\ \dfrac{-16}{25},\ \dfrac{64}{25}\right)$. 3. $x_1 = \pm 35^\circ + 360^\circ\cdot k$, $x_2 = \pm 55^\circ + 360^\circ\cdot k$ $(k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2\ \ldots)$. 4. $x_1 = 2$, $x_2 = 2^{-3/2}$

Вариант 2

1. $\dfrac{-a^3\sin^3\alpha \operatorname{tg}\beta}{12\cos^3(3\alpha/2)}$. 2. 4 *км/ч*. 3. $x = \dfrac{k\pi}{6}$ $(k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots)$. 4. $\dfrac{3}{2} < x \leqslant 4$.

Вариант 3

1. $\dfrac{r^3}{3}\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\left(45^\circ + \dfrac{\alpha}{2}\right)\operatorname{tg}\alpha$.

2. 3 *ч.* 45 *мин.* 3. $x_1 = \dfrac{4k\pi}{3}$, $x_2 = \dfrac{4n\pi}{5}$ (k — целое; n — целое, не кратное 5). 4. $0 < x < 0{,}1$; $100 < x < 1000$; $x > 100\,000$.

Физика

Вариант 1

3. $h = \dfrac{3}{4}H = 3{,}7$ *м*.

4. $H = nh = 8$ *см*.

Вариант 2

3. $q = \dfrac{\varepsilon_0 Smg}{q_0}\operatorname{tg}\alpha = 3{,}27\cdot 10^{-6}$ *к*.

4. $E = \dfrac{\Phi}{S}\left(\dfrac{d-F}{F}\right)^2 = 4$ *лк*.

Вариант 3

3. $m_2 = \dfrac{l-s}{s}m_1 = 120$ *кг*.

4. $\Delta q = \dfrac{\varepsilon_0 SE}{d}(\varepsilon - 1) = 2{,}5\cdot 10^{-10}$ *к*.

Ижевский механический институт

Вариант 1

1. $V = \dfrac{a^3\sin^2\alpha}{8(1+\cos\alpha)\cos\alpha}$. 2. $x_1 = 10$, $x_2 = 0{,}0001$. 3. $x < 3$, $4 < x < 7$. 4. $x_1 = -\pi/2 + n\pi$, $x_2 = \pi/24 + n\pi/2$, $x_3 = 5\pi/24 + n\pi/2$ (n — целое).

Вариант 2

1. $V = \dfrac{2}{3}\pi R^3\sin^2\alpha\sin^2 2\alpha$. 2. $x_1 = 1$, $x_2 = 3$. 3. $x_1 = 2n\pi$, $x_2 = 3\pi + 4n\pi$, $x_3 = \pi/3 + 4n\pi$, $x_4 = 5\pi/3 + 4n\pi$ (n — целое). 4. $x < -1 - \sqrt{2}$, $x > -1 + \sqrt{2}$.

Вариант 3

1. $V = \dfrac{RS\sin 2\alpha}{2\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{4} + \alpha\right)}$. 2. $x_1 = 10$, $x_2 = 0{,}001$. 3. $x < 1$, $2 < x < 3$. 4. $x = n\pi/2$ (n — целое).

К задачам «Квант» для младших школьников»

(см. «Квант» № 6)

1. Это задача на инерцию мышления. Не надо рассматривать сетки на квадрате и мудрить с уголками; разрежьте квадрат на 5 одинаковых полосок.
2. Тень высокого движется быстрее.
3. 60.
4. См. рис. 10.
5. Первый вторник месяца не совпадает с первым вторником после первого понедельника только в одном случае: когда первый вторник приходится на 1-е число (а первый вторник после первого понедельника — на 8-е число). Значит, оба месяца начинались со вторника. Но так как интервал между двумя вторниками равен целому числу недель, то количество дней в прошлом месяце кратно семи, это — февраль. Следовательно, в названных городах я был 1 февраля, 8 февраля, 1 марта и 8 марта.

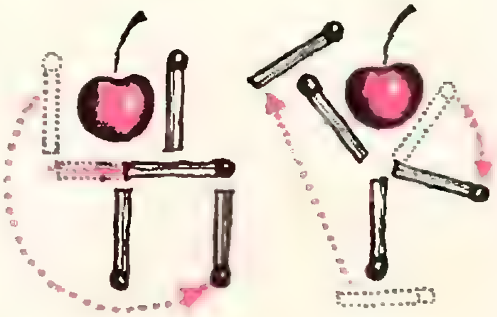


Рис. 10.

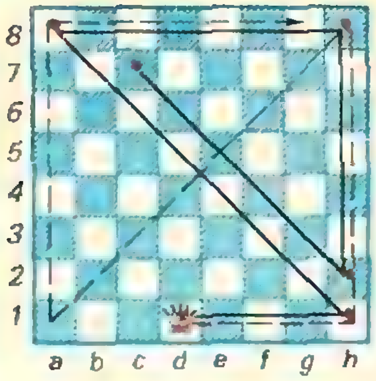


Рис. 11.

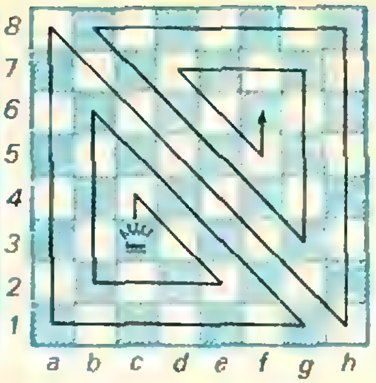


Рис. 12.

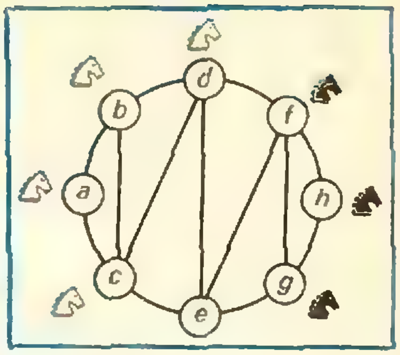


Рис. 13.

К «Задачам наших читателей»

(см. «Квант» № 6, с. 9)

3. $k = 4$. 4. 2072 точки.

(см. «Квант» № 7, с. 70)

3. Указание.

$$\operatorname{tg}50^\circ = \frac{1+\operatorname{tg}\frac{\pi}{36}}{1-\operatorname{tg}\frac{\pi}{36}} > \frac{1+\frac{\pi}{36}}{1-\frac{\pi}{36}} > \frac{1+\frac{3}{36}}{1-\frac{3}{36}}.$$

5. Указание. Циркулем и линейкой можно построить угол в 3°.

6. Указание. Продолжить боковые стороны трапеции до пересечения и построить окружности на основаниях трапеции, как на диаметрах.

7. $2 > m_a : m_b > 1/2$.

К статье «Шахматно-математические задачи С. Лойда»

(см. «Квант» № 6)

5. Искомый маршрут изображен сплошной линией на рисунке 11. Любопытно, что большинство решателей предлагают другой маршрут, показанный на рисунке пунктиром. По числу полей он действительно длиннее, однако в геометрическом смысле — короче. Проверьте это.

6. Один из путей изображен на рисунке 12.

8. Пять «ферзей-часовых» (то есть ферзей, охраняющих все поля доски) расставить легко (см. «Квант», 1971, № 10, с. 50). Оказывается, что для охраны всей доски достаточно более слабого набора фигур, а именно двух ферзей можно заменить ладьями: Фb3, b7, h5, Лd1, f5.

9. Заменим условие, по которому кони не должны отступать, другим — перестановка состоит из минимального числа ходов. Воспользуемся теперь рисунком 13. Здесь буквы в кружках соответствуют вертикалям доски, а если две вертикали связаны ходом коня, то соответствующие кружки соединены отрезком.

Переставляя коней по кругу (против часовой стрелки), мы в конце концов расположим их на нужных вертикалях. Однако такая перестановка потребует слишком много ходов. Для уменьшения их числа нужно всякий раз, когда это возможно, использовать внутренние отрезки. В этом случае число ходов будет равно 19; вот эти ходы: de, fd, gf, eg, ce, bc, db, fd, hf, gh, eg, ce, ac, ba, db, fd, ef, ce, dc (то, что это число ходов — минимальное, попробуйте доказать самостоятельно). Легко убедиться, что в этом решении ни белые, ни черные кони не отступают. Таким образом, мы не только решили задачу Лойда, но и нашли кратчайшую перестановку.

Заметим, что использованный нами метод аналогичен известному методу «пуговиц и нитей» Г. Дьюдени. Им же решается, например, задача о перестановке двух белых и двух черных коней, стоящих в углах доски 3 × 3 (см. «Квант», 1971, № 9, с. 55). Ряд подобных задач можно найти в «Кванте», 1973, № 1, с. 63.

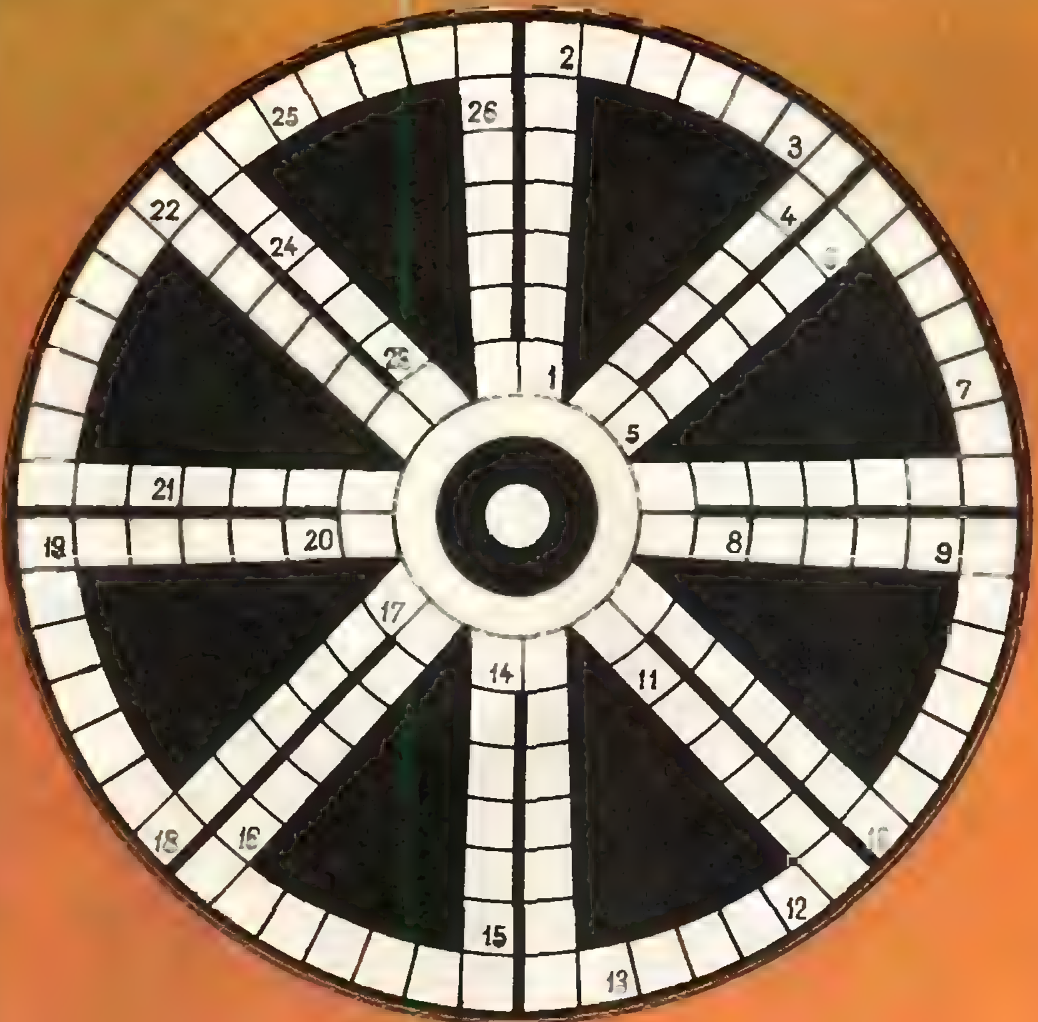
13. 1. f4 e5. 2. Кр f2 Фf6. 3. Кр g3 Ф : f4 — и т. д. (4. Кр h3 Ф h6 + 5. Кр g3 Фf4 +).

Корректор Л. С. Сомова

117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15, «Квант», тел. 234-08-11. Сдано в набор 16/IV 1975 г.
Подписано в печать 10/VI 1975 г.
Бумага 70×100 1/16. Физ. печ. л. 5.
Усл. печ. л. 6,5. Уч.-изд. л. 7.60 Т-09443
Цена 30 коп. Заказ 767 Тираж 347 300 экз.

Чеховский полиграфический комбинат
Союзполиграфпрома
при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли, г. Чехов Московской области

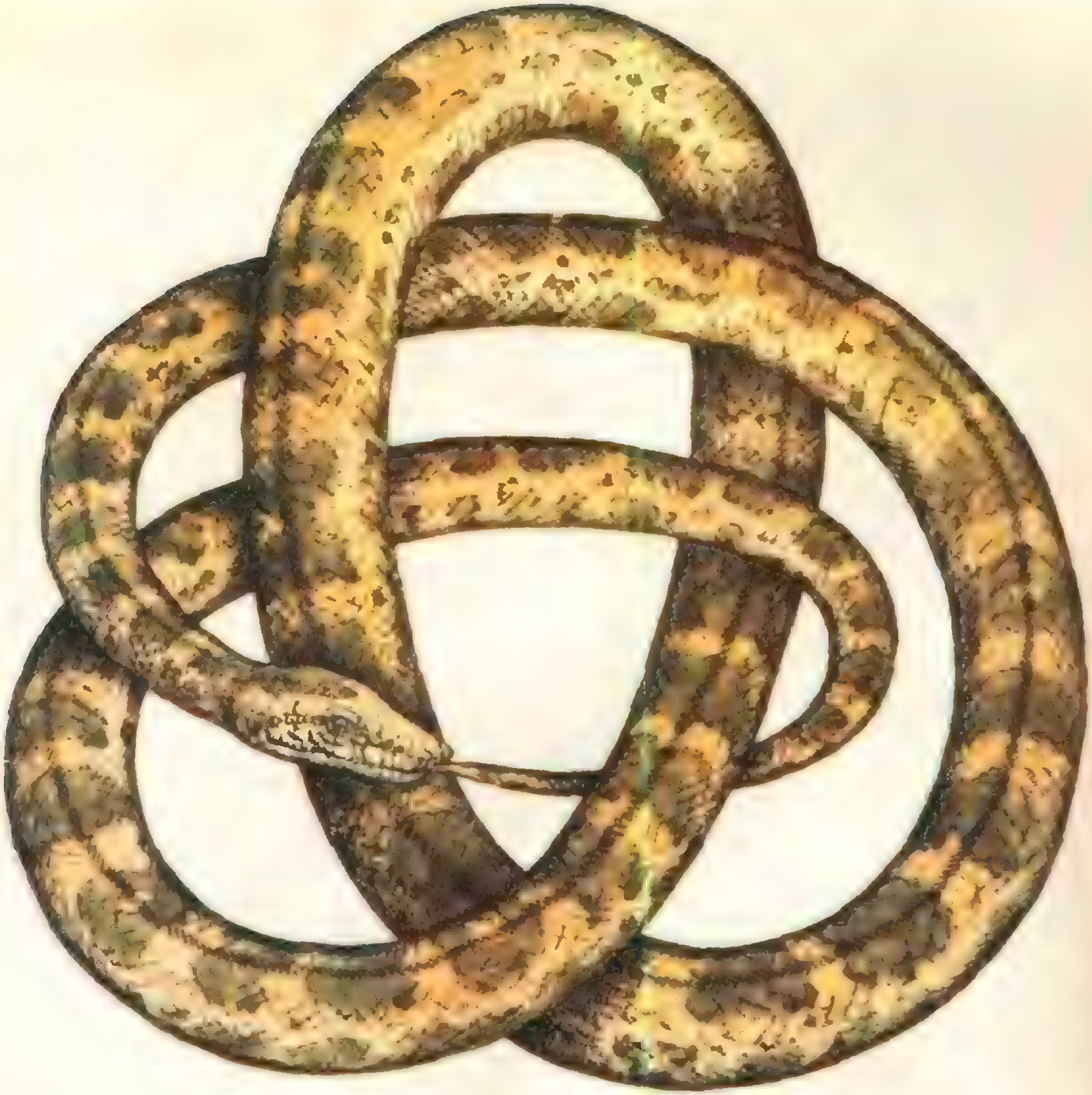
Рукописи не возвращаются



Чайнворд

1. Математическая дисциплина. 2. Метод рассуждений. 3. Латинская буква. 4. Тригонометрическая функция. 5. Часть круга. 6. Единица меры угла. 7. Отношение. 8. Мера тел. 9. Наибольшее значение. 10. Совокупность. 11. Часть прямой. 12. Тело. 13. Компонента операции. 14. Древнегреческий геометр. 15. Правильный многогранник. 16. Корень. 17. Немецкий математик. 18. Тело. 19. Отрезок в круге. 20. Часть круга. 21. Равенство. 22. Точка в треугольнике. 23. Геометрическая фигура. 24. Двучлен. 25. Единица измерения угла. 26. Утверждение.

В. В. Малинин



Фотография, которую вы видите на первой полосе обложки, сделана в Институте космических исследований АН СССР. *Владимир Сыромятников*, руководитель советской рабочей группы (справа) и *Рэй Ларсон*, вице-президент фирмы Роквелл Интернейшнэл обсуждают результаты очередной стыковки летных образцов стыковочных агрегатов.

Фото А. Моклецова АПН.

Удав на нашу обложку попал не случайно. Он оказался здесь, «завязавшись» в узел. Математики занимаются узлами; более того, существует красивая математическая теория — теория узлов. С этой теорией вы можете познакомиться, прочитав статью Э. Г. Белаги «Узел на столе математика», опубликованную в этом номере журнала (см. с. 6). Там вам снова встретится наш «удав», но уже «без головы» и без «хвоста».

Цена 30 коп.
Индекс 70465

7

НОМЕР
8

Основан в 1970 году.

Квант

1975
8

Научно-популярный
физико-математический
журнал
Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической
литературы

Главный редактор
академик И. К. Кикоин

Первый заместитель
главного редактора
академик А. Н. Колмогоров

Редакционная коллегия:

М. И. Башмаков,
С. Т. Беляев,
В. Г. Болтянский,
Н. Б. Васильев,
Ю. Н. Ефремов,
В. Г. Зубов,
П. Л. Капица,
В. А. Кириллин,
главный художник
А. И. Климанов,
С. М. Козел,
зам. главного редактора
В. А. Лешковцев,
Л. Г. Макар-Лиманов,
А. И. Маркушевич,
Н. А. Патрикеева,
И. С. Петраков,
Н. Х. Розов,
А. П. Савин,
И. Ш. Слободецкий,
зам. главного редактора
М. Л. Смолянский,
Я. А. Смородинский,
В. А. Фабрикант,
А. Т. Цветков,
М. П. Шаскольская,
С. И. Шварцбурд,
А. И. Ширшов.

Редакция:

В. Н. Березин,
А. Н. Виленкин,
И. Н. Клумова,
художественный редактор
Т. М. Макарова,
Н. А. Минц,
Т. С. Петрова,
В. А. Тихомирова,
зав. редакцией
Л. В. Чернова

В НОМЕРЕ:

2 *Н. Я. Виленкин.* Анри Лебег (к столетию со дня рождения)

11 *А. А. Михайлов.* Что такое долгота и широта?

19 *С. Г. Веров.* Тайны циклоиды

28 *В. Я. Френкель.* Пушкин и точные науки

33 *В. Н. Вагутен.* Близкие дроби

40 *И. М. Яглом.* О задаче Радо

Математический кружок

46 *А. Г. Резников.* Две последовательности треугольников

Задачник «Кванта»

49 Задачи М336—М340; Ф348—Ф352

51 Решения задач М301—М303

54 *И. М. Быстрый.* Конструирование уравнений по графикам функций

«Квант» для младших школьников

58 Задачи

59 *А. Д. Бендукидзе.* О системах счисления

62 *Б. А. Кордемский.* Подарок веселого капитана

63 **Ответы, указания, решения**

Смесь *(с. 48, 61)*

Прибор, который вы видите на первой странице обложки, называется пинкомпас (pinn по английски означает стержень, штырек): этот прибор, которым пользовались мореплаватели еще в XVIII веке, хранится сейчас в Музее Альтоны в Гамбурге. Определять с его помощью координаты нельзя, но зато можно «записывать» курс корабля. На каждом румбе (1 румб=360°:32) розы ветров сделаны 8 отверстий. Все отверстия образуют в совокупности концентрические окружности. Так что «циферблат» пинкомпаса как бы покрыт координатной сетью. Каждые полчаса вахтенный вставляет штырь в отверстие, соответствующее определенному направлению. В этом направлении корабль будет держать курс в ближайшие полчаса. Но для того, чтобы определить нужное направление, необходимо знать координаты корабля в данный момент. О том, как определяют эти координаты, читайте в статье академика А. А. Михайлова (с. 11).

© Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», «Квант», 1975 год

Н. Я. Виленкин

Анри Лебег

(к столетию со дня рождения)

Анри Лебег родился сто лет тому назад, 28 июня 1875 года, в маленьком французском городке Бовэ. После успешного окончания школы Лебег поступил в Парижскую Высшую Нормальную школу, где слушал лекции Ж. Таннери, К. Жордана и других выдающихся математиков. Окончив ее, он работал преподавателем математики лицея в Нанси, продолжая научную работу, начатую еще в Париже. Защитив в 1902 году докторскую диссертацию, Лебег перешел на кафедру математики провинциального университета в городе Ренне, откуда переехал в Пуатье, и лишь в 1910 году вернулся в Париж, где стал профессором Сорбонны, а с 1921 года — Коллеж де Франс.

За свои научные заслуги Лебег был избран в 1922 году членом Французской Академии наук, в 1924 году — почетным членом Лондонского математического общества, а в 1930 году — членом Королевского общества (Английской Академии наук). Четыре раза он получал академические премии, написал несколько книг и много научных работ. После тяжелой болезни Лебег скончался 26 июля 1941 года.

Тихая, неторопливая жизнь кабинетного ученого! Но насколько незатейливыми были внешние события жизни Лебега, настолько яркими и глубокими оказались его научные достижения. Если открыть наугад любую страницу какой-нибудь книги по теории функций действительного (или, как еще говорят, вещественного) переменного, по функциональному анализу или по теории вероятностей, почти наверняка там встретятся слова «мера Лебега», «точка Лебега», «интеграл Лебега», или введенные им понятия «суммируемая функция», «почти всюду», а иногда имя Лебега окажется зашифрованным символом L^p: ведь L — это первая буква его фамилии Lebesque, а L^p — пространство функций, p-я степень которых суммируема по Лебегу. Почти все понятия, относящиеся к современной теории меры и интеграла, восходят к работам Лебега, и введение этих понятий в каком-то смысле оказалось поворотным пунктом перехода от математики XIX века к науке XX века.

В развитии науки бывают длительные периоды, напоминающие спокойное течение большой реки. В эти периоды, исходя из уже готового запаса понятий и представлений, ученые получают новые научные результаты и расширяют область применимости уже известных методов. Но понемногу начинают накапливаться проблемы, решение которых в рамках существующих научных представлений невозможно. Тогда наступает пора революционных преобразований — подвергаются критике основные понятия, меняются взгляды на ценность различных научных результатов, на самые цели и задачи научного творчества в данной области науки. И только появление совершенно новых идей выводит науку из создавшегося тупика.

Таким переломным моментом в истории развития математики оказалась вторая половина XIX века. В течение почти двухсот лет математический анализ развивал идеи Ньютона и Лейбница, создавших исчисление бесконечно малых, математику переменных величин. Разумеется, вводились новые понятия, неизвестные основоположникам анализа, но эти понятия естественно вытекали из уже имевшихся идей. И если бы каким-то чудом Ньютону или Лейбницу попал в руки математический журнал середины XIX века, то они довольно быстро поняли бы постановки большинства задач и методы их решения. Даже обозначения не очень изменились за протекшие годы. А самое главное, неизменной оставалась основная установка: ценность научного результата зависит в первую очередь от того, насколько успешным оказывается новый метод в решении практических задач.

Но характерной чертой математики является то, что, наряду с созданием новых методов решения практических задач, она интересуется самим создаваемым ею инструментом, для каждого возникающего понятия ищет наиболее широкую и естественную область его применимости, для каждой доказанной теоремы — наиболее общие условия, при которых она справедлива. И это — не пустые занятия математических снобов, а необходимость. Только установив понятия и теоремы в наибольшей общности, освободив их от ненужных ограничений, связанных с той конкретной задачей, из которой они возникли, можно увидеть связи между далекими друг от друга областями науки, научиться применять созданные методы в ситуациях, на первый взгляд, не имеющих ничего общего с тем вопросом, где они возникли.

В течение двух столетий математики без особых размышлений пользовались понятиями числа, геометрической фигуры, функции, длины, площади, объема и т. п. Рассказывают, что когда один французский генерал принес в Академию наук свое «решение» проблемы квадратуры круга, его спросили, что именно он понимает под площадью круга. «Площади не определяют, их вычисляют!»,— воскликнул бравый генерал. И такая точка зрения была распространена среди большинства математиков. Они считали, что площадь — это свойство геометрической фигуры, выражаемое числом и обладающее очевидными свойствами (площадь целого равна сумме площадей частей, конгруэнтные фигуры имеют равные площади и т. д.). Ни на одну минуту не сомневались они в том, что любая плоская геометрическая фигура имеет площадь (быть может, равную нулю или бесконечности). Впрочем, и по другим вопросам взгляды математиков XVII—XVIII веков отличались такой же некритичностью — они были убеждены, что ко всем линиям в любой точке, за исключением, быть может, нескольких особых точек, можно провести касательную, что все поверхности гладки, а функцию они отождествляли с выражением, которым она задана. Но такая расплывчатость основных определений стала приводить к ошибочным результатам, и уже с начала XIX века начался процесс уточнения математических понятий, длившийся несколько десятилетий.

В ходе этого процесса были даны определения таким понятиям, как функция, предел, линия, длина линии, площадь области, интеграл и т. д. Но, как это часто бывает, после уточнения понятий оказалось, что они охватывают гораздо более широкий класс объектов, чем это казалось первоначально, что свойства уточненных

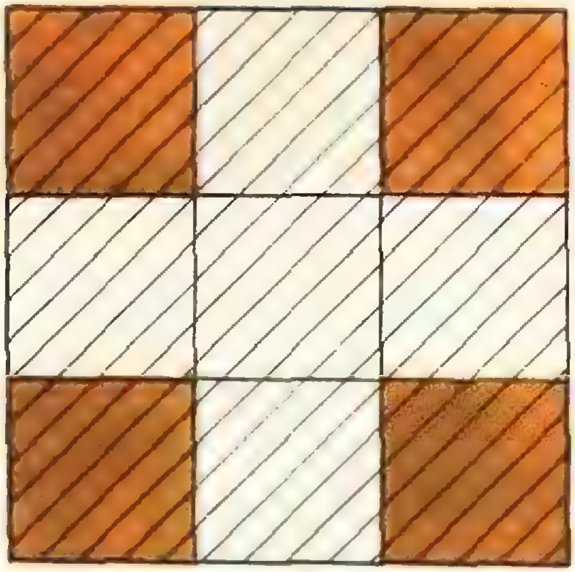


Рис. 1.

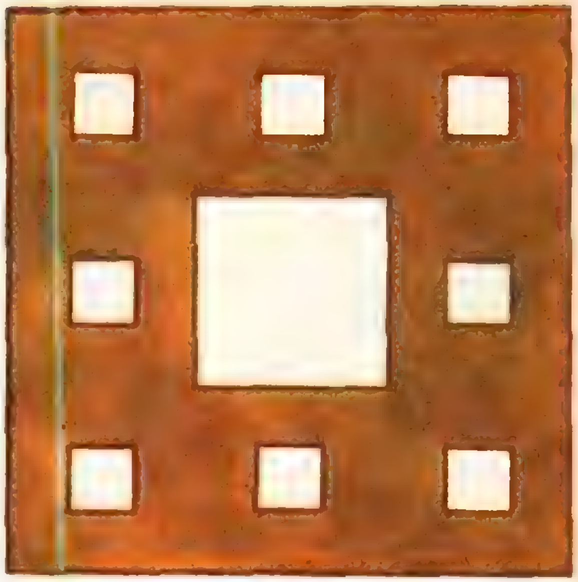


Рис. 2.

понятий не слишком похожи на привычные.

Оказалось, например, что существуют непрерывные линии, проходящие через любую точку квадрата, кривые, к которым ни в одной точке нельзя провести касательную, области, которым нельзя приписать никакого значения площади. Дело было в том, что понятие геометрической фигуры стало применяться в ином смысле, чем это делали математики предыдущих поколений. После того как Кантор создал теорию бесконечных множеств, математики стали считать фигурами любые точечные множества, в том числе определяемые с помощью бесконечных процессов. Вот несколько примеров таких фигур.

Возьмем квадрат со стороной 1 и разделим его на 9 квадратов. После этого выбросим «крест», образованный пятью квадратами, сохранив границы оставшихся квадратов. Получится фигура, состоящая из четырех квадратиков (рис. 1). С каждым из них проделаем ту же операцию и будем продолжать этот процесс до бесконечности. У нас будут получаться фигуры, состоящие из все большего и большего числа квадратиков, размеры которых все время уменьшаются. Фигуры, получаемые на каждом шагу этого процесса, обычны, но если взять пересечение всех получившихся фигур, то перед нами окажется весьма странное множество.

Другое множество получается, если выбрасывать не кресты, а лишь центральные квадраты, оставляя их границы (рис. 2).

Исследования таких множеств, а также функций, имеющих весьма странные свойства (например, всюду разрывных, или непрерывных во всех иррациональных точках и разрывных во всех рациональных точках, функций, графики которых не имеют ни в одной точке определенного направления), стали все чаще и чаще появляться во второй половине XIX века. Эти исследования приветствовались далеко не всеми учеными! Математики классического направления считали, что наука должна иметь дело лишь с объектами, непосредственно отражающими свойства реального мира. Их мнение о таких исследованиях ярко выразил один из крупнейших ученых того времени Анри Пуанкаре. Он сказал: «Раньше, когда изобретали новую функцию, то имели в виду какую-нибудь практическую цель; теперь их изобретают, не извлекая из них никакой пользы, а только для того, чтобы обнаружить недостатки в рассуждениях наших отцов». Еще резче выразился на эту тему руководитель французской математической школы Шарль Эрмит. В своем письме видному голландскому математику Т. Стилтьесу он писал: «Я с ужасом и отвращением отворачиваюсь от этой разрастающейся язвы функций, не имеющих производной». Новую математику классики назвали «тератологией» (наукой об уродствах) функций.

Но молодежь тянулась к новым областям науки, не обращая внимания на ворчание математиков предшествующего поколения. Во Франции их вдохновляли лекции Жюля Таннери и Камилла Жордана, в которых курс математического анализа строился на твердой основе точных определений, безупречных доказательств, железной логики. Они усваивали на этих лекциях, что хотя разрывные функции и не встречались в существовавших тогда приложениях, их надо изучать наравне с непрерывными, так как этого требуют правильно понимаемые интересы математики; они узнавали, что определения длин, площадей и объемов, годные лишь для гладких линий и поверхностей, слишком узки, что надо искать более общие определения. Эти идеи накапливались, переходили в убеждения, становились стимулом к научной работе. В 1898 году молодой французский ученый Р. Бэр защитил диссертацию, в которой дал глубокую классификацию разрывных функций. В том же году появилась книга одного из самых ярких лидеров молодежи, двадцатисемилетнего математика Эмиля Бореля, посвященная новой теории функций. К этой научной школе и примкнул начинавший в ту пору свою научную деятельность Анри Лебег.

Одной из первых работ Лебега была заметка «О нелинейчатых развертывающихся поверхностях». Эта работа разгневала математиков классического направления. Особенно возмущался один из ведущих геометров того времени Гастон Дарбу. Само название работы казалось ему противоестественным. Дело в том, что *развертывающимися* называют поверхности, достаточно малые части которых можно получить, изгибая кусок плоскости. Но все известные к тому времени развертывающиеся поверхности — цилиндры, конусы и другие — состояли из прямолинейных образующих. Они были, как говорят, *линейчатыми*. Поэтому говорить о нелинейчатых развертывающихся поверхностях казалось полной нелепостью. Но все дело было в том, что молодой автор по-иному, чем геометры-классики, понимал развертывающиеся поверхности. Он считал такими не только поверхности, получаемые аккуратным изгибанием листа бумаги, но и поверхности, которые получатся, если этот лист скомкать (объясняя эту работу своим друзьям, он так и сказал: «Представьте себе скомканный носовой платок»). Оказалось, что можно так «скомкать» кусок плоскости, что после этого на нем не останется ни одного прямолинейного отрезка. Разумеется, получившаяся развертывающаяся поверхность нигде не имела касательной плоскости, она вся состояла из складок и изломов. И понятно, почему ее пропустили геометры, классифицируя развертывающиеся поверхности — они-то занимались лишь гладкими поверхностями.

Интерес Лебега к развертывающимся поверхностям не был случайным. Его интересовал общий вопрос, поставленный еще Камиллом Жорданом: как определить площадь поверхности, не предполагая ее гладкости. Найти площадь скомканной развертывающейся поверхности легко — достаточно развернуть ее на плоскость. Но сосчитать площадь такой поверхности по формулам, предлагаемым классической математикой, невозможно — в них входят производные, а они существуют лишь для гладких поверхностей.

Конечно, вместо касательных плоскостей можно было попробовать вы-

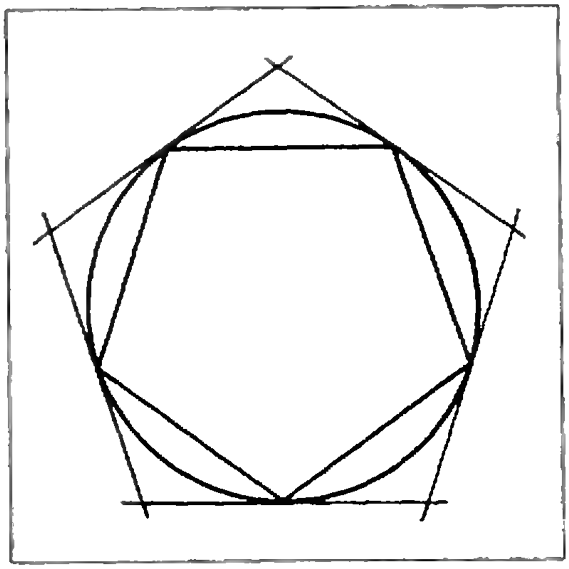


Рис 3

числить площадь поверхности по-другому, вписывая в нее многогранники и переходя к пределу при уменьшении всех размеров граней. Но немецкий математик Г. Шварц доказал, что таким путем невозможно найти площадь самого обыкновенного цилиндра — в него можно вписать многогранник со сколь угодно малыми гранями, имеющий сколь угодно большую площадь. Такой многогранник весь состоит из мелких складочек.

Лебегу удалось после длительных размышлений придумать определение площади поверхности, которое не требовало проведения касательных плоскостей, но в то же время обходило все трудности, связанные с примером Шварца. Решая эту частную задачу, Лебег пришел к общим идеям о том, что такое мера множества, как измерять длины, площади и объемы самых причудливых фигур. Этим вопросом интересовались до него многие математики. Наиболее удачным оказалось определение Жордана.

Основная идея Жордана заключалась в следующем. Существуют фигуры, заведомо имеющие площадь, например, многоугольники. Предположим теперь, что фигура Φ обладает следующим свойством: *какое бы малое положительное число* ε *мы ни взяли, найдутся две многоугольные области**) Φ_ε *и* Φ_ε^*, *такие, что* Φ_ε *целиком содержится в фигуре* Φ, *а* Φ_ε^* *целиком ее содержит, причем разность площадей* Φ_ε^* *и* Φ_ε *меньше* ε. Тогда за площадь фигуры Φ надо принять число, которое заключено между площадями Φ_ε и Φ_ε^* для всех Φ_ε и Φ_ε^*. По другому это же определение можно сформулировать так: фигура Φ *измерима по Жордану*, если для любого $\varepsilon>0$ ее можно представить в виде объединения многоугольной области Φ_ε и остатка, который покрывается многоугольной областью, имеющей площадь меньшую, чем ε. Мера же $m(\Phi)$ такой фигуры заключена между числами вида $m(\Phi_\varepsilon)$ и числами вида $m(\Phi_\varepsilon)+\varepsilon$, где $m(\Phi_\varepsilon)$ — площадь Φ_ε.

Это определение соответствует обычному процессу измерения площадей фигур. К нему мы прибегаем в школе, измеряя площадь круга — в роли внутренних многоугольников выступают правильные вписанные многоугольники, а остаток состоит из сегментов круга, отрезанных сторонами этого многоугольника. Эти сегменты можно заключить в треугольники, образованные хордами и касательными (рис. 3) и показать, что при достаточно большом числе сторон многоугольника суммарная площадь этих треугольников сколь угодно мала.

Мера Жордана обладает многими хорошими свойствами, в частности, как тому и положено быть, объединение конечного числа попарно непересекающихся измеримых по Жордану множеств измеримо, и его мера равняется сумме мер частей. С помощью этой меры удалось приписать площадь множествам, которые математики-классики не считали настоящими фигурами. Например, вспомним фигуру, которую мы получали путем выбрасывания крестов из квадрата со стороной 1. После n выбрасываний остается 4^n квадратов, каждый из которых имеет площадь $1/9^n$. Поэтому все оставшееся множество можно покрыть квадратами с общей площадью $\left(\frac{4}{9}\right)^n$. Но $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{4}{9}\right)^n = 0$, а это значит, что при достаточно большом n общая площадь покрывающих квадратов сколь угодно мала, а потому мера всего оставшегося множества равна нулю.

---

*) Многоугольной называется область, которую можно разбить на несколько многоугольников, не имеющих общих внутренних точек.

То, что описанное выше множество имеет нулевую меру по Жордану, не удивительно, ведь оно насквозь продырявлено выбрасываемыми крестами и не имеет «живого места». Удивительно то, что другие столь же дырявые множества оказалось невозможно измерить по Жордану. Такое множество можно построить, более экономно выбрасывая кресты, а именно выбрав первый крест с площадью $^1/_4$, потом четыре креста общей площади $^1/_8$ и т. д. Остающиеся квадраты имеют последовательно общие площади и $^3/_4$, $^5/_8$, $^9/_{16}$ и т. д. Все эти числа больше, чем $^1/_2$, и потому любой многоугольник, содержащий остающееся после бесконечного числа выбрасываний множество, имеет площадь не меньшую, чем $^1/_2$. В то же время это множество не содержит ни одного целого квадрата, и потому его площадь не может быть больше нуля. Получившееся противоречие показывает, что это множество не имеет меры по Жордану. Таким образом, определение меры по Жордану не охватывает многие интересные фигуры.

Выход из создавшегося положения нашел Борель. Сложив площади всех выбрасываемых крестов, он получил бесконечную убывающую геометрическую прогрессию

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{2^{n+1}}+\ldots,$$

сумма которой равна $^1/_2$. Это число Борель принял за площадь выброшенной части, а за площадь остатка — разность $1-{}^1/_2={}^1/_2$. Конечно, такой ответ оказался весьма непривычным — в множестве не было ни одной целой части, а его площадь положительна. Но Борель пошел еще дальше, измеряя самые различные множества с помощью двух принципов:

а) Если множество Φ состоит из счетной *) совокупности измеримых подмножеств $\{\Phi_n\}$, никакие два из которых не имеют общей точки, то

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\Phi_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}m(\Phi_n).$$

б) Мера дополнения к измеримому множеству Φ получается вычитанием из меры целого U меры подмножества,

$$m(\Phi') = m(U)-m(\Phi).$$

Первый из этих принципов — далеко идущее обобщение древнего положения: мера целого равна сумме мер его частей; второй следует из того же положения. Пользуясь своими принципами, Борель нашел меры всех множеств, с которыми имели дело математики его времени. Например, из его принципов следовало, что любое счетное множество точек имеет нулевую меру: ведь каждая из точек имеет меру нуль, а тогда и объединение этих точек имеет нулевую меру.

Но в построениях Бореля был один недостаток — одно и то же плоское множество Φ можно сконструировать из многоугольников различными способами. И ниоткуда не следует, что при этом получится один и тот же результат для меры. Надо было дать определение меры, не зависящее от выбора того или иного способа построения множества.

Эту-то проблему и решил в своих работах Лебег. Взяв от Бореля идею суммирования рядов, он следующим образом видоизменил определение

---

*) Бесконечное множество называется счетным, если его элементы можно перенумеровать.

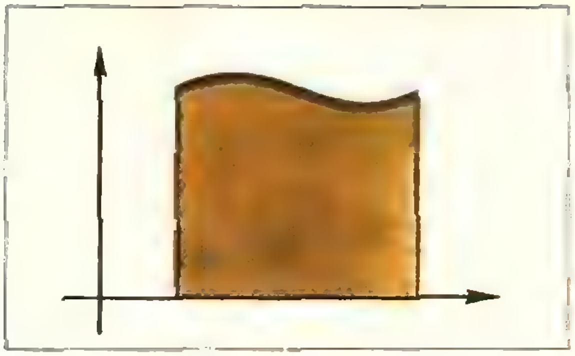


Рис. 4

Жордана. Во-первых, он разрешил покрывать остаток множества любой счетной системой многоугольников, лишь бы их суммарная площадь не превосходила ε. А во-вторых, он предложил не только добавлять к многоугольнику малые остатки, но и удалять из него малые множества.

В более строгом виде определение меры Лебега можно сформулировать следующим образом *). Назовем множество E ε-покрываемым по Лебегу, если его можно покрыть объединением счетной системы многоугольников, суммарная площадь которых меньше, чем ε. Множество Φ *измеримо по Лебегу*, если для любого $\varepsilon>0$ его можно представить в виде многоугольной области Φ_ε, к которой присоединено ε-покрываемое множество D_ε, и из которой удалено ε-покрываемое множество E_ε. За меру Лебега множества Φ примем число $m(\Phi)$, которое больше всех чисел $m(\Phi_\varepsilon)-\varepsilon$, но меньше всех чисел $m(\Phi_\varepsilon)+\varepsilon$. Разумеется, определение Лебега после соответствующего видоизменения годилось для длин, объемов и т. д.

Идея Лебега оказалась очень удачной — все измеримые по Жордану множества оказались измеримы и по Лебегу, равно как и все множества, измеримые по Борелю. Лишь позднее удалось указать пример множества, не измеримого по Лебегу, однако, средства, которые для этого были использованы, признаются далеко не всеми математиками. Во всяком случае, никому не удалось дать эффективную конструкцию, приводящую к такому множеству. Мера Лебега удовлетворяла и принципу а) Бореля, она была, как говорят, *счетно-аддитивной*.

Однако своим основным достижением Лебег считал не создание нового понятия меры, а применение этого понятия для нового определения интеграла. Если функция $y=f(x)$ непрерывна и неотрицательна на отрезке $[a, b]$, то $\int_a^b f(x)\,dx$ не что иное, как площадь криволинейной трапеции (рис. 4). Поэтому, умея находить площадь этой трапеции, можно найти и значение интеграла. Но если функция имеет бесконечно много точек разрыва, например, разрывна в каждой точке, то соответствующая ей криволинейная трапеция не является фигурой в классическом смысле слова и может не иметь обычной площади. Вычисляя же эту площадь методом Лебега, получим значение интеграла от такой функции.

Определение интеграла как меры криволинейной трапеции, казалось не слишком убедительным самому Лебегу — еще со времен Коши, т. е. с начала XIX века, математики были приучены определять интеграл чисто аналитически, не прибегая к таким понятием, как площадь или объем. Лебег придумал аналитическое определение для своего интеграла. Объясняя это определение, он использовал однажды следующий образ: если имеется некоторая сумма денег, то неопытный человек будет ее пересчитывать подряд, беря друг за другом монеты и банковские билеты различного достоинства. Опытный же кассир разложит десятки к десяткам, пятерки к пятеркам, рубли к рублям и т. д., а потом умножит число десяток на 10, число пятерок на 5 и т. д. и сложит все получившиеся произведения.

---

*) Излагаемое здесь определение внешне отличается от того, которое в свое время предложил Лебег, но эквивалентно ему.

Точно так же, чтобы сосчитать значение интеграла от очень разрывной функции, Лебег предложил делить не область изменения аргумента, а область значений функции. Если заданы числа y_k и y_{k+1}, то через E_k обозначим совокупность тех значений x, для которых выполняется неравенство $y_k \leqslant f(x) < y_{k+1}$. *Интегральной суммой Лебега* называют сумму $\sum\limits_k y_k m(E_k)$. Переходя к пределу при безграничном измельчении отрезков разбиения, получаем число, которое и равно интегралу Лебега $\int\limits_a^b f(x)\,dx$. Наглядно говоря, суть идеи Лебега состояла в том, что для разрывных функций «криволинейную трапецию» надо было резать не параллельно оси ординат, а параллельно оси абсцисс.

В настоящее время лебеговский процесс вычисления интеграла кажется математикам чем-то само собой разумеющимся. Но в начале века он казался потрясающим самые основы математики. И тогда Лебег придумал новое обоснование того, что его метод вычисления интегралов естествен. Возможно, на него оказал влияние пример Гильберта, давшего несколько ранее аксиоматику геометрии. Подобно этому Лебег сформулировал систему требований, которым должен удовлетворять интеграл, и доказал, что единственным определением интеграла, которое удовлетворяет всем этим требованиям, является предложенное им.

В 1902 году, благодаря поддержке К. Жордана и Э. Пикара, удалось преодолеть предубеждение противников новой математической школы, и Лебег успешно защитил докторскую диссертацию.

Создание меры и интеграла Лебега позволило преодолеть многие трудности, накопившиеся к тому времени в математическом анализе. Особенно полезной оказалась идея Лебега, что не надо требовать, чтобы какое-то свойство функции выполнялось для всех значений аргумента, а достаточно изучать свойства, выполняющиеся почти всюду, т. е. всюду, кроме множества точек нулевой меры. Оказалось, например, что если функция $y = f(x)$ ограничена и интегрируема по Лебегу, то функция $F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$ почти для всех значений x имеет производную, совпадающую с $f(x)$. Чрезвычайно полезен был интеграл Лебега в теории тригонометрических рядов, т. е. рядов вида

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Сам Лебег много и с увлечением занимался этой теорией.

На первый взгляд казалось, что интеграл Лебега — слишком сложный и тонкий инструмент для того, чтобы им можно было пользоваться в приложениях; на практике такие «дикие» функции и множества не встречаются, и все практические проблемы обслуживаются обычными интегралами. Но в те годы стала развиваться теория бесконечномерных пространств, необходимая для изучения и решения интегральных уравнений (уравнений, содержащих искомую функцию под знаком интеграла). К таким уравнениям сводились многие задачи математической физики, и были придуманы способы их решения, основанные на построении последовательности функций, в известном смысле приближающейся к искомому решению. Доказать, оставаясь в рамках классической математики, что такая последовательность к чему-то приближается, не удавалось. Положение дел напоминало здесь попытку решить уравнение $x^2 = 2$, пользуясь лишь рациональными числами. Конечно, можно составить последовательность рациональных чисел, приближающуюся к искомому корню, но сам корень иррационален, и последовательность не имеет предела внутри множества рациональных чисел. Как известно, чтобы выйти из этого положения, надо пополнить множество рациональных чисел, присоединив к нему иррациональные числа.

Точно так же последовательность функций, получаемых при приближенном решении интегрального уравнения, не всегда сходится к какой-нибудь «хорошей» функции. Чтобы быть уверенным в существовании решения, надо пополнить множество функций, присоединив к нему разрывные функции. Но если присоединить к множеству непрерывных функций какие попало разрывные функции, то хорошей теории построить не удастся. Оказалось, что присоединять надо функции, квадрат которых интегрируем по Лебегу. Тогда получается пространство, очень похожее по своим свойствам на наше евклидово пространство, только бесконечномерное. Это пространство называют гильбертовым.

Триумф идей Лебега, Бэра и Бореля привел к тому, что даже Дарбу изменил свое мнение о новой математике, и, выступая в 1908 году на Математическом конгрессе в Риме, говорил о пламенном и пытливом духе математики XX века, о науке, ведущей свои изыскания в абсолютно новой области с неизведанными перспективами. Он подчеркнул, что наука XX века не боится атаковать основы построений, которые столь долго казались непоколебимыми.

Позже идеи, приведшие к созданию меры и интеграла Лебега, позволили А. Н. Колмогорову построить аксиоматику теории вероятностей, Н. Винеру определить понятие меры для функциональных пространств. Всюду, куда проникали идеи меры, использовались конструкции и понятия, восходящие к Лебегу. Весьма полезны они оказались в статистической физике, дав возможность А. Я. Хинчину и Дж. фон Нейману обосновать некоторые идеи американского физика Гиббса.

Замечательные работы, лежавшие в области теории функций действительного переменного (так стали называть область математики, изучавшую общую теорию функций, меры и интеграла) сделали московские математики Д. Ф. Егоров и Н. Н. Лузин, а также их многочисленные ученики.

Сам же Лебег в эти годы интересовался возникавшей тогда теоретико-множественной топологией, предвосхитив в одной из работ позднейшие исследования П. С. Урысона по теории размерности топологических пространств, теорией потенциала и другими вопросами математики. И хотя ничего равного достижениям своей математической молодости он уже не создал, их оказалось вполне достаточно, чтобы обессмертить его имя.

Последние двадцать лет жизни Лебег посвятил проблемам истории и преподавания математики. Естественно, что основное внимание он уделил теории измерения величин в средней школе. В серии статей, позднее собранных в книгу «Об измерении величин» (она переведена и на русский язык), он остроумно подверг критике распространенные заблуждения в преподавании этих вопросов. Он показал в своей книге несостоятельность распространенных определений длины, площади и объема, критиковал учебники за стремление к строгости в одних местах при грубых логических промахах в других.

Прошло 75 лет с тех пор, как Лебег создал свою теорию меры и интегрирования. Эти понятия навсегда вошли в математику — без них нельзя мыслить ни теорию вероятностей, ни функциональный анализ, ни статистическую физику, ни топологическую алгебру.

Л. А. Михайлов

Что такое долгота и широта?

Положение точки на поверхности Земли определяется двумя координатами: географической широтой и географической долготой. Знаете ли вы, откуда произошли эти названия? Во втором веке н. э. греческий астроном и географ Клавдий Птолемей ввел понятия длины и ширины применительно к измерению стран, прилегающих к Средиземному морю, вытянутому с запада на восток. Результаты измерения вдоль моря он назвал длиной, а поперек — шириной. При переводе на русский язык вместо этих слов, которые можно относить к любым объектам, для характеристики положения тела на земной поверхности были введены специальные термины — долгота и широта. Хотя эти понятия, наглядно иллюстрируемые на глобусе, широко известны, далеко не все знают их точное определение.

Часто говорят, что широта φ есть угловое расстояние данного пункта от земного экватора, а долгота λ — это двугранный угол между плоскостью данного меридиана и плоскостью условно выбранного начального меридиана. Следовательно, нанесенная на глобус сеть параллелей и меридианов позволяет нам указать географические координаты любой точки земного шара. Естественно, что знание координат необходимо для ориентации. Но, находясь в какой-то точке на Земле, мы должны сами уметь определить свои географические координаты. Как известно, это делают с помощью астрономических наблюдений. Предположим, мы вычислили широту и долготу пункта, в котором мы находимся. Можем ли мы теперь, найдя на глобусе точку с такими координатами, быть уверенными, что мы находимся именно в этой точке Земли? Нет! Даже если точка на глобусе указана с предельной точностью.

Дело в том, что Земля не является шаром, и глобус — лишь упрощенная наглядная модель Земли. Именно неправильность (нешарообразность) формы Земли приводит к расхождению географических координат, полученных из астрономических наблюдений, и координат, определенных для данной точки по глобусу, по карте.

Если Землю считать шаром, то отвесная линия в любом месте на земной поверхности проходит через центр Земли, а меридианы и экватор — окружности, радиусы которых равны радиусу Земли. Тогда географическую широту можно измерять дугой меридиана от плоскости экватора до данной точки, а долготу — дугой экватора от условно выбранного начального меридиана до данного.

Истинная форма Земли, называемая геоидом, весьма сложна, хотя и близка к эллипсоиду вращения, сплюснутому в направлении полюсов. Сложность формы вызвана неравномерностью распределения массы внутри и на поверхности Земли, в частности, наличием материков с высокими горами и глубоких впадин в океанах.

Вследствие эллипсоидальности Земли отвесная линия не в любой точке проходит через центр Земли, а неправильности геоида приводят еще и к боковым отклонениям отвесной линии, так что она вообще может даже не пересечь земную ось. Отсюда возникают так называемые уклонения отвеса, выражающиеся в неправильных изменениях направлений отвеса при переходе от точки к точке. А поскольку при практическом нахождении широт и долгот одним из основных направлений, по которому ориентируются астрономические инструменты, является отвесная линия, расхождение между истинными географическими координатами точки Земли и ее координатами на глобусе становятся вполне понятными.

Сформулируем четкое определение широты и долготы. Широта есть угол между отвестной линией в данном месте и плоскостью экватора. Понятно, почему мы не сказали «плоскостью земного экватора». Из-за уклонений отвеса и земной экватор — линия, во всех точках которой географическая широта равна нулю,— отклоняется от плоского сечения Земли на величину уклонений отвеса, которые могут достигать и даже превосходить, особенно в гористых местностях, 10″, что в линейной мере соответствует примерно 300 *м*. Все сказанное о земном экваторе относится и к параллелям — линиям равной широты, которые по той же причине не являются плоскими кривыми.

Строгое определение географической долготы должно быть таким: долгота — это есть двугранный угол между двумя плоскостями, параллельными оси вращения Земли, одна из которых содержит отвесную линию в условно выбранной исходной точке, а другая — отвесную линию в определяемой точке. От градусной меры долготы можно перейти к временны́м координатам. Переход этот производится с помощью несложных расчетов: оборот Земли вокруг собственной оси на 360° соответствует 24 часам, следовательно, 1 час = 15°, 1 минута времени = 15′ дуги, 1 секунда времени = 15″ дуги. Очевидно, что в пунктах, которым соответствуют разные долготы, полдень (и соответственно полночь) наступает в разные моменты. Легко понять, что разность (по времени) между моментами полудня в данном месте и в пункте, долгота которого принята за нуль, и есть долгота данного места.

За исходный пункт в определении долгот в 1884 году по международному соглашению была принята Гринвичская обсерватория, основанная в 1675 году в предместье Лондона. До этого в разных странах за исходные пункты принимались различные главнейшие обсерватории: в России — Пулковская близ Петербурга, во Франции — Парижская обсерватория и т. д. В старину долготы отсчитывались от одного из Канарских островов — Ферро, который был наиболее западной точкой Старого света, т. е. материков Европы с Азией и Африки. Поэтому все долготы считались в одном направлении и одного знака — к востоку от Ферро.

Вследствие уклонений отвеса и все меридианы — линии, все точки которых имеют одинаковую долготу,— тоже не плоские кривые, получаемые в сечении Земли плоскостями, содержащими земную ось, а слегка извилистые линии, уклоняющиеся в обе стороны от плоских сечений на расстояния до нескольких сотен метров.

С какой точностью находятся географические координаты из астрономических наблюдений? Это зависит прежде всего от назначения таких определений. Наиболее точно определены координаты астрономических обсерваторий, широта которых известна с точностью до 0″,1, а долгота — до 0,01 секунды времени. Для оценки этих величин заметим, что 1″ дуги меридиана соответствует 31 *м* на земной поверхности, 0″,1 секунды времени на экваторе равна 46 *м*, а в средних широтах — почти в два раза меньше. Таким образом, указанная точность соответствует примерно 3 *м* на Земле. Поэтому, например, недостаточно сказать, что широта Парижской обсерватории равна 48 50′11″,2 и восточная долгота — $0^{ч}9^{м}20^{с},93$. Нужно указать, к какому месту обсерватории это относится — в данном случае к большому меридианному кругу (это один из приборов для измерения координат светил).

Расскажем теперь, как же находятся широта и долгота из астрономических наблюдений. Определение широты сравнительно просто и сводится к измерению угловой высоты полюса мира*) над горизонтом (рис. 1). Так как полюс мира на небе ничем не отмечен, то наблюдают какую-нибудь звезду, угловое расстояние которой от полюса известно, или Солнце, для которого это расстояние дается в эфемеридах**) на каждый день

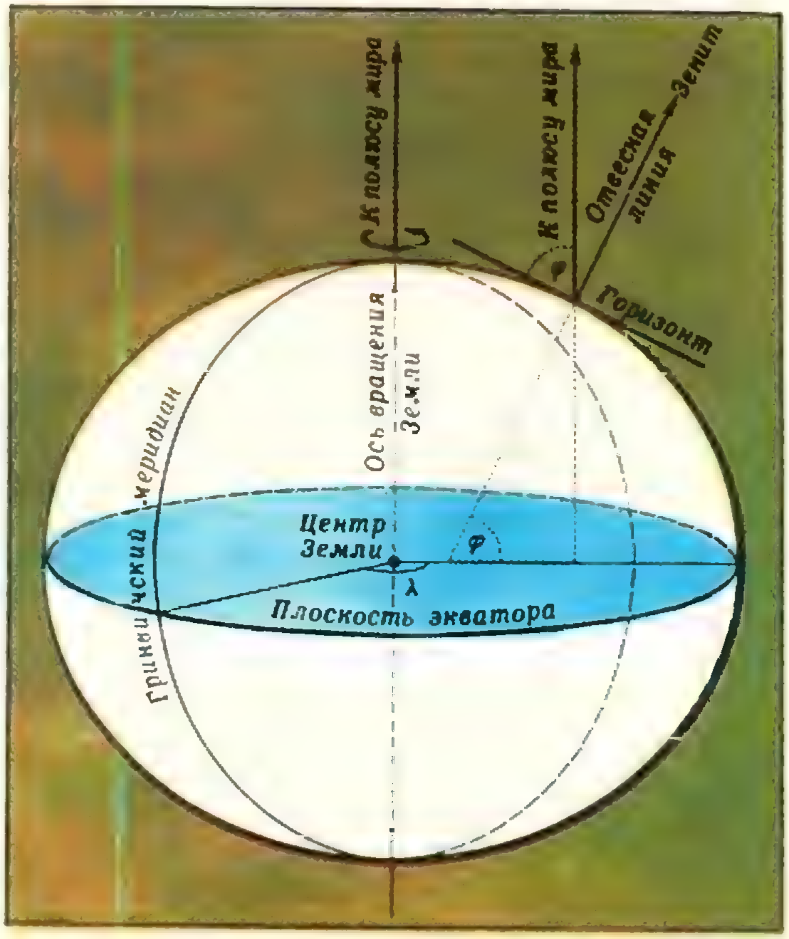


Рис. 1. Географическая широта данной точки — угол между отвесной линией в точке и плоскостью экватора — равна угловой высоте полюса мира над плоскостью местного горизонта.

Плоскость горизонта практически определяется свободной поверхностью жидкости в сосуде, пузырьком в трубке спиртового уровня или направлением, перпендикулярным к отвесной линии в данном месте. Другое направление — к полюсу мира — находится из астрономических наблюдений. Полюс мира лежит посередине между точками верхней и нижней кульминаций какой-нибудь близполюсной звезды.

Точное определение долготы в данном месте Земли сводится к определению местного времени. Выбрав условно за начало отсчета долгот некоторое место, в котором по наблюдениям Солнца или звезд определено местное время, и сравнивая результаты определения времени в каком-то месте Земли с этим исходным временем, находят долготу этого места.

---

*) См. «Комментарий» в конце статьи.

**) Эфемериды — это таблицы, в которых положения светил даются на любые избранные моменты времени (иногда на много лет вперед).

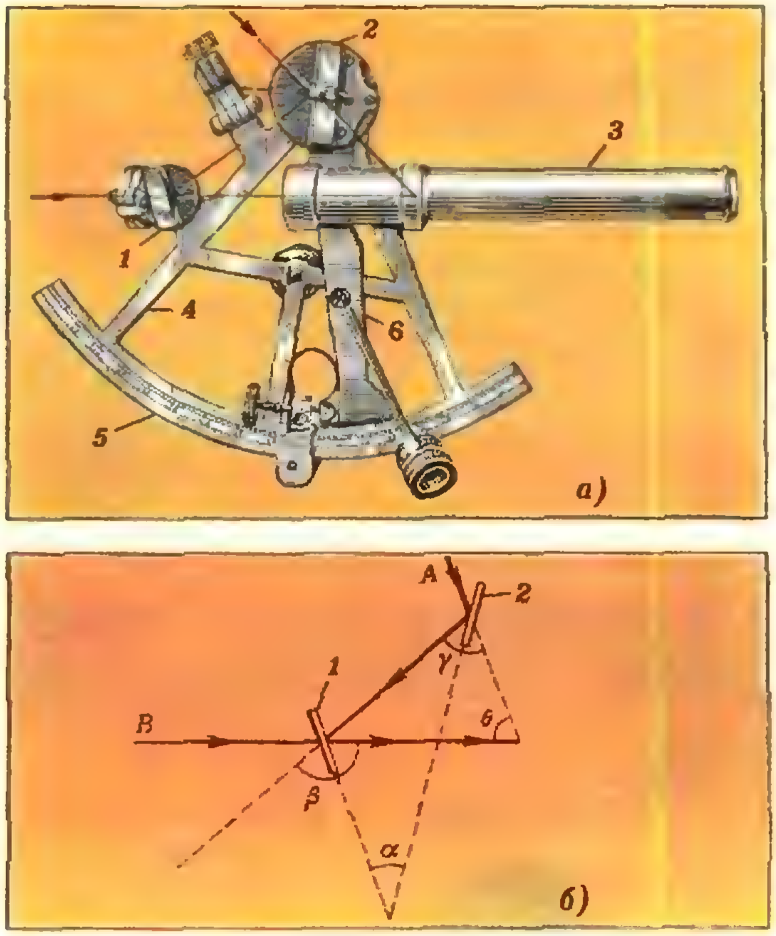


Рис. 2. С помощью двух зеркал *1* и *2* (см. рис. 2, *а*) в зрительной трубе *3* совмещаются изображения двух предметов, угловое расстояние между которыми хотят измерить. Зеркало *1*, укрепленное неподвижно на металлической раме *4*, посеребрено только до половины его высоты, верхняя его часть прозрачна. Рама заканчивается лимбом *5*, представляющим собой дугу окружности с углом 60° (отсюда и произошло название прибора). Зеркало 2 скреплено с подвижной частью рамы — так называемой алидадой *6*, которая вращается вокруг оси, проходящей через центр лимба и перпендикулярной к нему. Таким образом по лимбу можно определить угол α между зеркалами, а он в свою очередь связан с угловым расстоянием θ между наблюдаемыми предметами (см. рис. 2, *б*):

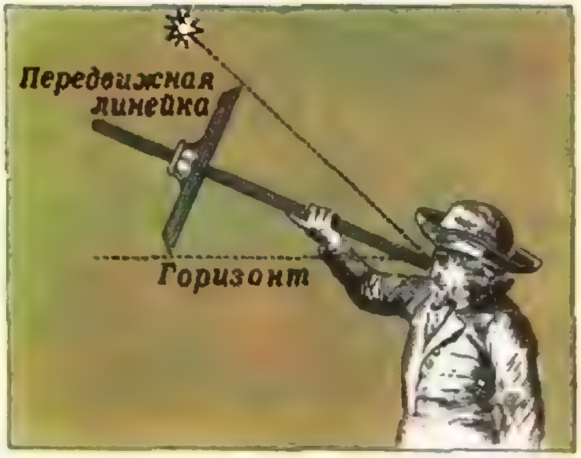
$$\theta = \beta - \gamma = 2\left(\frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{2}\right) = 2\alpha.$$

данного года. Измерение высоты производится во время прохождения светила через небесный меридиан, когда эта высота максимальна. Для этого пользуются специальными угломерными приборами. Еще в средние века появился первый простейший угломерный прибор, называвшийся якобштабом, а в 30-х годах XVIII столетия в Англии был изобретен секстант (рис. 2) — угломерный инструмент, которым пользуются по сей день для ориентации в открытом море и в воздухе. Во время наблюдений секстант держится в руке, что позволяет компенсировать корабельную качку. Обычно совмещают изображение Солнца (или в сумерки звезды) с линией морского горизонта. При некотором навыке удается измерять таким образом высоты над горизонтом с точностью до минуты дуги или даже несколько точнее. На суше, где инструменту можно дать прочную установку, используют более точные инструменты, например, универсальный инструмент. С его помощью угловые расстояния измеряют с точностью до 1″ и даже еще точнее.

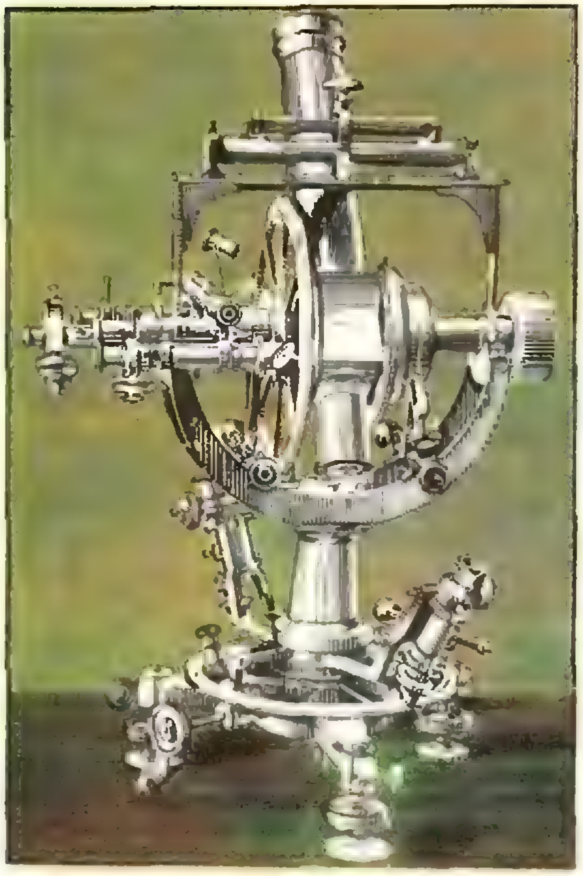
Определение долготы по идее очень просто: разность долгот двух пунктов равна разности их местных времен в один и тот же физический момент. Однако до изобретения радио на практике измерение долготы было очень трудной задачей. Действительно, как при отсутствии прямой связи узнать, сколько часов, минут и секунд местного времени в данный момент в Гринвиче (т. е. в исходном пункте для определения долготы), если вы находитесь за сотни или тысячи километров от него? В старину для этой цели наблюдали какое-нибудь астрономическое явление, видимое одновременно из этих пунктов и о котором было заведомо известно, в какой момент гринвичского времени оно происходит. Это были, например, лунные затмения и затмения спутников Юпитера (на использование последних для определения долготы указал еще Галилей, открывший спутники Юпитера в 1610 году). К сожалению, эти явления происходят не мгновенно, а длятся в течение нескольких минут, так что зафиксировать их можно лишь с соответствующей ошибкой. Между тем, одна минута времени соответствует 28 *км* под экватором, так что определение долготы таким способом было сопряжено с возможной ошибкой в сотни километров. Кроме того, была еще та трудность, что затмения спутников Юпитера почти невозможно наблюдать с палубы качающегося корабля и явления эти происходят далеко не ежедневно, а в течение нескольких месяцев в году Юпитер вообще не виден. Затмения Луны и вовсе редкие явления и происходят не чаще, чем два раза в год. Поэтому при путешествиях приходилось по нескольку дней или даже недель дожидаться, пока не удастся сделать несколько (для контроля и повышения точности) таких наблюдений, а в море для целей навигации такой способ определения долготы был совсем не пригодным.

В XVI веке был найден другой способ определения местного времени начального меридиана — по так называемым лунным расстояниям, правда, практическое применение его стало возможным лишь после изобретения секстанта. Луна ежемесячно обходит вокруг Земли, уподобляясь как бы стрелке часов, движущейся по «циферблату» — звездному небу. Но эта стрелка движется чрезвычайно медленно, в 55 раз медленнее часовой стрелки обыкновенных часов. Понятно, что по движению часовой стрелки действительно можно определить время, но очень неточно из-за медленности ее движения. Очевидно, что определять время по движению Луны еще менее надежно, но здесь помогает точность и тонкость делений «циферблата» — точно известные положения звезд. Правда, и положения Луны относительно этих звезд нужно измерять с очень большой точностью, хорошим угломерным инструментом. В течение часа Луна перемещается по небу относительно звезд примерно на величину своего диаметра, видимого с Земли под углом около 30′, поэтому измерение лунного расстояния от звезды с точностью до 1′ позволяет определить время с точностью до двух минут. Для того чтобы воспользоваться этим методом, нужно очень хорошо знать все особенности движения Луны, так чтобы по наблюденному положению Луны можно было получить время начального меридиана, разность которого с местным временем этого пункта даст долготу последнего. Очевидно, что этот способ предъявляет очень высокие требования к небесной механике, которая разрабатывает теорию движения Луны, отличающуюся большой сложностью. Способ лунных расстояний по точности мало превосходил предыдущий, но он мог применяться в любое время, когда видна Луна и звезды, почему и получил большое распространение при путешествиях, особенно морских.

Однако и метод лунных расстояний не вполне удовлетворял моряков (в основном из-за сложности вычислений и малой точности). Плавание на парусных судах, зависящее от силы и направления ветра, часто длилось месяцами вне видимости берегов, поэтому было очень важно уметь определять положение корабля (его широту и долготу). В 1713 году английское правительство, будучи особенно заинтересованным в безопасности навигации (в то время Англия была страной с наиболее развитым морским флотом), назначило огромную премию в 20 000 фунтов стерлингов за разработку уверенного способа определения долготы с точностью до $^1/_2$ градуса. Часть этой премии была присуждена (уже посмертно) немецкому астроному Тобиасу Майеру за составление таблиц движения Луны, которые позволили уточнить определение долготы по лунным расстояниям. Половину премии получил английский изобретатель и часовщик Харрисон, который построил в 1735 году морской хронометр. Это — пружинные часы, устройство которых аналогично устройству карманных и наручных часов. На хронометре имеются три стрелки — часовая, минутная и секундная, причем секундная резко перескакивает каждую полусекунду с четким ударом, слышимым на расстоянии нескольких метров. Хронометры очень удобны тем, что их можно переносить, не нарушая их хода. Для этого их помещают в ящике на карданном подвесе (подвес с двумя взаимно перпендикулярными осями), что позволяет им все время сохранять горизонтальное положение. Вскоре способ перевозки хронометров получил широкое применение и на суше — при путешествиях, для определения долгот населенных пунктов при составлении географических карт и для определения долгот основных обсерваторий разных стран. Так, например, после основания в 1839 году Пулковской обсерватории ее первый директор В. Я. Струве организовал в 1843 году специальную экспедицию, оснащенную 60-ю хронометрами для определения разности долгот между Пулковом и Гринвичем.



Якобштаб.



Универсальный

Задача определения долготы получила совсем новое решение с изобретением в середине прошлого столетия телеграфа, что дало возможность передавать сигналы времени начального меридиана и определять разность местных времен двух пунктов с недосягаемой ранее точностью — до долей секунды. Правда, для этого между пунктами должна быть телеграфная связь, что, очевидно, исключало применение такого способа для кораблей в открытом море. Тем не менее прокладка подводных кабелей позволила связать между собой разные континенты. Таким образом, например, была определена очень точно долгота обсерватории в Вашингтоне. В России основное время (по которому, к примеру, составлялось расписание поездов) было Петербургское, вернее, время Пулковского меридиана. Оно передавалось по проводу из Пулковской обсерватории на

Хронометр.

центральный телеграф в Петербурге, а оттуда — телеграфным и железнодорожным станциям по всей стране. По этому же времени стреляла в полдень пушка в Петропавловской крепости.

Наконец, самое универсальное решение принесло изобретение беспроволочного телеграфа. Уже в 1921 году радиостанция Новая Голландия в Петрограде стала передавать несколько раз в сутки так называемые ритмические сигналы времени, состоящие из 61 точки в минуту, поэтому промежутки между точками были меньше секунды на $^1/_{60}$ секунды. Замечая на слух совпадения секундных ударов хронометра с точками радиосигналов, можно было сверить свой хронометр со всемирным, т. е. Гринвичским, временем с точностью до сотых долей секунды. Правда, вследствие ошибок хода часов обсерватории и разных технических помех эти сигналы бывали на доли секунды ошибочными, но это можно было учесть позже, после приема их на обсерватории и последующих астрономических наблюдений. Для этого ежемесячно публиковались специальные бюллетени, указывавшие точный момент выхода в эфир прошлых сигналов, что позволяло задним числом исправлять показания хронометра. Это нужно было, конечно, лишь при определении долготы с предельной точностью; в навигации же, где точность до 1 секунды более чем достаточна, публикуемые поправки переданных сигналов времени никакого значения не имели. Ныне, благодаря изобретению кварцевых, а затем и молекулярных часов *), хранящих время до тысячных долей секунды в течение многих месяцев, поправки передаваемых радиосигналов практически сведены к нулю. Старая задача определения географической долготы получила наиболее точное решение.

Закончим нашу статью таким примером. Представьте себе человека, знакомого с астрономическими методами определения его местоположения. Пусть его завезут в любое место — на необитаемый остров, в пустыню, в горы, куда угодно, и пусть он совершенно не знает, где находится, в какой стране, даже в каком полушарии. Пусть он потерял счет времени и не знает ни месяца, ни числа. Но дайте ему астрономический ежегодник с таблицами логарифмов, универсальный инструмент, хронометр, показывающий произвольное время, и радиоприемник для сигналов времени (без права приема других передач). Разрешите ему в одну ясную ночь понаблюдать звезды, а на следующее утро — Солнце. Обработав свои наблюдения, он скажет месяц и число, широту и долготу своего места, а по географической карте укажет, где он находится и в каком направлении нужно идти, чтобы попасть в ближайший или заданный город. Словом, такому человеку невозможно заблудиться на земном шаре.

---

*) В кварцевых часах роль маятника выполняет пластинка из кварца, вырезанная определенным образом. В кварце возбуждаются электромагнитные колебания, частота которых долгое время сохраняется неизменной.

Действие молекулярных часов связано с собственными колебаниями молекул некоторых веществ.

Комментарий

Если в течение нескольких часов наблюдать за звездным небом, то можно заметить, что положения созвездий изменяются относительно сторон горизонта. Например, в восточной части неба звезды поднимаются выше над горизонтом и перемещаются вправо. В северной стороне неба большинство звезд в течение суток описывают концентрические окружности. Можно сказать, что весь небесный свод (небесная сфера) вращается вокруг некоторой оси, называемой осью мира. Точки пересечения оси мира с небесной сферой называют полюсами мира — северным и южным. Северный полюс — тот, со стороны которого вращение небесной сферы происходит по часовой стрелке (если смотреть извне). Это вращение в действительности кажущееся, так как на самом деле вращается Земля вокруг своей оси (в противоположном направлении). Очевидно, что ось мира параллельна оси вращения Земли.

Кроме оси мира и полюсов мира, есть еще несколько характерных линий и точек на небесной сфере (рис. 1). Плоскость *SWNE* — плоскость горизонта, плоскость, касательная к поверхности Земли в точке *C*, где находится наблюдатель. Линия *NS* — полуденная линия (по этой линии в полдень падает тень от вертикальных предметов). Отвесная линия, проведенная в точке *C*, пересекает небесную сферу в точке зенита *Z*. Плоскость, проходящая через точки *S*, *Z*, *P* (северный полюс мира), *N* — плоскость небесного меридиана. Небесный экватор — это линия пересечения плоскости, перпендикулярной к оси мира и проходящей через наблюдателя (точка *C*), с небесной сферой.

Каждое светило за сутки два раза пересекает небесный меридиан; явления прохождения светила через небесный меридиан называются кульминациями. В верхней кульминации светило находится выше всего над горизонтом, в нижней кульминации — ниже всего (рис. 2).

У светил, находящихся вблизи полюса мира, можно наблюдать обе кульминации (и верхнюю, и нижнюю); у восходящих и заходящих светил наблюдают только верхнюю кульминацию (нижняя кульминация происходит под горизонтом).

Момент верхней кульминации Солнца называют истинным полднем, а момент нижней кульминации Солнца — истинной полночью.

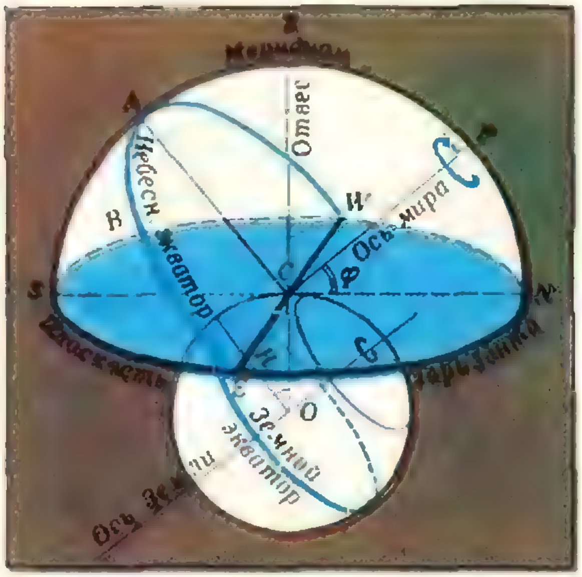


Рис. 1.

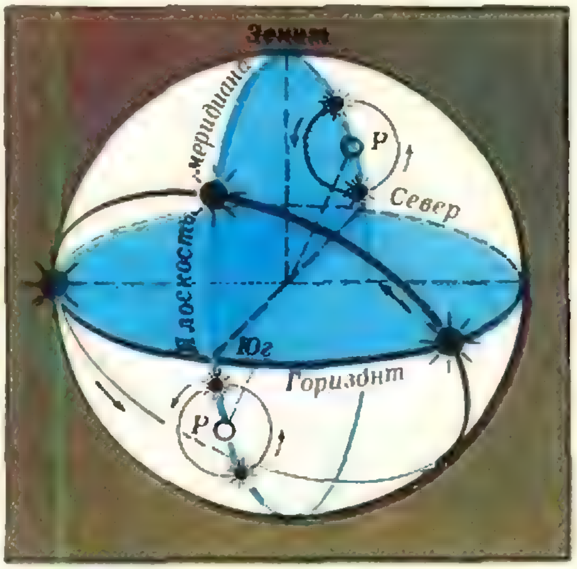
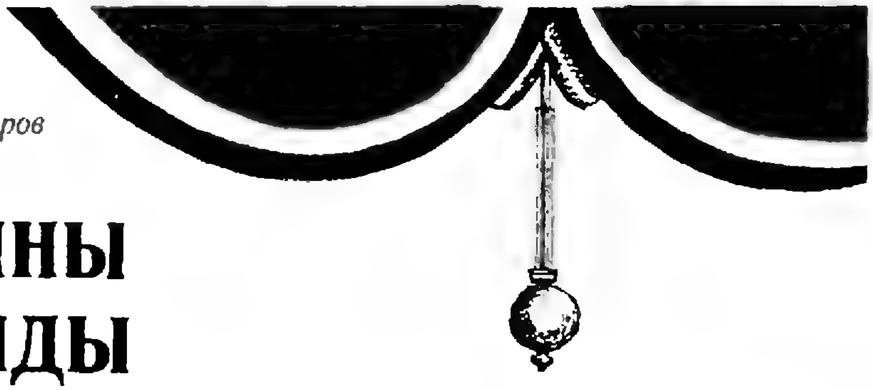


Рис. 2.

С. Г. Веров



Тайны циклоиды

> *«Рулетта является линией столь обычной, что после прямой и окружности нет более часто встречающейся линии; она так часто вычерчивается перед глазами каждого, что надо удивляться тому, как не рассмотрели ее древние ..., ибо это не что иное, как путь, описываемый в воздухе гвоздем колеса, когда оно катится своим движением с того момента, как гвоздь начал подниматься от земли, до того, когда непрерывное качение колеса не приводит его опять к земле после окончания целого оборота».*
>
> Паскаль

Кривую, «так часто вычерчивающуюся перед глазами каждого», первыми заметили Галилей (в Италии) и Мерсенн (во Франции). В Италии ее назвали *циклоидой*, во Франции — *рулеттой*. Привилось первое название, а рулеттами теперь называют кривые более широкого класса (см. статью «Касательные к рулеттам», «Квант», 1975, № 5, с. 22; в дальнейшем, ссылаясь на эту статью, мы будем писать КР). Математики XVII века, создававшие общие методы исследования кривых, были очень заинтересованы в новых «подопытных» кривых. Среди этих кривых циклоида заняла особое место. Она оказалась одной из первых *трансцендентных* кривых (кривых неалгебраического происхождения), для которых удалось найти красивый явный ответ в задачах о построении касательных и вычислении площади. Но больше всего поражало, что циклоида вновь и вновь появлялась при решении самых разных задач, в первоначальной постановке которых она не участвовала. Все это сделало циклоиду самой популярной кривой XVII века: в 1673 году Гюйгенс констатировал, что «циклоида исследована точнее и основательнее всех других кривых».

1. От кинематического определения к аналитическому

Кинематическое определение циклоиды содержится в эпиграфе к этой статье. Попробуем его расшифровать.

Выберем на плоскости систему координат так, чтобы прямая, по которой катится круг (*направляющая* прямая), совпала с осью Ox, и пусть круг (его называют *производящим* кругом) катится в положительном направлении оси Ox. Предположим, что в начальный момент времени наблюдаемая точка границы круга занимает положение $A_0=O=(0,0)$ (рис. 1). Если r — радиус производящего круга, то центр его будет двигаться по прямой $y=r$. Чтобы полностью охарактеризовать качение круга, достаточно описать движение его центра, если только добавить, что *круг катится без скольжения*! *). Нам удобно, зафиксировав единицу времени, предположить, что центр круга движется равномерно со скоростью r. В момент времени t

---

*) Вероятно, именно это и имел в виду Паскаль, когда писал, что колесо «катится своим движением».

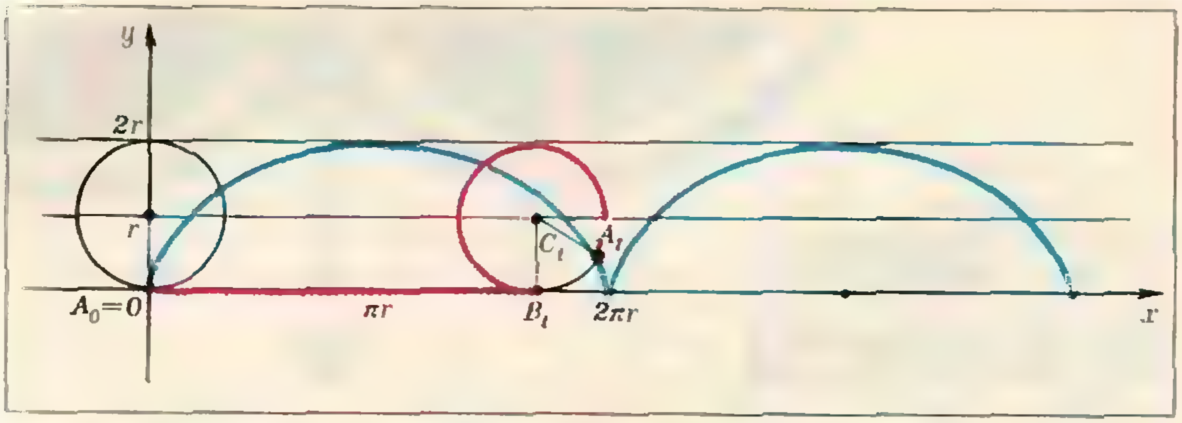


Рис. 1.

центр круга окажется в точке $C_t = (tr, r)$, и производящий круг будет касаться направляющей прямой в точке $B_t = (tr, 0)$.

Найдем теперь положение A_t наблюдаемой точки в момент времени t (в силу определения A_t будет точкой циклоиды). Чтобы это сделать, нужно четко сформулировать условие, что качение круга происходит без скольжения: оно состоит в том, что длина отрезка между точками касания производящего круга с направляющей прямой в моменты времени 0 и t (отрезка OB_t; см. рис. 1) равна длине дуги B_tA_t, «прокатившейся» по этому отрезку (при этом дуга может превышать полную окружность). Поэтому в момент времени t угол $B_tC_tA_t$ равен t (в радианной мере), так как длина дуги B_tA_t равна tr. Обозначив через D_t проекцию точки A_t на прямую, проходящую через центр круга C_t параллельно оси Ox, а через E_t — проекцию точки A_t на прямую, проходящую через центр C_t параллельно оси Oy (рис. 2), получим (с учетом направлений координатных осей)

$$C_tD_t = -r\sin t, \quad C_tE_t = -r\cos t$$

(посмотрите, что будет в случаях $t > \frac{\pi}{2}$, $t > \pi$). Следовательно, координаты точки A_t циклоиды равны соответственно

$$x = rt - r\sin t, \qquad y = r - r\cos t.$$

Заметим, что при $t = 2\pi$ длина отрезка OB_t оказывается равной длине окружности, наблюдаемая точка вновь попадает на ось Ox ($A_{2\pi} = (2\pi r, 0)$) и картина начнет повторяться. Таким образом, период циклоиды равен $2\pi r$.

Итак, циклоиду можно определить как множество точек с координатами $(rt - r\sin t, r - r\cos t)$ и при желании про исходное кинематическое определение забыть. Мы получили так называемое *параметрическое* задание циклоиды: обе координаты x и y точки A_t циклоиды являются функциями от некоторой вспомогательной переменной t.

Назовем точки циклоиды, лежащие на оси Ox, *остриями* циклоиды, точки, лежащие на прямой $y = 2r$ — *вершинами*, а дуги между соседними остриями — *арками* циклоиды. В выбранной системе координат циклоида характеризуется одним параметром r (радиусом производящего круга). Все циклоиды, у которых точка (0, 0) — острие, получаются друг из друга гомотетией. По каждой точке (x, y), $x \neq 0$ можно единственным образом выбрать r так, что эта точка будет лежать на первой арке, выходящей из (0, 0), соответствующей циклоиды (докажите).

В статье КР доказано, что касательная к циклоиде в точке A_t (рис. 3) проходит через верхнюю точку производящего круга — точку F на ри-

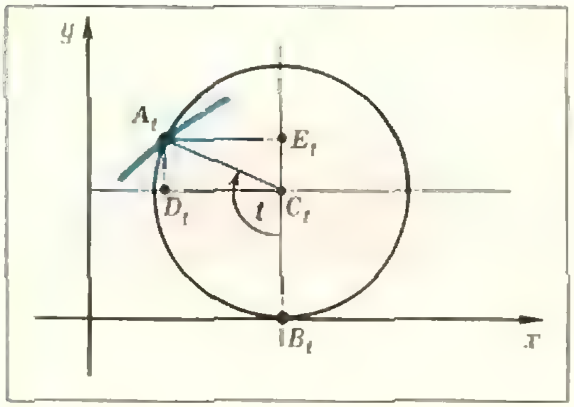


Рис. 2.

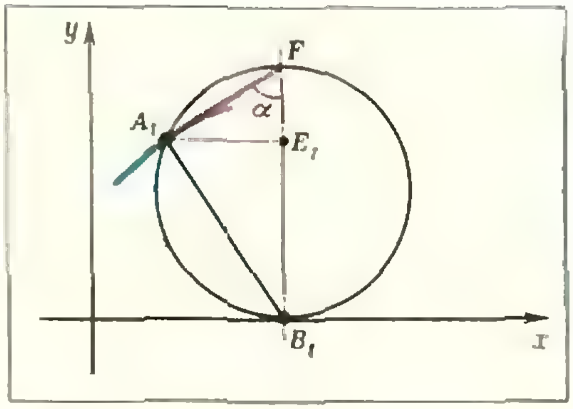


Рис. 3.

сунке 3. Пусть B_t — нижняя точка круга, α — угол между касательной и вертикалью FB_t. Тогда A_tB_t — *нормаль* к циклоиде (перпендикуляр к касательной), и для ординаты y точки A_t имеем: $y = E_tB_t = 2r\sin^2\alpha$. Отсюда

$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{y}{2r}}. \qquad (1)$$

Это соотношение будет играть важную роль в дальнейшем. Можно показать, что циклоида с параметром r является единственной кривой, проходящей через точку (0, 0), удовлетворяющей соотношению (1).

2. О площадях криволинейных фигур

Площади некоторых криволинейных фигур умели вычислять еще в Древней Греции. Вначале интересовались лишь *квадратурой фигур*, т. е. построением для данной фигуры циркулем и линейкой отрезка, длина которого равна ее площади. Как выяснилось позднее, это можно сделать для тех фигур, площадь которых вычисляется при помощи арифметических операций и операции извлечения квадратного корня. Постепенно стали интересоваться фигурами, площади которых вычисляются с помощью произвольных алгебраических операций (*алгебраическая квадратура*), а затем даже и такими фигурами, в выражениях для площадей которых фигурировало число π. Основной метод вычисления площадей состоял в приближении данной фигуры многоугольниками и переходе к пределу; но должно было очень повезти, чтобы эти вычисления удалось довести до явного ответа.

Иногда вычисление площади фигуры можно упростить, воспользовавшись какими-нибудь общими свойствами площадей. Вот несколько таких свойств.

1. При гомотетии фигуры с коэффициентом k площадь ее умножается на k^2, и при растяжении фигуры относительно некоторой оси с коэффициентом k площадь ее умножается на k.

2. *Равносоставленные фигуры (т. е. фигуры, которые можно разрезать на попарно конгруэнтные части) равновелики (имеют равные площади).*

3. Две фигуры, при пересечении которых любой прямой, параллельной некоторой фиксированной прямой l, получаются конгруэнтные отрезки, равновелики (этот принцип сформулировал в 1635 году Кавальери (1598—1647)).

Представим себе, что контур фигуры — гибкая лента, а сама фигура составлена из очень тонких жестких слоев, параллельных прямой l («неделимых», по терминологии Кавальери). Рассмотрим преобразования, сохраняющие эти слои, но сдвигающие их друг относительно друга. Все получающиеся при таких преобразованиях фигуры в силу принципа Кавальери будут равновелики.

Перечисленные свойства площадей нуждаются в доказательствах (основная трудность этих доказательств состоит в том, чтобы дать строгое определение площади), но в них легко поверить. Сейчас мы расскажем о том, как изящно применяются эти свойства при вычислении площади фигуры, лежащей под аркой циклоиды.

3. Спутница циклоиды, лепестки Роберваля и площадь под циклоидой

Поскольку все циклоиды подобны, мы ограничимся случаем $r=1$. Вслед за Робервалем (1602—1675) свяжем с каждой точкой циклоиды A_t (см. рис. 3) ее проекцию E_t на вертикальный диаметр производящего круга. Точка E_t имеет координаты

$$x=t,\ y=1-\cos t=1+\sin\left(t-\frac{\pi}{2}\right).$$

Кривую, составленную из точек E_t при всевозможных t, Роберваль назвал *«спутницей циклоиды»*. Ясно, что «спутница циклоиды» — это сдвинутая синусоида (на 1 вверх и на $\frac{\pi}{2}$ вправо).

С этим обстоятельством связан исторический курьез. Математики с незапамятных времен занимались тригонометрическими функциями, но синусоида впервые появилась лишь в XVII веке, причем не как график синуса, а как ... «спутница циклоиды» (отчасти это можно объяснить тем, что долго не рассматривали функций не алгебраического происхождения).

«Спутница циклоиды» разбивает ее на три части (рис. 4): фигуру под синусоидой и две симметричные фигуры, названные *«лепестками Роберваля»*. В силу свойства 2 площадь фигуры под синусоидой равна 2π: эта фигура равносоставлена с прямоугольником такой площади (рис. 5). Рассмотрим один «лепесток». Горизонталь на высоте $y=1-\cos t$ пересекает его по отрезку A_tE_t длины $|\sin t|$ (см. рис. 2). Переместив эти горизонтальные отрезки (при всевозможных t) вдоль своих горизонталей так, чтобы их левые концы попали на одну вертикаль, мы получим полукруг единичного круга (рис. 6). В силу принципа Кавальери площадь «лепестка» равна площади этого полукруга, т. е. $\frac{\pi}{2}$. Значит, площадь фигуры под аркой циклоиды с $r=1$ равна $2\pi+2\cdot\frac{\pi}{2}=3\pi$ (и следовательно, $3\pi r^2$ при $r\neq1$).

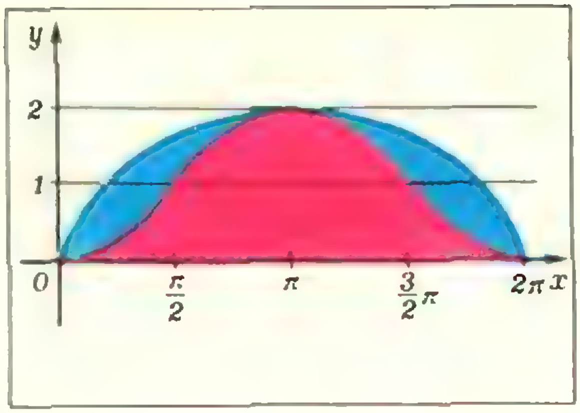


Рис. 4.

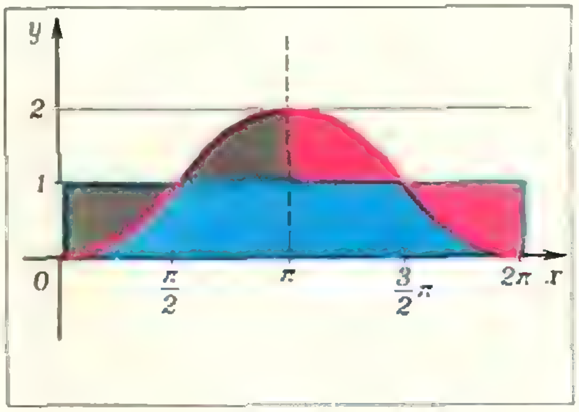


Рис. 5.

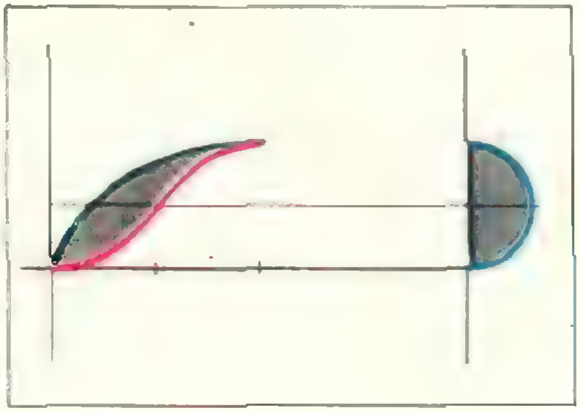


Рис. 6.

Вопрос о вычислении площадей сегментов циклоиды является менее элементарным. Гюйгенс (1629—1695) не без гордости писал: «Я первый промерил площадь той части циклоиды, которая получится, если отсчитать от вершины $^1/_4$ часть оси и провести параллель основанию. Эта часть составляет половину площади правильного шестиугольника, вписанного в образующий круг».

4. Таутохрона

> *«Циклоидальный маятник был изобретен Христианом Гюйгенсом, крупным ученым XVII столетия и гениальнейшим часовым мастером всех времен»*
>
> Зоммерфельд Механика

Галилей утверждал, что период колебаний математического маятника определяется только его длиной l и не зависит от угла φ его максимального размаха. Гюйгенс, выяснив, что это утверждение справедливо лишь для малых углов φ, решил построить маятник, период колебаний которого и в самом деле не зависел бы от φ (такой маятник называется *таутохронным* или *изохронным*).

Построение таутохронного маятника Гюйгенс разделил на два этапа:

1) нахождение кривой, по которой должен двигаться конец маятника (*таутохроны*);

2) нахождение подвески маятника, обеспечивающей движение его конца по таутохроне.

Мы начнем с поисков таутохроны (существование которой заранее не очевидно).

Конец математического маятника движется по дуге окружности точно так же, как тяжелая материальная точка — по желобу, контур которого совпадает с этой окружностью. Если пренебречь силами трения и сопротивления воздуха, то тяжелая точка, пущенная по круговому желобу без начальной скорости с высоты H, пройдя нижнее положение, снова поднимется на высоту H, и далее будет совершать периодические колебания, поднимаясь то в одну, то в другую сторону на высоту H. Неверное утверждение Галилея состояло в том, что при этом период колебаний $T(H)$ не зависит от H. Наша задача — определить, какой формы должен быть желоб, чтобы то, что утверждал Галилей, было верным.

Благодаря счастливой случайности (они в истории науки играют не последнюю роль), Гюйгенс изучал циклоиду (в связи с конкурсом Паскаля, 1658 год) в то самое время, когда искал таутохронный маятник. Именно циклоида и оказалась таутохроной! Вероятно, сам Гюйгенс этого заранее не ожидал (так можно понимать его слова: «я обнаружил пригодность ее (*циклоиды*) для измерения времени, исследуя ее по строгим правилам науки не подозревая ее применимости»).

Рассмотрим на желобе, сделанном по форме перевернутой циклоиды (рис. 7; r — радиус производящего круга) тяжелую материальную точку; пусть в начальный момент времени она находится на высоте H (в точке C_0 на рисунке). Попытаемся найти время τ, через которое она окажется в нижней точке B (вершине циклоиды). Тогда через 2τ она будет в точке $C_{2\tau}$ циклоиды, симметричной относительно вертикальной оси точке C_0, а через время $T=4\tau$ (полный период) вернется в точку C_0. Нас интересует зависимость τ от H.

Пусть в момент времени t тяжелая точка занимает положение C_t на высоте $h=h(t)$. Вектор скорости $\vec{v}(t)$ в момент времени t направлен по касательной к циклоиде в точке C_t; его длина $|\vec{v}(t)|$ (величина скорости) определяется из закона сохранения энергии:

$$\frac{m|\vec{v}(t)|^2}{2}=mg(H-h(t)),$$

т. е.

$$|\vec{v}(t)|=\sqrt{2g(H-h(t))}.$$

Посмотрим, как движется проекция нашей точки на вертикаль C_0B'. В момент времени t эта проекция занимает положение C_t', а в момент времени τ она окажется в точке B' (см. рис. 7), пройдя отрезок C_0B' длины H. Скорость $w(t)$ в момент времени t этого прямолинейного движения (в точке C_t' на рис. 7) — это проекция вектора скорости $\vec{v}(t)$ на

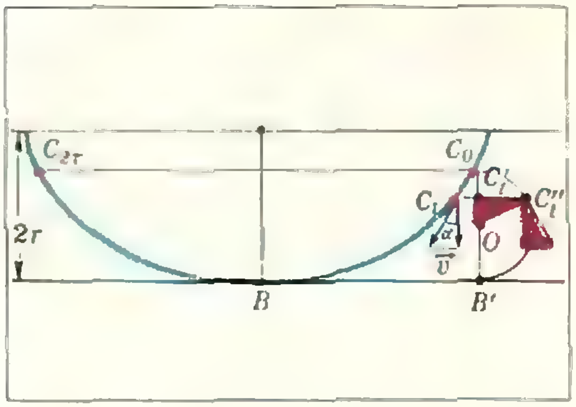


Рис. 7.

вертикаль: $w(t) = |\vec{v}(t)| \cos\alpha$, где α — угол между касательной к циклоиде и вертикалью. Поскольку (см. (1), с. 21) $\cos\alpha = \sqrt{\frac{2r-y}{2r}}$ и $y = 2r - h(t)$, то $\cos\alpha = \sqrt{\frac{h(t)}{2r}}$, а значит,

$$w(t) = \sqrt{\frac{g}{r}} \cdot \sqrt{h(t)(H - h(t))}.$$

Итак, закон изменения скорости у нашего прямолинейного движения довольно сложный. Но Гюйгенс заметил (решающая докадка!), что при равномерном вращательном движении по окружности диаметра H вертикальная компонента вектора скорости имеет тот же вид, что и $w(t)$. Действительно, построим на отрезке C_0B' как на диаметре полуокружность, и пусть C_t'' — точка этой полуокружности, лежащая на высоте $h(t)$. Длина отрезка $C_t' C_t''$ равна $\sqrt{h(t) \cdot (H - h(t))}$.

Из подобия прямоугольных треугольников, окрашенных на рис. 7 в красный цвет (их стороны взаимно перпендикулярны: OC_t'' — радиус, в точке C_t'' проведены касательная к полуокружности и вертикаль), следует, что касательный к окружности в точке C_t'' вектор длины $\sqrt{\frac{g}{r}}\frac{H}{2}$ имеет вертикальную проекцию длины $w(t)$. Значит, когда наша точка C движется по циклоиде, соответствующая ей точка C'' равномерно вращается с угловой скоростью $\sqrt{\frac{g}{r}}$ радиан (не зависящей от H!). За время $\tau = \sqrt{\frac{r}{g}} \cdot \pi$ точка C'' пройдет полуокружность C_0B', за то же время точка C' пройдет отрезок C_0B', а сама точка C — дугу циклоиды C_0B. Итак, мы не только доказали *таутохронность* циклоиды (т. е., что τ не зависит от H), но и нашли полный период колебаний:

$$T = 4\tau = 4\pi\sqrt{\frac{r}{g}}\,{}^{*)}. \qquad (2)$$

Формула (2) настолько напоминает гипотетическую формулу Галилея для периода математического маятника длины l $\left(T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\right)$, что было естественно попытаться воспользоваться (2) для обоснования последней. И в самом деле, с помощью (2) Гюйгенс получил первое строгое доказательство формулы для периода колебаний математического маятника при малых углах размаха φ. Он заметил, что при малых углах круговой желоб почти не отличается от циклоидального, и оставалось только понять, при каком соотношении между длиной l математического маятника и параметром r циклоиды это отличие наименьшее. Оказалось, что при $l = 4r$ (это не очевидный факт; мы еще к нему вернемся). Подставляя в (2) $r = l/4$, получаем знаменитую формулу для периода математического маятника: $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ (при малых φ).

---

*) Фактически доказано, что движение тяжелой материальной точки по циклоидальному желобу можно представить в виде суммы равномерного вращательного движения с угловой скоростью, не зависящей от того, с какой высоты H пущена точка, и некоторого (вообще говоря, неравномерного) поступательного движения. При $H = 2r$ это легко вывести из кинематического определения циклоиды и соотношения (1), с. 21.

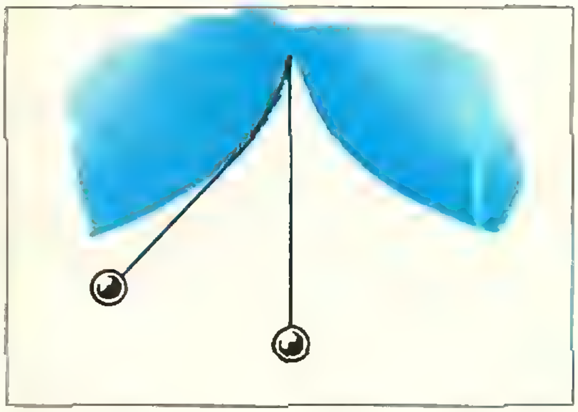


Рис. 8.

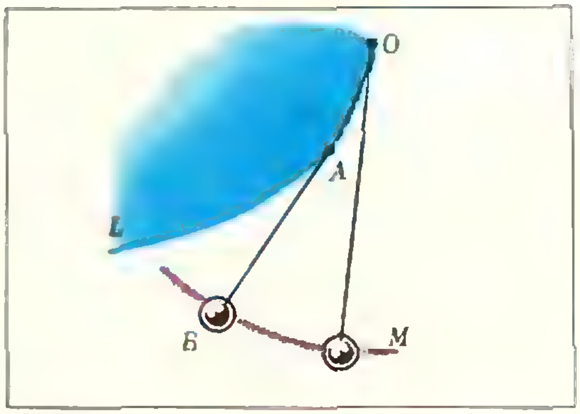


Рис. 9.

5. Циклоидальный маятник

Создавая первую модель часов, Гюйгенс надеялся скомпенсировать отклонение простого (математического) маятника от таутохронности, уменьшая в процессе отклонения его длину. Длину маятника можно регулировать, установив «щеки» (рис. 8), на которые в процессе отклонения будет наматываться нить подвески. Попытки экспериментально подобрать нужную зависимость длины маятника от угла отклонения не дали успеха, и Гюйгенс в следующих своих конструкциях часов устанавливает вместо «щек» ограничители амплитуды размаха. Когда же выяснилось, что циклоида — таутохрона, стало понятно, что форма «щек» должна быть такой, чтобы конец маятника двигался по циклоиде.

Гюйгенс искал форму «щек», рассуждая (в несколько вольном пересказе) примерно так. Пусть имеется препятствие, ограниченное кривой L, в некоторой точке O которого закреплена нерастяжимая нить длины l (рис. 9). Натянутую нить мы наматываем на препятствие, наблюдая за кривой M, которую описывает незакрепленный конец нити. Гюйгенс называл кривую M *разверткой* кривой L; теперь M называют *эвольвентой* кривой L, а L — *эволютой* кривой M (с одной эволютой связывается много эвольвент, отвечающих разным длинам l). Нам нужно найти эволюту циклоиды.

Кривая M состоит из таких точек B, что сумма длин отрезка касательной BA к кривой L в точке A и дуги AO кривой L равна l (см. рис. 9 — это в точности означает натянутость частично намотанной на L нити). Первая догадка Гюйгенса заключалась в том, что *касательная к кривой M в точке B перпендикулярна* к AB, т. е. что AB — касательная к кривой L в точке A — является одновременно нормалью к кривой M в точке B. Проще всего пояснить этот факт, исходя из кинематического определения кривой M. Вспомним, что вектор скорости направлен по касательной к траектории движения и что при изменении действия сил вектор скорости не может измениться мгновенно (подробнее об этом см. в статье КР). «Обрубим» в точке A препятствие, но будем продолжать движение натянутой нити (рис. 10); тогда конец нити начнет двигаться по окружности с центром в точке A; векторная же скорость его в точке B не изменится; поэтому в точке B у кривой M и окружности с центром A будет общая касательная, перпендикулярная к радиусу BA.

Читатели статьи КР заметят также, что если рассматривать нити разной длины, то описанное движение конца нити продолжается до такого движения всей плоскости как твердой пластины, при котором точки кривой L являются *мгновенными центрами вращения*, а различные эвольвенты — траекториями точек плоскости. Из этого замечания сразу следует перпендикулярность

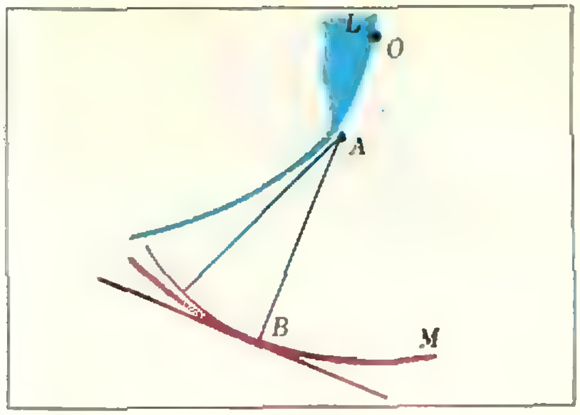


Рис. 10.

отрезка AB к касательной к кривой M в точке B.

Следующая догадка Гюйгенса состояла в том, что в «хорошей» ситуации *эволюта кривой восстанавливается однозначно* (помните, у одной кривой много эвольвент)! Дело в том, что нормали к кривой M в разных точках — это касательные к ее эволюте L. «Хорошую» же кривую по касательным можно восстановить: взяв много касательных, построить описанную ломаную и, «учащая» затем касательные, все лучше приближать кривую (говорят, что кривая *огибает* множество своих касательных).

Нам нужно найти кривую, касательные к которой будут нормалями к заданной циклоиде. Гюйгенс догадался, что этой кривой будет такая же циклоида, только поднятая на $2r$ и сдвинутая на полпериода (так, что ее вершины совпадают с остриями исходной циклоиды; см. рис. 11).

В самом деле, пусть $r=1$; l и l' — направляющие прямые соответственно нижней и верхней циклоид, O и O' — их начальные точки (l' на две единицы выше l; O' на π единиц правее O). Возьмем на прямой l точку C и рассмотрим положения производящих кругов (обеих циклоид), когда они касаются l в этой точке C. Пусть C' и C'' — диаметрально противоположные ей точки соответственно верхнего и нижнего кругов, A и A' — соответствующие точки циклоид. Дуга $CC''A$ равна по длине отрезку OC; поэтому она на π больше дуги $C'A'$, равной по длине отрезку $O'C'$. Отсюда $\sphericalangle C'CA' \cong \sphericalangle C''CA$, и точки A', C, A лежат на одной прямой. Остается заметить, что CA' — касательная к верхней циклоиде, а CA — нормаль к нижней (AC'' — касательная к ней).

Теперь мы знаем, что «щеки» таутохронного маятника должны быть циклоидальными, и что длина нити l должна равняться $4r$ (именно при таком значении l мы в качестве эвольвенты получим нужную циклоиду). При малых же углах размаха φ регулирующие «щеки» почти не влияют на длину маятника, и циклоида близка к дуге окружности радиуса $4r$ (см. конец предыдущего пункта).

6. Теорема Христофора Рена. Эволюты и вычисление длин кривых

Решив задачу о циклоидальном маятнике, Гюйгенс не остановился, понимая, что им создана замечательная математическая теория. Он пишет: «Для применения моего изобретения к маятникам мне необходимо было установить новую теорию, а именно, теорию образования новых линий при посредстве развертывания кривых линий. Здесь я столкнулся с задачей сравнения кривых и прямых линий. Я изучил этот вопрос несколько далее, чем нужно было для моей цели, так как теория показалась мне изящной и новой».

Прежде всего Гюйгенс заметил, что когда нить маятника целиком наматывается на «щеку», то конец его оказывается в вершине циклоиды; значит, длина нити маятника ($4r$) совпадает с длиной половины арки циклоиды, и, значит, *длина арки циклоиды равна* $8r$! Эту теорему в 1658 году сформулировал и доказал Христофор Рен; Гюйгенс же, как мы видим, получил очень естественное доказательство этой теоремы.

Теорема Христофора Рена произвела на современников очень сильное впечатление и вот почему.

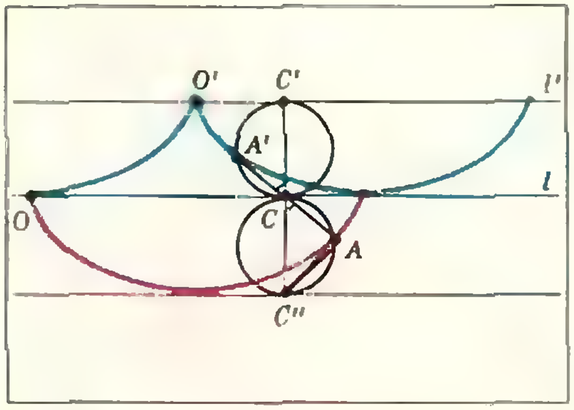


Рис. 11.

Вычислением длин кривых математики интересовались не меньше, чем вычислением площадей. Вначале, по аналогии с квадратурой (см. с. 21), они интересовались *ректификацией* — построением циркулем и линейкой отрезка соответствующей длины; позже стали интересоваться и *алгебраической ректификацией* — выражением длины кривой при помощи любых алгебраических операций. Мы уже говорили, что квадратуры некоторых фигур были найдены еще античными математиками; кривую же, для которой была бы возможна хотя бы алгебраическая ректификация, математики безуспешно искали вплоть до второй половины XVII века. Начали думать, что такой кривой вообще нет (так можно толковать слова Декарта «мы, люди, не можем найти соотношения между прямыми и кривыми»). Ректификация циклоиды, полученная Реном, опровергла эту точку зрения. Затем Ферма получил ректификации нескольких других кривых; однако во всех этих примерах фигурировали неалгебраические кривые, и скептики «уточнили» гипотезу, предположив, что невозможна алгебраическая ректификация алгебраических кривых (они справедливо объясняли, что, конечно, искусственно построить кривую, допускающую ректификацию, можно). Однако и в таком виде гипотеза оказалась неверной (первый опровергающий эту гипотезу пример был построен еще в 1657 году, но оставался неизвестным): Нейл, Хейрат и Ферма независимо предъявили в качестве алгебраической кривой, допускающей алгебраическую ректификацию, одну и ту же *полукубическую параболу* $ay^2 = x^3$. Совпадение это казалось мистическим до тех пор, пока Гюйгенс не вскрыл, в чем причина исключительности этой малозаметной кривой: она является эволютой параболы (точнее, эволютой параболы $y = x^2$ является кривая $y = \frac{1}{2} + 3\left(\frac{x}{4}\right)^{2/3}$).) Теория Гюйгенса вообще максимально прояснила вопрос о ректификации. Результаты о циклоидальном маятнике и связанные с ними вопросы составили содержание большей части книги Гюйгенса «Маятниковые часы», вышедшей в 1673 году *).

В заключение мы предлагаем читателям несколько задач с весьма почтенной репутацией.

Две задачи Галилея.

1. Докажите, что под действием силы тяжести материальная точка проходит все хорды окружности, оканчивающиеся в нижней точке окружности, за одно и то же время (аналогично — для хорд, начинающихся в верхней точке окружности).

2. Пусть есть кривая L (достаточно «хорошая») и точка A, не лежащая на L. Найдите на L такую точку B, чтобы отрезок AB проходился материальной точкой под действием силы тяжести за минимальное время.

Упражнения Ньютона

Пусть есть *центральное* поле, в котором силы пропорциональны расстоянию r до центра: $F(r) = kr$, $k > 0$.

Ньютон заметил, что в таком поле *гипоциклоиды* (см. КР) играют ту же роль, что циклоиды — в поле сил тяжести, а именно:

1) *гипоциклоиды являются (в этом поле) таутохронами* (Ньютон называл их изохронами);

2) *эволютами гипоциклоид являются подобные же гипоциклоиды* **).

Постарайтесь решить задачи Ньютона (на эту тему можно написать целое математическое «сочинение»). Вспомните, как проводятся касательные к гипоциклоидам (статья КР), посмотрите еще раз решения аналогичных задач для циклоид и … Мы ждем ваших решений.

**) О маятниковых часах см. статью С. Г. Гиндикина «Из истории маятниковых часов», «Квант», 1974, № 9.

**) Это — чисто геометрический факт, не относящийся к механике, но он позволяет устроить гипоциклоидальный маятник, а заодно — вычислить длину гипоциклоиды.

В. Я. Френкель

Пушкин и точные науки

«Бедный Пушкин»

Года два назад, отдыхая на скамейке в ленинградском скверике, я оказался невольным свидетелем такого разговора: «Бедный Пушкин,— сказала своей соседке молодая женщина, складывая свежий номер «Недели». — Живого места на человеке не оставили. Теперь вот пишут «Пушкин и минералогия» — о драгоценных камнях в его жизни».

...«Пушкин и точные науки». Не вызовет ли это заглавие сходный вздох сожаления, не покажется ли оно слишком претенциозным, отдающим в какой-то степени дань моде? Ведь речь пойдет не о применении новых математических методов в изучении стихов поэта (тема вполне содержательная, которую разрабатывают крупные математики). Мы просто посмотрим, как на страницах произведений Пушкина нашли свое отражение некоторые чисто научные термины. Начало прошлого века было ознаменовано замечательными открытиями в физике, химии, математике. Одинаково интересно, если у поэта, во всем стремившегося идти «с веком наравне», такие упоминания редки или часты.

Словарь языка Пушкина

Ответить на вопрос, в какой мере точные науки нашли свое прямое (и в какой-то степени внешнее) отражение в произведениях Пушкина, оказывается задачей не сложной. Дело в том, что к 150-летию со дня рождения поэта Институтом русской литературы (Пушкинским Домом) был издан «Словарь языка Пушкина». Это поистине фундаментальный труд! Каждый из четырех томов «Словаря» содержит по 800 страниц; сюда собраны все слова, использованные Пушкиным в его поэтических и прозаических произведениях (включая письма). 16 000 слов, построенных в алфавитном порядке, истолкованы в том смысле, который им придавался в пушкинское время. Указана «частота» их использования и дается ссылка на том и страницу Академического издания полного собрания сочинений поэта (подготовленного и изданного к 100-летию со дня смерти поэта, к концу тридцатых годов), где встречается соответствующее слово.

Итак, имея «Словарь» пушкинского языка, проще всего начать с того, что выписать имеющие прямое отношение к точным наукам слова, которыми мог пользоваться Пушкин, и поискать их в нем. Именно так и сделал автор настоящей статьи. И число «попаданий» оказалось весьма невелико.

Такая ситуация находится в соответствии с «традиционным» образом Пушкина, который, по воспоминаниям его сестры Ольги, в детстве плакал над задачами по арифметике. Много лет спустя, 1 января 1834 года, поэт записал в своем «Дневнике»: «Меня спрашивали, доволен ли я моим камер-юнкерством. Доволен, потому что государь имел намерение отличить меня, а не сделать смешным, а по мне хоть в камер-пажи, только б не заставили учиться французским вокабулам и арифметике».

Иван Пущин, о котором Пушкин писал «Мой первый друг, мой друг бесценный», рассказывал в своих воспоминаниях о том, как Яков Иванович Карцов, преподававший в лицее физику и математику, однажды вызвал к доске Пушкина и предложил ему решить алгебраическую задачу. Пушкин сосредоточенно и молча писал на доске какие-то цифры, переминался с ноги на ногу. Наконец, Карцов спросил его: «Ну, что же у Вас получилось? Чему равняется икс?» Пушкин улыбнулся, сверкнув зубами, и ответил: «Нулю!» «Хорошо, — подытожил Карцов. — У Вас, Пушкин, все в моем классе кончается нулем. Садитесь на место и пишите стихи».

Слова, слова, слова ...

Слово «наука», с которого имеет смысл начать разбор, упоминается у Пушкина довольно часто (75 раз). Это, прежде всего, «наука страсти нежной», но вместе с тем, и наука, о которой говорит Годунов: «Учись мой сын! Наука сокращает нам опыты быстротекущей жизни!» «Математику» Пушкин использовал трижды; по три раза приходится также на «геометрию» и «алгебру». «Физика» встречается у него лишь однажды, «астрономия» — ни разу (правда, упоминается «астрология»). Для сравнения заметим, например, что существительное «любовь» насчитывается 630 раз, а глагол «любить» — 614.

В рамках наших кратких заметок этого материала оказывается достаточно.

Представим собранные сведения по алфавиту. Начнем с «астрологии» (точнее с «астролога»). Одним из первых приглашенных при Петре Великом в Россию академиков-физиков был Крафт. Он заведовал физическим кабинетом Российской Академии наук и был, как пишет Пушкин, «должностным астрологом» при Анне Иоанновне. В «Истории Петра» Пушкин замечает: «Сохранилось в календаре 1730 г. его [Крафта] предсказание о вскрытии Невы 9-го апреля (что и сбылось)».

«Алгебра» вошла у Пушкина в фразу, ставшую поистине крылатой. Сальери из маленькой трагедии Пушкина «Моцарт и Сальери» говорит: «Звуки умертвив, музыку я разъял как труп. Поверил я алгеброй гармонию». Обычно считается, что эта фраза проводит разделение между искусством, олицетворяющемся в образе вдохновенного Моцарта, и ремесленничеством, которое ему здесь противопоставляется. Часто и без всяких оснований смысл этой фразы сводят к противопоставлению искусства и науки. Мы увидим вскоре, как далек от этого сам Пушкин.

В другой раз «алгебра» — и снова в контексте противопоставления — упоминается в резкой рецензии Пушкина на «Историю русского народа», написанную его идейным противником, редактором журнала «Московский телеграф» Н. А. Полевым. Пушкин пишет: «Ум человеческий по простонародному выражению — не пророк, а угадчик. Он видит общий ход вещей и может выводить из оного глубокие предположения, часто оправданные временем; но невозможно ему предвидеть случая — мощного орудия провидения». И Пушкин заключает: «Но провидение — не алгебра». (Отметим, что в стихотворении о научном творчестве, оставшемся незаконченным, Пушкин дает такие определения случаю, опыту и гению: «Случай — изобретательный слепец», «Опыт — сын ошибок трудных» и, наконец, «Гений — парадоксов друг». Академик С. И. Вавилов специально отмечал глубину этих пушкинских определений.)

Укажем для полноты, что в третий раз «алгебра» упоминается также в критической статье. Поэт сравнивает татарское иго с игом мавританским (в Испании) и пишет: «Татары не походили на мавров. Они, завоевав Россию, не подарили ей ни алгебры, ни Аристотеля».

В критической статье, посвященной работе Кюхельбекера, Пушкин пишет: «Вдохновение нужно в поэзии, как и в геометрии». Знаменательная фраза! Профессору Гёттингенского университета Давиду Гильберту, одному из крупнейших математиков нашего века, однажды сказали, что его студент оставил математику, решив посвятить себя поэзии. «Меня это не удивляет,— ответил Гильберт,— у него чувствовался недостаток фантазии!» Вдохновение, о котором пишет Пушкин, это нечто более чем родственное гильбертовской фантазии.

Пушкинское суждение о геометрии было не случайным; примерно в то же время, но уже по другому случаю, он записывает в своей тетради: «Вдохновение нужно в геометрии, как и в поэзии», поменяв местами поэзию и геометрию и как бы подчеркивая их равноправие перед лицом вдохновения. Академик М. П. Алексеев замечает, что такое сопоставление не случайно. В 1826 году, когда эти фразы были записаны Пушкиным, Н. И. Лобачевский уже говорил о своей новой геометрии, и отзвуки его речи в Казанском университете, произнесенной 24 февраля 1826 года, могли достигнуть и Пушкина.

Всегда соблазнительно проследить, не пересекались ли жизненные судьбы двух гениев, живших в одно и то же время, хотя и проявившихся в разных областях человеческой культуры. По мнению М. П. Алексеева, есть основания полагать, что имена Пушкина и Лобачевского можно соединить отнюдь не механически. Прежде всего, И. Великопольский, брат жены Лобачевского, хорошо знал Пушкина, виделся с ним неоднократно, переписывался и даже обменялся стихотворениями (весьма колкими). Есть прямые свидетельства того, как любил Лобачевский поэзию Пушкина: его стихи он часто читал наизусть в семейном кругу. Во время поездки в самом начале 30-х годов в Оренбург (в поисках материала для «Истории Пугачевского бунта») Пушкин остановился в Казани — городе, где прожил всю свою жизнь Лобачевский. Здесь Пушкин провел несколько дней в доме профессора Фукса — коллеги Лобачевского по университету. У Фукса и его общительной супруги каждый вечер бывало много гостей; не исключено, что среди них в «пушкинские дни» был и Лобачевский. Правда, документальных свидетельств обнаружить не удалось. Но я полагаю, что именно эти поиски и привели Л. Б. Модзалевского — пушкиниста и сына пушкиниста — к изучению биографии Лобачевского. В результате Модзалевский стал автором одной из наиболее содержательных книг о великом отечественном математике.

Слова «физика» и «химия» Пушкиным используются по одному разу. «Химия» — в неинтересном контексте, а вот «физика» — очень звучно.

В ноябре 1824 года он написал цикл стихотворений «Подражания Корану», своего рода поэтический пересказ древней книги. К некоторым строкам Пушкин сделал примечания. Так, к строфе

Земля недвижна — неба своды,
Творец, поддержаны тобой,
Да не падут на сушь и воды
И не подавят нас собой.—

он записал: «Плохая физика, но зато какая смелая поэзия!»

Приведем пример, к которому пушкинская ремарка подходит не менее. В известном стихотворении «Портрет», посвященном красавице Закревской, он писал:

С своей пылающей душой,
С своими бурными страстями
О жены Севера, меж вами
Она является порой
И мимо всех условий света
Стремится до утраты сил,
Как беззаконная комета
В кругу расчисленном светил.

Очевидно, однако, что движение кометы столь же расчисленно (закономерно), как и движение небесных светил: нет большего «законника», чем природа. Если нам иногда и кажется, что поведение ее объектов противоречит законам, то это просто значит, что мы еще не знаем других более сложных законов, которым они подчиняются!

Укажем, наконец, известную эпиграмму Пушкина, в которой он воспроизводит спор между представителями различных философских школ древности, касающийся сущности физически содержательного понятия движения. Эпиграмма эта, написанная в Михайловском осенью 1825 года, так и называется — «Движение»:

Движенья нет, сказал мудрец брадатый.
Другой смолчал и стал пред ним ходить.
Сильнее бы не мог он возразить;
Хвалили все ответ замысловатый.
Но, господа, забавный случай сей
Другой пример на память мне приводит:
Ведь каждый день пред нами солнце ходит,
Однако ж прав упрямый Галилей.

«Мудрец брадатый» — это древнегреческий философ Зенон Элейский (5 в. до н. э.), а его оппонент («другой») — Антисфен (род. около 440 г. до н. э.). В восьми строках своей эпиграммы великий поэт с удивительной емкостью и выразительностью сумел передать сущность спора; заключительные строчки призваны предостеречь тех, кто счел «ответ замысловатый» Антисфена исчерпывающим: Пушкин напоминает о галилеевской (коперниковской) гелиоцентрической системе мира, согласно которой движение Солнца — кажущееся явление, иллюстрирующее относительный характер этого движения.

Чтобы дать представление о той глубине, с которой пушкинисты вникают в историю возникновения стихотворений поэта, в явный и скрытый смысл каждой их строчки, замечу, что исчерпывающему анализу пушкинского «Движения» в одной из статей академика М. П. Алексеева посвящено 18 страниц убористого текста.

Заключительные замечания

Перечисленные примеры носят, конечно, иллюстративный характер и являются лишь «нулевым приближением» к содержательной теме «Пушкин и наука». Глубокие связи Пушкина с современной ему наукой весьма многообразны. В них органически включены его отношения с рядом ученых (прежде всего, гуманитариев). Одним из негуманитариев был «русский Калиостро»*) — замечательный изобретатель П. Шиллинг, за этот свой талант получивший такое «чародейное» прозвище. Шиллинг прославился не только изобретением «телеграфии по проводам»; известны его изобретения в морском деле, его работы по электричеству. Привлекает внимание и также разработана тема «Пушкин и Гумбольдт»**).

Однако наиболее ярко широта интересов Пушкина, понимание им роли науки в жизни общества проявились в его журналистской деятельности и были связаны с изданием журнала «Современник» — предприятия, на которое он возлагал столько надежд и в которое внес столько сил в последние полтора — два года жизни.

Для русской журналистики 20—30 гг. прошлого века публикация научно-популярных статей носила, можно сказать, традиционный характер. Пушкинский «Современник» и в этом плане был на несравненной высоте. Его издатель не хотел просто перепечатывать научно-популярные обзоры из зарубежных журналов — он привлек к их написанию своего соотечественника, князя П. Б. Козловского, профессионального дипломата и глубоко образованного человека. В двух из четырех прижизненно вышедших номерах пушкинского «Современника» были напечатаны статьи Козловского. Первая из них — «Разбор Парижского Ежегодника», говоря современным языком, рецензия на это издание, выпускавшееся под наблюдением секретаря Французской Академии наук Франсуа Араго. В своей развернутой рецензии Козловский не только пишет о последних успехах французской науки, но и горячо ратует за распространение просвещения у себя на родине, в России. Задача и благородная, и смелая, если помнить, что в глазах самодержавия просвещение было синонимом свободы. Следующая статья Козловского, помещенная в 3-м томе «Современника», называлась «О надежде». Это было первое в русской литературе популярное изложение основ теории вероятностей. Последний термин в то время у нас еще отсутствовал, и Козловский предлагал называть эту теорию «теорией удобосбытностей». Любопытно видеть на страницах «Современника» рядом с поэзией Пушкина, Жуковского, Тютчева, с прозой Гоголя алгебраические формулы, треугольник Паскаля и даже график, которым Козловский заканчивал свою статью.

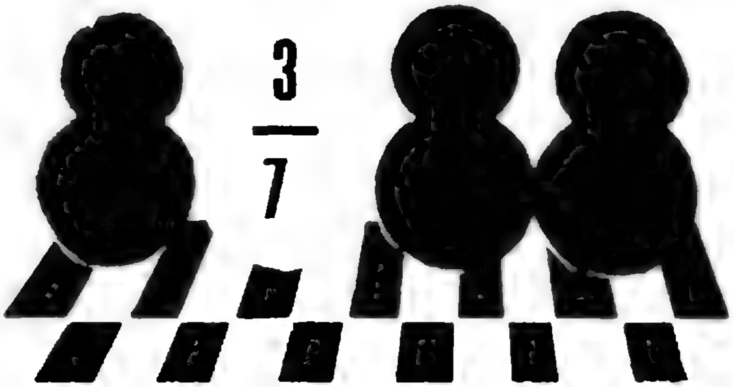
---

*) Граф Калиостро (настоящее имя — Иосиф Бальзамо (1743—1793)) — авантюрист, прославившийся всевозможными «чародействами». Его имя, однако, было синонимом не только авантюризма и шарлатанства, но и вообще всякого впечатляющего и ошеломляющего воображение зрелища. Примерно в этом контексте и следует понимать прозвище, данное Шиллингу,— настоящему чародею, который раскрывал перед людьми те «обыкновенные чудеса», которые таит в себе истинная наука.

**) Александр Гумбольдт (1769—1859) — немецкий естествоиспытатель и географ. Много путешествовал по Южной и Центральной Америке. Весной 1829 года приехал в Россию. В Петербурге встречался со многими учеными и писателями, в числе которых были П. А. Вяземский и А. С. Пушкин. Совершил в этом же году полугодовое путешествие в Сибирь. Его научные связи с русскими учеными продолжались в течение всей его долгой жизни.

В. Н. Вагутен

Близкие дроби



В этой заметке рассказано о некоторых любопытных последовательностях дробей и решена задача М298 из «Задачника «Кванта». Хотя в конце от читателя требуется знакомство с методом координат, векторами и принципом математической индукции, но бо́льшая часть заметки будет понятна даже тем, кто лишь недавно познакомился с дробями. Автор надеется, что старшеклассники и учителя найдут здесь удобный материал для занятий с учениками 5—6 классов. Упражнения включают существенную часть содержания статьи.

1. Ряды Фарея. Наблюдения

Выпишем все правильные дроби, у которых знаменатель не больше 7:

$$\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{4},\frac{3}{4},\frac{1}{5},\frac{2}{5},\frac{3}{5},\frac{4}{5},\frac{1}{6},$$
$$\frac{5}{6},\frac{1}{7},\frac{2}{7},\frac{3}{7},\frac{4}{7},\frac{5}{7},\frac{6}{7}$$

(мы пропустили *сократимые* дроби: $\frac{2}{4}$, $\frac{2}{6}$, $\frac{3}{6}$ и $\frac{4}{6}$ — из дробей, представляющих одно и то же число, мы выбираем одну дробь, а именно ту, у которой числитель и знаменатель наименьшие).

Теперь запишем те же дроби в порядке возрастания:

$$\frac{1}{7},\frac{1}{6},\frac{1}{5},\frac{1}{4},\frac{2}{7},\frac{1}{3},\frac{2}{5},\frac{3}{7},\frac{1}{2},$$
$$\frac{4}{7},\frac{3}{5},\frac{2}{3},\frac{5}{7},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\frac{5}{6},\frac{6}{7}. \quad (1)$$

Проверьте, что в ряду (1) каждая дробь действительно больше предыдущей

$$\frac{1}{6}-\frac{1}{7}=\frac{1}{6\cdot 7},\quad \frac{1}{5}-\frac{1}{6}=\frac{1}{5\cdot 6},$$
$$\frac{1}{4}-\frac{1}{5}=\frac{1}{4\cdot 5},\quad \frac{2}{7}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4\cdot 7},\ \ldots$$

При этом соблюдается интересная закономерность: *числитель разности двух соседних дробей всегда получается равным единице*, точнее,

А. *Для любых двух соседних дробей* $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ $\left(\text{где } \frac{a}{b}<\frac{c}{d}\right)$ *выполняется равенство*

$$bc-ad=1.$$

Какие еще закономерности присущи ряду дробей (1)?

Нетрудно обнаружить, что сумма двух дробей, симметрично стоящих в этом ряду, равна 1. Интересно, заметил ли читатель, что

Б. *Каждая дробь получается из соседних с ней двух дробей следующим образом: надо сложить их числители и разделить полученное число на сумму знаменателей.*

В самом деле,

$$\frac{1}{6}=\frac{1+1}{7+5},\quad \frac{1}{5}=\frac{1+1}{6+4},$$
$$\frac{1}{4}=\frac{1+2}{5+7},\quad \frac{2}{7}=\frac{1+1}{4+3},\quad \frac{1}{3}=\frac{2+2}{7+5},$$
$$\frac{2}{5}=\frac{1+3}{3+7},\quad \frac{3}{7}=\frac{2+1}{5+2},\quad \frac{1}{2}=\frac{3+4}{7+7} —$$

и так далее!

F_1	
F_2	$\frac{0}{1}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{1}$
F_3	$\frac{0}{1}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{2}\ \frac{2}{3}\ \frac{1}{1}$
F_4	$\frac{0}{1}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{2}\ \frac{2}{3}\ \frac{3}{4}\ \frac{1}{1}$
F_5	$\frac{0}{1}\ \frac{1}{5}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{3}\ \frac{2}{5}\ \frac{1}{2}\ \frac{3}{5}\ \frac{2}{3}\ \frac{3}{4}\ \frac{4}{5}\ \frac{1}{1}$
F_6	$\frac{0}{1}\ \frac{1}{6}\ \frac{1}{5}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{3}\ \frac{2}{5}\ \frac{1}{2}\ \frac{3}{5}\ \frac{2}{3}\ \frac{3}{4}\ \frac{4}{5}\ \frac{5}{6}\ \frac{1}{1}$
F_7	$\frac{0}{1}\ \frac{1}{7}\ \frac{1}{6}\ \frac{1}{5}\ \frac{1}{4}\ \frac{2}{7}\ \frac{1}{3}\ \frac{2}{5}\ \frac{3}{7}\ \frac{1}{2}\ \frac{4}{7}\ \frac{3}{5}\ \frac{2}{3}\ \frac{5}{7}\ \frac{3}{4}\ \frac{4}{5}\ \frac{5}{6}\ \frac{6}{7}\ \frac{1}{1}$
...	....

Таблица 1. Ряды Фарея.

Точно так же, как выписана строчка (1) из правильных дробей со знаменателем, не превосходящим 7, можно выписать в порядке возрастания дроби со знаменателем, не превосходящим n. Расположим подряд такие строчки для $n=1, 2, \ldots, 7$ в виде таблицы 1.

Первая строка и боковые стены» из дробей $\frac{0}{1}$ и $\frac{1}{1}$ придают нашей таблице более законченный вид.

Упражнение 1. Проверьте, что закономерности **А** и **Б**, которые мы заметили в седьмой строчке таблицы, имеют место и во всех предыдущих строчках.

Новые дроби в каждой строчке мы выделили красным цветом.

Для новых дробей наблюдение **Б** можно уточнить: у дроби, возникающей между двумя старыми, числитель равен сумме их числителей, знаменатель — сумме знаменателей. Таким образом, можно предложить простое правило, по которому получается новая n-я строчка.

В. *Нужно отметить в $(n-1)$-й строчке все такие пары соседних дробей $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$, у которых сумма знаменателей равна n, и между ними вставить дроби* $\frac{a+c}{b+d}$ (они всегда получаются несократимыми).

Проделаем эту операцию с седьмой строчкой. Отметим пары соседних дробей, у которых сумма знаменателей равна 8. Это такие пары

$$\frac{0}{1} \text{ и } \frac{1}{7};\ \frac{1}{3} \text{ и } \frac{2}{5};\ \frac{3}{5} \text{ и } \frac{2}{3};\ \frac{6}{7} \text{ и } \frac{1}{1}.$$

Вставим между ними соответственно дроби $\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}$ и получим восьмую строчку

$$\frac{0}{1}\ \frac{1}{8}\ \frac{1}{7}\ \frac{1}{6}\ \frac{1}{5}\ \frac{1}{4}\ \frac{2}{7}\ \frac{1}{3}\ \frac{3}{8}\ \frac{2}{5}\ \frac{3}{7}\ \frac{1}{2}$$

$$\frac{4}{7}\ \frac{3}{5}\ \frac{5}{8}\ \frac{2}{3}\ \frac{5}{7}\ \frac{3}{4}\ \frac{4}{5}\ \frac{5}{6}\ \frac{6}{7}\ \frac{7}{8}\ \frac{1}{1}.$$

Упражнение 2. Проделайте аналогичную операцию с восьмой строчкой и проверьте, что таким образом получается строчка всех несократимых дробей со знаменателем не больше 9, идущих в порядке возрастания.

Упражнение 3. Проверьте, что в восьмой и девятой строчках выполняются закономерности **А** и **Б**.

Строчка всех несократимых дробей $\frac{p}{q}$, у которых $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant n$ (n — данное натуральное число), расположенных в возрастающем порядке, имеет в теории чисел специальное название — *ряд Фарея*, и обозначается иногда через F_n. Имя математика Фарея таким строчкам присвоил великий французский математик Коши. Фарей заметил интересные закономерности в этом ряду дробей, а Коши, обратив внимание на наблюдения Фарея, в 1816 году опубликовал их доказательство. Однако вполне возможно, что эти закономерности были известны математикам и раньше.

Дадим два определения, связанные с нашими наблюдениями.

Определение 1. Назовем две дроби $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ *близкими*, если $bc-ad$ равно 1 или -1.

Упражнение 4. Выберите из дробей (1) все пары близких дробей.

Определение 2. Назовем *медиантой* двух дробей $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ дробь $\frac{a+c}{b+d}$.

(Медианта несократимых дробей может оказаться сократимой дробью; приведите пример.)

2. Свойства близких дробей

Теперь наши гипотезы можно сформулировать коротко так: в любом n-м ряду Фарея (n-й строке таблицы 1)

А. *Соседние дроби близки друг другу.*

В. *Каждая новая дробь m/n является медиантой соседних с ней дробей.*

В задаче М298 из «Задачника «Кванта» как раз и требовалось доказать свойство **А**: если $p/q<r/s$ — соседние дроби ряда F_n, то $qr-ps=1$. Но оказывается, что значительно легче доказывать одновременно оба свойства — и **А**, и **В**. Мы наметим ниже целых три различных доказательства: одно — в пунктах 3—4, второе — в пункте 5, третье — в пункте 6. Укажем несколько простых свойств, характеризующих близкие дроби и медианты.

а) *Для любых двух дробей a/b и c/d их разность по модулю не меньше $1/bd$:*

$$\left|\frac{a}{b}-\frac{c}{d}\right| \geqslant \frac{1}{bd}, \qquad (2)$$

причем знак равенства в (2) получается в том и только в том случае, если дроби a/b и c/d близки. (Это объясняет выбор термина: *близкие* дроби.)

б) *Медианта двух дробей всегда заключена между ними, т. е. если $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$,* то

$$\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d}. \qquad (3)$$

в) *Если две дроби близки друг к другу, то обе они несократимы.*

г) *Если две дроби близки друг к другу, то их медианта близка к каждой из них.*

д) *Если две дроби близки друг к другу, то их знаменатели взаимно просты и их числители взаимно просты* *).

е*) *Из всех дробей, заключенных между двумя близкими дробями, наименьший знаменатель имеет их медианта.*

Упражнение 5. Докажите свойства а) — д).

Допустим теперь, что читатель не только проделал упражнение 2 — получил из восьмой строчки девятую — но, продолжая действовать дальше по правилу **В**, получает десятую строчку, одиннадцатую и так далее.

Из свойств б), в), г) следует, что во всех новых строчках сохраняются такие закономерности:

1) дроби-медианты, которые мы вставим, будут несократимы;

2) дроби идут в порядке возрастания;

3) любые две соседние дроби близки друг другу.

Оставшийся более трудный вопрос состоит в следующем. Попадут ли по правилу **В** в n-ю строчку все несократимые дроби со знаменателем n или может оказаться, что какие-то будут пропущены? Оказывается, что все такие дроби будут обязательно вставлены, т. е. мы действительно получим строчку F_n целиком. На этом месте мы советуем читателю остановиться и попробовать придумать доказательство самостоятельно (один из путей — доказать свойство **е**, отмеченное звездочкой).

Мы же пока сделаем небольшое отступление и обсудим вопрос: сколько всего дробей в n-й строчке нашей таблицы?

---

*) Целые числа a и b называются взаимно простыми, если они не имеют общих делителей, бо́льших 1.

3. Функция Эйлера. Число красных дробей

Пусть у нас имеется натуральное число n. Рассмотрим все натуральные числа, не превосходящие n, и выберем из них те, которые взаимно просты с числом n. Количество этих чисел обозначим через $\varphi(n)$.

Например, для $n=8$ такими числами будут 1, 3, 5, 7, и тем самым $\varphi(8)=4$.

Итак, каждому натуральному числу n сопоставлено число $\varphi(n)$. Это соответствие φ называется *функцией Эйлера*.

Перечислим некоторые свойства функции Эйлера:

1) $\varphi(n) < n$.

2) Если $n=p$ — простое число, то $\varphi(p)=p-1$.

3) Для $n>2$ число $\varphi(n)$ четно.

4) Если $n=p^{\alpha}$ — степень простого числа p, то

$$\varphi(p^{\alpha})=p^{\alpha}-p^{\alpha-1}=p^{\alpha}\left(1-\frac{1}{p}\right).$$

5*) Если m и n взаимно просты, то $\varphi(mn)=\varphi(m)\cdot\varphi(n)$.

6) Общая формула для $\varphi(n)$ такова:

$$\varphi(n)=n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\dots\left(1-\frac{1}{p_r}\right);$$

здесь $p_1, p_2, \dots, p_r$ — все простые числа, на которые делится n. (Эта формула доказана в статье «Малая теорема Ферма», «Квант», 1972, № 10.)

Доказать все эти свойства мы предлагаем читателю. Объясним только свойство 3). Все числа, меньшие, чем n и взаимно простые с n, можно разбить на пары: каждая пара состоит из таких чисел q, s, что $q+s=n$. Таким образом, число $\varphi(n)$ — четно.

Число красных дробей в n-й строчке F_n, очевидно, равно $\varphi(n)$, так как несократимых дробей m/n $(0\leqslant m/n\leqslant 1)$ со знаменателем n столько же, сколько натуральных чисел m, меньших, чем n, и взаимно простых с n.

Вопрос о том, сколько всего членов содержит n-й ряд Фарея F_n, обсуждает в своем письме читатель «Кванта» А. Китаев из Ленинграда. Ясно, что это число — обозначим его $\Phi(n)$ — равно

$$\Phi(n)=1+\varphi(1)+\varphi(2)+\varphi(3)+\dots+\varphi(n),$$

поскольку $\Phi(1)=2$ и $\Phi(n)=\Phi(n-1)+\varphi(n)$ (см. таблицу 2). Простой формулы для $\Phi(n)$, видимо, не существует. Но интересно, что, несмотря на крайне нерегулярное поведение функции Эйлера $\varphi(n)$ (отношение $\frac{\varphi(n)}{n}$ бывает сколь угодно близко и к 0, и к 1), для $\Phi(n)$ можно доказать такое предельное соотношение:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$\varphi(n)$	1	1	2	2	4	2	6	4	6	4	10	4	12	6	8	8
$\Phi(n)$	2	3	5	7	11	13	19	23	29	33	43	47	59	65	73	81

Таблица 2. Функция Эйлера и число дробей F_n.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\Phi(n)}{n^2}=\frac{3}{\pi^2}\approx 0{,}305\ldots,$$

т. е. $\Phi(x)$ при больших x возрастает «приблизительно по параболе»: $\Phi(x)\approx\frac{3}{\pi^2}x^2$.

Это — одна из красивых теорем, полученных австрийским математиком Ф. Мертенсом (1874 г.).

4. Соседние знаменатели

Вернемся теперь к вопросу, поставленному в конце пункта 3, и объясним, почему, действуя по правилу **B**, мы получим все $\varphi(n)$ несократимых дробей со знаменателем n. Сделаем еще одно наблюдение.

Обратим внимание на знаменатели дробей в таблице 1. Составим для удобства из них новую таблицу 3. Правило **B** позволяет продолжать «таблицу знаменателей» (не заботясь о числителях) следующим образом.

B′. *Нужно отметить в $(n-1)$-й строчке все пары q, s соседних чисел, сумма которых равна n, и между ними поставить n.*

Как мы уже говорили, соседние знаменатели в таблице 1 — т. е. соседние числа q и s в таблице 3 — взаимно просты (см. свойство **д**, пункт 2). Заметим теперь, что, вставляя суммы $q+s=n$ в n-ю строчку, мы встречаем каждое из $\varphi(n)$ возможных представлений n в виде суммы взаимно простых чисел (причем ровно один раз). Например, в девятой строчке:

1																												1
1														2														1
1									3					2					3									1
1							4		3					2					3		4							1
1					5		4		3		5			2			5		3		4		5					1
1				6	5		4		3		5			2			5		3		4		5	6				1
1			7	6	5		4	7	3		5	7		2		7	5		3	7	4		5	6	7			1
1		8	7	6	5		4	7	3	8	5	7		2		7	5	8	3	7	4		5	6	7	8		1
1	9	8	7	6	5	9	4	7	3	8	5	7	9	2	9	7	5	8	3	7	4	9	5	6	7	8	9	1

Т а б л и ц а 3. Знаменатели рядов Фарея.

$$9=1+8,\ 9=5+4,\ 9=7+2,$$
$$9=2+7,\ 9=4+5,\ 9=8+1.$$

Упражнение 6. Напишите еще три строчки таблицы 3 и проверьте, что все $\varphi(n)$ представлений знаменателя n в виде суммы двух соседних знаменателей $n=q+s$ встречаются ровно по одному разу.

Наблюдение, сделанное в упражнении 6, сформулируем так.

Г. *В n-й строчке таблицы 3 каждое число, взаимно простое с n, бывает «соседом» ровно дважды: один раз — слева и один раз — справа.*

Упражнение 7. Докажите, что если свойство **Г** выполняется во всех предыдущих строчках таблицы 3, то оно должно выполняться и в n-й строчке, полученной по правилу **В′**.

Из упражнения 7 вытекает (согласно принципу математической индукции), что если новые строчки таблицы 3 получать по правилу **В′**, то во всех строчках свойство **Г** будет выполняться, а следовательно, в n-й строчке будет ровно $\varphi(n)$ новых членов!

Упражнение 8. Пусть мы, начав со строчки $\left(\frac{0}{1}, \frac{1}{1}\right)$, несколько раз проделываем такую операцию: между двумя уже написанными дробями вставляем их медианту. Докажите, что для любой строчки, которую можно таким образом получить, выполняются свойства **А** и **Б**.

Из результата этой задачи, в частности, следует, что свойства **А** и **Б** выполняются для каждой строчки таблицы 4, где между каждыми двумя дробями в следующей строчке вставляется медианта.

Упражнение 9. Докажите, что в таблице 4 в каждой строчке, начиная с n-й, встречаются все несократимые дроби со знаменателем n, причем каждая — один раз.

$\frac{0}{1}$																$\frac{1}{1}$
$\frac{0}{1}$								$\frac{1}{2}$								$\frac{1}{1}$
$\frac{0}{1}$				$\frac{1}{3}$				$\frac{1}{2}$				$\frac{2}{3}$				$\frac{1}{1}$
$\frac{0}{1}$		$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{3}$		$\frac{2}{5}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{5}$		$\frac{2}{3}$		$\frac{3}{4}$		$\frac{1}{1}$
$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{1}$

Т а б л и ц а 4. «Ускоренный» ряд Фарея.

1																1
1								2								1
1				3				2				3				1
1		4		3		5		2		5		3		4		1
1	5	4	7	3	8	5	7	2	7	5	8	3	7	4	5	1

Т а б л и ц а 5. Ряды Гальперина.

Таблица 4 тесно связана с таблицей целых чисел, которая рассматривалась в задаче М233 Г. А. Гальперина из «Задачника «Кванта». Эта таблица 5 появляется не только в знаменателях дробей таблицы 4, но и в их числителях (во второй «половине» таблицы 4, — начиная со второй строчки, во второй «четверти», — начиная с третьей строчки и так далее)!

5. Второе доказательство

Приведем короткое доказательство свойств **А** и **В** рядов Фарея F_n, опирающееся на свойство **а)** близких дробей (такое доказательство приведено в книге [2]).

Доказательство тоже проводится по индукции. Предположим, что для всех строчек $F_1, F_2, \ldots, F_{n-1}$, предшествующих F_n, свойства **А** и **В** доказаны. Пусть некоторая дробь m/n (со знаменателем n) заключена между соседними дробями p/q и r/s из F_{n-1}, $p/q<r/s$ (значит, $qr-ps=1$).

Тогда

$$\frac{m}{n}-\frac{p}{q}\geqslant\frac{1}{qn}$$

и (3)

$$\frac{r}{s}-\frac{m}{n}\geqslant\frac{1}{sn}.$$

Сложив эти неравенства, получим

$$\frac{r}{s}-\frac{p}{q}\geqslant\frac{q+s}{nqs};$$

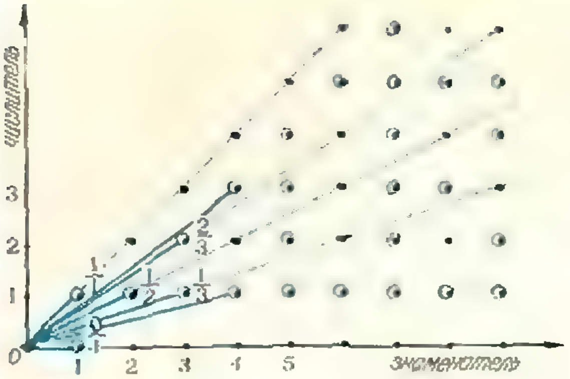


Рис. 1.

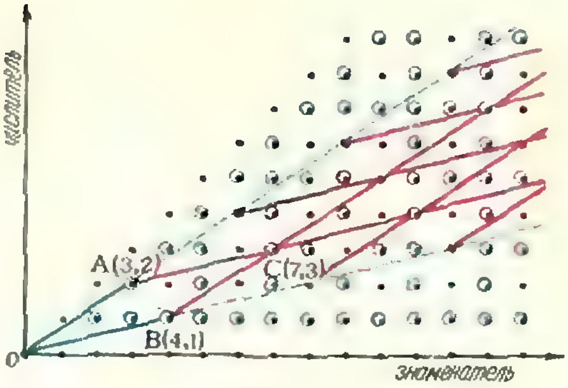


Рис. 2.

$$\frac{q+s}{n} \leqslant qr - ps = 1;$$

$$q + s \leqslant n.$$

Строгое неравенство $q+s<n$ выполняться не может: в этом случае дробь $(p+r)/(q+s)$ встречалась бы между p/q и r/s уже в F_{n-1} (даже в F_{q+s}).

Следовательно,

$$n = q+s, \tag{4}$$

и поэтому неравенства (3) также должны быть равенствами, откуда

$$mq-np = 1,\ nr-ms = 1. \tag{5}$$

Из (4) и (5) следует, что $m = p+r$.

Итак, мы доказали, что m/n — медианта дробей p/q и r/s и близка к каждой из них. (По существу, мы здесь доказали свойство е) близких дробей.) Значит, свойства **А** и **В** верны и для F_n.

Упражнение 10. *Докажите, что:*
а) если дроби m/n и p/q, где $q<n$ — близки, то они — соседние дроби в F_n;
б) любая дробь, близкая к m/n, равна одной из дробей $(m+kr)/(n+ks)$, либо $(m+kp)/(n+kq)$, где $k = 0, 1, 2, \ldots$, а p/q и r/s — соседи m/n в F_n.

Упражнение 11. Пусть в последовательности дробей $\frac{0}{1} \leqslant \xi_1 \leqslant \ldots \leqslant \xi_N \leqslant \frac{1}{1}$ каждые две соседние дроби близки друг к другу. Докажите, что эту последовательность можно получить *процедурой, описанной в упражнении 8*.

Геометрическая интерпретация, к которой мы переходим, значительно прояснит простые причины закономерностей **А** и **В**, а заодно подскажет идею еще одного доказательства.

6. Решетки и параллелограммы

Возьмем лист клетчатой бумаги и введем на нем систему координат. Две перпендикулярные линии сетки примем за оси координат, а сторону клетки — за единицу масштаба.

Поставим в соответствие каждой дроби m/n $(0\leqslant m/n\leqslant 1,\ n>0)$ точку с координатами (n, m). (На рисунке 1 — это черные точки.) Вместо «точка» мы иногда будем говорить «дробь».

Несократимые дроби на рисунке 1 обведены голубыми кружками, а те из них, знаменатели которых не больше 4, соединены голубыми отрезками с началом координат O.

Сформулируем несколько свойств дробей на геометрическом языке. Пусть p/q и r/s — две дроби, $A\ (q,\ p)$ и $B\ (s,\ r)$ — соответствующие им точки.

а) $p/q = r/s$ в том и только том случае, если точки A и B лежат на одном луче с началом O. Ближайший к O узел на этом луче соответствует несократимой дроби.

Дальше мы считаем, что $p/q \neq r/s$.

б) $p/q > r/s$, если луч OA составляет больший угол с горизонтальной осью координат, чем луч OB.

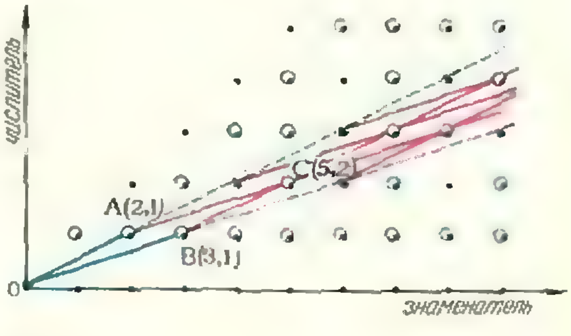


Рис. 3.

в) Дробь $(p+r)/(q+s)$ соответствует четвертой вершине $C(p+r,\ q+s)$ параллелограмма $OACB$ (рис. 2). Для тех, кто знаком с векторами, запишем это так: $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$. (Мы видим, что созвучность терминов «медианта» и «медиана» не случайна: отрезок OC идет как раз по медиане треугольника OAB.)

г) $|qr-ps|$ равно удвоенной площади ΔAOB, то есть площади параллелограмма $OACB$.

д*) Внутри и на сторонах этого параллелограмма $OACB$ в том и только в том случае нет узлов (за исключением вершин), когда $|qr-ps|=1$.

е*) В этом случае точка C — ближайший к O узел сетки, лежащей внутри угла AOB.

Упражнение 12. Докажите свойства а)—г).

Ключ к объяснению закономерности ряда Фарея — свойства д) и е*).

Посмотрим внимательно на рисунки 2 и 3. На них внутренность угла AOB разрезана прямыми на параллелограммы, конгруэнтные параллелограмму $OACB$. Все их вершины лежат в узлах клетчатой бумаги. Но на рисунке 2 (где площадь $OACB$ больше 1) многие узлы внутри угла AOB не являются вершинами этих параллелограммов. А на рисунке 3 (здесь площадь $OACB$ равна 1) любой узел внутри угла AOB — вершина такого параллелограмма, т. е. для любого такого узла $M(n,\ m)$ найдутся натуральные числа x и y, для которых

$$\overrightarrow{OM}=x\cdot\overrightarrow{OA}+y\cdot\overrightarrow{OB}. \qquad (6)$$

Векторное равенство (6) эквивалентно системе уравнений

$$\begin{cases} px+ry=m, \\ qx+sy=n. \end{cases} \qquad (7)$$

Упражнение 13. а) Докажите, что если $|qr-ps|=1$, где p, q, r, s — целые числа, то система (7) при любых целых m и n имеет решения в целых числах x и y.

б*) Сформулируйте и докажите обратную теорему.

в) Выведите из а), что для двух близких дробей $p/q<r/s$ любую дробь m/n, где $p/q<m/n<r/s$, можно представить в виде $\dfrac{px+ry}{qx+sy}$, где x и y — натуральные числа.

г) Докажите свойства е* из пунктов 2 и 5 и выведите отсюда закономерности **А** и **В** рядов Фарея.

Заключение

Мы наметили несколько путей построения небольшой, но красивой теории рядов Фарея.

Эту теорию можно строить в самом начале изучения целых чисел, не опираясь на основную теорему арифметики (о единственности разложения на простые множители). Сама эта теорема может быть выведена из свойств рядов Фарея. Из этих свойств легко получить также решения в целых числах уравнения $ax-by=1$, где a и b взаимно просты: достаточно рассмотреть дробь $\frac{a}{b}$ и взять любую из соседних с ней дробей в ряду Фарея.

Ряды Фарея, а также изображение дробей на решетке полезны и в более тонких вопросах приближения вещественных чисел дробями с небольшими знаменателями.

Литература

1. Н. Б. Васильев. Решение задачи М233. «Квант», 1974, № 7, с. 39.

2. И. М. Виноградов. Основы теории чисел. М., «Наука», 1965.

3. К. Чандрасекхаран. Введение в аналитическую теорию чисел. М., «Мир», 1974.

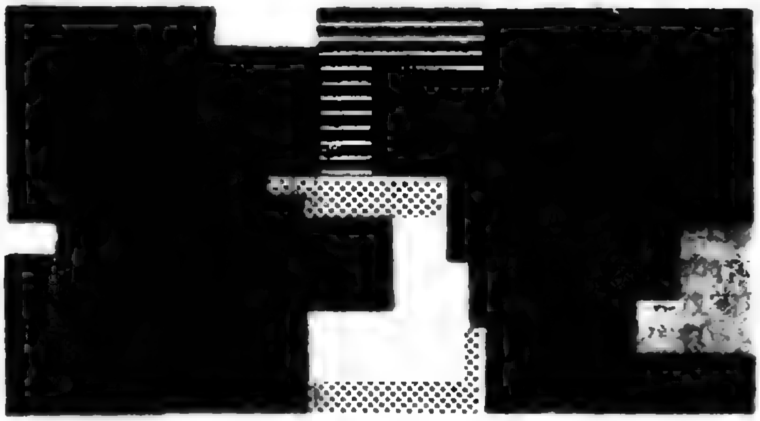
4. Д. Б. Фукс, М. Б. Фукс. «О наилучших приближениях». «Квант», 1971, №№ 6 и 11.

---

*) Их можно доказать, опираясь на свойства решеток на плоскости (см. статьи А. А. Егорова и Н. Б. Васильева, «Квант», 1974, № 12.

И. М. Яглом

О задаче Радо



В «Кванте» № 5 за 1975 год в разделе «Задачник «Кванта» была опубликована задача М321 (автор А. В. Бравлов). Напомним ее условие.

Имеется прямоугольный стол площади 1. Докажите, что для любого $\varepsilon>0$ можно указать систему прямоугольных салфеток, покрывающих этот стол (края салфеток параллельны краям стола), такую, что любая ее подсистема, состоящая из неперекрывающихся салфеток, имеет площадь меньшую ε.

В этой заметке рассказывается о различных вариантах задачи о «системах неперекрывающихся салфеток». Некоторые из них имеют целую историю, другие — довольно просты и решаются с помощью одной идеи, как обычные «олимпиадные» задачи.

По-видимому, гипотетический (и имеющий отношение только к математике, а не к биологии) пример живых существ, для которых внешний мир — двумерная плоскость, а не трехмерное пространство, принадлежит знаменитому немецкому естествоиспытателю и математику Г. Гельмгольцу: это водомерки — «водяные пауки», скользящие движения которых по поверхности воды можно увидеть в любом застоявшемся водоеме. «Водомерки» Гельмгольца так же не в состоянии вообразить привычный нам «трехмерный» мир, как человек не может представить себе «четырехмерное пространство»*).

Мы начнем с еще более примитивного, чем у водомерок, внешнего мира: с одномерного аналога задачи М321. Даже в таком «облегченном» варианте она отнюдь не становится бессодержательной.

Покрытия отрезка

Сейчас у нас и «столы», и «салфетки» — не прямоугольники, а отрезки прямой. Нас интересует такое

Утверждение. Пусть заданы отрезок o длины 1 («стол») и число $\varepsilon>0$. Тогда можно указать систему отрезков («салфеток»), покрывающих «стол» o, такую, что любая подсистема непересекающихся отрезков (неперекрывающихся «салфеток») имеет общую длину, меньшую ε*).

Верно это Утверждение или нет?

Испытаем сначала самые простые системы «салфеток».

На рисунке 1, а «стол» покрыт тремя «салфетками» длины $^1/_3$. Из них

---

*) Воображаемым «живым существам», имеющим форму плоских геометрических фигур и населяющим двумерный мир, посвящена книга английского школьного учителя Э. Э. Эббота «Флетленд», изданная еще в 80-х годах прошлого века и, к сожалению, ни разу не переводившаяся на русский язык. Сюжет повести Ч. Г. Хинтона «Эпизод во Флетленде» (1907 г.), продолжающей ту же тему, кратко изложен в «Кванте», 1970, № 4, с. 28—31.

*) Условимся для точности считать перекрывающимися любые две «салфетки», имеющие хотя бы одну общую точку.

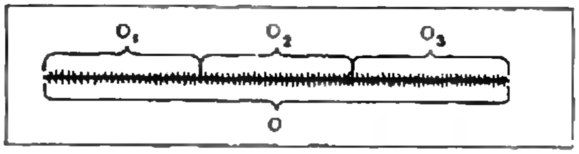


Рис. 1, а

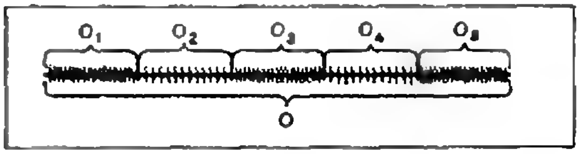


Рис. 1, б.

можно выбрать подсистему из двух неперекрывающихся «салфеток» с общей длиной $^2/_3$. (Можно, конечно, выбрать подсистему из одной «салфетки», но длина такой подсистемы меньше.) Итак, если $\varepsilon > {}^2/_3$, то наше утверждение верно: мы указали систему отрезков такую, что любая ее подсистема, состоящая из непересекающихся отрезков, имеет общую длину, не большую $^2/_3$, т. е. меньшую ε.

Упражнение 1. Докажите, что для $\varepsilon > {}^1/_2$ Утверждение тоже верно. (Постройте соответствующее покрытие отрезка-«стола» o меньшими отрезками-«салфетками».)

Ясно, что каждый пример системы отрезков K гарантирует справедливость нашего утверждения лишь при $\varepsilon > d_k$, где d_k — некоторое положительное число, зависящее от этой системы K. Так, для примера на рисунке 1,а $d_k = {}^2/_3$; на рисунке 1,б $d_k = {}^3/_5$. А вообще d_k — это наибольшая длина подсистемы $K' \subset K$, состоящей из непересекающихся отрезков. Ясно, что чем меньше ε, тем труднее строить пример. Может случиться так, что при ε, бóльших какого-то ε_0, наше Утверждение верно, а при меньших ε — уже нет. Докажем, что для одномерного варианта нашей задачи дело обстоит именно так.

При $\varepsilon = 1/3$ Утверждение неверно.

Другими словами, *никакая система «салфеток» не может послужить требуемым примером для $\varepsilon = {}^1/_3$, т. е. любая система «салфеток» содержит подсистему неперекрывающихся «салфеток», покрывающих часть «стола» o длины* $^1/_3$ (или больше $^1/_3$).

Пусть дана какая-то система отрезков K, покрывающих отрезок o длины 1. Выберем из K наибольший отрезок, обозначим его i_1. Выбросим теперь из системы K все отрезки покрытия, пересекающиеся с отобранным отрезком i_1 (они покрывают отрезок длины не больше $3|i_1|$, где $|i|$ — длина отрезка i). Из оставшихся отрезков покрытия снова выберем наибольший (обозначим его i_2) и выбросим все те отрезки, которые пересекаются с i_2 (они покрывают отрезок длины не больше $3|i_2|$), и так далее, пока не исчерпаем всех отрезков покрытия. Выбранная подсистема непересекающихся отрезков $i_1, i_2, \ldots$ такова, что

$$3|i_1| + 3|i_2| + \ldots \geqslant 1,$$

поскольку отрезки длины $3|i_1|$, $3|i_2|, \ldots$ в совокупности покрывают всю данную систему K и, стало быть, весь отрезок o длины 1. Поэтому сумма длин $|i_1| + |i_2| + \ldots$ не меньше $^1/_3$.

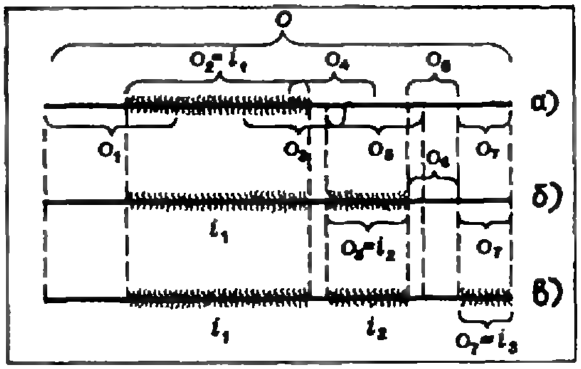


Рис. 2.

На рисунке 2 показан процесс выбора такой подсистемы $\{i_1, i_2, i_3\}$ для системы из семи отрезков.

Упражнение 2. а) Докажите, что из любой системы «салфеток», покрывающих «стол», можно выбрать подсистему «салфеток», которая тоже покрывает «стол», и такую, что никакая точка «стола» не покрыта более чем двумя «салфетками».

б) Докажите, что и при ε $^1/_2$ Утверждение неверно.

Упражнение 3. Докажите, что если «стол» — по-прежнему отрезок длины 1, а «салфетки» могут быть и «дырявыми», т. е. каждая «салфетка» может состоять из одного или нескольких отрезков, то Утверждение, сформулированное в начале этого пункта, верно при всех $\varepsilon > 0$.

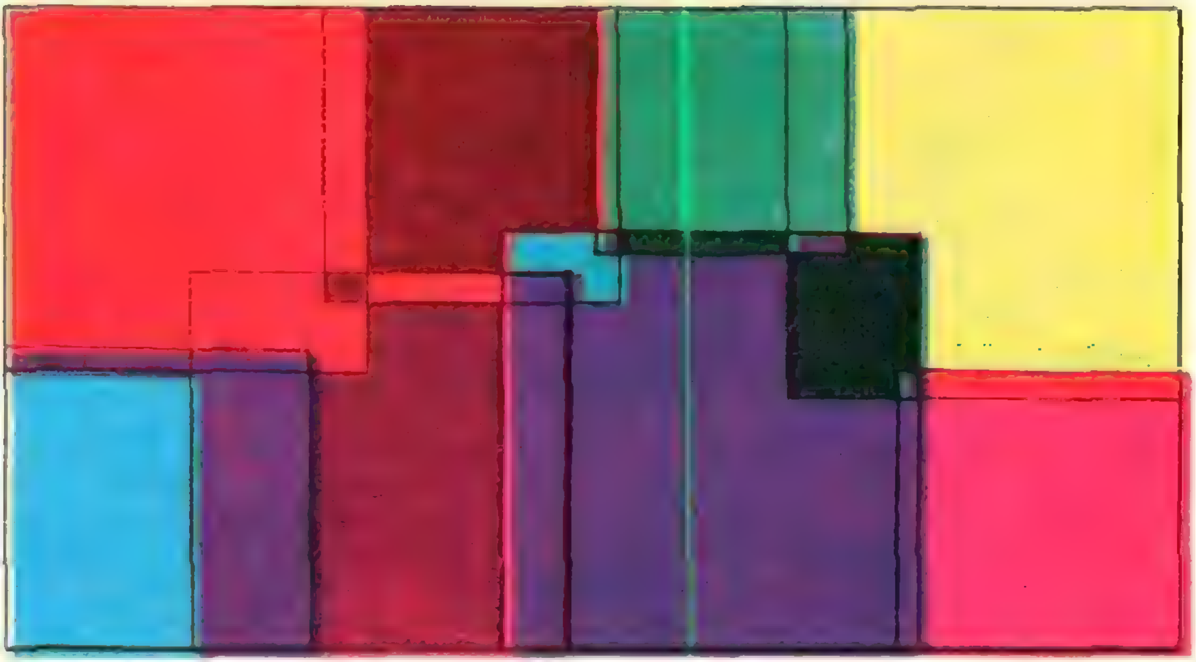


Рис. 3.

Решив упражнения 1 и 2, вы докажете следующий факт:

Теорема 1. *Пусть «стол» и «салфетки» — отрезки, длина «стола» равна 1.*

а) Из любой системы «салфеток», покрывающих «стол», можно выделить подсистему неперекрывающихся «салфеток» общей длины не меньше $^1/_2$.

б) Если $\varepsilon > {}^1/_2$, то всегда можно указать систему «салфеток» такую, что любая ее подсистема неперекрывающихся «салфеток» имеет длину меньше ε.

Другими словами, *Утверждение верно при $\varepsilon > {}^1/_2$ и неверно при $\varepsilon \leqslant {}^1/_2$.*

Упражнение 4. Докажите аналогичную теорему для «стола» — окружности длины 1, и «салфеток» — дуг этой окружности.

Квадратные салфетки

В 1928 году известный венгерский математик Тибор Радо (T. Radò) сообщил в письме редактору ведущего польского математического журнала Fundamenta Mathematicae, главе польской математической школы Вацлаву Серпинскому, что не может решить, по-видимому, несложную геометрическую задачу, связанную с теорией функций нескольких переменных. Изложив известные нам соображения и результаты о покрытиях отрезка отрезками, Т. Радо ставит вопрос о получении аналогичных оценок для «двумерной» задачи, в которой «салфетки» — *квадраты* (разных размеров), а «стол» — скажем, *квадрат* (или *прямоугольник*) площади 1, причем края салфеток параллельны краям стола (рис. 3).

Итак, разница между задачей Радо и задачей М321 (Браилова) только в форме «салфеток»: в М321 они могут быть любыми прямоугольниками, а у Радо — только квадратами. Но это «маленькое» различие, как нередко бывает, полностью меняет дело.

Метод, которым мы из системы отрезков, покрывающих отрезок длины 1, выделили подсистему длины не меньше $^1/_3$, работает и в двумерном случае. С его помощью Т. Радо доказал такой факт.

Теорема 2. *Из любого покрытия плоского «стола» площади 1 квадратными «салфетками» можно выбрать покрытие непере-*

крывающимися «салфетками», сумма площадей которых не меньше $^1/_9$.

Упражнение 5. а) Докажите теорему 2.

б) Придумайте пример, показывающий, что в формулировке теоремы 2 нельзя число $^1/_9$ заменить на число $^1/_4$.

Таким образом, в задаче Радо (в отличие от задачи Браилова) тоже существует какое-то критическое значение ε_0 такое, что

при $\varepsilon > \varepsilon_0$ верно

Утверждение 1. Можно указать пример системы «салфеток» такой, что любая подсистема неперекрывающихся «салфеток» имеет общую площадь меньше ε,

а для $\varepsilon < \varepsilon_0$ верно

Утверждение 2. Из любой системы «салфеток» можно выбрать подсистему из неперекрывающихся «салфеток» с общей площадью не меньше ε.

Разумеется, площадь «стола» мы все время считаем равной 1.

Т. Радо сумел доказать, что для критического значения ε_0 верны оценки

$$\frac{1}{9} \leqslant \varepsilon_0 \leqslant \frac{1}{4}, \qquad (1)$$

но был уверен, что на самом-то деле $\varepsilon_0 = {}^1/_4$.

Доказать это равенство он и предлагал в письме Вацлаву Серпинскому.

Однако сделать это не удалось ни Серпинскому, ни другим математикам, хотя за задачу Радо принимались многие. И лишь 55 лет спустя, в 1973 году, стало ясно, почему. Оказывается, гипотеза Т. Радо просто неверна! В «Бюллетене польской Академии наук» появилась сенсационная заметка венгерского математика М. Айтаи (M. Ajtai), в которой довольно просто показывалось, что квадратами всего двух различных размеров можно так покрыть прямоугольник площади 1, что из них нельзя выбрать непересекающуюся подсистему площади $^1/_4$ или больше. Сейчас известно, что

$$\frac{1}{8{,}6} < \varepsilon_0 < \frac{1}{4}; \qquad (2)$$

левое неравенство явилось результатом последовательных уточнений неравенства (1) Т. Радо, последнее из которых принадлежит ленинградскому геометру В. А. Залгаллеру*) (по-видимому, оно также не является окончательным, будучи гораздо ближе к «грубому» результату теоремы 2, чем к гипотетической оценке Т. Радо).

Наиболее красиво и просто решается частный случай задачи Радо, — когда все «салфетки» — квадраты одного размера. В этом случае критическое значение ε_0 оказывается действительно равным $^1/_4$. Этот результат доказал еще в 1940 году молодой ленинградский математик А. С. Соколин (и позже, независимо от него, многие другие, причем несколькими различными путями).

Теорема Блихфельда и результат Соколина

Докажем сначала такую приятную теорему, одному из вариантов которой была посвящена вторая страница обложки «Кванта», 1973, № 10.

Теорема Блихфельда. *Если площадь фигуры, расположенной на листе клетчатой бумаги, больше* $n-1$ (*где* n — *целое*; *сторона клетки принимается за* 1), *то эту фигуру можно параллельным переносом сдвинуть в такое положение, что она покроет по крайней мере* n *узлов сетки.* (*Узлами называют точки, где пересекаются линии, разбивающие плоскость на квадратные клетки.*)

Доказательство. Разрежем лист клетчатой бумаги на отдельные клетки и соберем вместе, в стопку, все те клетки, на которых помещается хотя бы часть фигуры (от рисунка 4, а перейдем к рисунку 4, б). Поскольку сумма площадей кусков нашей фигуры больше $n-1$, то некоторые точки в стопке будут покрыты по крайней мере n кусками

---

*) В. А. Залгаллер, Замечания о задаче Радо, сборник «Математическое просвещение» (новая серия), вып. 5, М., Физматгиз, 1960, с. 141—148.

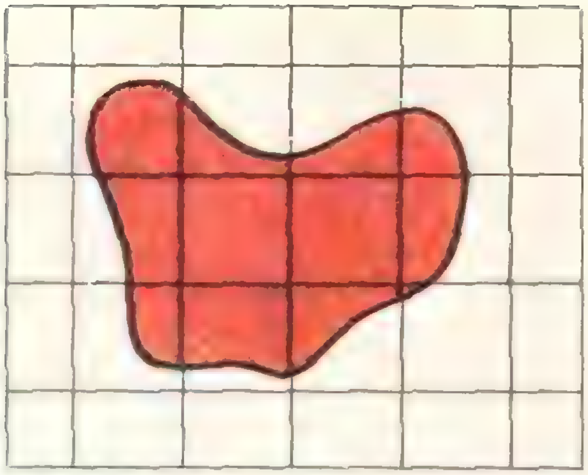


Рис. 4, а.

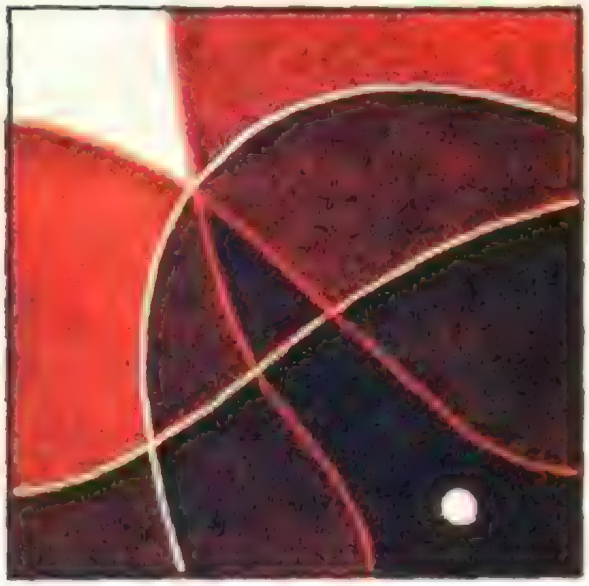


Рис. 4, б.

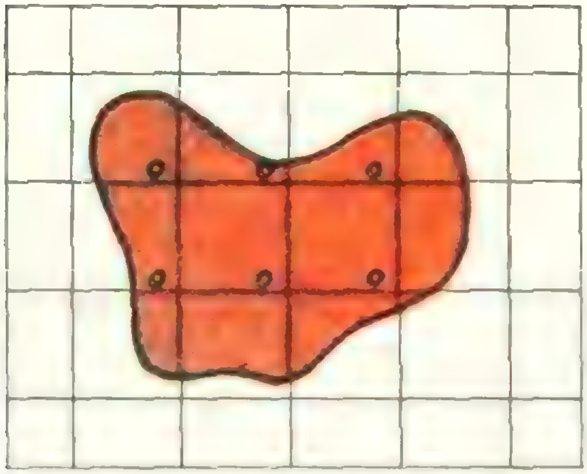


Рис. 4, в.

фигуры. Проткнем иглой одну из этих точек; на каждом куске останется след от прокола. Если мы теперь расположим клетки, собранные в стопку, на плоскости в прежнем порядке (разумеется, мы считаем, что клетки совмещались параллельным переносом), то проколы будут располагаться «правильным образом» — в вершинах новой сетки квадратов со стороной 1 (рис. 4, в). Остается параллельно перенести фигуру так, чтобы эти проколы совместились с узлами (рис. 4, г).

Упражнение 6. Докажите, что если площадь фигуры меньше $n+1$, то ее можно перенести так, чтобы она задевала не больше n узлов сетки (n — целое число).

С помощью теоремы Блихфельда получается нужный нам результат.

Теорема 3. *Если система конгруэнтных квадратов с взаимно параллельными сторонами покрывает фигуру площади S, то из нее можно выбрать подсистему непересекающихся (не имеющих общих внутренних точек) между собой квадратов, сумма площадей которых не меньше $S/4$.*

Какую именно фигуру покрывают квадраты, здесь, как, впрочем, и в задаче Радо, не имеет значения. Важна только ее площадь.

Доказательство. Мы нарочно сформулировали теорему несколько иначе, чем предыдущие (площадь «стола» теперь S, а не 1), чтобы иметь возможность выбрать другую единицу длины. Будем считать, что длина стороны каждой «салфетки» равна $^1/_2$. По теореме Блихфельда можно расположить нашу фигуру (площади S) на клетчатой бумаге (со стороной клетки 1) так, чтобы она покрывала $n \geqslant S$ узлов сетки. Оставим по одной «салфетке», покрывающей каждый из этих n узлов. Ясно, что выбранные «салфетки», не могут налегать друг на друга, а их общая площадь равна

$$\frac{1}{4}n \geqslant \frac{S}{4}.$$

Теорема Соколина доказана.

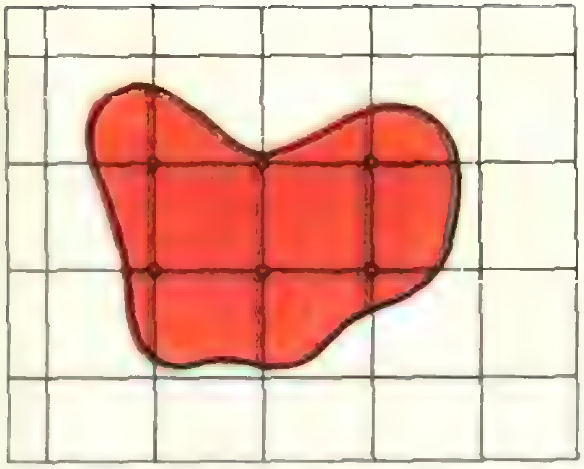


Рис. 4, г.

Варианты задачи Радо

Больше всего усилий на задачу Т. Радо затратил другой известный венгерский математик — Р. Радо. В 1950, 1951, 1968 гг. он опубликовал в английских журналах три обширные статьи: «Несколько теорем о покрытиях», I—III, целиком навеянные задачей Т. Радо (так что у нас было основание назвать статью «О задаче Радо», не указывая инициала). Перечислим только некоторые результаты и нерешенные вопросы, связанные с этой задачей.

Для задачи о треугольном «столе» T и подобных ему (с соответственно параллельными сторонами) треугольных «салфетках» удалось получить некоторые оценки для ε_0; в частности, для покрытия T конгруэнтными (и параллельно расположенными) треугольниками (аналог результата Соколина) можно указать критическое значение ε_0 точно: $\varepsilon_0 = \frac{1}{6}$. (Разумеется, в этой задаче всегда можно говорить о «столе», имеющем форму правильного треугольника.)

Получены также некоторые оценки для круглых «салфеток» (одинаковых и разных размеров), и для других типов подобных друг другу «салфеток».

Упражнение 7. Докажите, что если все «салфетки» подобны данной фигуре Φ (которую они покрывают), то существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что из любого покрытия «стола» площади 1 можно выделить подсистему неперекрывающихся «салфеток» с общей площадью не меньше ε_0 (ε_0, конечно, зависит от формы Φ).

Таким образом, здесь критическое значение ε_0 всегда положительно, — в отличие от задачи Браилова, в которой $\varepsilon_0 = 0$ (там «салфетки» — прямоугольники, не обязательно подобные друг другу!).

Рассматривались и другие обобщения задачи Радо, например: какую наибольшую суммарную площадь может иметь общая площадь двух подсистем, в каждой из которых «салфетки» не налегают друг на друга; каковы оценки для пространственных аналогов задачи Радо — но во всех этих направлениях получены лишь частичные результаты и довольно грубые оценки.

Упражнение 8. а) Докажите для пространственного аналога задачи Радо (о покрытии куба кубами) неравенства

$$\frac{1}{27} < \varepsilon_0 \leq \frac{1}{8}. \qquad (3)$$

б) Сформулируйте и докажите для этого случая аналог теоремы 3.

Ряд задач, близких к задаче Радо (в том числе и предложенных выше в качестве упражнений), вместе с их решениями, вы можете найти в последних выпусках серии «Библиотека математического кружка» и «Библиотечка физико-математической школы»: О. Д. Шклярский и др., «Геометрические оценки и задачи из комбинаторной геометрии», М., «Наука», 1974, цикл задач 3;

Н. Б. Васильев и др., «Математические соревнования; геометрия», М., «Наука», 1974, задачи 7.6—7.9.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

А. Г. Резников

Две последовательности треугольников

Рассмотрим произвольный треугольник ABC. Через $A_1B_1C_1$ обозначим треугольник, вершинами которого являются точки касания вписанной в ABC окружности с его сторонами (рис. 1). Аналогично, для треугольника $A_1B_1C_1$ определим треугольник $A_2B_2C_2$ и т. д. Таким образом, получим последовательность вписанных друг в друга треугольников

$$ABC,\ A_1B_1C_1,\ A_2B_2C_2,\ \ldots \qquad (1)$$

Другую последовательность треугольников определим следующим образом: через $A^{(1)}B^{(1)}C^{(1)}$ обозначим треугольник, вершинами которого являются точки пересечения биссектрис треугольника ABC с описанной окружностью. Аналогично для треугольника $A^{(1)}B^{(1)}C^{(1)}$ определим треугольник $A^{(2)}B^{(2)}C^{(2)}$ и т. д. Таким образом, получим последовательность треугольников

$$ABC,\quad A^{(1)}B^{(1)}C^{(1)},\quad A^{(2)}B^{(2)}C^{(2)},\ldots \qquad (2)$$

В этой заметке мы изучим некоторые свойства последовательностей (1) и (2). Многие наши утверждения мы не доказываем. Надеемся, что вы сделаете это самостоятельно.

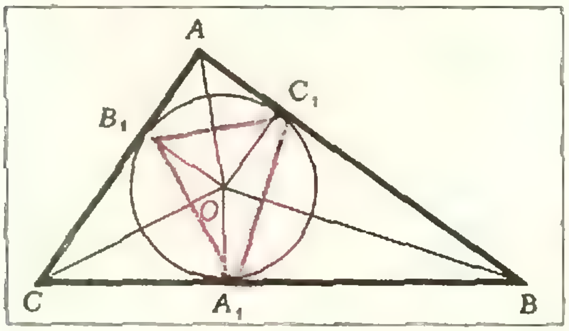


Рис. 1.

1. Легко выразить углы треугольника $A_1B_1C_1$ через углы исходного треугольника. Например, $\hat{A}_1 = 90 - \frac{1}{2}\hat{A}$. Аналогично, $\hat{A}_2 = 90 - \frac{1}{2}\hat{A}_1$ и вообще $\hat{A}_n = 90 - \frac{1}{2}\hat{A}_{n-1}$.

Иными словами, последовательность углов $A, A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$, образует арифметико-геометрическую прогрессию. О таких прогрессиях рассказано в статье Я. Н. Суконника в «Кванте» № 1 за этот год. Используя результат этой статьи, получим следующее выражение:

$$\hat{A}_n = 60 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n (\hat{A} - 60). \qquad (3)$$

Углы треугольника $A^{(1)}B^{(1)}C^{(1)}$ равны соответствующим углам треугольника $A_1B_1C_1$ (проверьте!). Значит, последовательности (1) и (2) — последовательности подобных треугольников.

Из формулы (3) следует, что если $\hat{A} \neq 60$, то и все $\hat{A}_n \neq 60$, а $\lim\limits_{n\to\infty} \hat{A}_n = 60$. Аналогично $\lim \hat{B}_n = 60$, $\lim \hat{C}_n = 60$ и то же самое верно для углов $\hat{A}^{(n)}$, $\hat{B}^{(n)}$, $\hat{C}^{(n)}$.

2. Пусть p_n, S_n R_n, r_n соответственно полупериметр, площадь, радиусы описанной и вписанной окружностей для треугольника $A_nB_nC_n$. Аналогично определяются величины $p^{(n)}$, $S^{(n)}$, $R^{(n)}$, $r^{(n)}$ для треугольника

$A^{(n)}B^{(n)}C^{(n)}$ и p_0, S_0, R_0, r_0 для исходного треугольника ABC. Очевидно, что $R^{(n)}=R_0$, $R_n=r_{n-1}$.

Докажем, что

$$S_n=\frac{1}{2}\frac{R_n}{R_{n-1}}S_{n-1}. \qquad (4)$$

Достаточно доказать, что

$$S_1=\frac{1}{2}\cdot\frac{r_0}{R_0}S_0. \qquad (4')$$

Доказательство. Легко видеть (см. рис. 1), что

$$S_{A_1OB_1}=\frac{1}{2}r_0^2\sin\widehat{B_1OA_1}=\frac{1}{2}r_0^2\sin\hat{C},$$

$$S_{B_1OC_1}=\frac{1}{2}r_0^2\sin\hat{A},$$

$$S_{C_1OA_1}=\frac{1}{2}r_0^2\sin\hat{B}.$$

Поэтому $S_1=\frac{1}{2}r_0^2(\sin\hat{A}+\sin\hat{B}+\sin\hat{C})$. Но по теореме синусов $AB=2R_0\sin\hat{C}$, $BC=2R_0\sin\hat{A}$, $CA=2R_0\sin\hat{B}$. Следовательно, $\sin\hat{A}+\sin\hat{B}+\sin\hat{C}=p_0/R_0$. Таким образом,

$$S_1=\frac{1}{2}r_0^2\cdot\frac{p_0}{R_0}=\frac{1}{2}\cdot\frac{r_0}{R_0}r_0p_0=\frac{1}{2}\frac{r_0}{R_0}S_0.$$

3. Докажем, что последовательность $S_0, S^{(1)}, S^{(2)},\dots, S^{(n)}$ является возрастающей.

Так как

$$S_0=2R_0^2\sin\hat{A}\sin\hat{B}\sin\hat{C},$$

$$S^{(1)}=2R_0^2\cos\frac{\hat{A}}{2}\cos\frac{\hat{B}}{2}\cos\frac{\hat{C}}{2}\,{}^{*)},$$

то неравенство $S^{(1)}\geqslant S_0$ эквивалентно неравенству

$$\sin\frac{\hat{A}}{2}\sin\frac{\hat{B}}{2}\sin\frac{\hat{C}}{2}\leqslant\frac{1}{8}. \qquad (5)$$

Докажем неравенство (5). Используя то, что

$$\hat{C}=180^\circ-(\hat{A}+\hat{B}),$$

преобразуем (5) так:

$$\cos\hat{A}+\cos\hat{B}-\cos(\hat{A}+\hat{B})\leqslant\frac{3}{2}$$

или

$$2\cos\frac{\hat{A}+\hat{B}}{2}\cos\frac{\hat{A}-\hat{B}}{2}-2\cos^2\frac{\hat{A}+\hat{B}}{2}-\frac{1}{2}\leqslant 0,$$

$$-2\left(\cos\frac{\hat{A}+\hat{B}}{2}-\frac{1}{2}\cos\frac{\hat{A}-\hat{B}}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\left(1-\cos^2\frac{\hat{A}-\hat{B}}{2}\right)\leqslant 0. \qquad (5')$$

Последнее неравенство очевидно. Из (5′) следует, что равенство в (5) имеет место только в том случае, когда все углы треугольника равны 60°. Так как треугольники $A_1B_1C_1$ и $A^{(1)}B^{(1)}C^{(1)}$ подобны и коэффициент подобия равен $\frac{R_0}{r_0}$, то

$$S^{(1)}=\frac{1}{2}\frac{R_0}{r_0}S_0 \qquad (6)$$

(см. формулу 4′). Но поскольку $S^{(1)}\geqslant S_0$, отсюда следует известное неравенство $R_0\geqslant 2r_0$.

Из того, что последовательность S_0, $S^{(1)}$, $S^{(2)}$ . . . является возрастающей и ограниченной, следует, что она имеет предел. Как было показано, углы треугольников $A^{(n)}B^{(n)}C^{(n)}$ стремятся к 60°. Следовательно, пределом последовательности $S^{(n)}$ является площадь правильного треугольника, вписанного в окружность с радиусом R_0, а площадь произвольного треугольника, вписанного в данную окружность, не превосходит площади этого правильного треугольника.

4. Можно доказать, что для последовательности полупериметров p_0, p_1, p_2, . . . справедливо неравенство

$$p_n\leqslant\frac{1}{2}p_{n-1}. \qquad (7)$$

Как и раньше, достаточно доказать (7) при $n=1$:

$$p_1\leqslant\frac{1}{2}p_0. \qquad (7')$$

---

*) Докажите эти равенства самостоятельно.

Один из возможных путей доказательства неравенства (7′) состоит в следующем: сначала нужно доказать, что

$$p_1 \leqslant \frac{3}{2} r_0 \sqrt{3}, \qquad (8)$$

т. е., что среди всех треугольников, *вписанных* в данную окружность, наибольший периметр имеет правильный.

Затем — неравенство

$$p_0 \geqslant 3 r_0 \sqrt{3}. \qquad (9)$$

Это означает, что из всех треугольников, *описанных* около данной окружности, наименьший периметр имеет правильный.

Неравенство (7′) следует из (8) и (9). Постарайтесь доказать их самостоятельно.

Упражнения

1. Для каких треугольников ABC при некотором n:

а) $\triangle A_nB_nC_n \sim \triangle ABC$?

б) $\triangle A_nB_nC_n$ равнобедреный?

2. Докажите, что $\triangle A_1B_1C_1$ и $\triangle A^{(1)}B^{(1)}C^{(1)}$ гомотетичны.

3. Докажите, что

$$|A_1B_1| \cdot |B_1C_1| \cdot |C_1A_1| \leqslant \frac{1}{8} |AB| \cdot |BC| \cdot |CA|.$$

4. Как было сказано, $p_1/p_0 \leqslant \frac{1}{2}$. Оцените p_1/p_0 снизу: найдите такое число c, что $p_1/p_0 \geqslant c$.

5. Докажите, что

$$\frac{|A_1B_1|^2 + |B_1C_1|^2 + |C_1A_1|^2}{|AB|^2 + |BC|^2 + |CA|^2} \leqslant \frac{1}{4}.$$

6. Докажите, что наибольшая сторона треугольника $A_1B_1C_1$ не превосходит половины наибольшей стороны треугольника ABC. Можно ли то же самое сказать про наименьшие стороны этих треугольников? Про средние по величине стороны этих треугольников?

Задачи наших читателей

1. Дан треугольник ABC. Внутри треугольника взята точка M и соединена с вершинами A и C; K и L — точки пересечения соответственно MC с AB и AM с BC.

Найти множество точек M, таких, что $S_{\triangle AKM} = S_{\triangle CML}$.

Р. Л. Мкртчян

2. Решить уравнение $n! = n(n+1)(n+2)(n+3)$.

П. В. Парамонов

3. Произведение шести последовательных натуральных чисел может быть равно произведению трех последовательных натуральных чисел. Например, $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 8 \cdot 9 \cdot 10 = 720$. Есть ли еще такие числа?

В. А. Панарин

4. Найти все группы из 10 натуральных чисел, сумма которых равна их произведению.

Е. Мазур

5. В равнобедренном треугольнике ABC ($|AB| = |BC|$) через точку A и середину M высоты BH проведена прямая, пересекающая BC в точке N. Во сколько раз отрезок MN меньше отрезка AM?

В. Ф. Акулич, И. Ф. Акулич

6. В игру «морской бой» обычно играют на клетчатом поле размером 10×10. «Линкором» в этой игре называют «корабль», занимающий часть игрового поля размером 1×4.

Найти минимальное количество выстрелов, которое необходимо произвести по игровому полю, чтобы произвольно расположенный на игровом поле «линкор» был поражен хотя бы одним выстрелом.

В. Г. Чванов

задачник кванта

Решения задач из этого номера можно посылать не позднее 1 октября 1975 г. по адресу: 117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15, издательство «Наука», журнал «Квант». После адреса на конверте напишите, решения каких задач вы посылаете, например: «Задачник «Кванта», М336, М337» или «...Ф348». Решения задач по каждому из предметов (математике и физике), а также новые задачи просьба присылать в отдельных конвертах. Задачи из разных номеров журнала присылайте также в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки ваших решений). Условия оригинальных задач, предлагаемых для публикации, присылайте в двух экземплярах вместе с вашими решениями этих задач (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»). После формулировки задачи мы обычно указываем, кто предложил нам эту задачу. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Наиболее трудные задачи отмечены звездочкой.

В этом номере «Задачник «Кванта» составлен из задач последней Всесоюзной олимпиады и их обобщений.

Задачи

М 336 — М340; Ф348—Ф352

М336. В плоскости дано конечное множество многоугольников, каждые два из которых имеют общую точку. Докажите, что существует прямая, которая имеет общую точку с каждым из этих многоугольников. (10 кл.)

С. В. Фомин

М337. Дан равносторонний треугольник ABC со стороной длины 1. Первый игрок выбирает точку X на стороне AB, второй — точку Y на стороне BC, затем первый — точку Z на стороне AC.

а) Цель первого игрока — получить треугольник XYZ наибольшей площади, второго — наименьшей площади. Какую наибольшую площадь может обеспечить первый?

б) Цель первого игрока — получить треугольник XYZ наименьшего периметра, второго — наибольшего периметра. Какой наименьший периметр может обеспечить первый? (8—9 кл.)

М. Д. Бронштейн

М338. На доске написано несколько нулей, единиц и двоек. Разрешается стереть две неравные цифры и вместо них написать одну цифру, отличную от стертых (2 вместо 0 и 1, 1 вместо 0 и 2, 0 вместо 1 и 2). Докажите, что если в результате нескольких таких операций на доске останется одна-единственная цифра, то она не зависит от порядка, в котором производились стирания. (8 и 10 кл.)

С. В. Фомин

М339. Дана горизонтальная полоса на плоскости, края которой — параллельные прямые, и n прямых, пересекающих эту полосу. Каждые две из этих n прямых пересекаются внутри полосы и никакие три не проходят через одну точку. Рассмотрим все пути, начинающиеся на нижней кромке полосы, идущие по данным прямым, и заканчивающиеся на верхней кромке, обладающие таким свойством: идя по такому пути, мы все время поднимаемся вверх: дойдя до точки пересечения прямых, мы обязаны перейти на другую прямую. Докажите, что среди таких путей

а) есть путь, состоящий не менее чем из n отрезков;

б) есть путь, проходящий не более чем по $\frac{n}{2}+1$ прямым;

в) есть путь, проходящий по всем n прямым. (8—9 кл.)

А. В. Карзанов

М340*. В каждую клетку прямоугольной таблицы записано вещественное число. Некоторая клетка таблицы называется ее *седловой* клеткой, если стоящее в ней число не меньше остальных чисел в своем столбце и не больше остальных чисел в своей строке.

а) Пусть про таблицу T известно, что любая таблица 2×2, получающаяся в пересечении двух строк и двух столбцов таблицы T, имеет седловую клетку. Докажите, что тогда таблица T также имеет седловую клетку.

б) Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_m, b_1, b_2, \ldots, b_n$ — произвольные числа, $p_1, p_2, \ldots, p_m, q_1, q_2, \ldots, q_n$ — положительные числа. Докажите, что таблица $m\times n$, на пересечении i-й строки и j-го столбца которой стоит число $\frac{a_i+b_j}{p_i+q_j}$, имеет седловую клетку.

Одно из решений задачи б) можно получить, используя а). Подумайте, однако, как можно решить эту задачу другим способом. (10 кл.)

В. П. Гринберг

Ф348. *Космический корабль подходит* к Луне по параболической траектории, почти касающейся поверхности Луны. Чтобы перейти на стелющуюся круговую орбиту (т. е. круговую орбиту, очень близкую к поверхности Луны), в момент наибольшего сближения с Луной включается тормозной двигатель. Определить, насколько изменится скорость корабля при выполнении этого маневра. Ускорение свободного падения на поверхности Луны $g_Л \approx 1{,}7$ *м/с*², радиус Луны $R_Л \approx 1{,}7\cdot 10^6$ *м*.

Дополнительный вопрос. Попробуйте оценить, какую часть первоначальной массы корабля должно составить сожженное горючее, если двигатель выбрасывает продукты сгорания с относительной скоростью $v=4\cdot 10^3$ *м/с*. (10 кл.)

Ф349. Один киломоль идеального одноатомного газа, находящегося при нормальных условиях, переводят из состояния 1 в состояние 2 двумя способами: $1\to 3\to 2$ и $1\to 4\to 2$ (см. рис. 1). Найти отношение количеств теплоты, которые необходимо сообщить газу в этих двух процессах. (9 кл.)

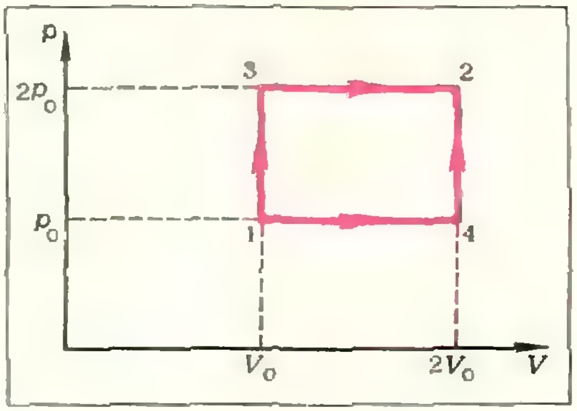


Рис. 1.

Ф350. Найти зависимость падения напряжения на сопротивлении R в схеме, показанной на рисунке 2, от величины этого сопротивления. Э. д. с. всех источников равны $\mathscr{E}$, их внутренние сопротивления r. Диод считать идеальным (его сопротивление в прямом направлении равно нулю, а в обратном — бесконечно велико). (9—10 кл.)

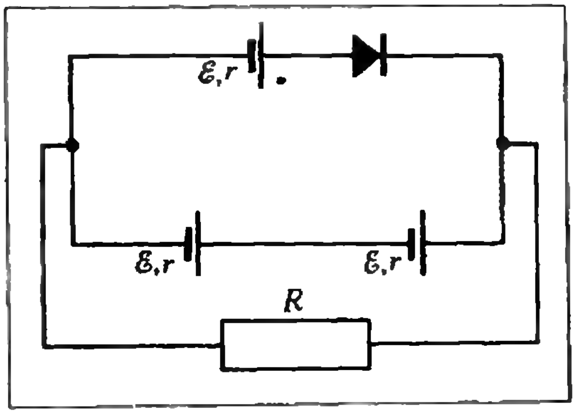


Рис. 2.

кон.

Ф351. При слабом ударе футбольного мяча о стенку он деформируется, как показано на рисунке 3. При этом деформация x мяча много меньше его радиуса, и можно с хорошим приближением считать, что давление p воздуха в мяче в процессе удара не меняется.

Пренебрегая упругостью покрышки, оценить время соударения мяча со стенкой. Провести числовой расчет для случая, когда масса мяча $m=0{,}5$ *кг*, давление в нем $p=2$ *атм* и радиус $R=12{,}5$ *см*. (10 кл.)

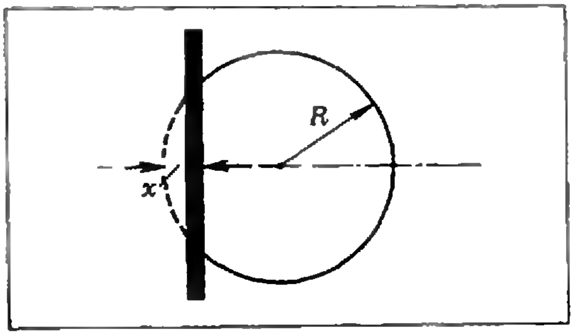


Рис. 3.

Ф352. Для регулирования напряжения на нагрузке собрана схема, показанная на рисунке 4. Сопротивления нагрузки и регулировочного реостата равны R. Нагрузка подключена к половине реостата. Напряжение $U_{вх}$ на входе цепи увеличивается вдвое. Как изменить положение движка реостата для того, чтобы напряжение на нагрузке осталось прежним? (8 кл.)

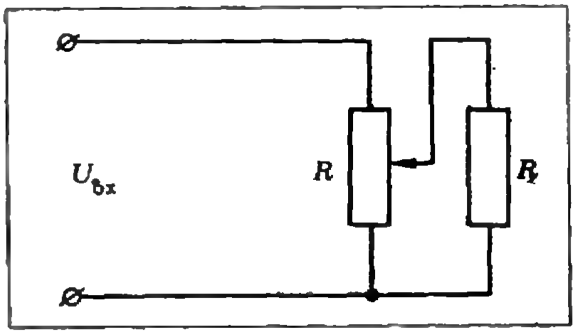


Рис 4.

Решения задач

М301—М303

М301. *На плоскости заданы $2n$ точек — n синих и n красных, причем никакие три точки не лежат на одной прямой. Докажите, что можно провести n отрезков так, что у каждого отрезка один конец лежит в красной точке, другой — в синей точке, и никакие два отрезка не имеют общих точек.*

Назовем *системой* всякие n отрезков, таких, что у каждого отрезка один конец лежит в красной точке, другой — в синей точке, и никакие два отрезка не выходят из одной точки. Чтобы построить систему, надо как-нибудь разбить наши $2n$ точек на n пар — по одной красной и одной синей в каждой паре — и соединить точки каждой пары отрезком.

Надо найти систему, отрезки которой не имеют друг с другом общих точек. Докажем, что годится система, для которой сумма длин ее отрезков — минимальная из всех возможных (для данных $2n$ точек). Действительно, пусть у нас есть такая система с минимальной суммой длин отрезков. Докажем, что все ее отрезки не имеют общих точек. Допустим противное: пусть два ее отрезка K_1C_1 и K_2C_2 имеют общую точку O (K_1, K_2 — красные, C_1, C_2 — синие точки, рис. 1). Докажем, что тогда сумма длин отрезков этой системы может быть уменьшена.

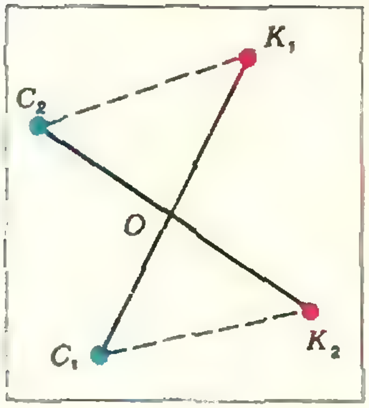


Рис. 1.

По условию никакие три из точек K_1, K_2, C_1, C_2 не лежат на одной прямой. Тогда точки K_1, K_2, C_1, C_2 — вершины выпуклого четырехугольника. Разумеется, сумма длин *любых двух его противоположных сторон меньше суммы длин диагоналей*, например, $|K_1C_2|+|K_2C_1|<|K_1C_1|+|K_2C_2|$ (см. рис. 1).
Заменив в нашей системе отрезки K_1C_1 и K_2C_2 отрезками K_1C_2 и K_2C_1, мы уменьшим сумму длин всех отрезков, что противоречит предположению.

Приведем другое решение задачи, предложенное ее автором *С. Охитиным* (Оренбург), а также несколькими читателями.

Докажем сначала такую лемму:

для любого множества n синих и n красных точек, о котором говорится в условии, *можно провести прямую l так, что в каждой из полуплоскостей, на которые l разбивает плоскость, лежит поровну синих и красных точек*, причем не все $2n$ точек лежат в одной полуплоскости и никакая из них не принадлежит l.

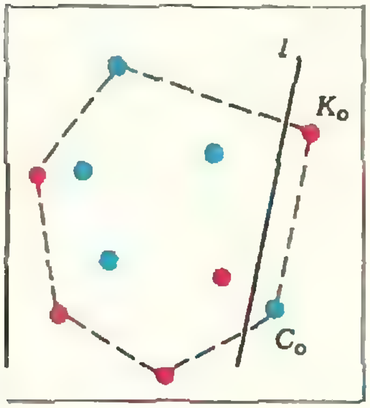


Рис. 2.

Рассмотрим *выпуклую оболочку* множества из наших $2n$ точек: наименьший содержащий их выпуклый многоугольник. Несколько из этих $2n$ точек служат его вершинами. Разберем два случая.

а) Среди вершин есть и красные, и синие точки. В этом случае найдутся две соседние вершины разных цветов: K_0 и C_0. Проведем прямую l параллельно отрезку K_0C_0 так, чтобы все остальные $2n-2$ точки лежали по другую сторону от l. Это и есть нужная прямая (рис. 2).

б) Все вершины — одного цвета, скажем, синего. Выберем какое-то направление так, чтобы *никакая прямая этого направления не проходила через две точки нашего множества*. Можно считать, что это направление — вертикальное (рис. 3). Будем двигать равномерно вертикальную прямую (слева направо) и отметим те моменты времени $t_1, \ldots, t_{2n}$, когда она будет проходить точки нашего множества. Обозначим через $f(t)$ разность между количеством синих и красных точек в левой полуплоскости нашей прямой в момент времени t. На каждом отрезке, на которые точки $t_1, t_2, \ldots, t_{2n}$ разбивают ось $-\infty<t<+\infty$, функция $t\to f(t)$ постоянна, в частности, $f(t)=1$ при $t_1<t<t_2$ (слева от прямой — одна синяя точка и 0 красных), $f(t)=-1$ при $t_{2n-1}<t<t_{2n}$, и при каждом переходе через t_i значение $f(t)$ меняется на единицу. Ясно, что на каком-то отрезке $]t_k, t_{k+1}[$ значение $f(t)$ должно равняться 0.

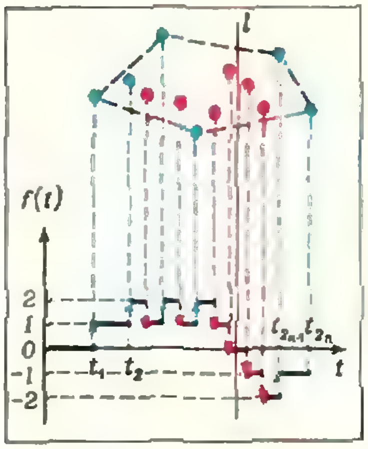


Рис. 3.

Любую вертикальную прямую, соответствующую моменту времени t между t_k и t_{k+1}, можно взять в качестве l. Лемма доказана.

Теперь утверждение задачи легко доказать индукцией по n. Для $n=1$ (даны две точки — синяя и красная) оно очевидно. Предположим, что для всех множеств из $2k$ точек *(k синих и k красных)*, где $k<n$, утверждение справедливо. Тогда оно справедливо и для множеств из $2n$ точек: пользуясь леммой, мы можем разбить такое множество на два, к каждому из которых применимо предположение индукции. Отрезки, лежащие в одной и другой полуплоскости, разумеется, не будут пересекаться.

А. Л. Тоом, Н. Б. Васильев

М302. *Пусть O — точка пересечения диагоналей трапеции $ABCD$ $((AB)\|(CD))$, A' и B' — точки, симметричные точкам A и B относительно биссектрисы угла AOB. Докажите, что $\angle ACA' \cong \angle BDB'$ (рис. 4).*

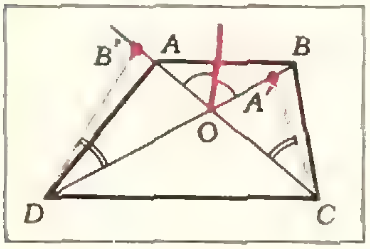


Рис. 4.

М303. *Прямоугольник 300×1000 разрезан на квадраты 1×1, и в некоторых 30 вершинах квадратов помещены одинаковые гирьки. Докажите, что можно выбрать две непересекающиеся группы гирек — не более чем по 10 в каждой — так, что их центры тяжести совпадут.*

Поскольку $ABCD$ — трапеция, то $\dfrac{|OB|}{|OA|} = \dfrac{|OD|}{|OC|}$. Обозначим это отношение через k. Пусть F — композиция двух преобразований: симметрии относительно биссектрисы угла AOB и гомотетии (подобного преобразования) с центром O и коэффициентом k. Нетрудно видеть, что

$$F(A) = B,\ F(C) = D,\ F(A') = B',$$

т. е.

$$F(\triangle ACA') = \triangle BDB',$$

поэтому $\angle ACA' = \angle BDB'$.

План другого решения: поскольку $|OB| \cdot |OC| = |OA| \cdot |OD|$, то

$$|OB'| \cdot |OC| = |OA'| \cdot |OD|,$$

и точки C, D, B' и A' лежат на одной окружности.

◆

Введем систему координат Oxy так, чтобы вершины прямоугольника получили координаты $(0, 0)$, $(0; 300)$, $(1000; 300)$, $(1000; 0)$. Если какие-то 10 гирек находятся в точках (x_1, y_1), (x_2, y_2), …, (x_{10}, y_{10}), то координаты их центра тяжести $\dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{10}}{10}$, $\dfrac{y_1 + y_2 + \ldots + y_{10}}{10}$.

Таким образом, координаты центра тяжести любых 10 гирек, расположенных в «целых точках» прямоугольника — в вершинах квадратов построенной сетки,— обязательно имеют вид $(k/10,\ l/10)$, где k и l — целые числа, причем $0 \leqslant k \leqslant 10\,000$ и $0 \leqslant l \leqslant 3000$. Точек такого вида существует всего

$$10\,001 \cdot 3\,001 = 30\,013\,001. \tag{1}$$

С другой стороны, 10 гирек из данных 30 можно выбрать

$$C_{30}^{10} = \frac{30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} =$$

$$= 29 \cdot 23 \cdot \underbrace{13 \cdot 11 \cdot 7}_{1\,001} \cdot 5 \cdot 3^2 = 30\,015 \cdot 1\,001 = 30\,045\,015 \tag{2}$$

способами *). Поскольку (1) меньше (2), центры тяжести каких-то двух различных групп по 10 гирек должны попасть в одну точку.

Задача была бы уже решена, если бы в условии не требовалось, чтобы группы гирек были непересекающимися.

Но и это требование нетрудно выполнить. Если две группы по 10 гирек с общим центром тяжести C пересекаются,— скажем, их пересечение состоит из k гирек,— то, выбросив эти общие k гирек из той и другой группы, мы получим две непересекающиеся группы по $(10-k)$ гирек. Ясно, что центр тяжести C группы из 10 гирек расположен на отрезке, соединяющем центры тяжести C', C'' составляющих ее групп из k и $(10-k)$ гирек, и делит этот отрезок в отношении $(10-k):k$. Поскольку центры тяжести для той и другой группы по 10 гирек совпадают, то центры тяжести обеих групп по $(10-k)$ гирек также совпадут.

Н. Б. Васильев

---

*) См. статью Н. Я. Виленкина «Комбинаторика» в «Кванте», 1971, № 1, или учебник для 9-го класса Б. Е. Вейца и И. Т. Демидова, гл. 1.

И. М. Быстрый

Конструирование уравнений по графикам функций

Необходимость конструирования уравнений функций возникает при решении различных вопросов. Встречаются такие задачи и в математике, и в физике, и что особенно важно, в современной технике. В этой статье показано, как с помощью уравнений элементарных функций (уравнений прямой, параболы, синусоиды) можно описать графики более сложных зависимостей, встречающихся в школьном курсе физики. Точнее, в тех его разделах, где рассказывается о периодических процессах.

Вспомним сначала несколько важных свойств графиков функций.

1. Если график функции $F_1(x)$ есть сдвинутый на $|c|$ единиц вверх или вниз вдоль оси ординат график функции $f(x)$, $x \in [a, b]$, то уравнение функции $F_1(x)$ имеет вид

$$F_1(x) = f(x) \pm |c|, \quad x \in [a, b],$$

причем, *если график сдвинут вверх*, следует брать знак «+», а если вниз — знак «—».

2. Если график функции $F_2(x)$ есть сдвинутый на $|c|$ единиц влево или вправо вдоль оси абсцисс график функции $f(x)$, $x \in [a, b]$, то уравнение функции $F_2(x)$ имеет вид

$$F_2(x) = f(x \pm |c|), \quad x \in [a \mp |c|, b \mp |c|],$$

причем верхние знаки берутся в случае, когда график сдвинут влево, а нижние — когда сдвинут вправо.

3. Если график функции $F(x)$ симметричен относительно оси абсцисс графику функции $f(x)$, $x \in [a, b]$, то уравнение $F(x)$ имеет вид

$$F(x) = -f(x), \quad x \in [a, b].$$

Рассмотрим теперь некоторые конкретные примеры.

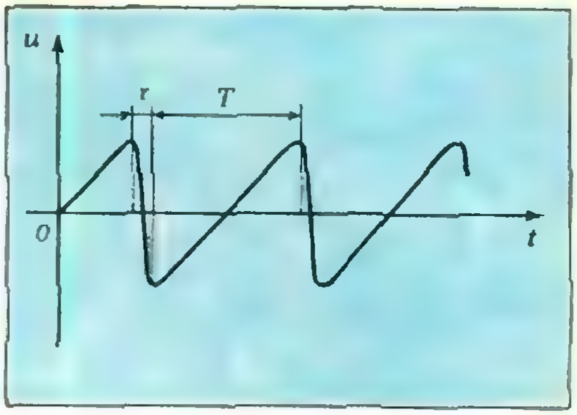


Рис. 1.

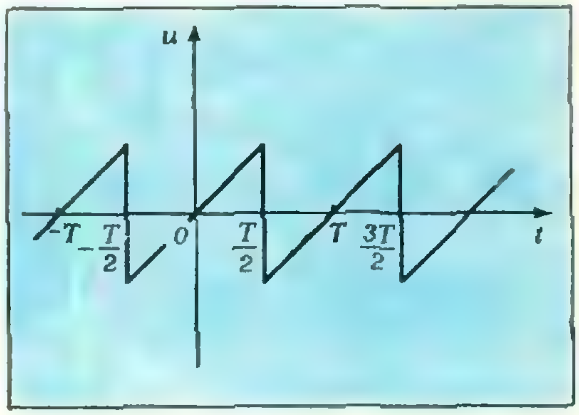


Рис. 2

«Пилообразное» напряжение

Попробуем, пользуясь приведенными выше свойствами графиков функций, описать «пилообразное» напряжение (рис. 1). Напряжение такого вида подается, например, на отклоняющие пластины электроннолучевой трубки осциллографа. Для «пилообразного» напряжения характерно, что время T его нарастания велико по сравнению со временем спада τ. Поэтому графически изменение напряжения во времени можно представить в виде линии, изображенной на рисунке 2. Однако в этом случае возникает неоднозначность в точках

$$t=\frac{T}{2}(2n+1)\ ,$$

n — целое число. Чтобы избавиться от неоднозначности, заменим «пилообразную» линию графиком функции, вообще не определенной в точках

$$t=\frac{T}{2}(2n+1),$$

или графиком функции, определенной в этих точках слева или справа (рис. 3, *а*, *б*, *в*).

Для получения уравнения периодической функции $u(t)$, изображенной на рисунке 3, *а*, исследуем ее при изменении аргумента в пределах одного периода, например, $\left(-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right)$.

В этом интервале график периодической функции $u(t)$ совпадает с графиком функции $u_0=f(t)=t$ *). Сдвинем теперь график u_0 вдоль оси абсцисс на один период вправо (красная линия на рисунке). Тогда получим новую функцию $u_1=f(t-T)=t-T$, причем промежуток $\left(-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right)$ перейдет в промежуток $\left(\frac{T}{2},\frac{3}{2}T\right)$. Смещая график функции u_0 вдоль оси абсцисс на целое число n периодов, всякий раз при фиксированном n будем получать новую функцию

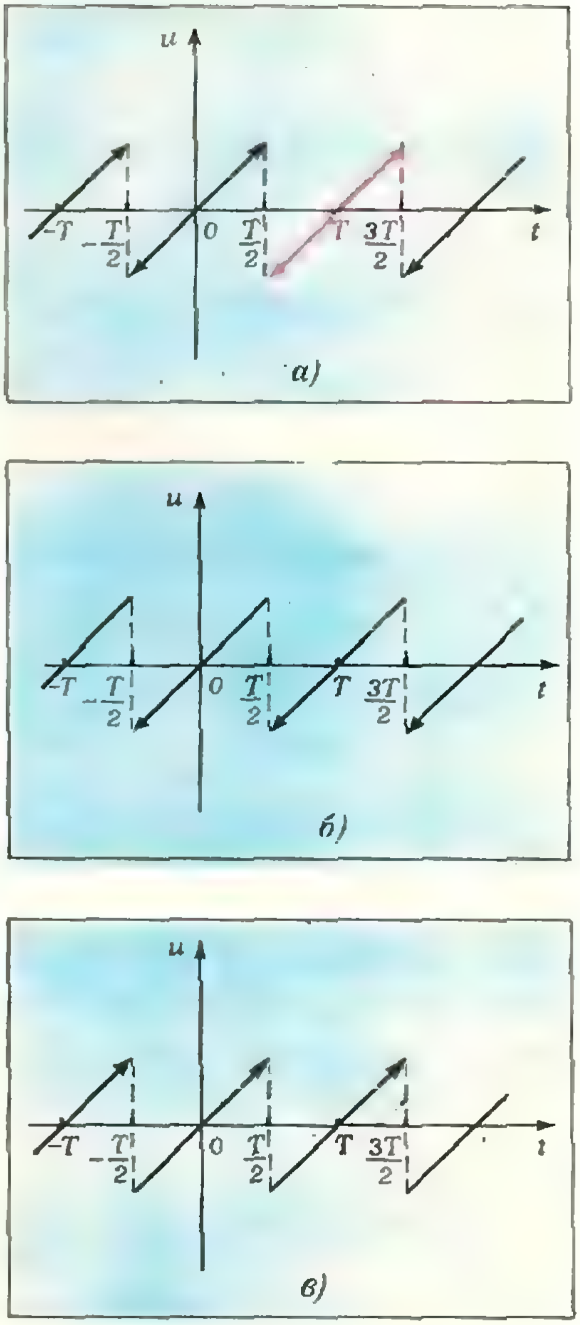


Рис. 3.

$$u_n=f(t-nT)=t-nT, \qquad (1)$$

$$t\in\left(\frac{T}{2}(2n-1),\frac{T}{2}(2n+1)\right).$$

Совокупность этих функций при $n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ составляет уравнение искомой функции $u(t)$.

Если период функции $T=\pi$ секунд, то ее уравнение можно записать поиному:

---

*) Точнее, $f(t)=At$, где $A=1$ в/с — размерный коэффициент.

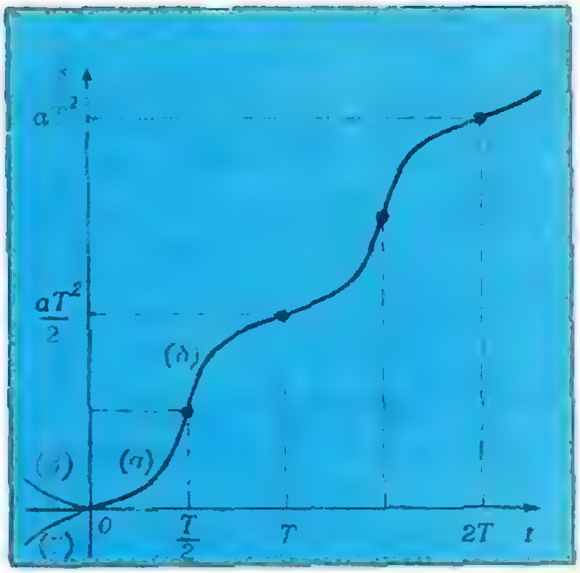


Рис. 4.

$$u(t)=t-n\pi=\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} t),$$

$$t\in\left(\frac{\pi}{2}(2n-1),\frac{\pi}{2}(2n+1)\right),$$

$$n=0,\pm1,\pm2,\ldots$$

Рассмотрим теперь графики, изображенные на рисунках 3, *б*, *в*. Первый из них — график функции, определенной в точках $\frac{T}{2}(2n+1)$ слева, уравнение которой имеет вид

$$u(t)=t-nT,$$

$$t\in\left(\frac{T}{2}(2n-1),\ \frac{T}{2}(2n+1)\right].$$

Уравнение функции, которой соответствует график 3, *в* (функция определена в точках $\frac{T}{2}(2n+1)$ справа), записывается в виде

$$u(t)=t-nT,$$

$$t\in\left[\frac{T}{2}(2n-1),\ \frac{T}{2}(2n+1)\right).$$

В обоих случаях $n=0, \pm1, \pm2, \ldots$

Наконец, приведем уравнение всей «пилообразной» линии (см. рис. 2). Она, как нетрудно заметить, состоит из двух совокупностей функций. Первая — это отрезки прямых, описываемые уравнениями (1), а вторая — отрезки прямых, параллельные оси ординат. Их уравнения:

$$t(u)=\frac{T}{2}(2n+1),$$

$$u\in\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right],\qquad n=0,\pm1,\pm2,\ldots$$

Уравнение пути

На рисунке 4 приведен график пути, проходимого точкой, движущейся прямолинейно.

Сконструируем уравнение пути *).

Очевидно, что график $S(t)$ составлен из участков параболы $S_\alpha=at^2$, $t\in\left[0,\frac{T}{2}\right]$**). Проделаем следующие преобразования:

1) ветвь (α) отразим симметрично относительно оси ординат — получим ветвь (β): $S_\beta=at^2$, $t\in\left[-\frac{T}{2},0\right]$;

2) ветвь (β) отразим симметрично относительно оси абсцисс — получим ветвь (γ): $S_\gamma=at^2$, $t\in\left[-\frac{T}{2},0\right]$;

3) переместим ветвь (γ) на T вправо и на $\frac{aT^2}{2}$ вверх — получим ветвь (δ):

$$S_\delta=-a(t-T)^2+\frac{aT^2}{2},\quad t\in\left[\frac{T}{2},T\right].$$

Перемещая ветви (α) и (δ) на nT вправо и на $n\frac{aT^2}{2}$ вверх, при переменном $n=0, 1, 2, \ldots$ будем иметь

$$S(t)=\begin{cases}a(t-nT)^2+n\dfrac{aT^2}{2},\\ t\in\left[nT,\dfrac{T}{2}+nT\right];\\ -a\left[t-(n+1)T\right]^2+\\ +(n+1)\dfrac{aT^2}{2},\\ t\in\left[\dfrac{T}{2}+nT,\ (n+1)T\right].\end{cases}\qquad(2)$$

---

*) См. «Квант», 1973, № 11, с. 60.

**) Здесь a — коэффициент пропорциональности. Если точка движется с ускорением b, то $a=b/2$

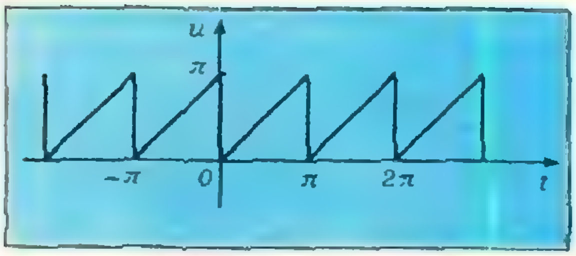


Рис. 5.

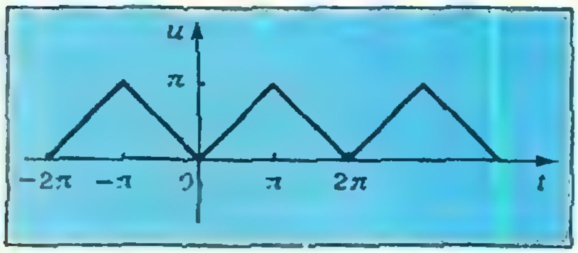


Рис. 6.

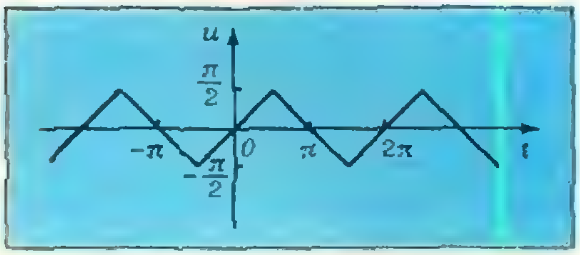


Рис. 7

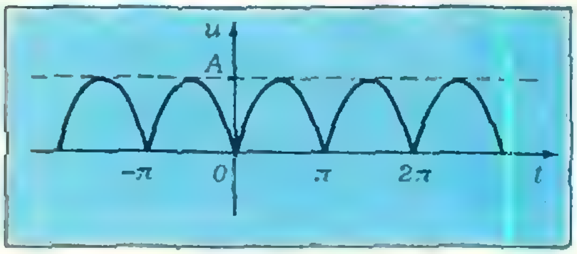


Рис. 8

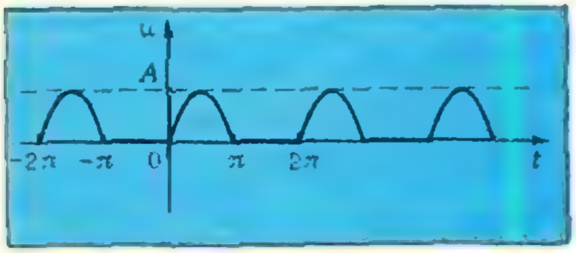


Рис. 9.

Если преобразовать вторую часть так:

$$-a\left[\left(t-nT-\frac{T}{2}\right)-\frac{T}{2}\right]^2+\frac{aT^2}{2}+n\frac{aT^2}{2}=-a\left[t-(2n+1)\frac{T}{2}\right]^2+aT\left[t-(2n+1)\frac{T}{2}\right]-\frac{aT^2}{4}+\frac{aT^2}{2}+n\frac{aT^2}{2}=-a\left[t-(2n+1)\frac{T}{2}\right]^2+aT\left[t-(2n+1)\frac{T}{2}\right]+\frac{aT^2}{4}(2n+1),$$

то уравнение пути можно записать так:

$$S(t)=(-1)^m a\left(t-m\frac{T}{2}\right)^2+\frac{1-(-1)^m}{2}aT\left(t-m\frac{T}{2}\right)+m\frac{aT^2}{4},$$

$$t\in\left[m\frac{T}{2},\ (m+1)\frac{T}{2}\right],\ m=0,1,2,\ldots$$

Упражнения

1. Напишите уравнения линий, изображенных на рисунках 5, 6 и 7. Для линии, показанной на рисунке 5, приведите уравнения функций, определенных в точках $t=n\pi$ слева и справа.

2. «Двухтактное» (двухполупериодное) выпрямление переменного тока осуществляется с помощью схемы с двумя электронными лампами-диодами. Если положительные полупериоды тока пройдут через один диод, а отрицательные — через другой, то осциллограмма напряжения будет иметь вид линии, изображенной на рисунке 8. Найдите уравнение этой линии.

3. Однополупериодное выпрямление переменного тока можно осуществить с помощью схемы с одним диодом. Тогда полупериоды одного знака проходят через диод, а полупериоды другого знака не проходят. Осциллограмма напряжения изображена на рисунке 9. Найдите уравнение этой функции.

4. Сконструируйте уравнение функции, график которой (см. рис. 4) на участках $[nT, (n+1)T]$, $n=0, 1, 2, \ldots$ конгруэнтен графику функции

$$y=A\sin x,\ x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right].$$

«Квант» для младших школьников

Задачи

1. В ста ящиках было по одинаковому количеству деталей. Когда из первого ящика взяли несколько деталей, из второго в два раза больше, из третьего в три раза больше и так далее, то в последнем ящике осталась одна деталь, а во всех ста вместе — 14950. Сколько деталей было в каждом ящике первоначально?

2. Как известно, моря все время пополняются пресной водой рек. Однако соленость морской воды при этом не уменьшается. Почему?

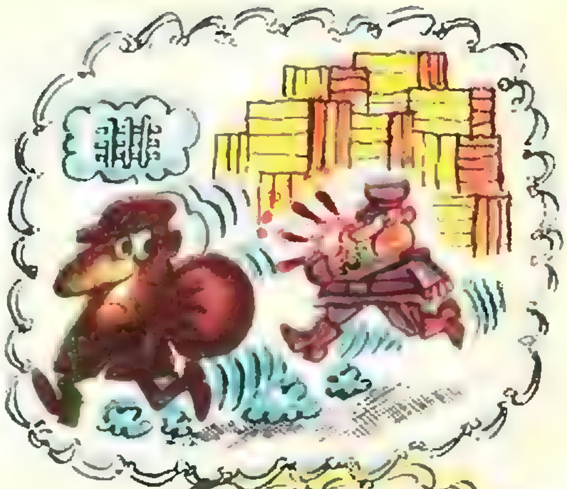
3. Король обошел шахматную доску размером 4 × 4 и вернулся на исходное поле, побывав на каждом поле один раз.

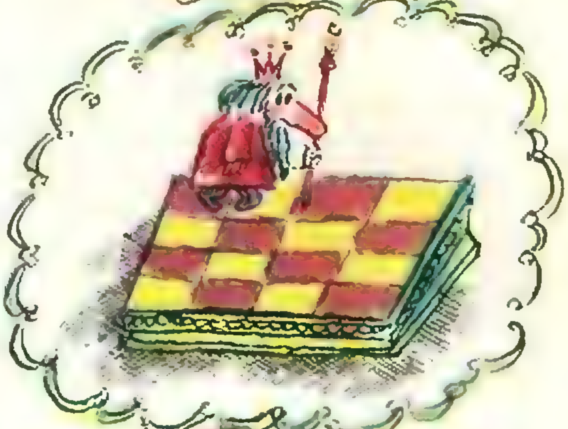
Какое наименьшее число прямых (не диагональных) ходов он мог сделать?

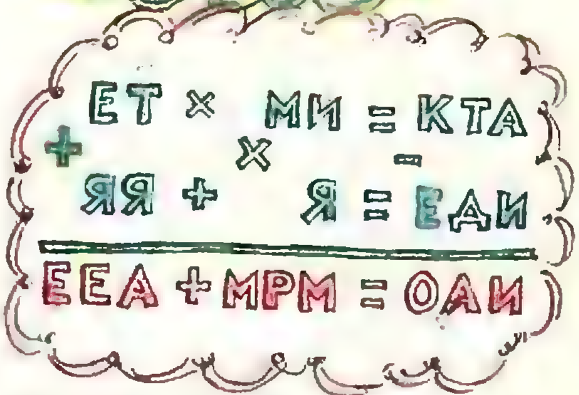
4. Вместо букв на рисунке надо подобрать цифры (одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры), чтобы выполнялись все указанные соотношения.

5. Вася на вопрос, каков номер его квартиры, ответил так: «Если все шесть двузначных чисел, которые можно образовать из цифр номера, сложить, то половина полученной суммы составит как раз номер моей квартиры.

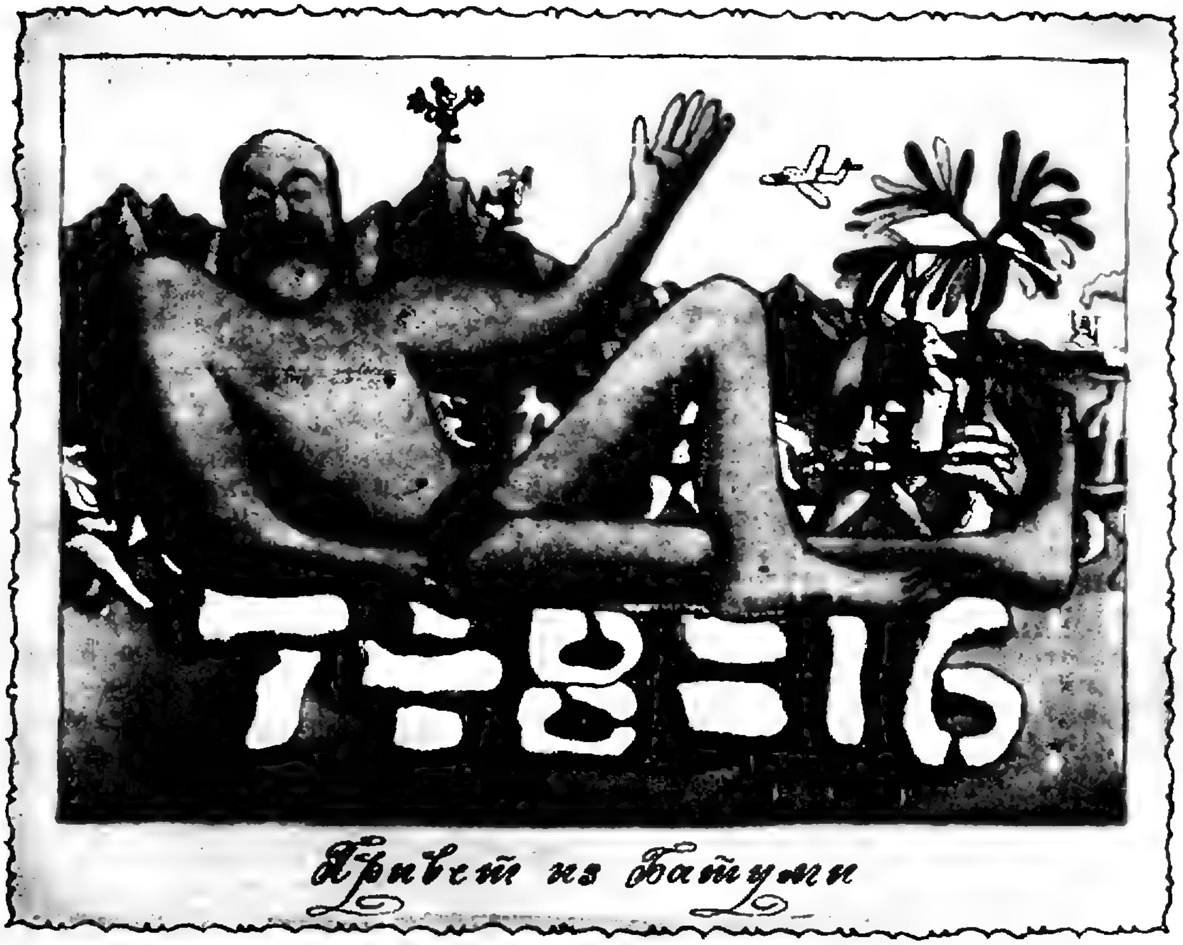
В какой квартире живет Вася?







Рисунки Э. Назарова



О системах счисления

Дорогой Сережа!

Помнишь нашу встречу в Батуми? В беседе со мной ты признался, что собираешься стать космонавтом. На мое замечание, что для достижения этой цели тебе нужно будет усердно заниматься, основательно выучить биологию, химию, физику, математику, ты ответил очень оригинально — начал демонстрировать свои познания. Оказалось, что математику ты знаешь отлично, даже любишь ее. И тогда я решил задать тебе «каверзный» вопрос: «почему верно равенство $7+8=15$ и может ли быть верным равенство $7+8=16$?»

Ты был немало удивлен, даже как-то растерян, но вскоре нашелся и ответил: «потому, что $7+8=15$, а равенство $7+8=16$ — неверное!». Было заметно, что ты сам не удовлетворен своим ответом. Я собирался объяснить, в чем тут дело, но, к сожалению, у нас не было возможности продолжить беседу, и я обещал тебе написать на эту тему письмо в «Квант», который ты, так же как и я, очень любишь. Выполняю свое обещание. Итак, первый вопрос.

Почему верно равенство $7+8=15$?

Чтобы ответить на этот вопрос, нужно выяснить, что подразумевается под записью «15». Такая запись, как ты отлично знаешь, означает, что в этом числе 1 десяток и 5 единиц. Иными словами, 15 — это сумма $1\times10+$

$+ 5 \times 1$. Аналогично 287, например, есть сумма $2 \times 100 + 8 \times 10 + 7 \times 1$. Последней сумме можно придать более удобную, как бы более симметричную форму:

$$2 \times 10^2 + 8 \times 10^1 + 7 \times 10^0.$$

Ты, конечно, знаешь, что первая степень любого числа равна самому числу, поэтому вместо 10 мы можем написать 10^1. Что же касается последнего слагаемого, то скажу тебе, что любое отличное от нуля число в нулевой степени принято считать равным единице. В частности, $10^0 = 1$, и единицу мы можем заменить на 10^0. В данном случае это очень удобно.

Итак, имеем:

$$15 = 1 \times 10^1 + 5 \times 10^0,$$
$$287 = 2 \times 10^2 + 8 \times 10^1 + 7 \times 10^0.$$

Обрати, пожалуйста, внимание на расположение цифр данных чисел в правых частях этих равенств.

Вот еще два примера:

$$1975 = 1 \times 10^3 + 9 \times 10^2 + 7 \times 10^1 + 5 \times 10^0,$$
$$2\,904\,770 = 2 \times 10^6 + 9 \times 10^5 + 0 \times 10^4 + 4 \times 10^3 + 7 \times 10^2 + 7 \times 10^1 + 0 \times 10^0.$$

Попробуй записать в такой же форме следующие числа: 103 009, 222 669, 23 456 789.

Возможность представления чисел в виде таких сумм позволяет записывать числа, даже очень большие, всего десятью цифрами: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. При такой записи особую роль играет число десять. Поэтому эта система записи чисел называется десятичной, а число десять — основанием этой системы. Вторым важным моментом такой записи является то, что значение каждой цифры определяется не только ею самой, но и местом (позицией), которое она занимает в записи данного числа. Например, цифра 2 в записи числа 325 «стóит» в десять раз дороже, чем такая же цифра в записи числа 872, так как означает десятки, а не единицы. Ввиду этого такую систему записи называют еще и позиционной.

Итак, при записи чисел мы пользуемся десятичной позиционной системой счисления. Именно поэтому и верно равенство $7 + 8 = 15$.

Перейдем к следующему вопросу.

Может ли быть верным равенство 7+8=16?

Ты, Сережа, конечно же хорошо понимаешь, что в десятичной системе это равенство быть верным не может. Но десятичная система не единственно возможная! Вовсе не обязательно, чтобы основание системы равнялось десяти — за основание можно взять любое натуральное число (даже единицу). Рассмотрим, к примеру, семеричную систему счисления.

В семеричной системе за основание принято число семь, и для записи чисел в этой системе достаточно всего семи цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Само число семь, основание системы запишется как 10 (это характерно для любой системы — основание системы в ней записывается как 10). Число восемь в семеричной системе записывается как 11, потому что $8 = 1 \times 7^1 + 1 \times 7^0$, девять — как 12, десять — как 13, а число четырнадцать запишется как 20. Число сорок девять в этой системе имеет вид 100 ($100 = 1 \times 7^2 + 0 \times 7^1 + 0 \times 7^0$).

Все это может показаться странным и трудным, но на самом деле здесь все естественно и даже легко, главное — хорошо понять эту своеобразную арифметику и привыкнуть к ней. Обычно, когда рассматривают числа в разных системах счисления, у каждого числа ставят индекс — основание системы счисления, в которой это число записано. Тогда рассмотренные нами примеры можно записать так:

$$7_{10} = 10_7,\ 8_{10} = 11_7,\quad 9_{10} = 12_7,$$
$$10_{10} = 13_7,\ 14_{10} = 20_7,\ 49_{10} = 100_7.$$

Читаются эти равенства следующим образом: «семь десятичное равно десяти семеричному» и т. д.

Предлагаю тебе в качестве упражнения доказать истинность следующих равенств: $2_7 + 6_7 = 11_7$, $4_7 + 5_7 = 12_7$, $11_7 + 16_7 = 30_7$, $3_7^2 = 12_7$, $4_7 \times 6_7 = 33_7$, $101_7 : 34_7 = 2_7$.

Попробуй также составить таблицы сложения и умножения однозначных чисел в семеричной системе счисления.

А теперь попытаемся выяснить, в какой же системе может быть верным равенство

$$7 + 8 = 16.$$

Думаю, ты сам уже сообразил, что основанием этой системы должно быть такое число a, которое, сложенное с шестью единицами, в сумме дает пятнадцать. В самом деле, ведь 16_a означает сумму $1 \times a^1 + 6 \times a^0$, т. е. $16_a = a_{10} + 6_{10}$. С другой стороны, $7_a + 8_a = 7_{10} + 8_{10} = 15_{10}$, и поэтому должно быть $a_{10} + 6_{10} = 15_{10}$. Отсюда уже нетрудно найти a — оно равно девяти.

Итак, равенство $7 + 8 = 16$ верно в девятеричной системе счисления, $7_9 + 8_9 = 16_9$. Это и есть ответ на вопрос, поставленный в заголовке.

На этом, дорогой Сережа, разреши поставить точку. Правда, я собирался рассказать тебе еще о двоичной системе счисления, примечательной во многих отношениях, но думаю, будет лучше, если мы о ней поговорим в следующий раз, а пока я советую тебе посмотреть книгу С. В. Фомина «Системы счисления» (серия «Популярные лекции по математике», М., «Наука», 1975).

Желаю успеха! До новых встреч на страницах «Кванта».

P. S. Если тебе что-нибудь покажется неясным, напиши, я с удовольствием отвечу.

А. Д. Бендукидзе

Несколько задач о гипоциклоидах

Задача 1. *Докажите, что при $k=2$ гипоциклоиды*) являются диаметрами неподвижного круга (теорема Насреддина — Коперника — Феррари).*

Красивый геометрический факт из этой задачи не очень легко представить наглядно. Он служит источником многих популярных геометрических задач.

Пусть, например, концы отрезка AB скользят по прямым, пересекающимся в точке O. Если вовлечь в это движение точки всей плоскости (считая ее твердой пластиной), то (в силу задачи 1) мы получим то же движение, что и при качении круга, ограниченного окружностью, описанной вокруг треугольника AOB, по внутренней стороне окружности с центром в точке O вдвое большего радиуса.

Задача 2. *Найдите траектории, по которым при описанном движении будут двигаться:*

а) *центр окружности, описанной вокруг треугольника AOB;*

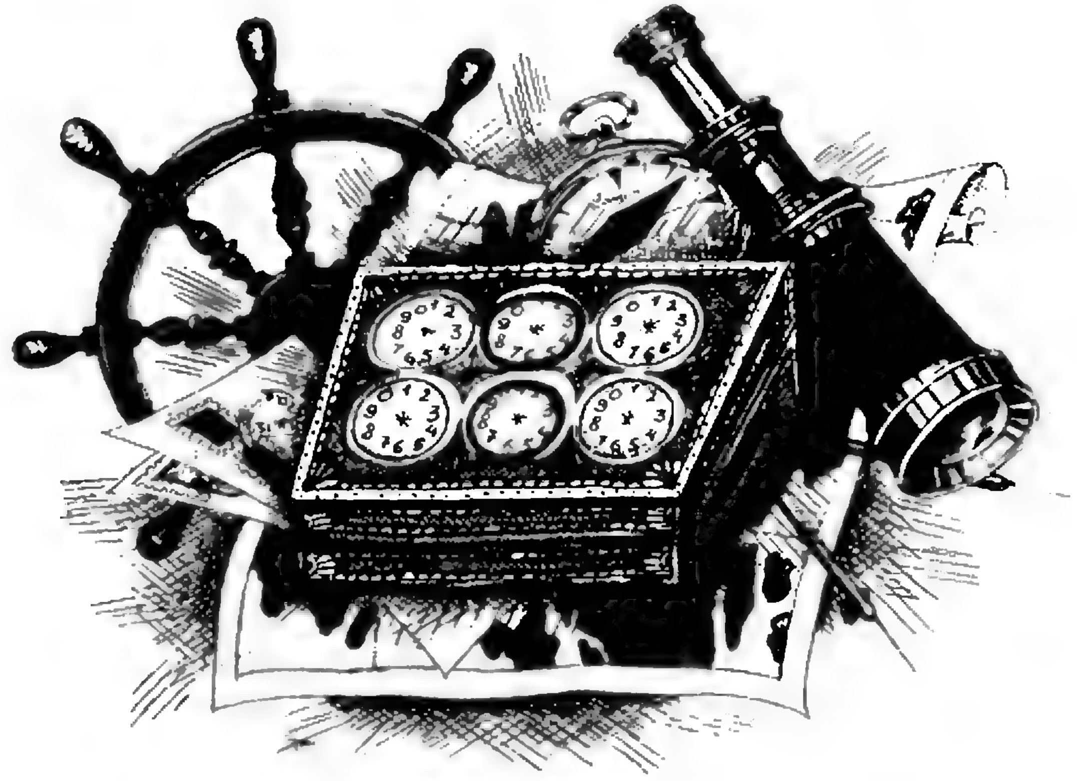
б) *точка C, такая, что O и C находятся по разные стороны отрезка AB и $\widehat{ACB} + \widehat{AOB} = \pi$.*

Гипоциклоида при $k = 4$ называется *астроидой.*

Задача 3. *Проведем диаметры неподвижного круга (радиуса R) через вершины астроиды. Возьмем произвольную точку астроиды B и проведем касательную к ней в этой точке до пересечения с диаметрами в точках E и F. Докажите, что длина отрезка EF не зависит от выбора точки B и равна R.*

---

*) Определение гипоциклоиды см. в статье С. Г. Верова «Касательные к рулеттам», «Квант», 1975, № 5, с. 30.



Подарок веселого капитана

Это был новогодний сюрприз, присланный капитаном дальнего плавания своему сыну, — шкатулка, которая открывается только после того, как с помощью шести дисков с полным комплектом цифр на каждом будет набрано некоторое кодовое шестизначное число вида ****0*. Пятая цифра известна — нуль, а все остальные цифры зашифрованы звездочками.

В сопроводительном письме сыну капитан написал: «. . . Кодовое число одновременно указывает и величину содержимого (в рублях) шкатулки. Возьми себе $\frac{1}{**}$ часть денег на книги и каникулярные развлечения, а остальные отдай маме на хозяйственные расходы. Когда содержимое шкатулки (число ****0*) будешь делить на знаменатель указанной дроби (**), то в частном получишь четырехзначное число, а процесс деления будет иметь такой вид:

```
****0* | **
 **    |----
-----  |****
  **3
  **1
  ---
    2*
    2*
    --
     0
```

Если проявишь находчивость и остроумие, то, расшифровав указанную операцию деления, найдешь и кодовое число, открывающее шкатулку...»

Все одноклассники сына капитана дальнего плавания включились в поиски «изюминки», заложенной веселым капитаном в задачу. Пока, увы, — безуспешно. Более того, многие пришли к заключению о неправильности в записи действий. Некоторые, впрочем, полагали, что «изюминка» — в преднамеренно допущенной описке, которую и надо выявить. Например, не лишний ли «хвостик» у двойки? Если его убрать, то на месте двойки окажется девятка, и тогда удается найти даже два решения. Одно из них — (1), какое второе?

```
101 409| 33                ****,* |  **
 99    |3 073              **     |***.*
 ---                       --
  240                       ***
  231           (1)         **1              (2)
  ---                       ---
    99                       **
    99                       2*
    --                      ---
     0                        0
```

Другая версия «описки» исходила из предположения, что нуль в качестве пятой цифры нужен только для набора кодового числа, в действительности он маскирует запятую в записи числа. Если этот нуль в записи делимого заменить запятой, а оставшиеся звездочки сблизить, то получится деление десятичной дроби на целое число, и запись действий принимает вид (2).

Сторонники этой версии нашли два варианта расшифровки приведенной записи. Какие?

К сожалению, ни одно из четырех решений, найденных ребятами, не открыло шкатулки.

В посылке капитана был еще один листок. Капитан писал сыну, что их штурман, который, кстати, помог сделать шкатулку, показывает своим товарищам забавный «числовой фокус»: он четыре раза складывает одинаковые числа и каждый раз получает новый результат:

```
   267       267       267       267
 + 267     + 267     + 267     + 267
   ---       ---       ---       ---
   534       545       556       512
```

При этом штурман клянется, что суммы найдены честно и безошибочно. Весь класс до сих пор не раскрыл «секрет» этого фокуса и задачи капитана.

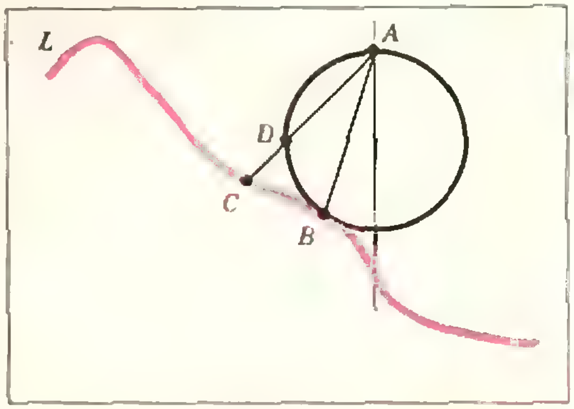
Б. А. Кордемский

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

К статье «Тайны циклоиды»
Решения задач Галилея

Задача 1. Материальная точка под действием силы тяжести движется по хорде, составляющей угол α с вертикальным диаметром (длины d) окружности равноускоренно с ускорением $g\cos\alpha$ (движущая сила — проекция силы тяжести точки на хорду), длина хорды (оканчивающейся в нижней точке окружности) равна $d\cos\alpha$. Поэтому материальная точка при движении по любой хорде, оканчивающейся в нижней точке окружности, затрачивает то же время, что при свободном падении из верхней точки окружности — по вертикальному диаметру.

Задача 2. Проведем через точку A вертикаль. Рассмотрим наименьшую окружность, проходящую через точку A, с центром на построенной вертикали, и касающуюся кривой L в некоторой точке B (см. рисунок: точка A будет «верхней» или «нижней» точкой окружности). Для «хорошей» кривой такая окружность определена; для простоты будем считать, что окружность касается L в единственной точке — B. Точка B — искомая точка. В самом деле, пусть C — любая точка кривой L, отличная от B. Соединим точку C с точкой A; пусть D — точка пересечения отрезка AC с окружностью. При движении из точки A в точку C материальная точка затрачивает время на прохож-



дение двух отрезков: отрезка AD (равное времени прохождения отрезка AB — см. задачу 1), и отрезка DC; поэтому при движении до точки касания B (указанной окружности и кривой L) время минимальное.

К задачам «Квант» для младших школьников»

(см. «Квант», № 7)

1. 4 стула, 3 табуретки. Указание. Задача сводится к решению в целых числах уравнения $4x+3y+2(x+y)=39$, т. е. $6x+5y=39$, откуда $x+5(x+y)=39=4+5\times 7$.

2. Нужно проследить за пузырьками воздуха, выходящего из аппарата, обеспечивающего дыхание; можно уронить какой-нибудь тяжелый предмет.

3. Если от двузначного числа отнять двузначное число, образующееся после перестановки его цифр, то получится $9k$, где k — разность между первой и второй цифрой этого числа. Если $k<8$, то можно назвать не одно двузначное число, дающее в результате описанного вычитания требуемый результат (номер дома). В этом случае Владимир не мог бы решить задачу Николая. Значит, $k=8$, и тогда искомое число равно 91, а номер дома Николая равен 72.

4. Площадь поверхности, с которой происходит испарение, увеличивается. Сено высыхает равномернее и быстрее.

5. $9+8+7+65+4+3+2+1=99$, $9+8+7+6+5+43+21=99$. Указание. Надо последовательно находить места, где необходимо ставить знак плюс. Ясно, что в сумму должны входить однозначные и двузначные числа, но 98 брать нельзя, 87 тоже, так как сумма остальных чисел больше 12 и т. д.

К чайнворду

(см. «Квант», № 7, 4-я с. обл.)

1. Алгебра. 2. Анализ. 3. Зет. 4. Тангенс. 5. Сектор. 6. Радиан. 7. Неравенство. 8. Объем. 9. Максимум. 10. Множество. 11. Отрезок. 12. Конус. 13. Слагаемое. 14. Евклид. 15. Додекаэдр. 16. Радикал. 17. Лейбниц. 18. Цилиндр. 19. Радиус. 20. Сегмент. 21. Тождество. 22. Ортоцентр. 23. Ромб. 24. Бином. 25. Минута. 26. Аксиома.

К геометрическим неравенствам

(см. «Квант», № 7, с. 65)

1. Воспользоваться неравенством $m_a+m_b+m_c<a+b+c$ и тождеством

$$m_a^2+m_b^2+m_c^2=\frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2).$$

Для доказательства левой части неравенства использовать тот факт, что $ab+bc+ca\leqslant a^2+b^2+c^2\leqslant 2(ab+bc+ca)$ и что из медиан можно составить треугольник.

2. С помощью тождеств $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$ и $ch_c=ab\sin C$ доказать, что

$$a^2+b^2-h_c^2\leqslant\frac{a^2b^2}{h_c^2}=4R^2.$$

3. Воспользоваться соотношениями вида

$$\cos\frac{A}{2}=\frac{w_a}{2}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

и неравенствами

$$\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{2},\qquad \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geqslant\frac{9}{x+y+z}$$

при $x>0$, $y>0$, $z>0$.

Для доказательства второго неравенства использовать неравенство $\cos\frac{A}{2}\geqslant\frac{2w_a}{b+c}$ и т. п.

К алгебраическим задачам

(см. «Квант», № 7, с. 20)

1. Раскрыть скобки и применить теорему Виета.

$$x^{17}-1=(x-1)[x^8-ax^7+(2-a)x^6-(3a-2)x^5+(10-a)x^4-(3a-2)x^3+(2-a)x^2-ax+1][x^8-bx^7+\ldots+1].$$

2. Искомое уравнение имеет вид

$$x^3-9cx^2+(b^2+27c^2)x-c(4b^3+27c^2)=0.$$

3. Положить $r-1=\rho$ и воспользоваться формулой бинома Ньютона.

4. Перемножая, получаем $(x+y)(x+z)\times(y+z)=\pm abcxyz$, откуда $\frac{ax}{y+z}=\pm 1$. Значит, $y+z=\pm ax$, $z+x=\pm by$, $x+y=\pm cz$. Исключая x, y, z, получаем искомые равенства $a+b+c\pm 2=abc$.

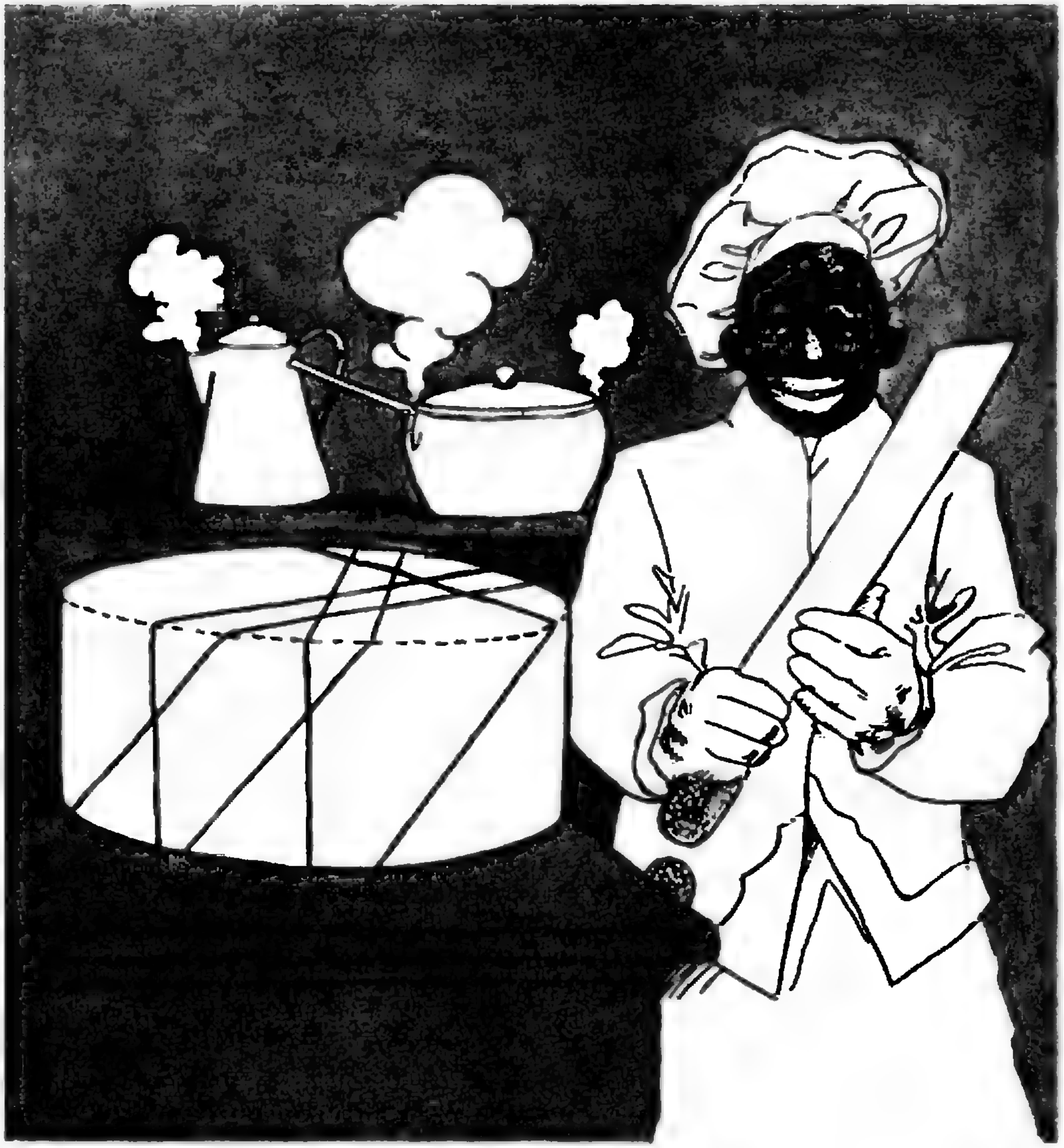
Корректор В. П. Сорокина

117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15, «Квант», тел. 234-08-11. Сдано в набор 16/VI-75 г. Подписано в печать 9/VII-75 г.
Бумага 70×100$^1/_{16}$ Физ. печ. л. 4
Усл. печ. л. 5,2 Уч.-изд. л. 5,56 Т-09257
Цена 30 коп. Заказ 1035. Тираж 318 120 экз.

Чеховский полиграфический комбинат
Союзполиграфпрома
при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли, г. Чехов Московской области

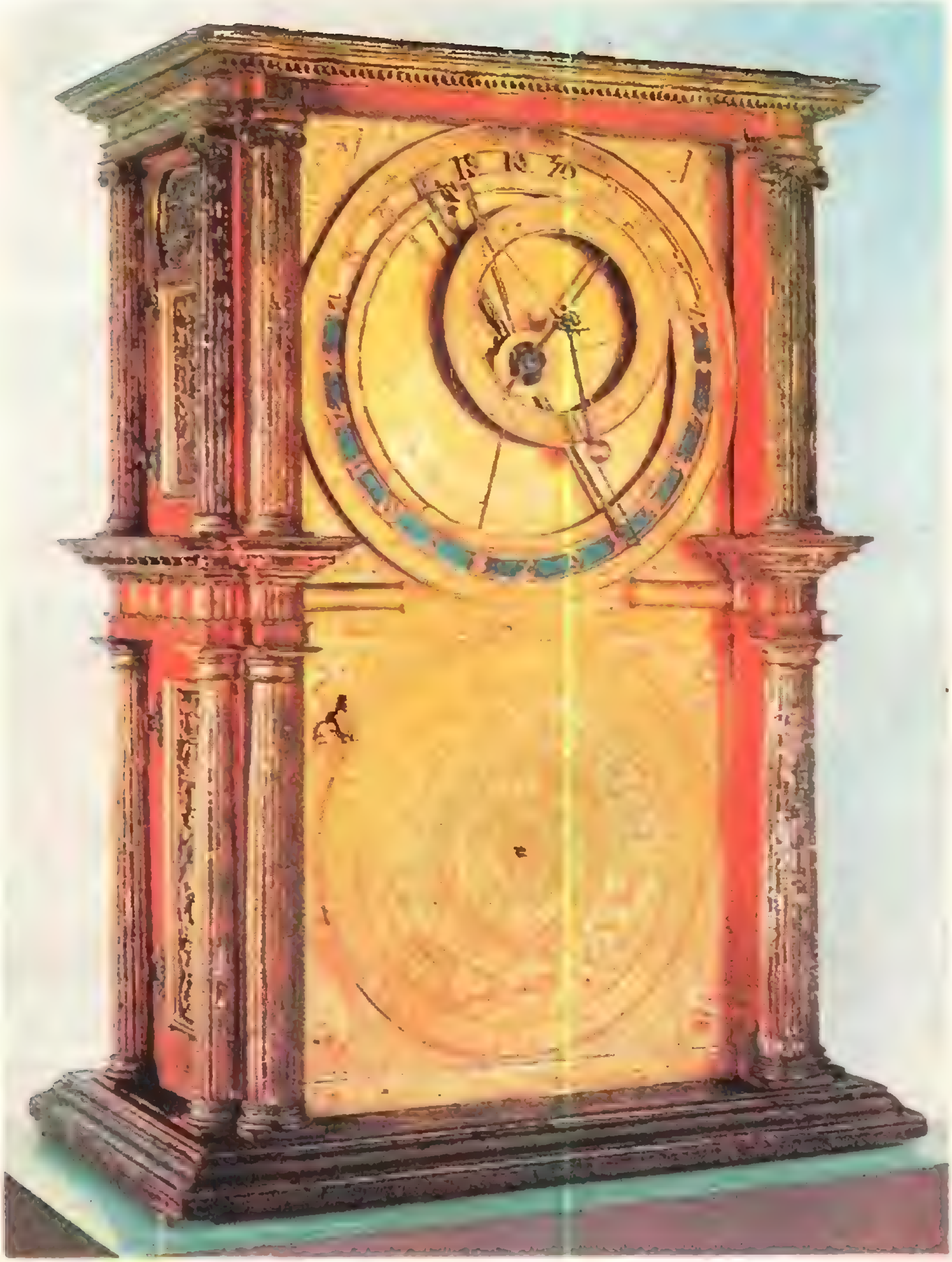
Рукописи не возвращаются

Сэм Лойд (1841—1911) — на редкость изобретательный американский конструктор головоломок. Им опубликованы тысячи занимательных задач, главным образом, математических и шахматных. Он сам оформлял свои произведения, а некоторые даже собственноручно набирал и печатал. Головоломка, которую мы сейчас помещаем, публиковалась в книге «Sam Loyd's Puzzles», вышедшей на родине автора, в Филадельфии, спустя год после его кончины.



КАК РАЗДЕЛИТЬ СЫР?

Опытный шеф-повар умеет разделить такой цилиндрический кусок сыра на максимальное число частей пятью прямыми разрезами. Но сколько у него при этом получается кусков, он держит в секрете. Попытайтесь разгадать этот секрет.



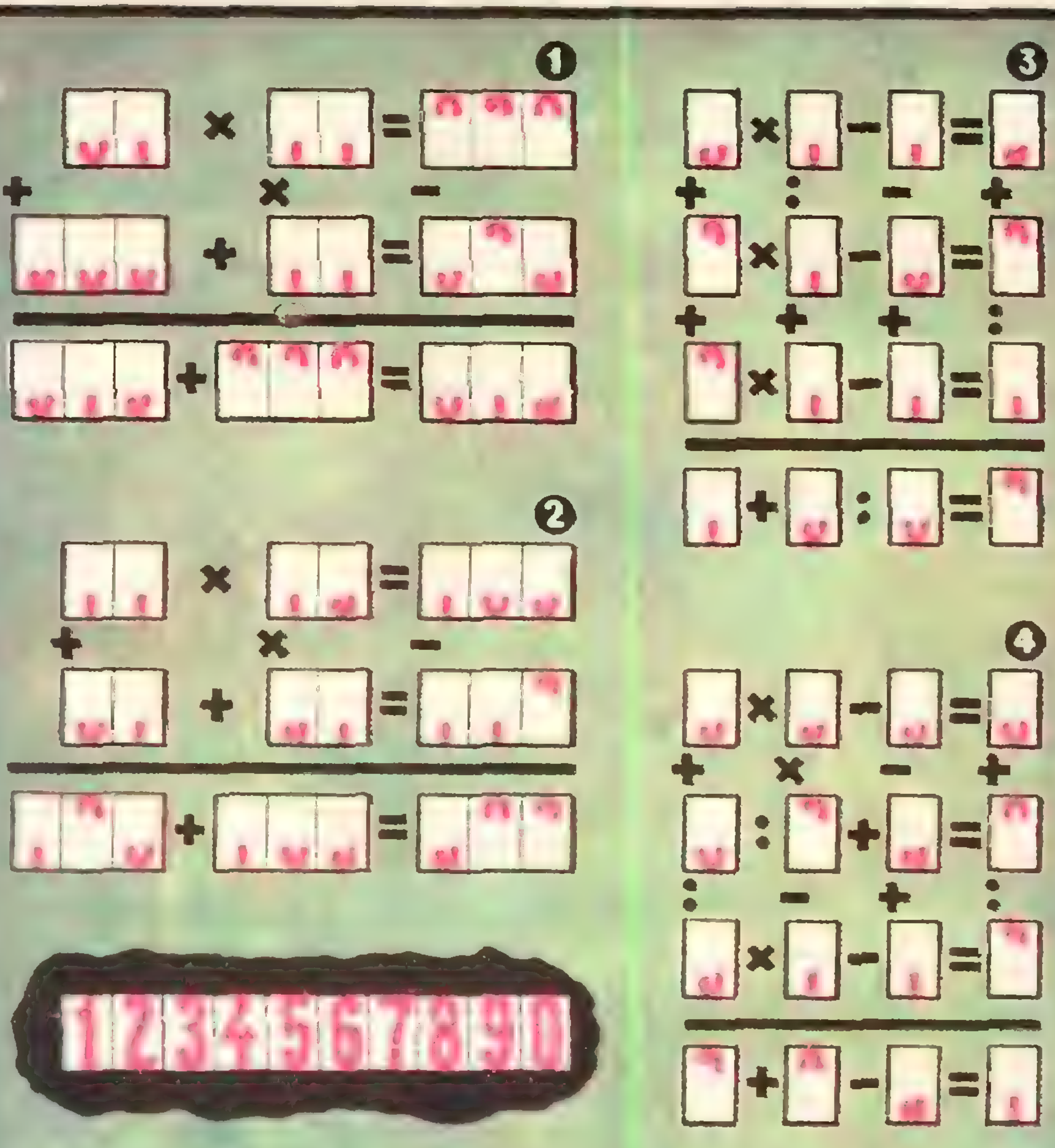
Эти астрономические часы были сделаны в 1572 году. Внешняя шкала верхнего циферблата разделена на 24 часа — дважды по 12. По этой шкале три стрелки указывают солнечное, лунное и звездное время. По двум другим шкалам циферблата определяется время, отсчитываемое от восхода или от захода Солнца (эти шкалы тоже разделены на 24 деления). Астролябия, установленная в верхней части часов, показывает положение Солнца относительно созвездий Зодиака.

В настоящее время часы хранятся в музее истории искусств в Вене.

Цена 30 коп.
Индекс 70465

8

ГОЛОВОЛОМКИ



Допишите «хвостики» и «петельки» до цифр так, чтобы выполнялись все указанные действия. Образец написания цифр приведен на рисунке. Действия в примерах надо производить последовательно сверху вниз и слева направо, а не по обычно принятому «старшинству».

Л. П. Мочалов

НОМЕР
9

Основан в 1970 году.

1975

9

КВАНТ

Научно-популярный
физико-математический
журнал
Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической
литературы

Главный редактор
академик И. К. Кикоин

Первый заместитель
главного редактора
академик А. Н. Колмогоров

Редакционная коллегия:

М. И. Башмаков,
С. Т. Беляев,
В. Г. Болтянский,
Н. Б. Васильев,
Ю. Н. Ефремов,
В. Г. Зубов,
П. Л. Капица,
В. А. Кириллин,

главный художник
А. И. Климанов,
С. М. Козел,

зам. главного редактора
В. А. Лешковцев,
Л. Г. Макар-Лиманов,
А. И. Маркушевич,
Н. А. Патрикеева,
И. С. Петраков,
Н. Х. Розов,
А. П. Савин,
И. Ш. Слободецкий,

зам. главного редактора
М. Л. Смолянский,
Я. А. Смородинский,
В. А. Фабрикант,
А. Т. Цветков,
М. П. Шаскольская,
С. И. Шварцбурд,
А. И. Ширшов.

Редакция:

В. Н. Березин,
А. Н. Виленкин,
И. Н. Клумова,

художественный редактор
Т. М. Макарова,
Н. А. Минц,
Т. С. Петрова,
В. А. Тихомирова,

зав. редакцией
Л. В. Чернова

В НОМЕРЕ:

2 *И. П. Стаханов.* Электродинамика движущихся сред
7 *Г. А. Гуревич.* Бесповторные последовательности
12 *А. Д. Бендукидзе.* У истоков Грузинской математической школы

Наши интервью

17 Когда катет длиннее гипотенузы . . .

Математический кружок

24 *Г. И. Копылов.* Задача на дом
30 **Победители конкурса «Кванта»**

Задачник «Кванта»

32 Задачи М341—М345; Ф353 — Ф357
34 Решения задач М304—М307; Ф312 — Ф317
45 **Спрашивайте — отвечаем**

Практикум абитуриента

49 *Л. В. Рыжков, Ю. И. Ионин.* Однородные уравнения

Информация

55 *М. И. Жгенти.* VI праздник юных математиков Закавказья
58 *В. Н. Березин* и др. Всероссийский слет актива научных обществ учащихся
64 Библиотеке имени К. Д. Ушинского — 50 лет
65 *А. В. Качанов, И. И. Наслузов.* Голубой экран — поступающим в вузы

Рецензии, библиография

67 *Ю. М. Брук.* Солнце, воздух и вода
68 *Т. С. Петрова, М. Л. Смолянский.* Новые книги

«Квант» для младших школьников

70 Задачи
71 *Ю. Г. Горст.* На даче
73 *Б. А. Кордемский.* Как? А если невозможно, то почему?
76 **Ответы, указания, решения**
Смесь *(23, 29, 47, 72)*

На первой странице обложки изображена иллюстрация к головоломке Г. Э. Дьюдени — одеяло, сшитое из лоскутков. Нужно «распороть» это одеяло по «шву» так, чтобы получились два совершенно одинаковых куска. Попробуйте это сделать.

© Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», «Квант», 1975 год

И. П. Стаханов

Электродинамика движущихся сред

«Известно, что электродинамика Максвелла в современном ее виде приводит в применении к движущимся телам к асимметрии, которая несвойственна, по-видимому, самим явлениям». Так начинается знаменитая работа Альберта Эйнштейна «К электродинамике движущихся тел» *). Далее Эйнштейн рассматривает в качестве примера не какое-нибудь новое, только что открытое явление, а явление электромагнитной индукции: при относительном движении проводника и магнита в проводнике возникает электрический ток. Это было установлено Фарадеем еще в первой половине прошлого столетия. Что же привлекло внимание молодого, в то время еще никому не известного служащего бюро патентов в швейцарском городе Берне к такому отнюдь не новому и, казалось бы, уже давно объясненному факту? Эйнштейна не устраивало не то, что это явление нельзя было объяснить, а то, что оно одинаково хорошо объясняется двумя совершенно различными способами.

В самом деле, если считать, что движется магнит, а проводник остается в покое, то в нем возникает электрический ток потому, что изменяющееся магнитное поле вызывает появление электрического поля, которое и приводит в движение заряды в проводнике. С другой стороны, если принять, что перемещается проводник, а магнит покоится (рис. 1), то появление тока объясняется силой Лоренца, действующей со стороны магнитного поля на свободные электроны, которые находятся в проводнике и движутся вместе с ним в магнитном поле. Если B — индукция магнитного поля, l — длина движущегося проводника, v — его скорость, то работа силы Лоренца, отнесенная к единичному положительному заряду, то есть электродвижущая сила индукции $\mathscr{E}$, равна

$$\mathscr{E} = -vBl \qquad (1)$$

(знак минус объясняется правилом Ленца для направления индукционного тока).

Однако, рассуждает Эйнштейн, мы имеем здесь дело с одним и тем же явлением: относительным движением магнита и проводника; так почему же для объяснения одного явления мы предлагаем две различные причины? Плохо, когда явление не имеет объяснения, но иметь два объяснения ненамного лучше, ибо кто может гарантировать нам, что они на самом деле не противоречат друг другу? Нет, не все в порядке в величественном здании электродинамики. И Эйнштейн берет это исходным пунктом для критики современной ему науки, критики, которая привела к радикальной перестройке наших представлений о пространстве и времени.

Как известно, специальный принцип относительности утверждает, что законы природы должны быть одинаковы, или, как говорят, инвариантны в различных системах отсчета, движущихся друг относительно друга равномерно и прямолинейно. Инвариантность законов природы не означает совпадения самих наблюдаемых явлений. Одно и то же явление, рассматриваемое в различных системах отсчета, описывается обычно различными количественными характеристиками. Так, несмотря на то, что законы падения тел в поезде, движущемся равномерно и прямолинейно, и на станции одни и те же, предмет, упавший с полки вагона, по-разному движется в системах отсчета, связанных с поездом и со станцией. В первом случае он падает по вертикальной прямой, а во втором — по параболе. Причина этого состоит в различии начальных условий. Тело, которое не имело в поезде горизонтальной проекции скорости, в системе отсчета, связанной со станцией, имеет ее.

---

*) Эта работа была опубликована в немецком физическом журнале «Анналы физики» в 1905 году, то есть ровно 70 лет тому назад. В ней Эйнштейн сформулировал основные положения теории относительности.

Впрочем, существуют и такие величины, которые не зависят от того, в какой системе отсчета они измеряются. Они называются инвариантами. К их числу принадлежит, например, заряд. Это утверждение представляет собой вывод, основанный на очень большом числе экспериментальных фактов.

В отличие от заряда, многие другие важные физические величины, измеренные в различных системах отсчета, движущихся друг относительно друга, имеют различные значения. К ним относятся, например, скорость и энергия. Иногда законы преобразования величин носят довольно сложный характер (вспомните закон сложения скоростей, близких к скорости света). Что же касается величин напряженности электрического поля и индукции магнитного поля, то у нас есть все основания считать, что они не остаются одинаковыми в разных системах отсчета. В самом деле, пусть в вагоне движущегося поезда висит наэлектризованный шарик. В системе отсчета, связанной с поездом, он создает электростатическое поле. Но относительно станции этот заряд движется со скоростью поезда, а движущийся заряд представляет собой ток, и поэтому на станции можно зарегистрировать магнитное поле, которого не будет в системе отсчета, связанной с поездом.

Рассмотрим, как изменяются значения напряженности электрического поля и индукции магнитного поля при переходе от неподвижной к движущейся системе отсчета. Пусть эта система отсчета (обозначим ее буквой K') движется вдоль оси X, связанной с неподвижной системой отсчета (обозначим ее буквой K), со скоростью v (рис. 2). Обозначим через E_x, E_y, E_z проекции вектора напряженности электрического поля, а

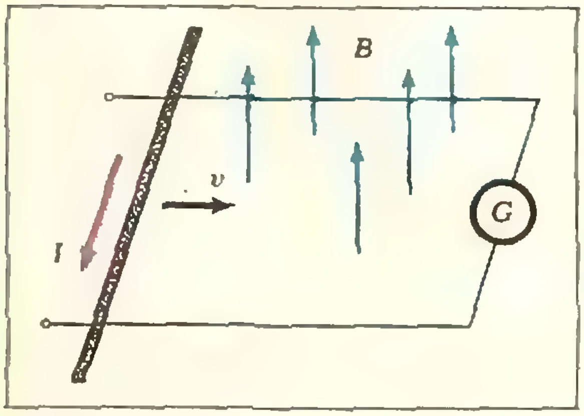


Рис. 1.

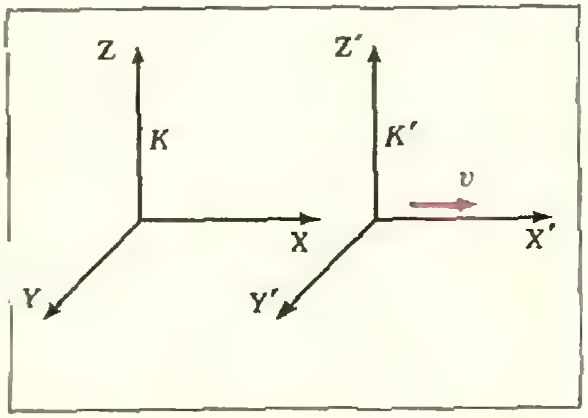


Рис. 2.

через B_x, B_y, B_z — проекции вектора магнитной индукции на оси координат неподвижной системы отсчета. Значения тех же величин, измеренные в подвижной системе отсчета, будем обозначать со штрихами (E'_x, B'_x и т. д.). Теория относительности дает следующие соотношения между этими значениями:

$$E'_x = E_x, \quad B'_x = B_x; \tag{2}$$

$$\left.\begin{aligned} E'_y &= \frac{E_y - vB_z}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \\ E'_z &= \frac{E_z + vB_y}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}; \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

$$\left.\begin{aligned} B'_y &= \frac{B_y + \frac{v}{c^2} E_z}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \\ B'_z &= \frac{B_z - \frac{v}{c^2} E_y}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Мы видим, что значения напряженности электрического поля и индукции магнитного поля оказываются различными в разных системах отсчета. Так, если в системе K магнитного поля нет ($B_x = B_y = B_z = 0$), то электрическое поле в движущейся системе отсчета возрастает в $1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ раз и одновременно с этим в ней *появляется магнитное поле*. Направление полей также меняется. Например, если в системе K электрическое поле направлено по оси Y, то в K' у него может появиться и проекция на ось Z (при $B_y \neq 0$).

Рассмотрим такой пример. Предположим, что в неподвижной системе отсчета (K) имеется магнит, создающий магнитное поле B, линии индукции которого направлены вдоль оси Z, а электрическое поле отсутствует. Тогда $B_z = B$, $B_x = B_y = 0$ и, кроме того, $E_x = E_y = E_z = 0$. Если $v \ll c$, то можно пренебречь величиной v^2/c^2 по сравнению с единицей и положить $\sqrt{1 - v^2/c^2} = 1$. Согласно первой из формул (3) получаем, что в движущейся системе отсчета возникает электрическое поле, направленное вдоль оси Y':

$$E'_y = -vB. \tag{5}$$

Заметим, что это поле не имеет своим источником электрические заряды. Оно возникло только вследствие движения одной системы отсчета относительно другой. Если в движущейся системе отсчета находится проводник длиной l, вытянутый вдоль оси Y', то согласно (5) в этом проводнике возникает электродвижущая сила, величина которой равна

$$\mathscr{E} = E'_y l = -vBl. \tag{6}$$

Это полностью согласуется с формулой (1). Таким образом, для объяснения возникновения э. д. с. в движущемся проводнике не требуется прибегать к использованию каких-либо дополнительных предположений. В частности, не нужно привлекать силу Лоренца.

Вернемся к формулам (3) и (4). Чтобы выразить напряженность электрического поля и индукцию магнитного поля в неподвижной системе отсчета (K) через их значения в движущейся системе (K'), можно решить уравнения (3) и (4) относительно E_y, E_z и B_y, B_z. Но можно сделать и по-другому. Достаточно вспомнить, что различие между движущейся и неподвижной системами отсчета условно. Наша «неподвижная» система K тоже движется относительно «движущейся» (K'), но со скоростью $-v$. Поэтому для того чтобы написать обратное преобразование полей, достаточно заменить в формулах (3) и (4) v на $-v$ и поменять местами штрихованные и нештрихованные значения соответствующих величин. Таким образом, получаем:

$$E_y = \frac{E'_y + vB'_z}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad E_z = \frac{E'_z - vB'_y}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}; \tag{7}$$

$$B_y = \frac{B'_y - \frac{v}{c^2} E'_z}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad B_z = \frac{B'_z + \frac{v}{c^2} E'_y}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{8}$$

Если, например, в движущейся системе отсчета магнитного поля нет, то из (8) следует, что

$$B_y = \frac{-\frac{v}{c^2}E'_z}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \text{ и } B_z = \frac{\frac{v}{c^2}E'_y}{\sqrt{1-v^2/c^2}},$$

т. е. в неподвижной системе отсчета оно существует. Наоборот, если в движущейся системе отсчета нет электрического поля, то в неподвижной системе поле, согласно (7), появится. Таким образом, вопрос о том, имеем ли мы дело с чисто электрическим или чисто магнитным полем и каково соотношение напряженности электрического поля и индукции магнитного поля, решается по-разному в различных системах отсчета. Или, другими словами, единое электромагнитное поле по-разному подразделяется на электрическое и магнитное поля в разных системах отсчета.

Теория относительности позволяет сократить число гипотез, которые лежат в основе электродинамики (пример с э. д. с. индукции для движущегося проводника). Теперь рассмотрим другой, не менее интересный пример, связанный с вопросом о силах, действующих на заряды. Мы постараемся показать, что для того чтобы найти силу, с которой магнитное поле действует на движущийся электрический заряд — силу Лоренца, — достаточно знать, как действует электростатическое поле на неподвижный заряд.

Вообразим, что имеется заряженное тело, которое покоится в системе отсчета K', поскольку действие электрического поля уравновешено какой-либо другой силой, например силой упругости F. Предположим для определенности, что электрическое поле в системе K' направлено вдоль оси X' (то есть $E'_y = E'_z = 0$), а магнитное поле — вдоль оси Y' ($B'_x = B'_z = 0$). Сила, действующая на покоящийся электрический заряд e, равна произведению напряженности электрического поля на заряд. Так как заряженное тело покоится, то сумма всех действующих на него сил равна нулю, то есть

$$e\mathbf{E}'_x + \mathbf{F} = 0.$$

В системе отсчета K электростатическая сила, действующая вдоль оси X, по-прежнему уравновешивается упругой силой (так как обе эти силы остались без изменения). Но, кроме того, возникает составляющая электростатического поля вдоль оси Z, которая, согласно (7), равна

$$E_z = -\frac{vB'_y}{\sqrt{1-v^2/c^2}}.$$

В соответствии с этим появляется электростатическая сила $e\mathbf{E}_z$, направленная вдоль оси Z. Эта сила уже не может быть уравновешена упругой силой, действующей по оси X. Следовательно, тело будет двигаться ускоренно? Нет, этого не происходит, так как тело, покоящееся в системе K', должно в системе K двигаться равномерно и прямолинейно со скоростью $-v$. Другими словами, все силы, действующие на тело, должны быть уравновешены. Мы приходим, таким образом, к выводу, что в системе K возникает дополнительная сила $\mathbf{F}_Л$, которая направлена вдоль оси Z (то есть перпендикулярно к направлению движения заряда и магнитному полю) и равна по абсолютной величине

$$F_Л = -eE_z = \frac{evB'_y}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \quad (9)$$

Эта сила и компенсирует действие электрического поля вдоль оси Z. Каково же происхождение силы $\mathbf{F}_Л$? Согласно одному из уравнений (8), в системе K есть и магнитное поле, индукция которого

$$B = B_y = \frac{B'_y}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \quad (10)$$

Сравнивая (9) и (10), получаем, что

$$F_Л = evB.$$

Следовательно, $\mathbf{F}_Л$ — это и есть сила Лоренца.

Разберем еще одну задачу: сформулировать закон Ома для движущегося проводника. Этот вопрос стал особенно актуальным в связи с появлением магнитной гидродинамики — отрасли науки, исследующей законы движения проводящей среды (жидкости или газа) в магнитном поле. Такой средой может оказаться, например, жидкий металл или плазма, движущаяся в космическом пространстве.

Согласно принципу относительности в системе отсчета, движущейся вместе с проводником, справедлив обычный закон Ома, установленный для неподвижного проводника. Так как различные части среды могут двигаться с разными скоростями, то мы будем рассматривать достаточно малый объем ее и запишем закон Ома в виде

$$j' = \lambda E',$$

где j' — плотность тока, E' — напряженность электрического поля, а λ — удельная электропроводность.

Пусть (как это обычно и бывает) рассматриваемая среда движется со скоростями, малыми по сравнению со скоростью света, так что $v^2/c^2 \ll 1$. Будем считать, что среда как целое не заряжена (это тоже чаще всего выполняется); тогда плотность электрического тока j в неподвижной системе отсчета (K) равна j'. Для заряженной среды это было бы, конечно, не так, поскольку движущийся заряд эквивалентен току. Для того чтобы получить закон Ома, то есть установить связь между j и E, для движущегося проводника, нам осталось выразить значение напряженности электрического поля E' через ее значение E в неподвижной системе отсчета. Это можно сделать с помощью формул (2) и (3). Однако мы еще ничего не сказали о направлении движения проводника.

Если направление движения проводника (вдоль оси X) совпадает с направлением тока, а значит, и электрического поля, то, согласно (2), $E' = E'_x = E_x = E$. При этом закон Ома имеет тот же вид, что и для неподвижных проводников.

Рассмотрим теперь другой частный случай. Пусть имеется магнитное поле B, направленное в неподвижной системе отсчета вдоль оси Z (то есть $B_z = B$, $B_x = B_y = 0$), пусть проводник движется параллельно оси X, а ток течет по оси Y ($E_y = E$). Тогда в движущемся проводнике $E'_x = 0$, $E'_z = 0$ и $E' = E'_y$. При условии, что $v^2/c^2 \ll 1$, $E' = E - vB$ и

$$j = \lambda (E - vB).$$

В данном случае закон Ома для движущегося проводника отличается от такового для неподвижного: ток зависит не только от напряженности электрического поля, но и от скорости движения проводника, а также от индукции магнитного поля.

В заключение — несколько задач для самостоятельного решения.

Упражнения

1. Описать движение заряженной частицы в однородных электрическом и магнитном полях, направленных под прямым углом друг к другу (скрещенные поля). Начальная скорость частицы перпендикулярна обоим полям.

Указание. Перейти к системе отсчета, в которой электрическое поле равно нулю.

2. Найти выражение для разности потенциалов между обкладками бесконечного плоского конденсатора, движущегося со скоростью v вдоль направления его обкладок В системе отсчета, связанной с конденсатором, разность потенциалов задана и равна $\Delta\varphi_0$.

3. Определить электромагнитное поле электрона, движущегося с постоянной скоростью v.

Бесповторные последовательности

Г. А. Гуревич

Последовательности Аршона

Назовем последовательность цифр *повторной последовательностью*, если в ней есть хотя бы одна пара рядом стоящих одинаковых групп цифр. Например, последовательности $1, \underline{2, 3, 4}, \underline{2, 3, 4}, 2, 1$ и $1, 2, \underline{2, 7, 6}, \underline{2, 7, 6}, 8$ — повторные, а последовательности 4, 2, 1, 2, 3, 4, 2, 3 и 3, 2, 3, 1, 2, 7 не являются повторными. Неповторные последовательности мы назовем *бесповторными*. Через $Б(n)$ обозначим множество бесповторных последовательностей длины n, а через $|Б(n)|$ — их число.

Интуитивно ясно: чем длиннее последовательность, тем вероятнее, что в ней найдутся две рядом стоящие одинаковые группы цифр. И в самом деле, если вы наугад выпишете достаточно длинную последовательность, то наверняка эта последовательность окажется повторной.

Придадим этому утверждению точный смысл.

Задача 1. Докажите, что для любого числа $\varepsilon > 0$ можно указать такое n, что среди всех последовательностей длины n доля бесповторных последовательностей будет меньше ε, то есть $\frac{|Б(n)|}{10^n} < \varepsilon$.

Легко доказать, что все последовательности длины больше трех, составленные из двух цифр 1 и 2 — повторные.

Однако из трех различных цифр уже можно составить как угодно длинную бесповторную последовательность. Этот факт в 1937 году доказал советский математик С. Е. Аршон. Аршон предложил индуктивный способ построения бесповторных последовательностей, заключающийся в следующем.

Обозначим через K_1 бесповторную последовательность 1, 2, 3. Предположим, что бесповторная последовательность K_n уже построена. Последовательность K_{n+1} получается из нее так.

Если число $n+1$ четно и на $n+1$-м месте в последовательности K_n стоит 1, то к последовательности K_n приписывается тройка цифр 3, 2, 1; если стоит 2, — то тройка 1, 3, 2; если стоит 3, — то тройка 2, 1, 3.

Если число $n+1$ нечетно и на $n+1$-м месте в последовательности K_n стоит 1, то к последовательности K_n приписывается тройка 1, 2, 3; если стоит 2, — то тройка 2, 3, 1; если стоит 3, — то тройка 3, 1, 2.

В частности,

$$K_2 = 1, 2, 3, 1, 3, 2$$

($n = 2$ — число четное, и на втором месте в K_1 стоит 2),

$$K_3 = 1, 2, 3, 1, 3, 2, 3, 1, 2$$

($n = 3$ — число нечетное, и на третьем месте в K_2 стоит 3),

$$K_4 = 1, 2, 3, 1, 3, 2, 3, 1, 2, 3, 2, 1$$

($n = 4$ — число четное, и на четвертом месте в K_3 стоит 1) и т. д.

Доказательство бесповторности последовательностей, получающихся по способу Аршона, довольно громоздко, и здесь мы его приводить не будем *).

Попробуем теперь оценить число $|\text{Б}(n)|$ бесповторных последовательностей длины n (из десяти цифр). Если удастся показать, что при любом натуральном n это число больше нуля, то тем самым у нас получится еще одно — уже неконструктивное — доказательство существования сколь угодно длинных бесповторных последовательностей. На самом деле мы сейчас выведем существенно более сильное неравенство

$$|\text{Б}(n)| > 8^n, \qquad (1)$$

чем не только докажем существование сколь угодно длинных бесповторных последовательностей, но и дадим достаточно хорошую нижнюю оценку их числа.

Задача М310

Теперь вспомним задачу М310 из «Задачника «Кванта» — см. «Квант» № 2 за 1975 год.

Докажите, что среди n-значных чисел найдется более 8^n таких, в десятичной записи которых никакая группа цифр (в частности, никакая цифра) не встречается два раза подряд.

Ясно, что решение задачи М310 состоит в доказательстве неравенства (1). Мы докажем сначала некоторое вспомогательное неравенство, которое пригодится нам в дальнейшем.

Вспомогательное неравенство. Допустим, что выписаны все бесповторные последовательности длины n — всего $|\text{Б}(n)|$ штук, и мы хотим выписать все бесповторные последовательности длины $n+1$.

Возьмем произвольную последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n$ из множества $\text{Б}(n)$. Запишем новые десять последовательностей — длины $n+1$:

$$\begin{array}{l} a_1, a_2, \ldots, a_n, 0, \\ a_1, a_2, \ldots, a_n, 1, \\ \\ a_1, a_2, \ldots, a_n, 9. \end{array}$$

Так поступим со всеми последовательностями из множества $\text{Б}(n)$. Получим некоторое множество последовательностей; обозначим его через $\text{Б}^*(n+1)$. Среди последовательностей множества $\text{Б}^*(n+1)$ выберем те, у которых в конце стоят две одинаковые цифры. Множество таких последовательностей обозначим через $\text{Б}_1(n+1)$. Аналогично через $\text{Б}_2(n+1)$ обозначим множество таких последовательностей из $\text{Б}^*(n+1)$, у которых в конце два раза подряд стоит одна и та же подпоследовательность длины 2. Вообще через $\text{Б}_i(n+1)$ обозначим множество тех последовательностей из $\text{Б}^*(n+1)$, у которых в конце два раза подряд стоит одна и та же подпоследовательность длины i. Поскольку все последовательности из $\text{Б}^*(n+1)$ имеют длину $n+1$, то максимальное $i=n_1$, при котором множество $\text{Б}_i(n+1)$ не пустое, равно $\left[\frac{n+1}{2}\right]$.

Все последовательности, принадлежащие множествам $\text{Б}_1(n+1)$, $\text{Б}_2(n+1), \ldots, \text{Б}_{n_1}(n+1)$ — повторные. Докажите самостоятельно, что этими последовательностями исчерпываются повторные последовательности множества $\text{Б}^*(n+1)$ и что множество $\text{Б}^*(n+1)$ содержит все бесповторные последовательности длины $n+1$.

Поэтому, если из множества $\text{Б}^*(n+1)$ вычеркнуть все последовательности, принадлежащие множествам $\text{Б}_i(n+1)$, $i=1, 2, \ldots, n_1$, то получится множество $\text{Б}(n+1)$. Следовательно,

$$|\text{Б}(n+1)| \geqslant |\text{Б}^*(n+1)| - |\text{Б}_1(n+1)| - |\text{Б}_2(n+1)| - \cdots - |\text{Б}_{n_1}(n+1)|. \qquad (2)$$

---

*) Посмотреть это доказательство можно в книге А. М. Яглома и И. М. Яглома «Неэлементарные задачи в элементарном изложении», М., Гостехиздат, 1954 (задача 124б).

Вопрос для самопроверки. Можно ли в неравенстве (2) заменить знак $\geqslant$ на знак ?

В силу построения множества $Б^* (n+1)$ имеем: $|Б^* (n+1)| = 10 \cdot |Б (n)|$, и нам нужно только оценить число элементов каждого множества $Б_i (n+1)$. Оказывается,

$$|Б_i(n+1)| \leqslant |Б (n+1-i)|. \quad (3)$$

Из неравенств (2) и (3) следует важное неравенство, которое мы и назвали вспомогательным:

$$|Б (n+1)| > 10 \cdot |Б (n)| - (|Б (n)| + |Б (n-1)| + \ldots + |Б (1)|). \quad (4)$$

Итак, нам нужно доказать неравенство (3).

Небольшое отступление

Пусть A и B — два *конечных* множества, и мы хотим узнать, в каком из них больше элементов. Первое, что приходит на ум, — это сосчитать количество элементов множества A и множества B, а затем сравнить полученные числа. Но если множество содержит очень много элементов или как-то «хитро» устроено, то подсчитать его количество элементов бывает довольно сложно. И совсем уж непонятно, что делать, если множества A и B бесконечные. Оказывается, есть универсальный способ, позволяющий сравнивать даже бесконечные множества. Опишем этот способ на примере.

Пусть A — это множество школьников, пришедших в кинотеатр, а B — множество мест в зрительном зале. Рассадим школьников по местам. Если останутся свободные места, то $|B| > |A|$. Если все места окажутся занятыми и часть школьников останется без места, то $|A| > |B|$. И наконец, если окажется, что все места заняты и все школьники рассажены, то $|A| = |B|$.

В чем же состоит описанный выше способ? Мы элементам множества A *ставили в соответствие* элементы множества B. Если первыми оказывались исчерпанными элементы множества A, то $|B| \geqslant |A|$, если же — элементы множества B, то $|A| \geqslant |B|$. При этом важно то, что разным элементам из A ставились в соответствие разные элементы из B (мы не разрешали одному ученику занимать сразу два места) и, наоборот, разным элементам из B соответствовали разные элементы из A (мы не разрешали сажать на одно место сразу двух учеников). Такое соответствие называется *однозначным*.

Доказательство неравенства (3)

Попробуем теперь установить однозначное соответствие между множеством $Б_i (n+1)$ и частью множества $Б (n+1-i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n_1)$. Напомним, что последовательности из множества $Б_i(n+1)$ имеют вид

$$a_1, a_2, \ldots, a_l, b_1, b_2, \ldots, b_i, b_1, b_2, \ldots, b_i, \quad (5)$$

где $l + 2i = n + 1$ и последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_l, b_1, b_2, \ldots, b_i, b_1, b_2, \ldots, b_{i-1}$ — бесповторная. Значит последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_l, b_1, b_2, \ldots, b_i$ — также бесповторная. Поставим в соответствие последовательности (5) из множества $Б_i (n+1)$ последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_l, b_1, b_2, \ldots, b_i$ из множества $Б (n+1-i)$:

$$a_1, a_2, \ldots, a_l, b_1, b_2, \ldots, b_i, b_1, b_2, \ldots, b_i \to a_1, a_2, \ldots, a_l, b_1, b_2, \ldots, b_i.$$

Очевидно, что это соответствие однозначное, причем для каждой последовательности из $Б_i (n+1)$ нашлась соответствующая ей последовательность из $Б (n+1-i)$. Значит, $|Б_i (n+1)| \leqslant |Б (n+1-i)|$, и неравенство (3), а значит, и (4), доказаны.

Решение задачи М310

Докажем теперь (индукцией по n) еще одно неравенство:

$$|Б (n+1)| > 8 \cdot |Б (n)|; \quad (6)$$

ясно, что нужное нам неравенство (1) из него следует, поскольку

$$|Б(n)| > 8\cdot|Б(n-1)| >$$

$$> 8^2\cdot|Б(n-2)| > \ldots > 8^{n-1}\cdot|Б(1)|,$$

и $|Б(1)| = 10$.

База индукции. $n = 1$.

$|Б(2)| > 8\cdot|Б(1)|$, так как $|Б(1)| = 10$, а $|Б(2)| = 90$.

Индукционный шаг. Предположим, уже доказано, что

$$\begin{aligned} &|Б(n)| > 8\cdot|Б(n-1)|,\\ &|Б(n-1)| > 8\cdot|Б(n-2)|,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &|Б(2)| > 8\cdot|Б(1)|; \end{aligned} \qquad (7)$$

нужно доказать неравенство (6).

Из неравенств (7) следует, что

$$|Б(n)| > 8^i\cdot|Б(n-i)|,$$

или

$$|Б(n-i)| < \frac{|Б(n)|}{8^i}, \qquad (7')$$

$$i = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Подставим найденные оценки (7′) для $|Б(n-i)|$, $i = 1, 2, \ldots, (n-1)$, в неравенство (4); получим

$$Б(n+1)| > 10\cdot|Б(n)| -$$

$$-|Б(n)|\cdot\left(1+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{8^{n-1}}\right).$$

Так как

$$1+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{8^{n-1}} < 2,$$

то $|Б(n+1)| > 8\cdot|Б(n)|$.

Сформулируем теперь несколько задач.

2. Постройте бесповторную последовательность, при приписывании к концу которой любой цифры всегда будет получаться повторная последовательность.

3. Используя последовательность С. Е. Аршона, докажите существование как угодно длинных последовательностей, составленных из цифр 1 и 2, у которых нет трех одинаковых рядом стоящих групп цифр.

4. Докажите, что для любого натурального n бесповторных последовательностей длины n, составленных из четырех цифр 1, 2, 3, 4, больше чем 2^n.

Из задачи 4 вытекает существование как угодно длинной бесповторной последовательности из четырех различных цифр. С. Е. Аршон показал, что на самом деле для существования сколь угодно длинной бесповторной последовательности достаточно и трех цифр.

Бесконечные бесповторные последовательности

Итак, мы доказали существование *как угодно длинных* бесповторных последовательностей. В этом параграфе мы докажем существование и *бесконечной* бесповторной последовательности (заметим, что из первого еще не следует второе).

Задача 5. Докажите, что если существует хотя бы одна бесконечная бесповторная последовательность, то существует и бесконечно много таких последовательностей.

Обозначим через Б множество всех конечных бесповторных последовательностей. Поскольку множество Б бесконечно, а различных цифр — конечное число (всего 10), то найдется по крайней мере одна цифра, с которой начинается бесконечно много последовательностей из Б. Обозначим эту цифру через a_1. Выбросим из Б те последовательности, которые не начинаются с цифры a_1. Получим бесконечное множество $Б^{(1)}$. Аналогично найдется цифра a_2, стоящая на втором месте у бесконечного числа последовательностей из $Б^{(1)}$. Выбросим из $Б^{(1)}$ те последовательности, у которых вторая цифра отлична от a_2. Получим бесконечное множество $Б^{(2)}$ и так далее.

Рассмотрим теперь бесконечную последовательность $a_1, a_2, \ldots$; докажем, что она бесповторная.

Для этого нам достаточно показать, что при любом натуральном n бесповторна конечная последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Но по построению все последовательности множества $Б^{(n)}$ начинаются с последовательности $a_1, a_2, \ldots, a_n$, а множество $Б^{(n)}$ является подмножеством множества Б, и значит, все последовательности из Б$^{(n)}$ бесповторные. Любое же начало бесповторной последовательности само является бесповторной последовательностью.

Задача 6. Докажите, что среди любых одиннадцати бесконечных десятичных дробей, можно выбрать две дроби, у которых совпадают цифры в бесконечном числе разрядов.

Обобщение

Обозначим буквой P свойство *«быть бесповторной последовательностью»*. Тогда только что доказанное утверждение имеет следующую структуру:

Посылка		Следствие
Есть как угодно длинная последовательность, обладающая свойством P	то $\Longrightarrow$	Есть бесконечная последовательность, обладающая свойством P

Останется ли верным это утверждение, если считать, что P — произвольное свойство числовых последовательностей? В общем случае — нет. Приведем пример: рассмотрим свойство *«быть конечной последовательностью»*. Очевидно, что существуют как угодно длинные конечные последовательности, но бесконечной конечной последовательности не существует.

Заметим теперь, что, доказывая существование бесконечной бесповторной последовательности, мы опирались только на следующие два факта, непосредственно вытекающие из определения бесповторной последовательности.

1°. Всякое начало последовательности, обладающей свойством P, также обладает этим свойством.

2°. Бесконечная последовательность, как угодно длинные начала которой обладают свойством P, также обладает этим свойством.

Определение. *Произвольное свойство числовых последовательностей, удовлетворяющее условиям* 1° *и* 2°, *назовем наследственным свойством.*

Например, свойства «не содержать цифру 3», «состоять только из цифр 1, 2, 3», «начинаться цифрой 7» — *наследственные* свойства, а свойства «содержать бесконечно много цифр 4», «кончаться цифрой 7» не являются наследственными свойствами.

Теорема. *Пусть P — произвольное наследственное свойство. Тогда, если существуют как угодно длинные последовательности, обладающие свойством P, то существует и бесконечная последовательность, обладающая этим свойством.*

Мы не будем останавливаться на доказательстве этой теоремы, поскольку оно полностью повторяет доказательство, приведенное в предыдущем параграфе.

Приложение

Рассмотрим числовые последовательности, составленные из трех цифр: 1, 2, 3. Назовем некоторые последовательности (длины два и более) *запрещенными*. Известно, что все запрещенные последовательности имеют разную длину.

Назовем последовательности, не содержащие запрещенных последовательностей, *правильными*.

Обратимся снова к «Задачнику «Кванта» — к задаче М300 (см. «Квант» № 12 за 1974 год).

Из утверждения задачи М300 следует, что *существуют сколь угодно длинные правильные последовательности*. А теперь заметим, что свойство *«быть правильной последовательностью»* всегда наследственное свойство (докажите)! Значит, утверждение о существовании как угодно длинных правильных последовательностей можно заменить более сильным — о существовании бесконечной правильной последовательности, а утверждение задачи М300 — утверждением о существовании бесконечного слова без запрещенных буквосочетаний.

А. Д. Бендукидзе

У истоков Грузинской математической школы

[redacted]

Рождение Грузинской математической школы неразрывно связано с основанием грузинского университета.

В 1907 году подготовку к основанию грузинского университета, начавшуюся еще в XIX веке, возглавил молодой приват-доцент Петербургского университета, историк Иван Александрович Джавахишвили. Ему и его немногочисленным соратникам пришлось преодолеть множество препятствий. И вот 26 января 1918 года в Тбилиси в торжественной обстановке был открыт грузинский университет.

Вначале университет имел лишь один факультет — философский; профессорско-преподавательский же состав университета насчитывал всего 17 членов. Среди них был один математик— приват-доцент Московского университета Андрей Михайлович Размадзе.

Вскоре преподавательский состав пополнился еще одним математиком — в мае 1918 года профессорский совет удовлетворил просьбу Арчила Кирилловича Харадзе о предоставлении ему должности сотрудника университета. Позже, в 1919 году, по предложению А. М. Размадзе, к университету для ведения научной работы был прикомандирован Георгий Николаевич Николадзе, а осенью 1920 года на должность заведующего кафедрой теоретической механики был приглашен Николай Иванович Мусхелишвили.

Эти ученые — А. М. Размадзе, Г. Н. Николадзе, Н. И. Мусхелишвили, А. К. Харадзе — стоят у истоков грузинской математической школы и по праву считаются основоположниками высшего математического образования и научной работы в Грузии. Расскажем немного о каждом из них.

1

А. М. Размадзе родился в 1890 году. Окончив в 1906 году Кутаисское реальное училище, Размадзе поступает на математическое отделение физико-математического факультета Московского университета. Уже в студенческие годы Размадзе начинает интересоваться проблемами вариационного исчисления*).

После окончания университета Размадзе был назначен преподавателем в Муром. В Муроме он продолжает свои занятия и в 1914 году публикует обстоятельный мемуар в одном из авторитетнейших европейских математических журналов. В 1917 году Размадзе становится приват-доцентом Московского университета.

---

*) Вариационное исчисление — раздел математики, изучающий экстремумы функционалов (говоря нестрого, функционал — это функция от функции). Типичным примером вариационной задачи является задача о нахождении геодезических, то есть кратчайших линий на той или иной поверхности. Возникновение вариационного исчисления обычно связывают с задачей о брахистохроне или кривой кратчайшего спуска (brachistos — кратчайший, chronos — время). В этой задаче требуется найти линию, по которой шарик, катясь без трения, быстрее всего пройдет из верхней точки в нижнюю. Задачу о брахистохроне поставил И. Бернулли в 1696 году. Ее, кроме самого И. Бернулли, решили Лейбниц, Лопиталь, Я. Бернулли и Ньютон. Кривая оказалась циклоидой (см. статью С. Г. Верова «Касательные к рулеттам», «Квант», 1975, № 5).

После открытия университета в Тбилиси Размадзе возвращается в Грузию; с тех пор вся его работа связана с Тбилисским университетом.

Наряду с интенсивной научной и педагогической деятельностью Размадзе ведет большую работу по созданию учебников на родном языке. В 1920 году выходит в свет «Введение в анализ» — I том задуманного им многотомного курса математического анализа, а спустя два года — «Неопределенные интегралы» — первая часть III тома. Значение этих книг — первых университетских учебников на грузинском языке — очень велико. Жаль только, что их автор не успел завершить так блестяще начатое дело.

В 1924 году Размадзе прочел доклад на Международном математическом конгрессе в Торонто, а в 1925 году в Сорбонне защитил диссертацию на степень доктора математики. К этому времени Размадзе уже крупный специалист по вариационному исчислению — ему даже предлагают остаться в Париже на постоянную работу. Но Андрей Михайлович отклоняет это предложение и возвращается на родину.

Многогранную деятельность Размадзе прервала преждевременная смерть, последовавшая после тяжелой болезни осенью 1929 года.

А. М. Размадзе — первый руководитель грузинских математиков, и вполне закономерно, что Тбилисский Математический институт Академии наук ГССР носит его имя.

2

Георгий Николадзе, по словам выдающегося французского математика Эли Картана, был рожден геометром. Сам Николадзе писал в 1907 году: «Я считаю себя человеком, одаренным довольно большой геометрической интуицией, и мне кажется, что каждая моя мысль должна быть облечена в конкретный образ. Всякий новый закон (или теорему) я должен непременно понять интуитивно — почувствовать геометрически его необходимость. До тех пор никакое логическое доказательство ничего не прояснит. Но когда я почувствовал, то я начинаю интуитивно так ясно его представлять, что доказательство для меня лично часто становится излишним, хотя «математическое мое чувство» удовлетворяется вполне только после того, как закон (или теорема) мною: а) постигнут, б) логически доказан».

Однако после окончания гимназии Николадзе поступает не в университет, а в Петербургский технологический институт: Г. Н. Николадзе, сын видного грузинского общественного деятеля Н. Я. Николадзе, понимал, что в то время Грузия с ее природными богатствами больше нуждалась в инженерах, чем в математиках. Исключительное чувство долга перед родиной, присущее волевой и целеустремленной натуре Николадзе, предопределило выбор — он решил стать инженером-металлургом.

Блестяще окончив в 1913 году Технологический институт, Николадзе для приобретения практических навыков едет в Донбасс, где начинает работать на металлургическом заводе. Кроме того, Георгий Николаевич занимается математикой, работает над грузинской технической терминологией, организовывает гимнастические кружки (спортом Георгий Николаевич увлекался с детства; в 1912 году он был участником слета в Праге и получил первые награды с большими дипломами за выступления на гимнастических снарядах в легкоатлетическом шестиборье).

Весной 1918 года Николадзе возвращается в Грузию со своим первым

Грузинские математики (слева направо): А. М. Размадзе, А. К. Харадзе (стоит), Г. Н. Николадзе, Н. И. Мусхелишвили.

математическим сочинением. Его приглашают работать в университете, и он начинает готовиться к сдаче докторантских экзаменов. Параллельно Николадзе ведет научную работу в области электрометаллургии, организовывает спортивное общество «Шевардени» («Сокол»), руководит восхождениями на вершины Казбека и Эльбруса, участвует в создании политехнического факультета; позже на этом факультете он преподает не только математику, но и металлургию. По его инициативе проводится большая работа по разработке грузинской научной математической терминологии. В результате этой работы в 1925 году выходит составленный Н. И. Мусхелишвили, Г. Н. Николадзе и А. К. Харадзе «Русско-грузинский и грузинско-русский лексикон математических терминов».

В 1926 году Николадзе на два года командируется в Западную Европу для научной работы по математике и изучения некоторых вопросов в области электрохимии. Весной 1928 года на Международном конгрессе в Болонье он прочел доклад о непрерывных системах геометрических фигур, а летом того же года защитил в Сорбонне диссертацию и получил степень доктора математики.

В январе 1931 года под руководством Николадзе на Тбилисском опытном ферромарганцевом заводе началась серия плавок. В одну из холодных ночей Георгий Николаевич, спеша на завод, сильно простудился и заболел воспалением легких. 5 февраля 1931 года Г. Н. Николадзе скончался; ему не было еще и 43 лет.

За свою короткую жизнь Г. Н. Николадзе успел сделать очень много. Объяснить это одним талантом нельзя: Николадзе был исключительно организованным и дисциплинированным человеком. Его ученики-гимнасты вспоминают, что занятия секции он назначал не ровно в 7 часов, а в 7 часов 7 минут, или в 6 часов 54 минуты и т. д. Сам всегда приходил точно и требовал того же от других.

3

Н. И. Мусхелишвили родился в 1891 году. В 1914 году он окончил физико-математический факультет Петербургского университета и был оставлен при кафедре механики для подготовки к профессорскому званию.

В 1915 году появляется первая научная работа Николая Ивановича (выполненная им совместно с профессором Г. В. Колосовым), положившая начало целому циклу работ по теории упругости. В этом же году начинается его педагогическая деятельность — он становится преподавателем университета, а также Электротехнического института.

В 1920 году Мусхелишвили занимает кафедру теоретической механики в Тбилисском университете и вскоре избирается профессором. Николай Иванович принимает активное участие в работе университета, в частности в организации политехнического факультета (1922 год), на базе которого в 1928 году был создан Грузинский политехнический институт. Николай Иванович был деканом факультета, а позже — проректором института.

В 1922 году в свет выходят «Лекции по аналитической геометрии», послужившие основой выдержавшему несколько изданий «Курсу аналитической геометрии». Параллельно Мусхелишвили работает над созданием учебника по теоретической механике на грузинском языке. В 1926 году выходит I том этого курса, а в 1928 году — том II.

В 1933 году Николай Иванович избирается членом-корреспондентом Академии наук СССР, в 1934 году ему без защиты диссертации присуждается степень доктора наук. С 1939 года он действительный член Академии наук СССР.

В 1941 году была основана Академия наук ГССР; Н. И. Мусхелишвили — ученый с мировым именем — избирается ее президентом. Более 30 лет занимал он эту должность и вел огромную государственную работу. В данный момент Николай Иванович почетный президент Академии, президентом же избран его бывший ученик — ныне акдемик И. Н. Векуа, широко известный своими научными трудами.

Николай Иванович дважды удостаивался государственных премий — за монографии «Некоторые основные задачи математической теории упругости» и «Сингулярные интегральные уравнения». В 1945 году ему было присвоено звание Героя Социалистического Труда.

Неоценим вклад Н. И. Мусхелишвили в грузинскую науку и культуру; особо же следует отметить то, что после смерти А. М. Размадзе и Г. Н. Николадзе он всю тяжесть научно-организационной работы по математике взял на себя и с честью справился с этой трудной и ответственной задачей.

4

Профессор А. К. Харадзе преподает в университете более полувека. Он ветеран математического факультета — все грузинские математики, получившие университетское образование,— его студенты.

А. К. Харадзе родился в 1895 году. Окончив в Тбилиси гимназию, он поступил в 1912 году на математическое отделение физико-математического факультета Московского университета.

В это время в Московском университете под руководством Д. Ф. Егорова и Н. Н. Лузина создавалась знаменитая московская школа теории функций, сыгравшая огромную роль в развитии математики в нашей стране. Заинтересовался вопросами теории функций и студент Харадзе. Он пишет конкурсное сочинение «Бесконечные последовательности функций», за которое получает похвальный отзыв.

После окончания университета (1917 год) А. К. Харадзе по рекомендации Д. Ф. Егорова был оставлен в университете для подготовки к профессорскому званию, но в 1918 году начинает работать в Тбилисском университете и докторантские экзамены сдает уже в Тбилиси.

Свою первую лекцию в университете — по высшей алгебре — Арчил Кириллович вспоминает с удовольствием. Лекции по высшей алгебре, читанные Харадзе в первые годы педагогической деятельности, легли в основу его учебника на грузинском языке. Арчил Кириллович является также автором первого учебника на грузинском языке по высшей математике для втузов.

Научные интересы А. К. Харадзе группируются вокруг классических вопросов анализа и теории функций. Они отражены в монографии «Теоремы о среднем значении в применении к полиномам» (1947 год) и в многочисленных журнальных статьях.

Арчил Кириллович — блестящий лектор. Высокая культура речи и четкость изложения сразу же покоряют слушателя. Автору этих строк особенно запомнились две лекции Арчила Кирилловича. Первая — вводная лекция для студентов-первокурсников (1938 год). Лектор вдохновенно говорил о математике, ее абстрактном характере, о взаимосвязи ее разных разделов. Вторая — лекция на тему «Что такое дифференциальное исчисление», прочитанная в 1963 году учащимся города Тбилиси.

Вначале Арчил Кириллович заведовал кафедрой алгебры и геометрии, а позже возглавил кафедру математического анализа, которой руководит по сей день.

5

Весной 1918 года в Тбилисском университете был основан объединенный естественно-математический и врачебный факультет. В апреле 1919 года этот факультет разделился на два. Деканом естественно-математического факультета стал А. М. Размадзе. Началась подготовка национальных кадров математиков.

Первый выпуск факультета был в 1924 г. Он состоял из одного человека — Левана Петровича Гокиели (1901—1975). Сразу же по окончании университета Леван Петрович приступил к преподаванию в нем. Уже с 1927 года он, параллельно с А. М. Размадзе, читал курс математического анализа, который лег в основу его учебников «Дифференциальное исчисление» и «Введение в анализ». С 1930 года Л. П. Гокиели — профессор и заведующий кафедрой Университета. В 1935 году он защищает докторскую диссертацию, в 1961 году избирается членом-корреспондентом АН ГССР.

Л. П. Гокиели внес существенный вклад в дело подготовки грузинских математиков. Автор этих строк и многие его коллеги до сих пор помнят его оригинальные лекции по математическому анализу.

К настоящему времени грузинские математики достигли больших успехов. Исследования ведутся почти по всем разделам современной математики. Это стало возможным благодаря своевременно заложенному прочному фундаменту грузинской математической школы.

Подробнее о жизни Г. Н. Николадзе и других грузинских математиков вы можете прочитать в книге А. Н. Боголюбова «Георгий Николаевич Николадзе» (М., 1972).

Когда катет длиннее гипотенузы...

**Беседа
с экс-чемпионом мира
по шахматам
Михаилом Талем**

У математики и шахмат много родственного. Формы мышления математика и шахматиста довольно близки, и не случайно математические способности часто сочетаются с шахматными. Достаточно упомянуть имена чемпионов мира по шахматам. Математикой интересовался первый шахматный король В. Стейниц. Известным математиком был его преемник доктор Эм. Ласкер. Нынешний президент ФИДЕ экс-чемпион мира М. Эйве возглавлял крупнейший в Голландии вычислительный центр. Первый советский чемпион мира доктор технических наук М. Ботвинник в последние годы работает над алгоритмом шахматной игры для ЭВМ.

Многие крупные математики проявляли к шахматной теме чисто научный интерес. Как известно, великий математик Карл Гаусс занимался задачей «о расстановке восьми ферзей», а другой великий математик Леонард Эйлер — задачей «о ходе коня». В наше время математики разных стран работают в области программирования шахмат (разумеется, разрабатываемые при этом математические методы могут быть использованы для решения других, более актуальных проблем). Шахматная доска, фигуры и сама игра часто применяются для иллюстрации разнообразных математических понятий и задач.

Таким образом, публикация в «Кванте» различных статей и задач с участием шахмат — вполне естественное явление. Мы уверены, что большинство читателей, увлеченных математикой и физикой, любят играть и в шахматы. Кстати говоря, в чемпионатах МГУ по шахматам чаще других побеждают студенты мехмата, и лишь недавно у них появились серьезные конкуренты, да и те — студенты факультета кибернетики.

Сегодня «Квант» с большим удовольствием предоставляет свои страницы одному из самых популярных шахматистов современности экс-чемпиону мира Михаилу Талю. Интервью у гроссмейстера взял наш постоянный «шахматно-математический» автор Евгений Гик.

Встретиться с Талем оказалось нелегкой задачей. Несколько месяцев подряд он переезжал с одного международного турнира на другой (и всюду занимал первые места!). «Поймать» гроссмейстера удалось в Ленинграде в последний свободный от игры день 42-го чемпионата страны (высшей лиги). Во время беседы Таль признался, что впервые в жизни дает интервью корреспонденту специального физико-математического журнала...

— Михаил Нехемьевич, обещаю вам не касаться сегодня матча Фишер — Карпов. Мой первый вопрос в какой-то степени связан с математикой. Правда ли, что в школе у вас были незаурядные математические способности, и вы постоянно побеждали в математических викторинах?

— Конечно, мне трудно самому судить о своих способностях. Но, насколько помню, алгебраические задачи я решал почти мгновенно.

— А геометрические?

— С геометрией дела обстояли хуже. В ней, как меня учили, самое главное — чертеж. На моих же чертежах, как я ни старался, катет всегда оказывался длиннее гипотенузы.

— Понятно. Значит, вашим призванием была алгебра, и вы должны были стать алгебраистом. Как же в дальнейшем сложилась ваша математическая карьера?

— Учительница по математике никак не могла поверить, что я так быстро решаю задачи. Она не сомневалась, что я списываю ответы из задачника и постоянно ставила мне двойки. Так продолжалось года два, пока, наконец, родители не выдержали и не перевели меня в другую школу. В результате таких пертурбаций любовь к математике заметно остыла, и путь к шахматам был полностью «расчищен».

— Мой первый шахматный вопрос такой. Почему люди вообще играют в шахматы, а для многих эта игра становится смыслом жизни?

— Все начинается просто. Ребенок где-то впервые сталкивается с шахматами — дома или в школе. Начинает играть и сначала просто хочет выиграть — у брата, товарища, соседа. Дух соперничества его увлекает. Ведь шахматы — это прежде всего соперничество. Никто сначала не думает о спортивной карьере. Борется. Соперничество втягивает, и вы заражаетесь шахматным микробом. Одни люди переносят эту болезнь легче, шахматы занимают в их жизни определенное место — важное, но не самое важное. Другие заболевают хронически. Наступает качественная перемена. То, что было развлечением, игрой, приятным времяпрепровождением, становится страстью — абсолютно важным делом.

— Пусть для молодого человека шахматы стали, как вы говорите, абсолютно важным делом жизни. Стоит ли ему в этом случае стремиться к высшему образованию?

— Прежде всего, мне кажется, что в 17 лет еще трудно решить, какое место займут шахматы в жизни. Но предположим все-таки, что решение стать шахматистом — окончательное и бесповоротное. Надо ли тогда тратить время на другие занятия?

Я убежден, что шахматы могут и должны стать профессиональными. Феномен Ботвинника для нашего времени совсем не характерен. Сейчас гроссмейстерам приходится сталкиваться с огромным потоком шахматной информации. И если не проглатывать, то во всяком случае продегустировать каждую частицу этой информации он обязан. Для того, чтобы добиваться

АСПИРАНТУРА

больших успехов, нужно много играть и работать над шахматами. При сегодняшнем уплотненном календаре просто физически невозможно успешно сочетать шахматы с другой профессией.

Но нет сомнений и в том, что общее развитие, общий культурный уровень шахматисту совершенно необходимы. Любой крупный гроссмейстер обладает высокой культурой и широкой эрудицией. В качестве исключения часто приводят Фишера. Возможно, его трудно назвать энциклопедистом, но это и не человек, так сказать, с низким интеллектуальным коэффициентом. Достаточно вспомнить, что он свободно владеет многими языками. А его «странные» поступки связаны скорее с характером, взглядом на шахматы и т. д.

Большинство моих коллег много пишут, стали профессиональными литераторами. И, быть может, не случайно в прошлом аспирант МВТУ Юрий Авербах и талантливый инженер Александр Котов ныне стали известными шахматными писателями. Кстати, я тоже закончил филологический факультет Рижского университета и полгода работал учителем русского языка и литературы в школе. Не скрою, преподавал я с большим удовольствием, но после того, как в двух четвертях у моих учеников несколько месяцев были «окна», я вынужден был уйти из школы.

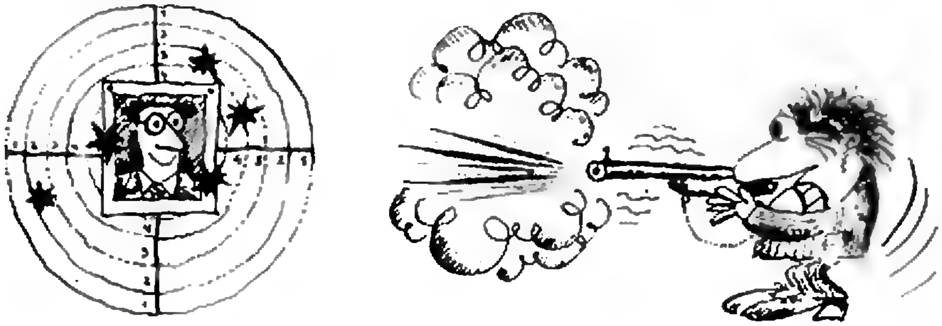
— Итак, вы полагаете, что разумнее всего сначала попытаться сочетать шахматы с другой професснй и лишь позднее принять окончательное решение. Как вам кажется, до какой поры возможно такое сочетание?

— Думаю, что по крайней мере до мастерского звания совмещение шахмат с учебой или работой в другой области вполне возможно.

— Учитывая круг читателей журнала, давайте попробуем провести параллель между профессиями математика и шахматиста. И математика, и шахматы требуют постоянного и усиленного напряжения ума. Существует мнение, что 8 часов — это ежедневный минимум для занятия математикой. «Истинно добродетельный человек», как с долей юмора пишет известный английский математик Дж. Литлвуд, должен выкраивать за счет сна 10 часов работы в день. Мыслимо ли в таких условиях заниматься шахматами? Кстати, некоторые профессора избегают принимать в аспирантуру математиков, хорошо играющих в шахматы.

— Могу лишь согласиться, что шахматы — весьма опасная смежная профессия, и, видимо, для математики особенно.

— Не кажется ли вам, что профессия математика, если можно так выразиться, «надежнее», чем профессия шахматиста? Если вы не станете крупным ученым в области «чистой» математики, то сможете найти себя в смежной профессии, стать «прикладником». В шахматах же превыше всего спортивный успех. И если к тридцати годам шахматист начинает понимать, что зрительный зал уже никогда не разразится аплодисментами в ответ на его ходы, и в Пальме де Майорке ему не суждено блеснуть жертвой ферзя, что его юношеские мечты не сбылись, то что остается ему в шахматном мире?



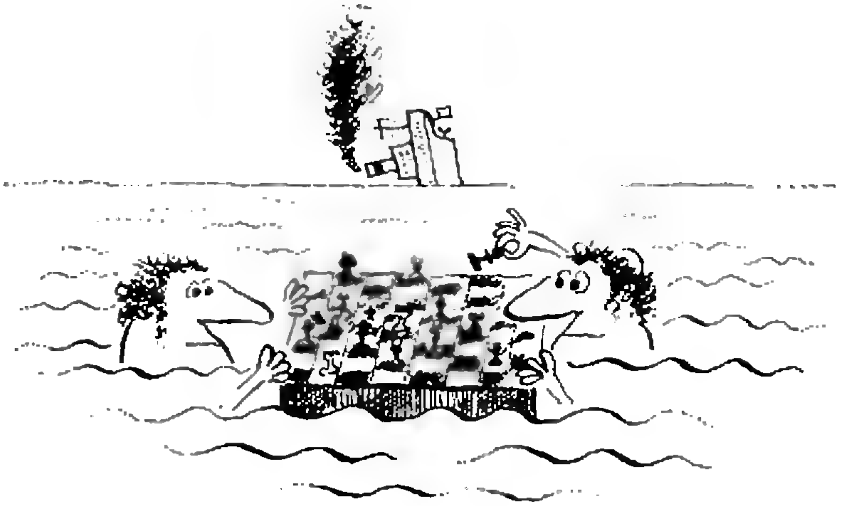
— Естественно, я пристрастен и не могу объективно оценивать то, чему посвятил всю свою жизнь. На мой взгляд, каждый человек, любящий шахматы, может найти себе место в шахматном мире. Многие из тех, кто не достигает выдающихся результатов в практической игре, становятся тренерами, комментаторами, теоретиками.

Конечно, в шахматах, как и в любом другом виде спорта, прежде всего ценится успех, очки. Если вы не показываете крупных результатов, не боретесь за мировое первенство, то в глазах окружающих можете выглядеть неудачником, и с этим надо считаться. Увы, шахматную профессию пока что не отнесешь к числу престижных. Люди, далекие от шахмат, часто спрашивают гроссмейстеров, чем они занимаются, какова их основная профессия. Вот почему юноше, обладающему как математическими, так и шахматными способностями и «выбирающему житье», я бы не рискнул рекомендовать шахматный путь. Ни один пророк не сможет гарантировать вам высоких шахматных достижений, и целиком отдать себя шахматам можно лишь в том случае, если вы бесконечно любите их и готовы во имя этой любви «пожертвовать» общественным мнением. Предупреждаю также, что шахматы — это очень нервное занятие, а хлеб шахматиста не всегда сладок.

— В науке существует определенная конкуренция, в результате которой все остаются в выигрыше. В шахматах же торжествует только победитель. В последнее время даже появилась теория, по которой для победы перед партией или матчем нужно специально вызвать чувство злобы к противнику...

— Цель шахматной партии — победить противника. Шахматист без характера, мягкий, безвольный не имеет шансов. Шахматист — прежде всего борец. А в борьбе естествен дух агрессии. Но все-таки чаще поле этой агрессивности ограничивается шахматной доской и не переносится на личность противника. Спасский сравнил как-то шахматистов с гладиаторами, но ведь гладиаторы в перчатках уже не совсем гладиаторы. В конце концов в шахматах после схватки часто обе стороны остаются живыми... Кстати, сам Спасский в жизни очень мягкий человек и неприязнь к противнику ему скорей мешает. Он великолепно играет с теми, с кем его связывает дружба или хотя бы хорошие отношения, и слабее играет с теми, к кому относится с антипатией. Про себя я тоже не могу сказать, что «заряжаюсь» перед игрой. И временами, когда партнер мне симпатичен и я знаю, что эта партия для него по каким-то причинам очень важна, мне трудно собраться и играть во всю силу. Думаю, это, скорее мой минус.

Наука — не спорт, и в идеале, видимо, такого «ужесточения», как в спорте, там не должно быть. У нас же даже звание гроссмейстера не гарантирует спокойной жизни. Вечная борьба, вечный отбор, конкуренция. Но должен сказать, что у шахматистов есть радости, не доступные людям других профессий. Сыграв одну красивую партию, пусть не в очень крупном турни-



ре, вы можете на долгие годы оставить след в шахматной истории. Даже если шахматиста преследуют спортивные неудачи, он может гордиться отдельными достижениями, жить красотой шахмат. Для него в каждом турнире есть приз «за красивейшую партию» (даже если этот приз не установлен официально).

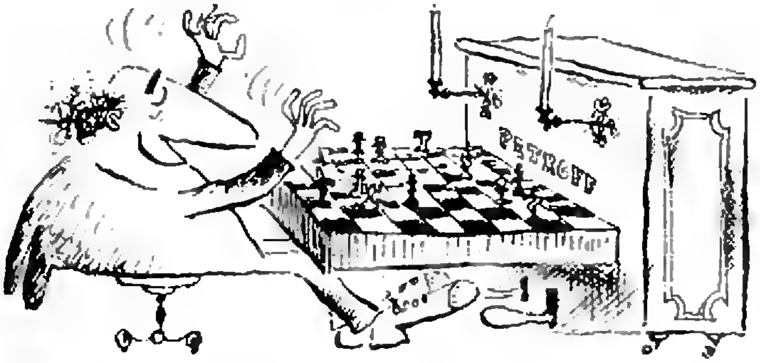
В мире шахмат много места для самых разных людей. Крускоп, мой первый учитель — теперь говорят «тренер», раньше говорили «учитель», и мне это больше нравилось — не был выдающимся шахматистом. Он имел первую категорию. Но он как раз был учителем, педагогом, он любил шахматы и любил детей. И не случайно очень многие его воспитанники так или иначе посвятили жизнь шахматам. Думаю, что этот человек был счастлив. Он открывал детям красоту шахмат...

— Михаил Нехемьевич, уже в возрасте 23 лет вы вошли в золотую летопись шахмат. Признание, слава, восхищение — всего этого вы достигли очень рано. Что чувствует человек, достигший вершины?

— Шахматист, как, видимо, и математик, никогда не может сказать себе, что достиг всего. Это было бы концом. Действительно, после победы в крупном турнире, после завоевания титула чемпиона мира приходит минута пустоты, делается немного скучно. Но проходит время, и аппетит к борьбе пробуждается, ощущается шахматный голод. Новые турниры, новые планы — не только спортивные, но и творческие. К счастью, шахматная иерархия переменчива. Сегодня ты — чемпион мира, завтра — уже экс-чемпион. Всегда есть за что бороться.

— Нельзя сказать, что ваш шахматный путь был усеян только розами. А случалось, что шахматы надоедали вам, вызывали раздражение? Вы никогда не жалели, что отдали им всю жизнь?

— Вот вчера во время партии с гроссмейстером Ваганяном была подобная минута. Противник пошел конем на g1, и неожиданно выяснилось, что у меня уже нет выигрыша... Я безумно расстроился. Если же говорить серьезно, то, понимаете, шахматы — это мой мир. Не дом, не крепость, в которой я укрываюсь от жизненных тревог, а именно мир — мир, в котором я живу полной жизнью, в котором я выражаю себя... Люблю атмосферу матчей, турниров, шахматных дискуссий. Я не могу представить себя на необитаемом острове без партнера, разве что Пятнице пришлось бы играть со мной в шахматы. Я не люблю играть при закрытых дверях. Люблю публику.



Шум в зале мне не мешает. Когда после моего хода зал начинает гудеть, это меня воодушевляет — знаю, что я сыграл интересно.

Но шахматный мир для меня не замкнут. Он соединяется многими нитями с другими мирами. Многие мои друзья, может быть, большинство, не играют в шахматы или играют совсем по-любительски. И с ними у меня тоже есть общий язык. Только мои другие интересы — театр, литература, музыка — никогда не могли конкурировать с шахматами; существовали шахматы, а все другое — подле них. Поэтому я ни о чем не жалею, несмотря на поражения, неудачи, трудности. Мне не жаль других перспектив, неосуществленных возможностей. Я просто люблю играть в шахматы.

— Разрешите задать вам еще два, так сказать, математических вопроса. Как вы думаете, могут ли в практической игре помочь математические способности?

— Уже при первом знакомстве с шахматной доской мы имеем дело с числами — 8×8=64! Припоминаю, что когда-то на меня сильное впечатление произвело шахматное доказательство (при помощи шахматной доски) теоремы Пифагора. Многие эндшпильные позиции носят чисто математический характер. Но прямой связи между шахматной силой и математическими способностями я не нахожу. Правда, в шахматном анализе техническое образование может быть полезным. Скажем, я не представляю, как сумел бы Ю. Авербах достичь в своем трехтомном труде по эндшпилю такой четкой систематизации, если бы не имел опыта работы в точных науках.

— Недавно состоялся первый чемпионат мира по шахматам среди ЭВМ. Опасаетесь ли вы конкуренции со стороны машин?

— Я, правда, не знаком с технической стороной дела, но отношусь скептически к шахматным возможностям ЭВМ. Сомневаюсь, что она сможет обыгрывать мастеров. Вероятно, шахматная машина пригодится для решения иных, нешахматных задач, но шахматы слишком многосторонни, сложны, в них не бывает однозначных ответов...

Конечно, не для «Кванта» будет сказано, но должен сознаться, что шахматы у меня прежде всего ассоциируются не с математикой, а с музыкой. По типу приема, по роду переживания. Тут есть что-то очень близкое. Для меня это сходство столь поразительно, что отдельные выдающиеся шахматисты ассоциируются с композиторами. Например, Смыслов — это Чайковский: спокойствие, мелодичность, напевность и изредка великолепный взрыв, производящий огромное впечатление, Петросян — Лист, абсолютная виртуозность, Ботвинник, пожалуй, — Бах, а Керес — Шопен...

— А Фишер и сам Таль?

— Фишер? Необычайно талантливый музыкант, но не похожий ни на кого — великолепная музыкальная машина: ведь теперь машины не только решают задачи, но и сочиняют музыку. Я же скорее всего Гершвин, а, может быть, Кальман...

— Михаил Нехемьевич, мой последний вопрос будет все-таки связан не с музыкой и даже не с математикой, а с шахматами. Вы уже говорили о красоте шахмат. Как лично вы понимаете шахматную красоту?

— Для одних шахматная красота — триумф логики. Прекрасная партия, по их мнению, — это великолепное классическое здание с безупречными пропорциями, в котором каждый элемент, каждый кирпичик стоит на своем месте. И хотя мне тоже часто «приходилось» выигрывать чисто позиционные партии, меня больше влечет триумф алогичности, иррациональности, абсурда: на доске ведется яростная борьба, подчиненная какой-то идее, борьба за то, чтобы осуществить некий план, а исход борьбы решает невинная пешечка, которая не имеет ничего общего с главным мотивом драмы. Выражаясь математическим языком, мне больше нравится, когда в шахматах катет оказывается длиннее гипотенузы.

Теорема Пифагора на шахматной доске

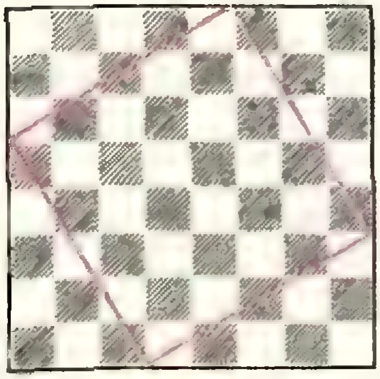


Рис. 1.

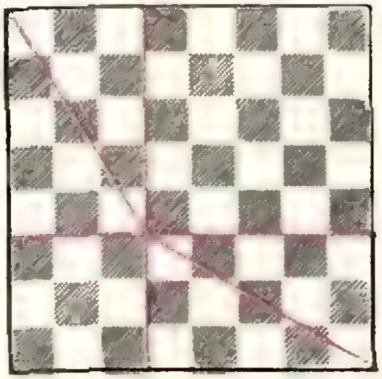


Рис. 2.

На шахматной доске нарисуем квадрат, как показано на рисунке 1. Доска разбивается на этот квадрат и четыре конгруэнтных прямоугольных треугольника. Теперь посмотрим на рисунок 2 На нем мы видим те же четыре треугольника, что и на рисунке 1. Значит, треугольники на обоих рисунках занимают одну и ту же площадь. Следовательно, одну и ту же площадь в обоих случаях занимают и оставшиеся части шахматной доски без треугольников. Итак, площадь квадрата, построенного на гипотенузе прямоугольного треугольника, равна площади двух квадратов, построенных на катетах, — «пифагоровы штаны во все стороны равны»!

Может быть, гроссмейстер М. Таль имел в виду именно это доказательство теоремы Пифагора.

(Разумеется, если говорить строго, наши рассуждения не доказывают теорему Пифагора, поскольку исследован лишь некоторый частный случай, а лишь иллюстрируют ее. Но такое доказательство проходит и без использования шахматной доски — для любого прямоугольного треугольника можно подобрать квадрат, который разбивается подобным образом.)

Е. Я. Гик

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
КРУЖОК

Задача на дом

Г. И. Копылов

— Я люблю решать трудные задачи. Люблю искать новые доказательства теорем и читать книги об ученых. Учусь я с удовольствием, на школьной олимпиаде получил приз. Я хотел бы стать ученым. Но смогу ли я стать им? Гожусь ли я в ученые? Как проверить себя?

К сожалению, признаков, по которым можно было бы распознать будущего ученого, нет. Успехи в школе вовсе не гарантируют, что такие же успехи будут у окончившего университет: школьник решает то, что задано, усваивает чужие мысли; ученый же ставит свои задачи. Даже если ученик хорошо умеет проводить логические рассуждения, это еще не значит, что он годится в ученые. Умение хорошо рассуждать ученому действительно необходимо, кроме тех случаев, когда именно скачок в логическом построении,— то есть не логика, а догадка,— обеспечивают решение проблемы. И так далее.

Но хотя учеба в школе вовсе не похожа на научную работу, некоторые качества, необходимые ученому, можно развивать, даже готовя уроки. Надо только, решив очередную задачу, не спешить переходить к следующей. Еще разок перечесть условие, поглядеть на полученный ответ — и дать волю своему воображению... Спросить, например, у себя: а что еще может быть? Можно ли решать задачи потруднее, опираясь на только что решенную?

Впрочем, подслушаем лучше разговор двух ребят. Они учатся в одном классе и сегодня готовят уроки вместе.

Д. Что нам задали по алгебре?

О. Доказать, что если числа $\frac{1}{b+c}$, $\frac{1}{c+a}$, $\frac{1}{a+b}$ составляют арифметическую прогрессию, то и числа a^2, b^2, c^2 также составляют арифметическую прогрессию.

Д. По-моему, задача нетрудная. Каждый член арифметической прогрессии есть среднее арифметическое двух соседних с ним. Значит,

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+b}\right)=\frac{1}{c+a}. \qquad (1)$$

Избавимся в (1) от дробей, раскроем скобки, приведем подобные члены; получим

$$a^2+c^2=2b^2,$$

то есть

$$\frac{1}{2}(a^2+c^2)=b^2, \qquad (2)$$

а это и нужно было доказать.

О. Да, вроде все верно...

Д. Что там еще задано на завтра?

О. Подожди, дай подумать...

Д. Над чем?

О. Над задачей, которую мы только что решили.

Д. Что над ней думать, если она уже решена?

О. Сначала одни числа образовали прогрессию, а в конце — совсем другие. Что общего между $\frac{1}{b+c}$ и a^2? Почему они связаны?

Д. Ты же видел, почему.

О. Я не могу толком объяснить, но чего-то здесь не хватает. А как ты думаешь, верно ли обратное — что если a^2, b^2, c^2 — прогрессия, то и $\frac{1}{b+c}$, $\frac{1}{c+a}$, $\frac{1}{a+b}$ — опять прогрессия?

Д. Безусловно. Как же иначе? Проделай выкладки в обратную сторону — все и получится.

О. Ну, это некрасиво. Знаешь, давай лучше попробуем на числах.

Д. Как это — на числах? На числах ничего не докажешь.

О. . . . возьмем, например, числа

$$a^2=1, \quad b^2=4, \quad c^2=7. \qquad (3)$$

Они образуют прогрессию. Проверим, что $\frac{1}{b+c}$, $\frac{1}{c+a}$, $\frac{1}{a+b}$ — тоже прогрессия.

Д. Зачем? Ясно, что проверка получится. Я ведь все на буквах доказал. Ничего нового числа не добавят.

О. Ну, а я хочу посмотреть, как именно все получается. Итак, пусть есть числа (3). Возьмем только положительные корни: $a=1$, $b=2$, $c=\sqrt{7}$.

Д. Вычисляем.

$$\frac{1}{b+c}=\frac{1}{2+\sqrt{7}}, \qquad \frac{1}{c+a}=\frac{1}{\sqrt{7}+1},$$

$$\frac{1}{a+b}=\frac{1}{3}.$$

Неужели это прогрессия? Впрочем, давай избавимся от иррациональности в знаменателе:

$$\frac{1}{b+c}=\frac{\sqrt{7}-2}{3}, \qquad \frac{1}{c+a}=\frac{\sqrt{7}-1}{6}.$$

О. Конечно же, это прогрессия. Сумма крайних членов

$$\frac{\sqrt{7}-2}{3}+\frac{1}{3}=\frac{\sqrt{7}-1}{3}$$

вдвое больше среднего.

Д. Да; а разность прогрессии равна $\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{7}-1}{6}=\frac{3-\sqrt{7}}{6}$.

О. Погоди. Теперь я знаю, как надо доказывать то, что из (2) следует (1). Надо просто как бы избавиться от иррациональности в знаменателе.

Д. Как это? Ведь там нет иррациональности!

О. Конечно, нет; но действовать надо так, как если бы она была. Смотри:

$$\frac{1}{b+c}=\frac{b-c}{b^2-c^2}, \qquad \frac{1}{c+a}=\frac{a-c}{a^2-c^2},$$

$$\frac{1}{a+b}=\frac{a-b}{a^2-b^2}.$$

По условию a^2, b^2, c^2 — прогрессия. Значит, $a^2-b^2=b^2-c^2$.

Обозначим эту разность через d. Тогда $a^2-c^2=2d$. Числа $\frac{b-c}{d}$, $\frac{a-c}{2d}$, $\frac{a-b}{d}$, очевидно, образуют прогрессию.

Д. Ну хорошо ... что там еще задали?

О. Подожди, теперь ты понимаешь, как связаны прогрессии $\frac{1}{b+c}$, $\frac{1}{c+a}$, $\frac{1}{a+b}$ и a^2, b^2, c^2?

Д. Я и раньше понимал.

О. Пусть a, b, c — произвольные числа. Рассмотрим тройку $b-c$, $\frac{a-c}{2}$, $a-b$ — это уже прогрессия. Члены этой прогрессии можно делить на любое число d. В задаче подобрано d так, что деление на него приводит к числам $\frac{1}{b+c}$, $\frac{1}{c+a}$, $\frac{1}{a+b}$; поэтому-то вместо произвольных a, b, c и нужно взять такие, чтобы $a^2-b^2=b^2-c^2=d$, то есть чтобы числа a^2, b^2, c^2 составляли прогрессию. Но тут снова возникает вопрос: могут ли все три числа a, b, c быть целыми?

Д. А не все ли равно — могут, не могут?

О. Так это же интересно! А вдруг есть такая тройка целых чисел a, b, c, что a^2, b^2, c^2 — это арифметическая прогрессия. И тогда числа

$\frac{1}{b+c}$, $\frac{1}{c+a}$, $\frac{1}{a+b}$ тоже окажутся прогрессией. Это же красиво — две прогрессии и обе из целых чисел . . .

Д. Вторая-то будет из дробных, потому что если a и b целые, то $\frac{1}{a+b}$ — дробь.

О. Неважно. Мне хочется, чтобы никаких корней не получалось. Пусть a, b, c будут даже не целые, а рациональные — все равно красиво. Но как подобрать три рациональных числа a, b, c, чтобы $a^2 - b^2$ было равно $b^2 - c^2$? Ведь это уравнение не первой степени, корни могут и не извлекаться... Погоди, но у нас же есть выражение с первыми степенями! Это (1).

Д. Не понял.

О. Смотри. Пусть $\frac{1}{b+c}$, $\frac{1}{c+a}$, $\frac{1}{a+b}$ — известная прогрессия. Например, 1, 3, 5. Или 100, 101, 102. Из любых рациональных чисел. Значит, у нас есть система из трех уравнений первой степени с тремя неизвестными a, b, c. Ее можно решить *). Решения — снова рациональные числа. А тогда a^2, b^2, c^2 автоматически составят рациональную прогрессию.

Д. Ну-ка, ну-ка, давай попробуем. Пусть, например, есть прогрессия 1, 3, 5.

О. Нет, давай сразу в общем случае: рассмотрим прогрессию $\alpha-\beta$, α, $\alpha+\beta$, где α и β — произвольные числа. Для определения чисел a, b, c получаем такую систему уравнений:

$$b+c=\frac{1}{\alpha-\beta}, \qquad (4)$$

$$c+a=\frac{1}{\alpha}, \qquad (5)$$

$$a+b=\frac{1}{\alpha+\beta}. \qquad (6)$$

Д. Сложим все уравнения и разделим сумму на два; получим

$$a+b+c=\frac{3\alpha^2-\beta^2}{2\alpha(\alpha^2-\beta^2)}. \qquad (7)$$

Вычтем из (7) последовательно (4), (5), (6); получим:

$$a=\frac{\alpha^2-\beta^2-2\alpha\beta}{2\alpha(\alpha^2-\beta^2)}, \quad b=\frac{\alpha^2+\beta^2}{2\alpha(\alpha^2-\beta^2)},$$

$$c=\frac{\alpha^2-\beta^2+2\alpha\beta}{2\alpha(\alpha^2-\beta^2)}.$$

Значит, какие бы α и β мы ни взяли *), числа a^2, b^2, c^2, где a, b и c вычисляются по этим формулам, должны образовать прогрессию. Давай проверим.

О. Сейчас. Я вот о чем подумал. Для чисел a, b и c у нас получились дробные выражения. Отбросим у них знаменатели; тогда a, b, c увеличатся в одно и то же число раз и станут целыми числами, если, конечно, α и β взять целыми. При этом числа a^2, b^2, c^2 по-прежнему будут образовывать прогрессию.

Д. Конечно. Если 1, 3, 5 прогрессия, то и 10, 30, 50 — тоже.

О. Значит, мы вывели формулы для прогрессий a^2, b^2, c^2, у которых a, b, c — целые. А именно:

$$a=\alpha^2-\beta^2-2\alpha\beta, \qquad (8)$$

$$b=\alpha^2+\beta^2, \qquad (9)$$

$$c=\alpha^2-\beta^2+2\alpha\beta, \qquad (10)$$

где α и β — любые целые числа.

Д. Проверим. Пусть $\alpha=2$, $\beta=1$; тогда

$$\alpha^2-\beta^2=3,\ 2\alpha\beta=4,$$
$$\alpha^2+\beta^2=5. \qquad (11)$$

О. Гляди-ка, ведь это египетский треугольник...

Д. Это случайно. Считаем дальше:

$$a=3-4=-1;\ b=5;$$
$$c=3+4=7.$$

Действительно, 1, 25, 49 — прогрессия.

О. Значит, мы с тобой научились решать в целых числах неопределенное уравнение

---

*) Всегда ли можно?

*) А как же с ОДЗ?

$$a^2 + c^2 = 2b^2; \qquad (12)$$

решения записываются формулами (8)—(10).

Д. Откуда это уравнение?

О. Так ведь оно — краткая запись условия, что числа a^2, b^2 и c^2 образуют прогрессию.

Д. А, понял. Только не доказано, что формулы (8)—(10) дадут все решения этого уравнения.

О. Почему? Ведь это ясно; любое решение уравнения (12) таково, что числа $\frac{1}{b+c}$, $\frac{1}{c+a}$, $\frac{1}{a+b}$ образуют прогрессию; а всякая прогрессия может быть представлена в виде $\alpha - \beta$, α, $\alpha + \beta$. Перебрав всевозможные пары (α, β), получим все решения уравнения (12). Понятно?

Д. Кажется, да.

О. Но не в этом дело. Любопытен сам метод, каким мы отыскали решение: вместо того чтобы решать уравнение (12) второго порядка, мы решили эквивалентную ему систему (4)—(6) линейных уравнений с произвольной правой частью. Интересно, есть ли еще неопределенные уравнения второго порядка, которые, если их решать в целых числах, сводятся к системам уравнений первого порядка?

Д. Может, отдохнем? Послушаем магнитофон?

О. Пожалуй... (*Заводят магнитофон.* **О.** *снова просматривает решение. Возглас удивления.*)

Д. Что?

О (*показывает на строчку* (11)). Смотри, ведь это формулы для пифагоровых треугольников! Они дают все целочисленные прямоугольные треугольники с катетами u, v и гипотенузой w:

$$u = \alpha^2 - \beta^2, \quad v = 2\alpha\beta, \quad w = \alpha^2 + \beta^2,$$

— можешь проверить, что $u^2 + v^2 = w^2$. Значит, египетский треугольник (11) — не случайность. Можно взять любой пифагоров треугольник с катетами u, v и гипотенузой w и образовать из длин его сторон решение уравнения (12):

$$a = u \pm v, \quad c = u \mp v, \quad b = w.$$

Д. Любопытно. Проверим. Пусть длины сторон прямоугольного треугольника равны 5, 12 и 13. Тогда $12 + 5 = 17$, $12 - 5 = 7$. Получаем числа 7^2, 13^2, 17^2. Действительно, $7^2 + 17^2 = 2 \cdot 13^2$.

О. Как же это я по виду уравнения (12) не догадался сразу представить числа a и c в виде суммы и разности двух чисел u и v? Ведь тогда это уравнение сводится к теореме Пифагора; смотри:

$$(u + v)^2 + (u - v)^2 = 2(u^2 + v^2),$$

и, значит, $b^2 = u^2 + v^2$.

А решения в целых числах такого уравнения известны. Какая красивая штука! Ведь $(u + v)^2$ — это площадь квадрата, построенного на сумме катетов, а $(u - v)^2$ — площадь квадрата, построенного на разности катетов. Значит, мы доказали, что площади квадратов, построенных на разности катетов, гипотенузе и сумме катетов любого прямоугольного треугольника, образуют прогрессию.

Д. Подумаешь, открытие! Все доказательство укладывается в одну строчку.

О. Открытие невелико, да свое. Мы же раньше этого не знали.

Д. Все равно это где-нибудь в какой-нибудь книжке написáно.

О. И пусть! А я без книжки...

Д. (*и в нем, наконец, проснулось любопытство*) А почему непременно брать сумму и разность катетов u и v? Положим, например, $a = 2u + v$, $c = u - 2v$; тогда

$$a^2 + c^2 = 5(u^2 + v^2) = 5w^2.$$

Значит, решения в целых числах неопределенного уравнения

$$a^2 + c^2 = 5w^2 \qquad (13)$$

тоже можно получить из пифагоровых треугольников u, v, w (w — гипотенуза) по формулам

$$a = 2u + v, \quad c = u - 2v, \quad b = w.$$

О. Верно. Понятно, что таким образом можно решить в целых числах любое неопределенное уравнение вида $a^2 + c^2 = (m^2 + n^2)\, b^2$, где m и n — целые.

Д. А как решить уравнение

$$a^2 + c^2 = 3b^2? \qquad (14)$$

О. Не знаю. Надо будет подумать. Мы не выяснили еще один вопрос: какие из неопределенных уравнений высших степеней можно свести к системе линейных? Уравнение (12), например, мы свели к системе (4)—(6). Но тогда мы не знали, есть ли еще примеры таких уравнений. Теперь я понял, что их можно придумать сколько угодно. Вот продиктуй мне какое-нибудь равенство, похожее на (1), но с другими коэффициентами. Начни, например, так: $\frac{2}{3a+2b}$.

Д. Пожалуйста (*диктует*):

$$\frac{2}{3a+2b} - \frac{3}{c-a} = \frac{1}{b+4c} \qquad (15)$$

О. Хорошо. Получилось уравнение, связывающее три неизвестных a, b, c. Оно равносильно такому уравнению второго порядка:

$$3a^2 - 6b^2 + 8c^2 - 9ab - 47ac - 24bc = 0. \qquad (16)$$

Мы хотим найти рациональные решения этого уравнения. Если a, b, c рациональны, то и дроби в (15) рациональны. Обозначим первую через 2α, вторую — через 3β: тогда третья равна $2\alpha - 3\beta$ (α и β — рациональные). Получаем систему

$$3a + 2b = \frac{1}{\alpha}, \quad c - a = \frac{1}{\beta}, \qquad (17)$$

$$b + 4c = \frac{1}{2\alpha - 3\beta}.$$

Решив ее, найдем

$$a = \frac{-16\alpha^2 + 24\alpha\beta + 3\beta^2}{5\alpha\beta\,(2\alpha - 3\beta)},$$

$$b = \frac{24\alpha^2 - 31\alpha\beta - 12\beta^2}{5\alpha\beta\,(2\alpha - 3\beta)}, \qquad (18)$$

$$c = \frac{-6\alpha^2 + 9\alpha\beta + 3\beta^2}{5\alpha\beta\,(2\alpha - 3\beta)}.$$

Это и есть искомые рациональные решения уравнения (16). Числители же выражений (18) дают его целые решения, если α и β целые. Если бы мы взяли не три неизвестных a, b, c, а больше, то, написав вместо (15) в правой и левой частях столько дробей, сколько неизвестных, мы получили бы неопределенное уравнение более высокой степени. Вообще, чем дробей больше, тем выше степень возникающего неопределенного уравнения; и тем через большее число *произвольных параметров* α, β, γ,... выражается решение.

Д. Но ведь ты не знаешь заранее, какое именно уравнение получится. И не всякое уравнение высшей степени равносильно уравнению, куда входит сумма дробей. А если и равносильно, то как эти дроби найти?

О. Вот в том-то и дело. Надо будет еще поразмыслить...

На этом мы прервем воображаемый разговор двух друзей. У них разные характеры: **Д.** все время хочет побыстрей отделаться от задачи, а **О.** хочет до конца разобраться в ней. В итоге вместо одной задачи, заданной на дом, он придумывает несколько других, неизвестно, решаемых ли. На первый взгляд он ведет себя неразумно, расходуя время, отведенное на уроки. Но именно у **О.** качества, присущие ученому, выражены ярче. Поиск первопричин замеченных фактов, поиск связей между проблемами и есть та побудительная сила, которая заставляет работать ученого,— ее называют любопытством, пытливостью, склонностью к обобщениям. Однако мало уметь задавать вопросы,— надо и отвечать на них. Было бы смешно, если бы **О.**, вместо того чтобы решить конкретную, заданную на дом задачу, перечислил все связанные с нею проблемы, так и не осилив ни одной из них. В поисках решений вновь возникших задач — зачастую неожиданных — важна интуиция. Интуиция, догадливость — это плодотворные разрывы в логике; благодаря ей делаются неожиданные шаги в непредсказуемом направлении; и размах этих шагов измеряет талант человека.

Нам остается повторить: не торопитесь, выполнив домашнее задание, захлопнуть учебник и тетрадь. Просмотрите задачи еще раз: что они вам сообщили нового? частный ли факт кроется в них или же он допускает обобщение? какие задачи решались аналогично? можно ли, не меняя способа решения, усложнить задачу? а что будет, если избавиться от части условий задачи? или заменить их противоположными? усилить требования задачи? добавить новые ограничения? Все это — прекрасный способ привести в движение фантазию, догадливость и любознательность, быть может, дремлющие в вас.

Упражнения

1. Найдите, при каких коэффициентах $a_1, b_1, \ldots, c_3$ уравнение

$$\frac{1}{a_1x+b_1y+c_1z}+\frac{1}{a_2x+b_2y+c_2z}+\frac{1}{a_3x+b_3y+c_3z}=0$$

принимает форму $Ax^2+By^2+Cz^2=0$.

2. Решите в целых числах уравнение $6x^2=2y^2+z^2$. Попытайтесь найти другие уравнения типа $Ax^2+By^2+Cz^2=0$, решаемые в целых числах, а также способы их решения.

3. Попытайтесь найти уравнения типа $Ax^2+By^2+Cz^2=0$, не решаемые в целых числах (не считая нулевого решения).

4. Решите в целых числах уравнение $xyz=yzv+xzv+xyv$.

5. Придумайте обобщение следующей задачи: «Известно, что при любых значениях x

$$a_1x^2+b_1x+c_1>a_2x^2+b_2x+c_2.$$

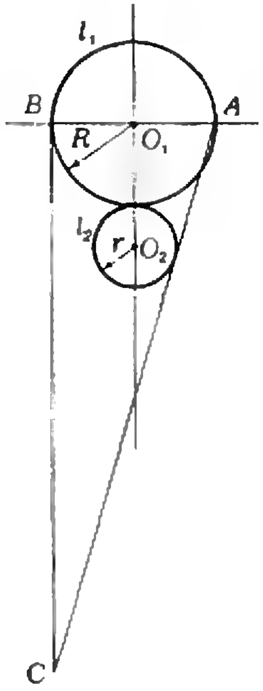
Докажите, что $a_1\geqslant a_2$, $c_1\geqslant c_2$».

6. Придумайте обобщение такой задачи: «Найти сумму всех несократимых дробей со знаменателем 3, заключенных между целыми положительными числами m и $n>m$».

7. То же для задачи: «Найти арифметическую прогрессию, у которой среднее арифметическое n первых членов при любом n равно их числу».

Задачи наших читателей

1. На рисунке вы видите две касающиеся окружности l_1 и l_2 радиусов R и $r=R/2$ соответственно; $AB\perp O_1O_2$, BC — касательная к окружности l_1, AC — касательная к окружности l_2.



Доказать, что длина отрезка BC равна длине окружности l_1 с относительной ошибкой менее 0,005.

Л. М. Дубинский

2. Дана парабола — график функции $y=x^2$. На оси Oy взята точка A. Найти кратчайшее расстояние от точки A до параболы.

Можно пользоваться таким определением: парабола — это множество точек, равноудаленных от некоторой точки F и некоторой прямой l.

М. Л. Прегер

3. Доказать, что числа вида

$$7^{2n+1}+2^{2n+1}+5,$$
$$7^{2n+1}+2^{2n+1}-5,$$

где n — натуральено, нельзя представить в виде суммы трех кубов натуральных чисел.

И. И. Михайлов

ПОБЕДИТЕЛИ КОНКУРСА «КВАНТА»

Редколлегия журнала «Квант» установила специальные премии за наиболее интересные решения задач, помещенных в «Задачнике «Кванта». За 1974-75 учебный год редакция получила свыше 3 000 писем с решениями задач из «Задачника «Кванта». Среди авторов этих писем редакция отобрала школьников, регулярно присылавших особенно удачные и оригинальные решения. Они награждаются годовой подпиской на журнал «Квант» на 1976 год. В соответствии с решением Оргкомитета Всесоюзной олимпиады эти школьники допущены на республиканские туры Всесоюзной олимпиады 1976 года наравне с победителями городских и областных олимпиад по математике и физике.

1. Х. АБДУЛЛИН (г. Алма-Ата)
2. Г. АЙЗИН (г. Брест)
3. М. ГЕДАЛИН (г. Тбилиси)
4. Г. ГОЛУБЦОВА (г. Москва)
5. О. ГОДИН (г. Симферополь)
6. В. ГУСЕЙНОВ (г. Нахичевань)
7. М. ИМЕРЛИШВИЛИ (г. Тбилиси)
8. С. ЛИФИЦ (г. Харьков)
9. И. СОКОЛОВ (г. Москва)
10. Ю. ФИЛОСОФОВ (г. Саратов)
11. С. ФИНАШИН (г. Ленинград)
12. Б. ЯЦАЛО (с. Морочно Ровенской обл., УССР)

За успешное участие в IX Всесоюзной физико-математической олимпиаде годовой подпиской на 1976 год на журнал «Квант» награждаются:

1. Г. АБДУЛЛАЕВ (г. Кировобад)
2. Л. АРБУЗОВ (г. Норильск)
3. А. АУЗИНЬШ (г. Рига)

4. В. БАЛЬЧИТИС (г. Шауляй)
5. Ю. ГИМАТОВ (г. Клин)
6. Е. ГЛЕЗИН (г. Ленинград)
7. А. КОДРЯНУ (г. Рыбница)
8. В. ОСЛОН (г. Киев)
9. Е. ПОНОМАРЕВ (п/о Черноголовка Московской обл.)
10. Д. САМЕДОВ (г. Красноводск)
11. А. СМИРНОВ (с. Семибратово Ярославской обл.)
12. С. ХАЩИН (г. Иваново)
13. П. ХОБЗЕЙ (г. Киев)
14. Р. ШАРИПОВ (г. Каракуль)

Годовой подпиской на 1976 год на журнал «Квант» награждаются следующие участники Всероссийского слета актива научных обществ учащихся:

1. О. БАРАКИН (г. Казань)
2. А. МАЛЬЦЕВ (г. Калининград Московской обл.)
3. М. ПОПОВ (г. Дубна)
4. С. РАЧИНСКИЙ (г. Москва)
5. А. СЫЧИКОВ (г. Челябинск)
6. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО «ИНТЕГРАЛ» учащихся средней школы № 17 г. Северодвинска
7. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО «ПОИСК» учащихся средней школы № 2 г. Малая Вишера
8. НАУЧНОЕ ОБЩЕСТВО учащихся средней школы № 48 г. Волгограда
9. СЕКЦИЯ АСТРОНОМИИ юношеского научного общества Московского городского Дворца пионеров и школьников

Редакция журнала «Квант награждает также годовой подпиской на 1976 год следующих читателей, приславших правильные решения японских головоломок (см. «Квант», 1975, № 1):

1. А. БЕЗБОРОДОВ (г. Иваново)
2. В. ДОБНЮК (г. Омск)
3. В. ДУПЛЕНКО (г. Днепродзержинск)
4. С. КАРДАШЕВСКИЙ (г. Макеевка)
5. С. ЛЕВИТИН (г. Днепропетровск)
6. Л. ЛУЗИНА (г. Ленинград)

задачник кванта

Решения задач из этого номера можно посылать не позднее 1 ноября 1975 г. по адресу: 117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15, издательство «Наука», журнал «Квант». После адреса на конверте напишите, решения каких задач вы посылаете, например: «Задачник «Кванта», М341, М342» или «...Ф353». Решения задач по каждому из предметов (математике и физике), а также новые задачи просьба присылать в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки ваших решений). Условия оригинальных задач, предлагаемых для публикации, присылайте в двух экземплярах вместе с вашими решениями этих задач (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «... новая задача по математике»). После формулировки задачи мы обычно указываем, кто предложил нам эту задачу. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Наиболее трудные задачи отмечены звездочкой.

Задачи

М341—М345; Ф353—Ф357

М341. В чемпионате мира участвуют 20 команд. Среди них k европейских команд, результаты встреч между которыми на чемпионате мира идут в зачет чемпионата Европы. Чемпионат проводится в один круг. При каком наибольшем k может оказаться, что европейская команда, набравшая строго наибольшее количество очков в чемпионате Европы, наберет строго наименьшее количество очков в чемпионате мира, если это

а) чемпионат по хоккею (допускаются ничьи),

б) * чемпионат по волейболу (ничьих не бывает)? Какими будут ответы на эти вопросы, если команд не 20, а n?

Ю. А. Шрейдер

М342 *. а) Докажите, что из цифр 1 и 2 можно составить 2^{n+1} чисел, каждое из которых 2^n-значно и каждые два из которых различаются не менее чем в 2^{n-1} разрядах.

б) Докажите, что больше чем 2^{n+1} таких 2^n-значных чисел составить нельзя.

С. В. Фомин

М343. В некотором государстве города соединены дорогами. Длина любой дороги меньше 500 *км* и из любого города в любой другой можно попасть, проехав по дорогам менее 500 *км*. Когда одну дорогу закрыли на ремонт, выяснилось, что из любого города можно проехать в любой другой по оставшимся дорогам. Докажите, что это можно сделать, проехав не более 1500 *км*.

С. Л. Елисеев

М344. На шахматной доске отмечены центры всех 64 полей. Можно ли провести на доске 13 прямых так, чтобы в каждой из частей, на которые эти прямые делят доску, оказалась не более одной отмеченной точки? (Прямые не должны проходить через центры полей, рис. 1).

А. Н. Печковский

М345. В последовательности 197523... каждая цифра, начиная с пятой, рав-

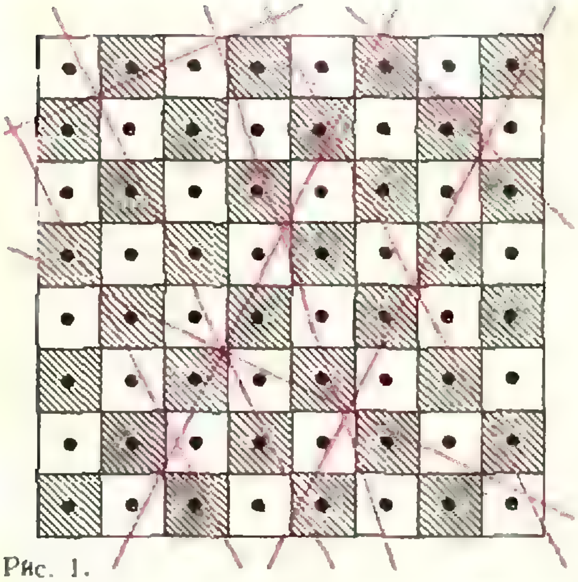


Рис. 1.

на последней цифре суммы предыдущих четырех цифр. Встретятся ли в этой последовательности подряд

а) четыре цифры 1 2 3 4?
б) вторично цифры 1 9 7 5?
в) цифры 8 1 9 7?

Г. А. Гуревич

Ф353. Фокусное расстояние вогнутого сферического зеркала равно F. Каким оно станет, если зеркало нагреть на t градусов? Во сколько раз увеличится при этом световой поток Φ от Солнца, который можно сфокусировать зеркалом?

Коэффициент линейного расширения металла, из которого сделано зеркало, равен α.

И. Ш. Слободецкий

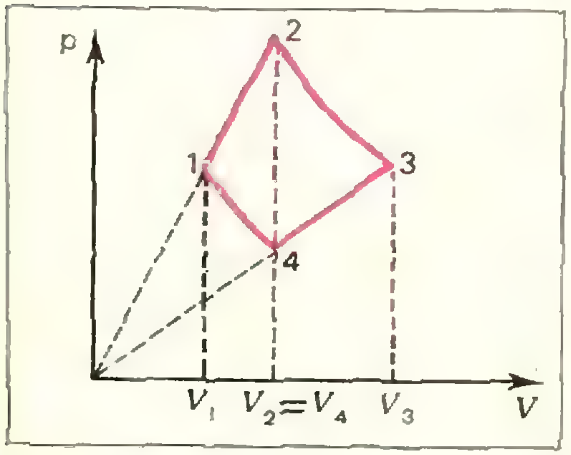


Рис. 2.

Ф354. Необходимо сконструировать печь, на нагревательном элементе которой должна выделяться мощность 2,1 *квт*. Напряжение сети равно 220 *в*, сопротивление подводящих проводов 1 *ом*. Каким необходимо сделать сопротивление нагревательного элемента печи?

О. Ф. Кабардин

Ф355. На pV-диаграмме (рис. 2) изображен замкнутый процесс, проведенный с одним молем газа. Участки *1—2* и *3—4* графика — прямые, проходящие через начало координат, а участки *2—3* и *4—1* — изотермы. Нарисовать график этого процесса на TV-диаграмме. Найти объем V_3, если известны объемы V_1 и $V_2 = V_4 = V$.

Ф356. С какой скоростью движется тень Луны по земной поверхности во время полного солнечного затмения? Затмение наблюдается на экваторе. Для простоты считать, что земная ось перпендикулярна земной и лунной орбитам.

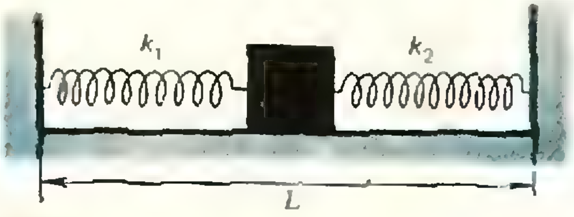


Рис. 3.

Ф357. Кубик массы m прикреплен к двум пружинам с жесткостями k_1 и k_2 и длинами в недеформированном состоянии l_1 и l_2 соответственно. Пружины закреплены другими концами (рис. 3), так что кубик может двигаться по горизонтальной плоскости. Коэффициент трения между кубиком и плоскостью μ, расстояние между точками закрепления пружин L, размер кубика мал и им можно пренебречь. Найти область, в которой кубик может находиться в равновесии.

Решения задач

М304—М307; Ф312—Ф317

М304. *Будем обозначать кружочком некоторую (неизвестную пока) операцию, применимую к любым двум целым неотрицательным числам a и b и дающую тоже целое неотрицательное число $a\circ b=c$. Пусть эта операция удовлетворяет следующим условиям:*

1) $a\circ b=b\circ a$;

2) если $a\circ b=c$, то $b\circ c=a$;

3) если $a\circ b>c$, то $b\circ c<a$ или $a\circ c<b$.

а) Найдите $0\circ 0$; $0\circ 1$; $1\circ 1$; $0\circ 2$.

б) Докажите, что $0\circ a=a$ *и* $1\circ a=$

$$\begin{cases} a+1, & \text{если } a \text{ четное,} \\ a-1, & \text{если } a \text{ нечетное.} \end{cases}$$

в) Докажите, что существует не более чем одна операция, удовлетворяющая условиям задачи.

г) Докажите, что такая операция существует, и укажите правило, позволяющее по заданным a, b вычислять $a\circ b$.

а) Найдем $0\circ 0$.

Допустим, что $0\circ 0>0$. Подставив в условие 3) $a=b=c=0$, получим, что $0\circ 0<0$, что невозможно. Значит, $0\circ 0=0$.

Найдем $0\circ 1$.

Если $0\circ 1=0$, то $0\circ 0=1$, что неверно. Если $0\circ 1>1$, то из условия (3) $1\circ 1<0$,, что невозможно. Поэтому $0\circ 1=1$.

Аналогичными рассуждениями получим, что

$$1\circ 1=0,\ 0\circ 2=2.$$

б) 1. Докажем, что $0\circ a=a$ индукцией по a.

Допустим, это верно при всех $a<n$ и докажем, что $0\circ n=n$. Пусть $0\circ n=k<n$. Тогда $0\circ k=n$, что противоречит допущению. Пусть $0\circ n>n$. Тогда из условия 3) $n\circ n<0$, что невозможно. Итак, $0\circ n=n$.

2) Докажем, что $1\circ a=\begin{cases} a+1, & \text{если } a \text{ четное,} \\ a-1, & \text{если } a \text{ нечетное.} \end{cases}$

индукцией по a.

Допустим, что это доказано для всех $a<n$, и докажем для $a=n$.

Рассмотрим два случая.

(а) n — четное.

Обозначим $1\circ n=k$. Тогда $1\circ k=n$. Если $k\leqslant n$, то получаем противоречие. Пусть теперь $1\circ n>n+1$. Тогда по условию 3) $1\circ(n+1)<n$ или $n\circ(n+1)<1$, но и то и другое приводит к противоречию. Итак, $1\circ n=n+1$.

(б) n — нечетное.

Тогда по доказанному $1\circ(n-1)=n$, откуда $1\circ n=n-1$.

в) Докажем теперь, что существует не более, чем одна операция, удовлетворяющая условию.

Допустим, что есть две такие операции. Обозначим первую операцию знаком $\bullet$, а вторую — знаком $\bar{\circ}$. По предположению существует по крайней мере одна такая пара чисел a, b, для которых $a\bullet b\neq a\,\bar{\circ}\,b$. Выберем из всех таких пар ту, в которой сумма $a+b$ наименьшая. Итак, пусть $a\bullet b\neq a\,\bar{\circ}\,b$; если же $a'+b'<a+b$, то $a'\bullet b'=a'\,\bar{\circ}\,b'$. Обозначим $a\bullet b=k$, $a\,\bar{\circ}\,b=l$. Пусть $k<l$ (случай $k>l$ аналогичен). Поскольку $a\,\bar{\circ}\,b>k$, то $a\,\bar{\circ}\,k<b$ или $b\,\bar{\circ}\,k<a$. Пусть $a\,\bar{\circ}\,k=m<b$ (случай, когда $b\,\bar{\circ}\,k<a$, аналогичен). Тогда $a\,\bar{\circ}\,m=k$. Поскольку $m<b$, то $a+m<a+b$, и поэтому $a\bullet m=a\,\bar{\circ}\,m=k$. Тогда $a\bullet k=m$, что противоречит тому, что $a\bullet k=b$.

Полученное противоречие и доказывает утверждение в).

г) Покажем теперь, что такая операция существует.

Всякое целое неотрицательное число и единственным образом представляется в виде

$$a=a_0\cdot 2^0+a_1\cdot 2^1+a_2\cdot 2^2+\ldots+a_k\cdot 2^k+\ldots\text{*)}.$$

---

*) Это — запись числа a *в двоичной системе счисления.*

Здесь $a_0, a_1, \ldots$ бесконечная последовательность, в которой конечное число членов — единицы, остальные — нули.

Пусть $a = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k \cdot 2^k$, $b = \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k \cdot 2^k$.

Определим значение $c = a \circ b$: положим $c = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k \cdot 2^k$, где числа c_k определяются по следующему правилу:

$$c_k = \begin{cases} 0, & \text{если } a_k = b_k, \\ 1, & \text{если } a_k \neq b_k. \end{cases} \qquad (*)$$

То, что для так определенной операции выполняются условия 1) и 2) очевидно. Проверим, что выполняется условие 3). Переформулируем его так:

если $a \circ b \neq c$, то: $a \circ b < c$, или $a \circ c < b$, или $b \circ c < a$.

Пусть $a \circ b \neq c$. Обозначим через k наибольший номер, при котором не выполняется условие (*). Тогда имеет место один из следующих двух случаев:

(а) $a_k = b_k = c_k = 1$.

В этом случае выполняются даже все три неравенства. Действительно, докажем, например, что $a \circ b < c$. Поскольку k-й разряд числа $a \circ b$ равен 0, а в $(k+1)$-м, $(k+2)$-м, … разрядах числа $a \circ b$ и c совпадают, то

$$a \circ b \leqslant 2^0 + 2^1 + \ldots + 2^{k-1} + \Delta = 2^k - 1 + \Delta,$$

где через Δ мы обозначили число $c_{k+1} \cdot 2^{k+1} + c_{k+2} \cdot 2^{k+2} + \ldots$ Но k-й разряд числа c равен 1; значит, $c \geqslant 2^k + \Delta$, откуда $a \circ b < c$.

(б) Из трех чисел a_k, b_k, c_k одно равно единице, другие два — нулю.

Пусть $a_k = b_k = 0$, $c_k = 1$ (остальные случаи аналогичны). Тогда $a \circ b < c$, поскольку снова $a \circ b \leqslant 2^k - 1 + \Delta$, $c \geqslant 2^k + \Delta$.

А. А. Григорян, А. Л. Тоом

◆

М305. а) *На хордах AB и $A'B'$ окружности выбрано по точке C и C' так, что три прямые AA', BB' и CC' пересекаются в одной точке P. Введем обозначения:*

$$|AP| \cdot |A'P| = t,$$
$$|AC| \cdot |CB| = s,$$
$$|A'C'| \cdot |C'B'| = s',$$
$$|CP| = q, \ |C'P| = q'.$$

Докажите, что (при $q \neq 0$)

$$\sqrt{\frac{s'}{s}} = \frac{q'}{q} = \frac{s' + (q')^2}{t} = \frac{t}{s + q^2}.$$

б) *Через точку P, не лежащую на данной сфере, и каждую точку некоторой окружности σ, лежащей на этой сфере, проведена прямая. Докажите, что вторые точки пересечения проведенных прямых со сферой также лежат на некоторой окружности σ'.*

а) Возможны два случая; они изображены на рисунках 1, *а* и *б*. Рассмотрим треугольники $B'PC'$ и BPC. Для их площадей имеем

$$\frac{S_{B'PC'}}{S_{BPC}} = \frac{|C'P| \cdot |B'P|}{|CP| \cdot |BP|} = \frac{q' \cdot |B'P|}{q \cdot |BP|}.$$

С другой стороны,

$$\frac{S_{B'PC'}}{S_{BPC}} = \frac{S_{A'PB'} \cdot \frac{|B'C'|}{|A'B'|}}{S_{APB} \cdot \frac{|BC|}{|AB|}} = \frac{|B'P| \cdot |A'P| \cdot |B'C'| \cdot |AB|}{|BP| \cdot |AP| \cdot |BC| \cdot |A'B'|}.$$

Так как $\triangle APB \backsim \triangle A'PB'$, то

$$\frac{|A'P|}{|A'B'|} = \frac{|BP|}{|AB|},$$

то есть

$$|A'P| \cdot |AB| = |BP| \cdot |A'B'|.$$

Поэтому

$$\frac{q' \cdot |B'P|}{q \cdot |BP|} = \frac{|B'P| \cdot |B'C'|}{|AP| \cdot |BC|},$$

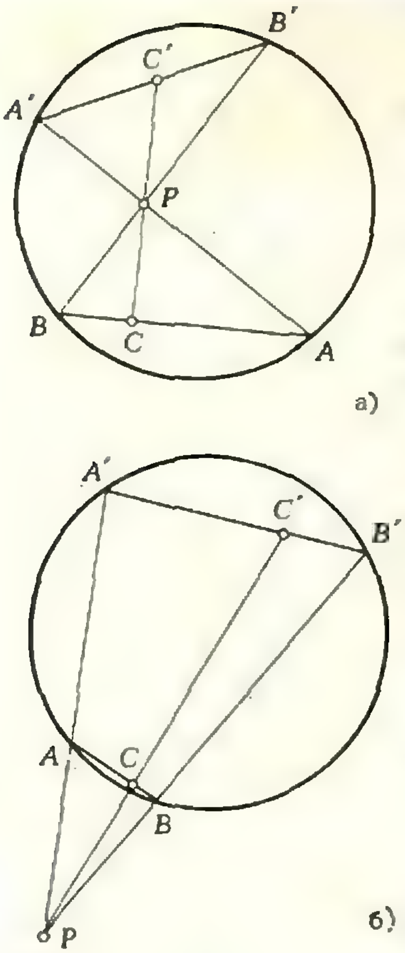


Рис. 1.

откуда

$$|B'C'| = \frac{|BC|\cdot|AP|}{|BP|}\cdot\frac{q'}{q}. \tag{1}$$

Аналогично

$$|A'C'| = \frac{|AC|\cdot|BP|}{|AP|}\cdot\frac{q'}{q}. \tag{2}$$

Перемножая равенства (1) и (2), получаем

$$\frac{s'}{s} = \left(\frac{q'}{q}\right)^2. \tag{3}$$

Далее

а) $$|AP|^2 = |AC|^2 + |CP|^2 + 2\,|AC|\cdot|CP|\cdot\cos(\widehat{BCP}) = |AC|^2 + q^2 + 2q\cdot|AC|\cdot\cos(\widehat{BCP});$$

$$|BP|^2 = |BC|^2 + q^2 - 2q\cdot|BC|\cdot\cos(\widehat{BCP}).$$

Умножая первое соотношение на $|BC|$, второе — на $|AC|$ и складывая их, получаем

$$|AP|^2\cdot|BC| + |BP|^2\cdot|AC| = (s+q^2)\cdot|AB|,$$

то есть

$$s + q^2 = \frac{|BC|\cdot|AP|^2 + |AC|\cdot|BP|^2}{|AB|}. \tag{4}$$

Таким же образом находим, что

$$s' + (q')^2 = \frac{|A'C'|\cdot|B'P|^2 + |B'C'|\cdot|A'P|^2}{|A'B'|}. \tag{5}$$

б) Преобразуем соотношение (5), учитывая равенства (1), (2), (4), и подобие треугольников APB и $A'PB'$:

$$s' + (q')^2 = |A'P|^2\cdot\frac{1 + \frac{|B'P|^2}{|A'P|^2}\cdot\frac{|A'C'|}{|B'C'|}}{1 + \frac{|A'C'|}{|B'C'|}} =$$

$$= |A'P|^2\cdot\frac{1 + \frac{|B'P|^2}{|A'P|^2}\cdot\frac{|AC|\cdot|BP|^2}{|BC|\cdot|AP|^2}}{1 + \frac{|AC|\cdot|BP|^2}{|BC|\cdot|AP|^2}} =$$

$$= |A'P|^2\cdot|AP|^2\cdot\frac{|AB|}{|BC|\cdot|AP|^2 + |AC|\cdot|BP|^2} = \frac{t^2}{s+q^2},$$

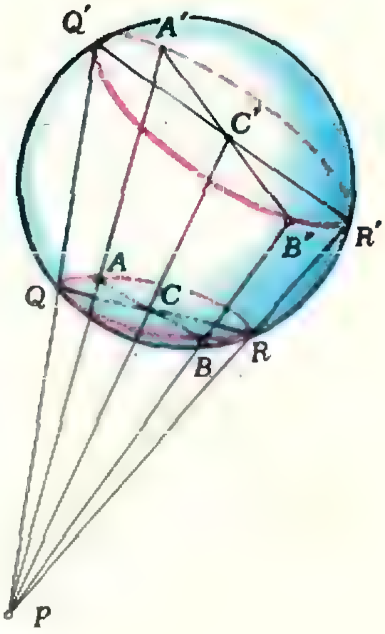


Рис. 2.

то есть

$$\frac{s' + (q')^2}{t} = \frac{t}{s+q^2}. \tag{6}$$

Осталось только доказать, что, например,

$$\frac{t}{s+q^2} = \sqrt{\frac{s'}{s}}.$$

Но это уже простое упражнение (см. (3) и (6)):

$$\frac{s' + (q')^2}{s+q^2} = \frac{s'}{s} \Rightarrow s' + (q')^2 =$$

$$= \frac{s'}{s}\cdot(s+q^2) \Rightarrow t^2 = \frac{s'}{s}(s+q^2)^2.$$

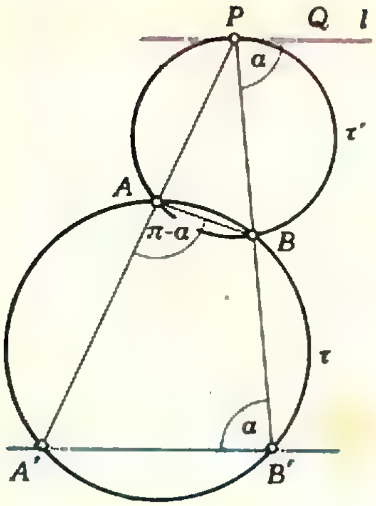


Рис. 3.

б) Будем решать задачу б) в предположении, что точка P находится вне данной сферы S (для случая, когда P — внутри сферы S, все рассуждения аналогичны).

Пусть AB и QR две пересекающиеся хорды окружности σ, A' и B' — точки из множества σ', соответствующие точкам A и B (рис. 2). Проведем через точки A, B и P плоскость; тогда в сечении получится картинка, соответствующая рисунку 1, *б*.

В задаче а) мы доказали, что

$$|C'P| = \frac{|CP|\cdot|AP|\cdot|A'P|}{|AC|\cdot|CB| + |CP|^2}.$$

Если Q' и R' — точки множества σ', соответствующие точкам Q и R окружности σ, то

$$|QP|\cdot|Q'P| = |AP|\cdot|A'P|.$$

и, кроме того,

$$|QC|\cdot|CR| = |AC|\cdot|CB|.$$

Значит, точка C' (принадлежащая хорде $A'B'$) принадлежит и отрезку $Q'R'$, и, следовательно, точки A', B', Q' и R' лежат в одной плоскости. Поскольку мы выбирали точки произвольно, из этого следует, что все точки множества σ' принадлежат одной плоскости; значит σ' — окружность.

А. И. Ширшов

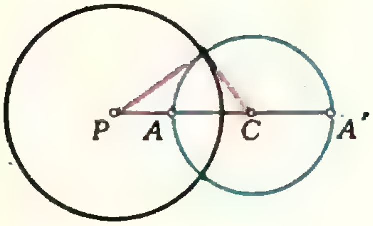


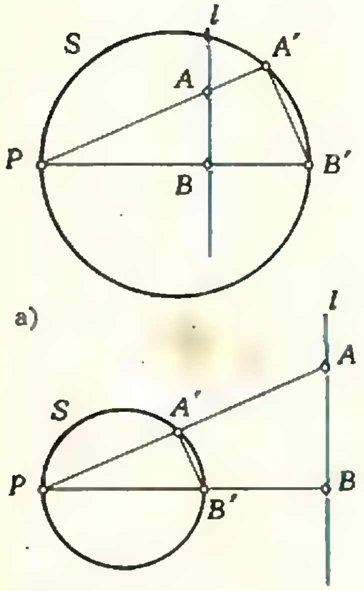
Рис. 4.

Приведем теперь два решения задачи б), не использующие вычислений задачи а).

Идея первого решения принадлежит нашему читателю *С. Финашину* (г. Ленинград).

Проведем через точку P и окружность σ сферу S'; пусть π — плоскость, касательная к сфере S' в точке P. Покажем, что все точки множества σ' принадлежат плоскости π', параллельной плоскости π. Для этого зафиксируем точку A', принадлежащую σ', и докажем, что для любой точки B' множества σ' прямая $A'B'$ параллельна плоскости π.

Рассмотрим плоскость, проходящую через точки P, A' и B'. Эта плоскость пересекает сферы S и S' по окружностям τ и τ' соответственно, плоскость π — по прямой l (рис. 3; точки A и B — это точки пересечения (PA') и (PB') со сферой S — они принадлежат окружности σ).



а)

б)

Рис 5.

Обозначим угол $A'B'B$ через α. Тогда дуга $A'AB$ равна 2α, дуга $BB'A'$ равна $(2\pi - 2\alpha)$, угол $A'AB$ равен $\pi - \alpha$, а угол BAP равен α; то есть дуга PBA равна 2α. Поэтому угол BPQ равен α, то есть углы $A'B'B$ и BPQ конгруэнтны. Значит, прямая $A'B'$ параллельна прямой l, что и требовалось доказать.

Второе решение задачи б) получается с помощью геометрического преобразования — *инверсии*. Напомним вначале, что такое инверсия на плоскости (подробно свойства инверсии на плоскости обсуждались в статье А. П. Савина «Инверсия и задача Аполлония», «Квант», 1971, № 8; инверсии посвящена вторая глава книги И. М. Яглома «Геометрические преобразования», т. II, Линейные и круговые преобразования, М., Гостехиздат, 1956).

Пусть A — некоторая точка, не совпадающая с центром P данной окружности радиуса k. *Инверсная* к A точка A' (то есть образ точки A при инверсии) определяется следующим образом. Эта точка лежит на луче PA (см. рис. 4), причем ее расстояние от центра P удовлетворяет соотношению

$$|PA|\cdot|PA'| = k^2.$$

Точку P называют *центром инверсии*, а данную окружность — *окружностью инверсии*. Ясно, что инверсия полностью определяется заданием окружности инверсии.

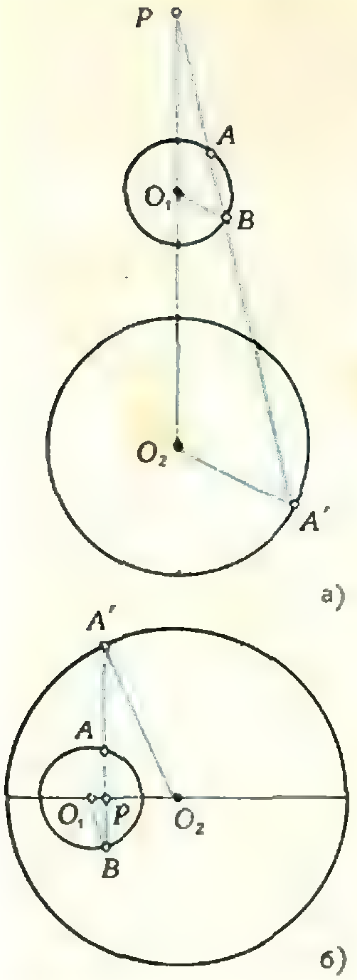


Рис. 6.

Перечислим теперь некоторые свойства инверсии.

1. *Прямая, проходящая через центр P инверсии, переходит при инверсии сама в себя.*

2. *Любая прямая, не проходящая через центр P инверсии, переходит в окружность, проходящую через точку P, и наоборот* (рис. 5, *а*, *б*).

3. *Окружность, не проходящая через центр P инверсии, переходит при инверсии в другую окружность, также не проходящую через точку P* (рис. 6, *а*, *б*), *или, быть может, в ту же самую окружность. Последняя возможность осуществляется в двух случаях: 1) когда данная окружность ортогональна к окружности инверсии* (рис. 4); *2) когда данная окружность совпадает с окружностью инверсии.*

Доказательства этих свойств вы можете найти в уже упоминавшихся статье А. П. Савина и книге И. М. Яглома.

Теория инверсии легко переносится с плоскости на пространство: в этом нетрудно убедиться, если рассмотреть пространственные тела, получающиеся в результате вращения изображенных на рисунках 4—6 фигур вокруг линии центров (PA, или PB, или PO_1). Пусть дана сфера Σ с центром P и радиусом k; точку, инверсную к данной точке A относительно сферы Σ, мы определим как точку A', принадлежащую лучу PA и такую, что расстояние $|PA'|$ удовлетворяет соотношению $|PA|\cdot|PA'|=k^2$.

При этом преобразовании сфера инверсии переходит в себя. Сферы, ортогональные к сфере инверсии, также переходят при инверсии в себя: сфера инверсии делит ортогональную к ней сферу на две части, которые при инверсии «меняются местами».

Теперь покажем, как с помощью инверсии решить задачу М305 б). Рассмотрим сферу Σ с центром в заданной точке P, ортогональную к данной сфере S. Сделаем инверсию относительно сферы Σ. Сфера S при этом перейдет в себя, причем любая точка A окружности $\sigma \subset S$ перейдет в инверсную себе точку A': вторую точку пересечения луча PA со сферой S. Поэтому точки множества σ' — это точки, инверсные соответствующим точкам окружности σ и наоборот. Из всех сделанных ранее замечаний вытекает, что σ' — окружность.

И. Н. Клумова

◆

М306. *Из шахматной доски (8 · 8) удалена одна угловая клетка (1 · 1). На какое наименьшее число равновеликих треугольников (одинаковых по площади) можно разрезать оставшуюся часть доски?*

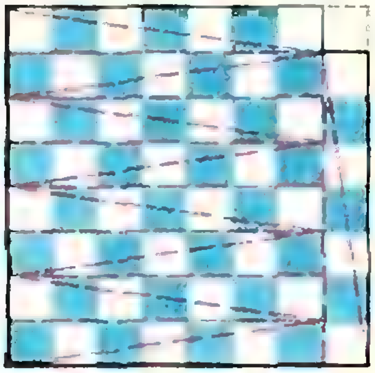


Рис. 7.

Очевидно, что оставшуюся часть доски можно разрезать на 18 равновеликих треугольников (рис. 7). Докажем, что на 17 треугольников разрезать уже нельзя.

В самом деле, если бы оставшуюся часть доски можно было разрезать на 17 равновеликих треугольников, то площадь каждого из них была бы больше $\frac{7}{2}$ (а именно, $\frac{63}{17}$).

Рассмотрим два треугольника, основания которых содержат сторону (или часть стороны) удаленной клетки и вершину этой клетки, лежащую внутри доски (рис. 8). Высоты этих треугольников не превосходят 7, а основание хотя бы одного из них — не более 1. Следовательно, площадь по крайней мере одного из рассматриваемых треугольников не может быть больше $\frac{7}{2}$.

Итак, наименьшее число равновеликих треугольников, на которые можно разрезать оставшуюся часть доски, равно 18.

В. П. Федотов

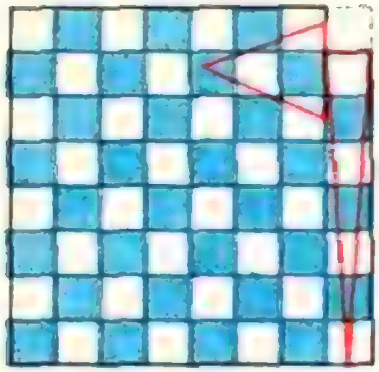


Рис. 8.

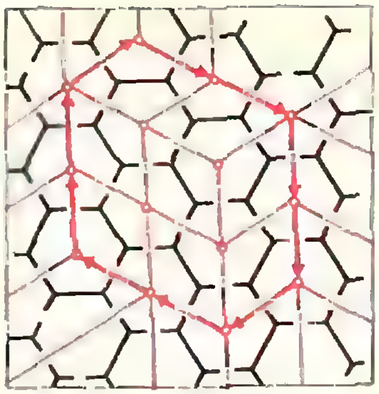


Рис. 9.

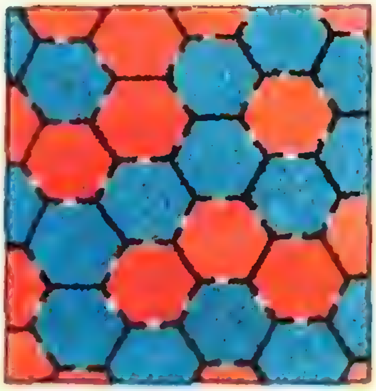


Рис. 10.

М307. *Плоскость разбита на одинаковые шестиугольные комнаты. В некоторых стенах проделаны двери так, что для любой вершины, в которой сходятся три стены (стороны шестиугольников), двери имеются ровно в двух стенах. Докажите, что любой замкнутый путь по такому лабиринту проходит через четное число дверей.*

Назовем *смежными* две комнаты, соединенные дверью. Отметим красным цветом все «ходы», из которых может состоять путь. Точнее, соединим красным отрезком центры каждых двух смежных комнат. На плоскости получится сеть красных линий (см. рис. 9). Как легко доказать, она разрезает плоскость на равные ромбы. (Каждый «глухой» отрезок стены лежит в отдельном ромбе.)

Пусть теперь у нас есть замкнутый путь по красным линиям. Вообще говоря, он может сам себя пересекать. Но, если он проходит через одну комнату два раза, мы разобьем его на два замкнутых пути. Так будем делать до тех пор, пока не разобьем данный путь на несколько замкнутых несамопересекающихся путей. Таким образом, достаточно доказать, что каждый несамопересекающийся путь содержит четное число отрезков.

Пусть нам дан несамопересекающийся замкнутый путь L (один такой путь показан на рисунке 9 стрелками). Он ограничивает часть плоскости, состоящую из ромбов. Пусть в ней A ромбов. У них всего $4A$ сторон. Чтобы узнать количество отрезков пути L, надо из числа $4A$ вычесть удвоенное число тех сторон, по которым ромбы соприкасаются. Разность составит четное число, что и требовалось.

Другое решение можно получить, убедившись, что при заданной планировке можно раскрасить комнаты в два цвета так, чтобы смежные комнаты имели разный цвет (рис. 10).

А. Л. Тоом

◆

Ф312. *Обруч радиуса R, катящийся со скоростью v по горизонтальной поверхности, налетает абсолютно неупруго на ступеньку высоты h ($h \ll R$). Какую скорость будет иметь обруч, когда он «взберется» на ступеньку? При какой минимальной скорости обруч сможет «взобраться» на ступеньку?*

Проскальзывания нет.

Так как столкновение обруча со ступенькой абсолютно неупруго, то при ударе о ступеньку импульс обруча изменяется. Со стороны ступеньки на обруч действует сила, направленная вдоль радиуса R обруча (рис. 11). Благодаря этому импульс обруча при столкновении меняется так, что его проекция на ось OX, идущую вдоль радиуса R, становится равной нулю. Проекция же импульса на ось OY не изменяется. Следовательно, в результате столкновения импульс обруча становится равным по абсолютному значению $mv \sin \alpha$, а его скорость — $v \sin \alpha = v\frac{R-h}{R}$ (см. рис. 11). Воспользуемся теперь законом сохранения энергии. Сразу же после удара обруч обладает кинетической энергией $\frac{mv^2}{2}\left(\frac{R-h}{R}\right)^2$. Подняв-

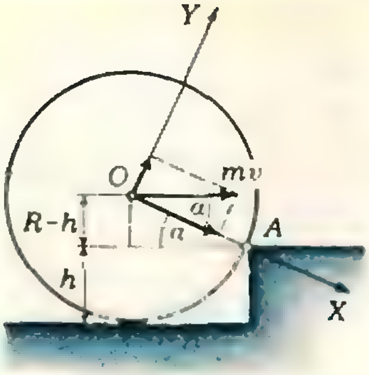


Рис. 11.

шись на ступеньку, обруч будет обладать потенциальной энергией mgh и некоторой кинетической энергией $\frac{mv_h^2}{2}$; следовательно,

$$\frac{mv^2}{2}\left(\frac{R-h}{R}\right)^2=mgh+\frac{mv_h^2}{2}.$$

Отсюда найдем скорость, которую будет иметь обруч, когда он «взберется» на ступеньку:

$$v_h=\sqrt{v^2\left(\frac{R-h}{R}\right)^2-2gh}.$$

Если скорость $v_{\min}$ — это минимальная скорость, при которой обруч «взберется» на ступеньку, то на ступеньке он будет обладать только потенциальной энергией, то есть

$$v_h=\sqrt{v_{\min}^2\left(\frac{R-h}{R}\right)^2-2gh}=0.$$

Отсюда

$$v_{\min}=\frac{R}{R-h}\sqrt{2gh}.$$

И. Ш. Слободецкий

◆

Ф313. *Коэффициент преломления атмосферы планеты x уменьшается с высотой h над ее поверхностью по закону $n=n_0-\alpha h$. Радиус планеты R. Найти, на какой высоте h_0 над поверхностью планеты находится оптический канал, по которому световые лучи будут обходить планету, оставаясь на постоянной высоте.*

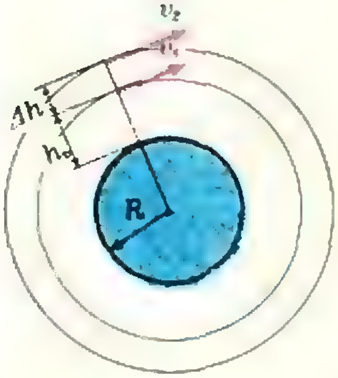


Рис. 12.

В атмосфере, где коэффициент преломления n уменьшается с высотой, свет распространяется не прямолинейно. Поворот фронта световой волны и, следовательно, искривление световых лучей происходит из-за того, что скорость света в среде $v=\frac{c}{n}$ тем больше, чем меньше коэффициент преломления.

Обозначим через Δh ширину оптического канала, по которому световые лучи будут обходить планету, оставаясь на постоянной высоте. Рассмотрим два крайних луча.

Луч, остающийся на постоянной высоте h_0 (рис. 12), обойдет планету за время

$$t=\frac{2\pi(R+h_0)}{v_1}=2\pi(R+h_0)\frac{n_0-\alpha h_0}{c}.$$

Другой луч того же светового канала, отстоящий от первого на расстояние $\Delta h \ll h_0$, должен обойти планету на высоте $h_0+\Delta h$ за то же самое время (только в этом случае фронт световой волны, распространяющейся по каналу, будет всюду перпендикулярен окружности радиуса $R+h_0$):

$$t=\frac{2\pi(R+h_0+\Delta h)}{v_2}=$$

$$=2\pi(R+h_0+\Delta h)\frac{n_0-\alpha(h_0+\Delta h)}{c}.$$

Приравняв времена распространения и учитывая, что $\Delta h \ll h_0$, найдем

$$h_0=\frac{1}{2}\left(\frac{n_0}{\alpha}-R\right).$$

Заметим, что рассмотренное явление называется круговой рефракцией. Как показывают наблюдения, оно возможно, например, в атмосфере Венеры.

Ф314. *По гладкой и абсолютно неупругой трубке, содержащей очень большое число колен, начинает скользить шарик* (рис. 13). *Найти установившуюся скорость движения шарика по горизонтальным участкам трубки. Зависит ли она от начальной скорости? Разность высот соседних горизонтальных участков h. Наклонные участки образуют с горизонтом угол α.*

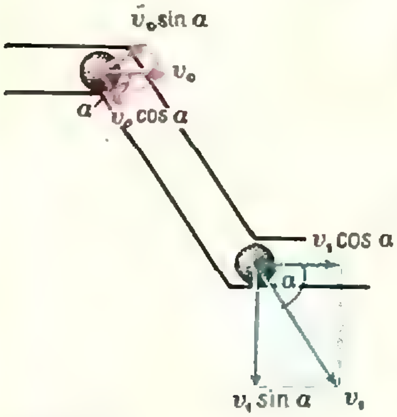


Рис. 13.

Двигаясь по наклонному участку гладкой трубки, шарик увеличивает свою кинетическую энергию, а при ударах в моменты перехода с одного участка на другой — теряет энергию. Поэтому действительно можно говорить об установившейся скорости $v_{\text{уст}}$ движения шарика по такой трубке. Покажем это более строго.

При каждом ударе составляющая импульса шарика, перпендикулярная оси того колена трубки, в которое шарик переходит, становится равной нулю. Составляющая же импульса, направленная вдоль оси этого колена, остается неизменной. Поэтому, если шарик подошел к излому трубки со скоростью v, он отойдет от него со скоростью $v \cos\alpha$ (рис. 13).

Пусть скорость шарика в конце начального горизонтального участка равна v_0. После перехода через излом она будет равна $v_0 \cos\alpha$. В конце первого наклонного участка скорость увеличится до значения

$$v_1 = \sqrt{v_0^2 \cos^2\alpha + 2gh},$$

которое можно найти, применяя закон сохранения механической энергии

$$\frac{m(v_0 \cos\alpha)^2}{2} + mgh = \frac{mv_1^2}{2}. \qquad (*)$$

На втором горизонтальном участке, следующем после перехода через излом, скорость будет равна

$$v_2 = v_1 \cos\alpha = \sqrt{v_0^2 \cos^2\alpha + 2gh}\cos\alpha,$$

на третьем горизонтальном участке —

$$v_3 = \sqrt{v_0^2 \cos^6\alpha + 2gh\left(\cos^4\alpha + 1\right)}\cos\alpha,$$

на четвертом —

$$v_4 = \sqrt{v_0^2 \cos^{10}\alpha + 2gh\left(\cos^8\alpha + \cos^4\alpha + 1\right)}\cos\alpha,$$

на n-м —

$$v_n =$$

$$= \sqrt{v_0^2 \cos^{2(2n-3)}\alpha + 2gh\left(\cos^{4(n-2)}\alpha + \cos^{4(n-3)}\alpha + \ldots + 1\right)} \times$$

$$\cos\alpha = \sqrt{v_0^2 \cos^{2(2n-3)}\alpha + 2gh\,\frac{1-\cos^{4(n-1)}\alpha}{1-\cos^4\alpha}}\cos\alpha.$$

Так как $\cos\alpha < 1$, при очень больших n $\cos^{2(2n-3)}\alpha \ll 1$ и $\cos^{4(n-1)}\alpha \ll 1$. Поэтому шарик будет двигаться по горизонтальным участкам с установившейся скоростью

$$v_{\text{уст}} \approx \frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^4\alpha}}\sqrt{2gh} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sqrt{1+\cos^2\alpha}}\sqrt{2gh}.$$

Заметим, что $v_{\text{уст}}$ не зависит от начальной скорости v_0.

Зная, что установившаяся скорость существует и не зависит от начальной скорости, $v_{\text{уст}}$ можно найти непосредственно из уравнения (*), где необходимо положить $v_{\text{уст}} = v_0 = v_1 \cos\alpha$ (см. рис. 13).

Ф315. *Проволочная спираль, присоединенная к городской осветительной сети, нагревается электрическим током. Половину спирали начинают охлаждать (например, водой). Как это отразится на количестве тепла, выделяемого этой половиной спирали? Всей спиралью? Напряжение сети считать неизменным.*

Обозначим сопротивление каждой половины спирали до начала охлаждения через R (рис. 14). Так как сопротивление металлов зависит от температуры (увеличивается при нагревании и уменьшается при охлаждении), то охлаждение одной из половин спирали приведет к уменьшению сопротивления этой половины до некоторой величины $R_1 < R$. Поскольку напряжение сети U неизменно, это вызовет увеличение силы тока в цепи и, следовательно, дополнительное нагревание другой половины спирали. Сопротивление этой половины увеличится и станет равным $R_2 > R$ (рис. 15).

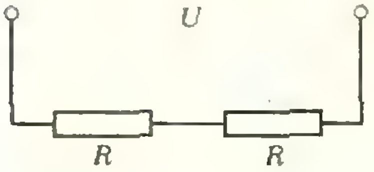


Рис. 14.

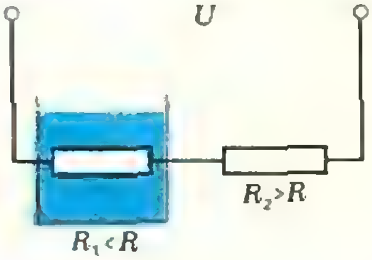


Рис. 15.

Новое значение силы тока в цепи $I = \dfrac{U}{R_1 + R_2}$ будет больше прежнего $I_0 = \dfrac{U}{2R}$. Действительно, предположим обратное, что $I \leqslant I_0$. Тогда сопротивление неохлаждаемой половины спирали останется прежним или уменьшится ($R_2 \leqslant R$), а сопротивление охлаждаемой половины $R_1 < R$. Следовательно, общее сопротивление $R_1 + R_2 < 2R$ и новое значение тока $I > I_0$, что противоречит нашему предположению.

Итак, $I > I_0$, и поэтому выделяемая во всей цепи мощность (то есть количество тепла в единицу времени) $P = IU$ увеличится.

Так как $I > I_0$ и $R_2 > R$, то количество тепла $P_2 = I^2R_2$, выделяемое в неохлаждаемой половине, также увеличится.

Мощность $P_1 = I^2R_1 = \dfrac{U^2R_1}{(R_1 + R_2)^2}$, выделяемая в охлаждаемой половине, наоборот, уменьшится по сравнению с начальной мощностью $P_0 = I_0^2R = \dfrac{U^2}{4R}$. Покажем это.

Найдем отношение P_0 / P_1:

$$\frac{P_0}{P_1} = \frac{U^2}{4R} : \frac{U^2R_1}{(R_1 + R_2)^2} = \frac{(R_1 + R_2)^2}{4R_1R}.$$

Очевидно, что

$$\frac{(R_1 + R_2)^2}{4R_1R} > \frac{(R_1 + R_2)^2}{4R_1R_2},$$

а последнее выражение больше или равно 1, так как среднее геометрическое двух величин $\left(\sqrt{R_1 R_2}\right)$ не превышает их среднего арифметического $\left(\dfrac{R_1 + R_2}{2}\right)$.

Таким образом, действительно $P_1 < P_0$, то есть мощность, выделяемая в охлаждаемой половине спирали, уменьшится.

◆

Ф316. *Если выпуклый «звездчатый» многогранник, вылепленный из пластилина, с силой бросать вертикально вниз, то он будет отскакивать как упругий резиновый мячик, практически не сминаясь. В то же время пластилин легко мнется руками. Почему?*

Под действием внешних сил любое тело может деформироваться. Если освобожденное от действия сил тело восстанавливает свою первоначальную форму и размеры, то деформация называется упругой. Если же тело не полностью возвращается к первоначальному виду, то говорят, что наряду с упругой деформацией происходит также и пластическая деформация.

Материалы, которые могут переносить без разрушения пластические деформации очень большие по сравнению с величиной упругой деформации, называются пластичными. Наоборот, если разрушение наступает после пластической деформации, весьма малой по сравнению с упругой, то материал называется хрупким.

Однако свойства пластичности и хрупкости материала сильно зависят от продолжительности действия силы, от скорости деформации, от температуры материала и т. п.

Пластилин, вообще говоря, относится к пластичным материалам. Но при кратковременных нагрузках (ударных силах) у таких веществ область упругих деформаций значительно увеличивается. Поэтому шарик или выпуклый многогранник отскакивает от пола, почти не изменив своей формы.

Б. Б. Буховцев

◆

Ф317. *В воздухе при нормальных условиях молекула сталкивается с другими молекулами, причем путь между столкновениями (длина свободного пробега) равен в среднем $\lambda = 10^{-5}$ см. Оцените размер молекулы воздуха.*

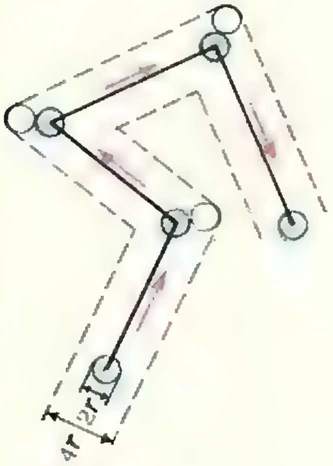


Рис. 16.

Размер молекулы можно оценить, если известны длина свободного пробега и среднее число молекул в единице объема.

Будем считать молекулы упругими шариками радиуса r. Предположим, что все молекулы, кроме одной, находятся в покое. Единственная движущаяся молекула, двигаясь с некоторой средней скоростью v, как бы «вырезает» в пространстве цилиндрический объем радиуса $2r$ и сталкивается со всеми молекулами, центры которых оказались внутри этого объема. При каждом столкновении направление движения молекулы изменяется, и ее путь представляет собой зигзагообразную линию, показанную на рисунке 16.

Полный объем, «вырезаемый» молекулой в пространстве за 1 *с*, равен $4\pi r^2 v$. Среднее число столкновений за 1 *с* есть $\nu = 4\pi r^2 vn$, где n — число молекул в единице объема. При нормальных условиях $n = 2{,}7 \cdot 10^{19}$ *см*$^{-3}$.

Теперь можно записать выражение для средней длины свободного пробега λ. Средняя скорость движения молекулы v, а среднее время между столкновениями $\tau = 1/\nu$. Поэтому

$$\lambda = v\tau = \frac{v}{\nu} = \frac{1}{4\pi r^2 n}.$$

Отсюда найдем радиус молекулы:

$$r = \frac{1}{2\sqrt{\pi\lambda n}} = \frac{1}{2\sqrt{3{,}14 \cdot 10^{-5} \cdot 2{,}7 \cdot 10^{19}}} \approx 1{,}7 \cdot 10^{-8}\ (см).$$

Приведенный выше расчет не учитывает движения других молекул, поэтому полученный результат является лишь приближенной оценкой размера молекулы. Более точный расчет, учитывающий не только сам факт движения всех молекул, но и закон распределения молекул по скоростям, дает поправку порядка 20% к этому результату. Заметим также, что величина $2r$ в молекулярной физике играет важную роль и носит название газокинетического диаметра молекулы.

С. М. Козел

В этом номере мы публикуем фамилии тех, кто прислал правильные решения задач М296—М305, Ф313—Ф317 (жирные цифры после фамилии — последние цифры номера решенной задачи).

Математика

В большинстве писем содержалось верное решение задачи М302. Остальные задачи решили: *Д. Азов* (Челябинск) **6—9, 1, 3**; *О. Аполонский* (Жуковский) **6**; *А. Арутюнян* (Арташат) **6**; *П. Баньковский* (Уральск) **7**; *В. Басманов* (Воронеж) **6, 8, 9**; *А. Блох* (Харьков) **6—1, 3**; *И. Вандакуров* (Ленинград) **6, 9**; *А. Верпаховский* (Ленинград) **6—9**; *В. Витюков* (Орел) **6, 8, 9**; *И. Вольвовский* (Москва) **1**; *М. Гедалин* (Тбилиси) **6, 7, 4**; *Е. Глезин* (Ленинград) **6, 8, 9, 1**; *О. Глушко* (Москва) **6, 9**; *Е. Горбатый* (Одесса) **6**; *И. Григорьева* (Казань) **6**; *С. Гродский* (Корсунь-Шевченковский) **6**; *А. Гулиев* (с. Сулейманлы Аз. ССР) **8, 9**; *А. Гумилевский* (Рига) **7**; *А. Гусев* (Абакан) **1**; *В. Гусейнов* (Нахичевань) **6—9, 1**; *В. Демьянов* (Тула) **6, 8**; *А. Диденко* (Краснодар) **1**; *А. Жохин* (с. Бережовка Черниговской обл.) **6**; *Я. Захаревич* (Ташкент) **6**; *Л. Зелевинский* (Москва) **6—9, 1, 3—5**; *Б. Б. Иванов* (Челябинск) **6, 9, 1**; *Р. Измайлов* (Баку) **6, 9**; *М. Имерлиш-*

вили (Тбилиси) 6, 7, 5; *Н. Искендеров* (Акстафа) 8; *В. Кайманович* (Ленинград) 6—8; *И. Калика* (Киев) 6; *Е. Калошин* (Москва) 6, 7; *А. Камалян* (Иджеван) 6, 1; *В. Каменецкий* (Москва) 6; *П. Кирсанов* (Москва) 1; *И. Клевчук* (с. Ставчаны Черновицкой обл.) 1; *Л. Клименок* (Москва) 6, 8; *В. Конев* (Ангарск) 6—9; *С. Корнилов* (Ленинград) 1; *Н. Крайнюков* (Куйбышев) 6, 9; *Е. Ландман* (Ленинград) 6; *Е. Лейбман* (Минск) 8; *В. Липкин* (Москва) 6, 9, 4; *Д. Литвиненко* (Севастополь) 6, 8, 9, 1; *С. Лифиц* (Харьков) 6—9, 1; *М. Любич* (Харьков) 6—9; *Г. Люсов* (Тейково) 6; *В. Медведь* (Молодечно) 6; *М. Морайнз* (Польша) 6, 9, 1, 3; *И. Морозов* (Горький) 6, 9; *В. Небогатов* (Бобровка) 9; *В. Нейман* (Ленинград) 6, 8, 1; *Н. Нецветаев* (Ленинград) 1, 3; *С. Онучин* (Пермь) 6, 9; *М. Островский* (Харьков) 6; *И. Панин* (Апатиты) 6, 9, 1; *И. Пенков* (Москва) 6, 7, 9; *В. Пойда* (с. Голятин Закарпатской обл.) 6; *В. Порев* (Киев) 6; *С. Пославский* (Харьков) 6, 8, 9, 1, *С. Путинцев* (Невинномысск) 6, 9, 1, 3; *А. Радулу* (Кишинев) 7; *А. Разборов* (Люберцы) 6, 7, 9; *Т. Райков* (Болгария) 6; *М. Райтер* (Ленинград) 6, 9; *В. Романов* (Димитровград) 6, 7, 9, 1; *Е. Романовский* (Киев) 1, 3; *И. Сапрыкин* (Фрунзе) 9; *В. Слепой* (Томск) 1, 5; *С. Соловьев* (Орел) 6, 8, 9; *А. Соломахов* (Москва) 1; *Б. Соломяк* (Ленинград) 6, 8—1, 3, 4; *В. Тарасов* (Ленинград) 6—9; *Е. Титов* (Ленинград) 6, 9, 1; *В. Ткачук* (Москва) 6, 8, 9, 1; *С. Трегуб* (Ташкент) 7, 3; *Д. Утнасунов* (Элиста) 6; *С. Филимонов* (Ленинград) 6, 7, 1; *Ю. Философов* (Саратов) 6—9; *С. Финашин* (Ленинград) 6—1; 3—5; *В. Харатоник* (Польша) 6—9, 1, 3, 4; *И. Цукерман* (Ленинград) 1, 4; *А. Черебатов* (Омск) 1, 3; *В. Шабаев* (п. Ерцево Архангельской обл.) 6; *Ф. Шакурова* (Казань) 6, 8, 1; *О. Шарапова* (Ташкент) 6; *С. Шаташвили* (Тбилиси) 9; *Н. Шмырин* (Реж) 6; *В. Шпаковский* (Пинск) 6, 9; *В. Шпильрайн* (Москва) 6; *М. Щербина* (Харьков) 1; *А. Эстерлис* (Тбилиси) 6; *И. Юнус* (Харьков) 6, 7, 9; *Б. Юсин* (Москва) 6—9, 1, 3, 4; *С. Яковенко* (Москва) 6, 1; *Б. Яцало* (с. Морочно Ровенской обл.) 6, 7.

Физика

Х. Абдуллин (Алма-Ата) 3—7; *Ж. Абдураимов* (Турткульский р-н УзССР) 7; *М. Агеев* (Тула) 4; *Г. Айзин* (Брест) 4, 7; *С. Алексеев* (Москва) 7; *А. Алексеев* (ст. Выселки Краснодарского кр.) 7; *К. Алиакберов* (Казань) 7; *Я. Аннамурадов* (Байрам-Али) 7; *А. Атабаев* (Карачаевск) 4; *И. Бабакулов* (Каттакурган) 7; *В. Бакиров* (Куйбышев) 6; *А. Баклай* (Пинск) 7; *А. Балаган* (Кривой Рог) 7; *С. Балашов* (Москва) 6, 7; *Р. Басыров* (д. Н. Каракитяны ТАССР) 3, 7; *В. Бедняков* (Москва) 6, 7; *В. Беликов* (Тбилиси) 4; *М. Бирман* (Саратов) 6, 7; *Ю. Богомолов* (Казань) 3, 4, 7; *В. Борю* (Запорожье) 3, 4, 7; *И. Быстрицкий* (Нижний Тагил) 7; *В. Вайчайтис* (Куршенай) 7; *Р. Вафин* (д. Чалны ГАССР) 7; *А. Вечер* (Минск) 7; *К. Волчек* (Москва) 7; *В. Гаенко* (Новая Каховка-2) 7; *И. Галишников* (Волгоград) 3—6; *М. Гедалин* (Тбилиси) 3, 4, 6, 7; *В. Гирель* (п. Новоельня Гродненской обл.) 7; *О. Годин* (Симферополь) 4; *А. Гордин* (п. Урень Горьковской обл.) 7; *Г. Горлачев* (Белорецк) 4; *А. Горшков* (Иваново) 7; *А. Григорьев* (Волоколамск) 6, 7; *А. Григорьев* (Ессентуки) 6, 7; *А. Грицук* (Дрогичин) 7; *Е. Губанов* (п. Востряково Московской обл.) 7; *Е. Демихов* (Усмань) 4, 7; *А. Денисенко* (с. Воскресенка Донецкой обл.) 7; *У. Джуманиязов* (Хазараспский р-н Хорезмской обл.) 7; *Ю. Докучаев* (Ленинград) 3—7; *А. Ерин* (Тула) 7; *Д. Жуховицкий* (Магадан) 3, 4; *Ю. Завгородний* (Славянск) 6; *В. Зосимов* (Элиста) 4; *В. Кибальник* (с. Чугуевка Приморского кр.) 7; *В. Кирий* (Чебоксары) 7; *Л. Клименюк* (Москва) 7; *А. Клочко* (Жуковский) 7; *Я. Коган* (Глазов) 6, 7: *А. Копнов* (Новочеркасск) 4, 5, 7; *К. Копейкин* (Ленинград) 6, 7; *С. Копыловский* (п. Знобь-Новгородское Сумской обл.) 4—7; *Ю. Коровин* (Курск) 4, 5; *И. Корытный* (Львов) 3, 5, 7; *А. Костенко* (Кировск) 7; *Ю. Кузовко* (п/о Остромечево Брестской обл.) 7; *А. Кузубов* (Краснодар) 7; *С. Кузьменко* (п. Копылово Томской обл.) 7; *А. Макаров* (Харьков) 4, 7; *А. Макаров* (Ленинград) 5; *В. Марчук* (Черновцы) 5; *С. Маслов* (Горький) 7; *С. Мельник* (Харьков) 3—7; *О. Мирзеабасев* (Черновцы) 5; *А. Моисеев* (Москва) 3, 4, 7; *А. Монич* (с. Сокирница Закарпатской обл.) 5, 7; *И. Морозов* (Горький) 5, 7; *Р. Мусалимов* (Байрам-Али) 5, 7; *Ф. Нагаев* (д. Исмагилово БАССР) 7; *С. Назаренко* (п. Старая Купавна Московской обл.) 5; *А. Охримчук* (Выкса) 4, 5, 7; *Н. Охрименко* (Ромны) 7; *Г. Палагин* (Ижевск) 4, 7; *В. Пестунов* (Кировоград) 7; *В. Пиотух* (Севастополь) 6; *А. Пресман* (Москва) 7; *А. Радул* (Кишинев) 4, 7; *В. Распонаморев* (Оренбург) 7; *А. Рахин* (Камышин) 5; *С. Рашкеев* (Солнечногорск) 3, 4, 5, 7; *А. Рожнов* (Фрунзе) 7; *С. Романов* (Москва) 7; *Б. Ротань* (Жданов) 7; *А. Рудерман* (Ленинград) 3; *В. Рыжиков* (Ахтубинск) 4, 7; *Л. Савчук* (Витебск) 6; *Т. Саргазаков* (Фрунзе) 4; *В. Склярчук* (Борщев) 5; *В. Смоленков* (Ленинград) 7; *А. Смоляков* (Кадиевка) 7; *И. Соколов* (Москва) 3, 6; *В. Старожилец* (Москва) 7; *А. Стецик* (Барановичи) 7; *О. Тагаева* (Ташкент) 7; *А. Танчишвилли* (Тбилиси) 4; *З. Текеева* (Карачаевск) 7; *И. Теплицкий* (Чирчик) 5, 7; *А. Тралле* (Минск) 3, 5, 7; К. *Трутнев* (Казань) 4, 5; *А. Тымчук* (Львов) 4, 5, 7; *А. Фадеев* (Кировабад) 3; *Н. Федин* (Омск) 3—7; *С. Флоря* (Чимишлийский р-н Молд. ССР) 7; *А. Фрумкин* (Курск) 4; *М. Хоминц* (п. Тисменица Ивано-Франковской обл.) 7; *С. Цветков* (Егорьевск) 5; *Л. Цимринг* (Горький) 3, 5, 7; *Е. Чернышов* (Ленинград) 7; *Н. Шмырин* (Реж) 7; *О. Шпаков* (Волгоград) 7; *О. Юдинцева* (Саки) 7.

Спрашивайте — отвечаем

В этом номере журнала мы помещаем ответ на вопрос нашего читателя В. Красина, ученика 10 класса московской школы.

Уважаемая редакция!

В статье «Электрон излучает фотоны» («Квант», 1974, № 12) рассказывается о том, что ускоренно движущаяся заряженная частица излучает электромагнитную энергию, и приводится формула для подсчета интенсивности этого излучения:

$$I = 2e^2a^2/3c^3 \qquad (*)$$

(e — заряд, a — ускорение частицы).

С другой стороны, приводится пример с постоянным током, текущим по криволинейному контуру, и говорится, что «такой ток создает постоянное магнитное поле, но не излучает».

Прочитанное вызвало у меня два вопроса:

1) Почему, двигаясь по искривленному проводнику, а значит, с ускорением, электроны не излучают?

2) Не противоречит ли отсутствие излучения даже в случае тока, текущего по прямолинейному проводнику, классической электронной теории металлов? Согласно этой теории носителями тока в металлах являются свободные электроны, которые в отсутствие электрического поля движутся хаотически. Под влиянием электрического поля на хаотическое движение накладывается упорядоченное движение, такое, что средняя скорость электронов отлична от нуля. Движущийся по проводнику электрон испытывает столкновения с ионами кристаллической решетки, отдавая им полностью энергию, накопленную при движении между столкновениями (эта энергия выделяется в виде тепла). Средняя скорость электронов не изменяется со временем, если по проводнику течет постоянный ток. Но ведь в промежутках между столкновениями электрон движется ускоренно, и следовательно, он должен излучать.

Ниже мы публикуем ответ авторов статьи «Электрон излучает фотоны».

Эти вопросы возникли из-за не совсем точной формулировки, допущенной в статье.

Начнем со второго вопроса. В. Красин кратко и правильно описал процесс прохождения тока через металл. Мы, воспользовавшись именно теми представлениями, которые он изложил, проведем небольшой расчет.

Рассмотрим прямолинейный проводник, по которому течет постоянный ток. Выделим 1 *см*^{3} этого проводника, посчитаем энергию, излучаемую за 1 секунду N электронами, движущимися в этом участке проводника, и сравним ее с количеством тепла, выделяемого ежесекундно в этом объеме. Так как между столкновениями каждый электрон движется с ускорением $a = eE/m$ (e — заряд электрона, m — его масса, E — напряженность электрического поля), то он излучает энергию. Согласно формуле (1) цитируемой статьи интенсивность этого излучения равна $I = \frac{2e^2a^2}{3c^3} = \frac{2e^4E^2}{3c^3m^2}$, а интенсивность излучения N электронов равна соответственно

$$NI = \frac{2Ne^4E^2}{3c^3m^2}.$$

Согласно закону Джоуля — Ленца количество тепла, выделяющегося в проводнике с сопротивлением R за 1 *с*, равно i^2R. Величину тока i

можно выразить через плотность тока j: $i = jS$ (S — площадь поперечного сечения проводника). Плотность тока связана с напряженностью электрического поля: $j = \lambda E$, где λ — удельная электропроводность. (Напомним, что $\lambda = \frac{1}{\rho}$, где $\rho = \frac{RS}{L}$ — удельное сопротивление проводника длины L и поперечного сечения S.) Тогда количество тепла, выделяющегося ежесекундно в 1 *см*^{3} проводника, объем которого V, равно

$$Q = \frac{i^2 R}{V} = \lambda E^2 .$$

Выразим λ через параметры электронов, исходя из классической теории проводимости. Если средняя скорость направленного движения электронов $\bar{v}$, то плотность тока $j = eN\bar{v}$. С другой стороны, $j = \lambda E$, так что $\lambda = \frac{eN\bar{v}}{E}$. Найдем, чему равна скорость $\bar{v}$.

Двигаясь с ускорением eE/m, к концу свободного пробега электрон приобретает скорость $v_{\max} = a\tau = \frac{eE}{m}\tau$ (τ — время свободного пробега). Среднее значение скорости направленного движения равно $\bar{v} = \frac{1}{2} v_{\max} \frac{1}{2} = \frac{eE}{m}\tau$. Время τ можно найти как отношение длины свободного пробега электрона l к скорости $v_т$ его теплового движения (скорость направленного движения $\bar{v}$ во много раз меньше скорости хаотического движения $v_т$), то есть $\tau = \frac{l}{v_т}$. Поэтому $\bar{v} = \frac{1}{2}\frac{eE}{m}\frac{l}{v_т}$. Следовательно, $\lambda = \frac{1}{2}\frac{e^2 Nl}{mv_т}$. В 1 *см*^{3} проводника ежесекундно выделяется тепло

$$Q = \frac{1}{2}\frac{e^2 Nl}{mv_т}E^2 .$$

Найдем теперь отношение энергии, излучаемой электронами, к выделившемуся теплу: $\frac{NI}{Q} = \frac{4}{3}\frac{e^2 v_т}{mc^3 l}$. Придадим этому выражению более наглядный вид, введя классический радиус электрона $r_e = e^2/mc^2$:

$$\frac{NI}{Q} = \frac{4}{3}\frac{r_e}{l}\cdot\frac{v_т}{c} .$$

Оценим величину этого отношения. Так как $r_e = 2{,}5\cdot 10^{-13}$ *см*, длина свободного пробега l не менее 10^{-6}*см*, а средняя скорость теплового движения электрона $v_т \approx 10^8$ *см/с*, то

$$\frac{NI}{Q} \approx 10^{-9}\ (!)$$

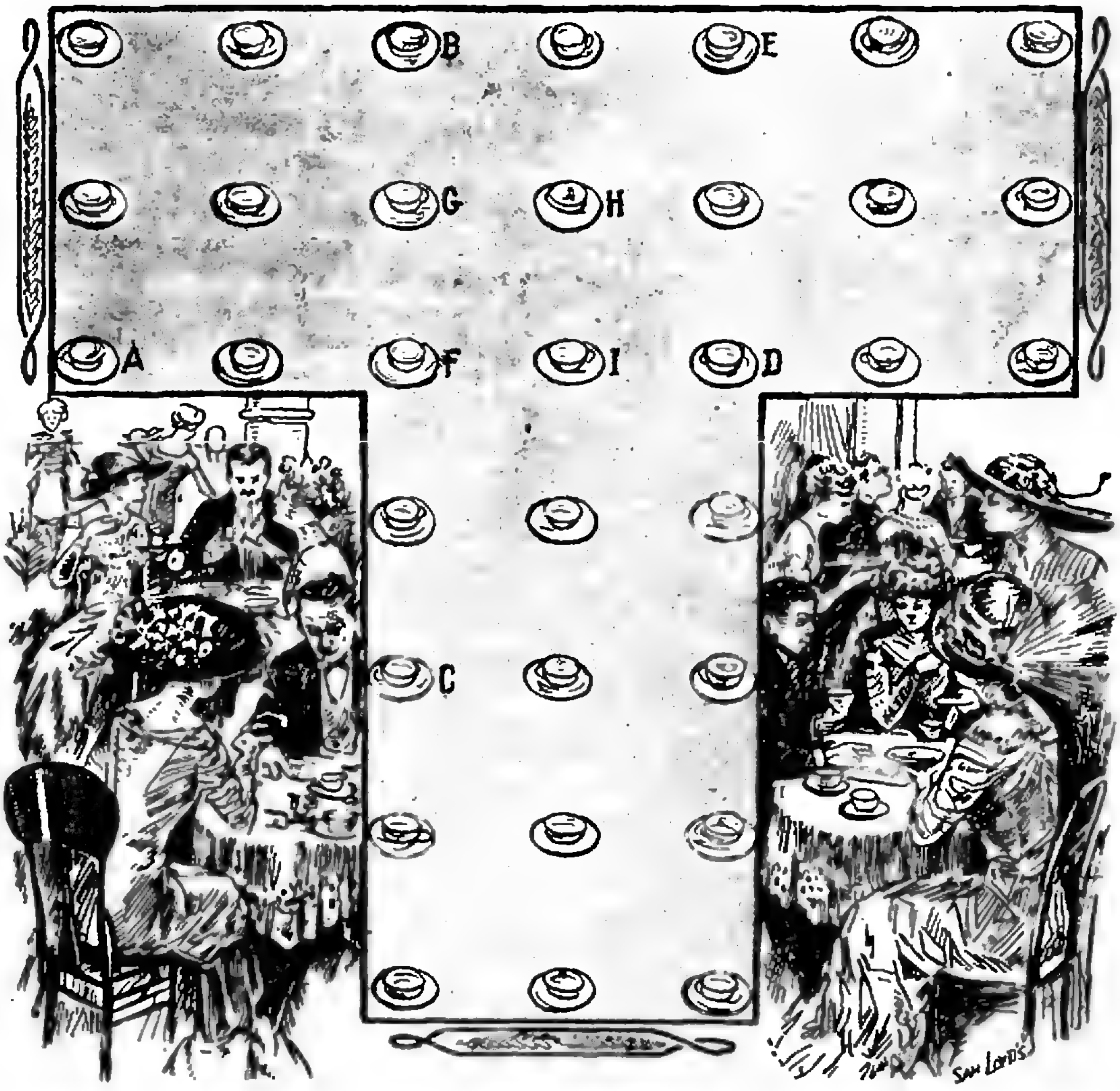
Видно, сколь мало излучение, обусловленное ускоренным движением электронов между столкновениями. В принципе оно может быть обнаружено, однако в большинстве практических вопросов это излучение не играет никакой роли.

Теперь обратимся к первому вопросу письма В. Красина. Рассмотрим криволинейный проводник, например, проводящий контур, имеющий форму окружности радиуса r. Для хаотического движения электронов форма проводника, естественно, не существенна, так как длина свободного пробега, как правило, значительно меньше его наименьшего размера, тем более радиуса окружности r (электрон между столкновениями «не знает», искривлен проводник или нет). А вот в среднем электрон, конечно, движется по окружности, и значит, с ускорением $\bar{v}^2/r$. Однако это ускорение очень мало, меньше даже, чем ускорение $a = eE/m$ между столкновениями. Проверим это утверждение. От неравенства $\frac{eE}{m} \gg \frac{\bar{v}^2}{r}$ можно перейти к неравенству $\bar{v} \ll v_т \frac{r}{l}$, которое заведомо выполняется, так как $r \gg l$, а $v_т \gg \bar{v}$ (величину $\bar{v}$ легко оценить, воспользовавшись выражением для плотности тока и тем, что $N \approx 10^{22} \div 10^{23}$ *см*$^{-3}$).

Ясно, что излучение, связанное с ускоренным движением на искривленных участках, конечно можно не учитывать.

М. И. Каганов, Г. Я. Любарский

Головоломка Сэмюэля Лойда



Игра в «чаепитие»

В эту игру могут играть двое или больше партнеров. Каждый из них запасается фишками «своего» цвета. Игрок, как только наступает его очередь, ставит фишку на свободную чашку. После того, как все чашки закрыты фишками, начинается подсчет очков. Число очков каждого из игроков равно количеству квадратов с вершинами в чашках, накрытых его фишками. Фишки, поставленные его партнерами, им в расчет не принимаются. Например, если ваши фишки поставлены на поля *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G*, *H*, *I*, то вы построили 3 квадрата: *ABCD*, *BEFD* и *GFHI*.

Игра состоит как в блокировании попыток противников построить их квадраты, так и в построении собственных квадратов. Победителем считается тот, кто набрал наибольшее количество очков. Буквы на рисунке помещены только для объяснения правил игры.

Задача. Попробуйте определить число квадратов, если все 33 поля игральной доски заняты вашими фишками.

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

Итак, кончились школьные каникулы, начался новый учебный год. Начинается он и в «Практикуме абитуриента», традиционном разделе нашего журнала, адресованном тем, кто готовится к поступлению в вуз.

В текущем учебном году мы будем продолжать публиковать статьи по математике и физике, посвященные различным вопросам программы приемных экзаменов, познакомим читателей с характерными ошибками, которые часто допускают на вступительных экзаменах абитуриенты. На страницах журнала читатели найдут тексты задач по физике и математике, предлагавшихся поступающим в различные вузы страны в 1975 году, а также информацию о книгах, с которыми полезно познакомиться в период подготовки к экзаменам.

Мы надеемся, что «Практикум абитуриента» станет добрым советчиком поступающих, разъяснит непонятное, предостережет от возможных ошибок. Возможно, что в ходе занятий у наших читателей будут возникать какие-то вопросы, замечания, предложения. Напишите нам об этом. Редакция с радостью ответит вам, а наиболее интересные предложения и соображения читателей опубликует в рубрике «Читатели советуют».

Конечно, материалы «Практикума абитуриента» не смогут заменить школьные учебники. Эти материалы следует рассматривать лишь как дополнения к учебникам, разъясняющие теоретические положения школьного курса и иллюстрирующие их решениями задач вариантов вступительных экзаменов. Намечая темы статей, редакция учитывала опыт приемных экзаменов и те многочисленные соображения, которые высказывали читатели в своих письмах. Помимо материалов, которые будут опубликованы в текущем учебном году, при подготовке к экзаменам полезно познакомиться и с теми статьями, которые уже появлялись в предыдущих номерах журнала; тематический список таких статей можно найти в «Кванте», 1974, № 1, с. 52.

Не следует думать, что материалы «Практикума абитуриента» рассчитаны только на десятиклассников. Многие статьи этого раздела вполне доступны и девятиклассникам, а из других статей им будет понятно очень многое. Так что читать «Практикум абитуриента» могут все, и это в значительной степени будет способствовать лучшему усвоению того материала, который входит в программу вступительных экзаменов.

Несколько слов еще об одном вопросе — о репетиторах. Некоторые поступающие рассчитывают на то, что помощь репетитора перед экзаменом позволит им быстро и без труда повторить необходимый материал и успешно выдержать конкурс. Это глубокое заблуждение! Опыт показывает, что «натасканные» репетиторами поступающие получают лишь формальные и поверхностные знания; это, как правило, проявляется на вступительном экзамене. Залог подлинного успеха на приемных экзаменах — систематическая, регулярная самостоятельная работа. Тот, кто действительно хочет стать студентом, добьется этого, если, не теряя времени, начнет уже сейчас настойчиво повторять теоретический материал и активно тренироваться в решении задач.

Л. В. Рыжков
Ю. И. Ионин

Однородные уравнения

В школьном курсе математики по крайней мере трижды встречается понятие «однородное уравнение» («однородная система уравнений»). Так, при решении систем линейных уравнений однородной называли систему *)

$$\begin{cases} ax + by = 0, \\ cx + dy = 0. \end{cases}$$

Когда рассматривались системы уравнений второй степени, говорилось, что система уравнений

$$\begin{cases} 14x^2-5xy+3y^2=16, \\ 6x^2-xy+y^2=8 \end{cases}$$

равносильна системе уравнений, одно из которых однородное, а второе является одним из уравнений исходной системы **). При решении тригонометрических уравнений ***) однородными назывались уравнения

$$\sin x - \cos x = 0,$$

$$\sin^2 x - 5\sin x\cos x + 6\cos^2 x = 0.$$

Что же объединяет приведенные выше примеры и как понимать термин «однородное уравнение»?

Многочлен $f(u, v)$ от двух переменных называют однородным многочленом степени n, если все его одночлены имеют степень n. Например,

$$f(u, v) = 2u^2 - 7uv + 9v^2$$

— однородный многочлен второй степени, а

$$f(u, v) = u^3 - 15u^2v - 5v^3$$

— однородный многочлен третьей степени.

Уравнение $f(u, v) = 0$ называют однородным уравнением k-й степени, если $f(u, v)$ — однородный многочлен степени k.

Заметим, что понятие однородности распространяется и на уравнения с бо́льшим числом неизвестных. Например, мы скажем, что уравнение $x^3 + 3x^2y + 3xyz + z^3 = 0$ — однородное уравнение третьей степени относительно неизвестных x, y и z.

Рассмотрим однородное уравнение n-й степени с двумя неизвестными x и y:

$$f(x, y) \equiv a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 + \ldots + a_ny^n = 0. \quad (1)$$

Будем считать, что $a_0 \neq 0$.

Случай, когда $a_0 = 0$, сводится к рассматриваемому нами следующим образом: если мы вынесем за скобку y в наименьшей встречающейся степени, то в скобках будет стоять однородный многочлен с ненулевым старшим коэффициентом. Например, уравнение $x^4y^2 + 3xy^5 - 7y^6 = 0$ принимает вид $y^2(x^4 + 3xy^3 - 7y^4) = 0$, после чего остается рассмотреть равносильную исходному уравнению совокупность уравнений $y^2 = 0$, $x^4 + 3xy^3 - 7y^4 = 0$.

Заметим, что пара $x = 0$, $y = 0$ является решением уравнения (1), а пара $x = x_0$, $y = 0$ при $a_0 \neq 0$, $x_0 \neq 0$ решением уравнения (1) не

---

*) Е. С. Кочетков, Е. С. Кочеткова. Алгебра и начала анализа. М., «Просвещение», 1974, ч. I, с. 54.

**) Там же, с. 142.

***) Там же, с. 281.

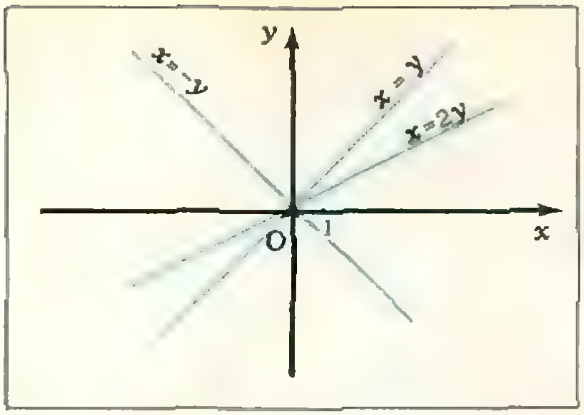


Рис. 1.

является. Разделив обе части уравнения (1) на y^n, мы получим уравнение n-й степени с одним неизвестным $t = x/y$:

$$a_0t^n + a_1t^{n-1} + \ldots + a_{n-1}t + a_n = 0. \qquad (2)$$

Этим свойством однородных уравнений мы воспользуемся при решении приведенных ниже задач.

Выясним, что представляет собой множество точек плоскости, координаты x, y которых удовлетворяют уравнению (1). Прежде всего, в это множество входит начало координат $O\,(0, 0)$. Затем, если $a_0 = 0$, то появляется решение $y = 0$, определяющее ось абсцисс. А корни $t_1, t_2, \ldots, t_k$ уравнения (2) определяют прямые $x = t_1y$, $x = t_2y$, $\ldots$, $x = t_ky$, проходящие через начало координат (например, на рисунке 1 $t_1 = 1$, $t_2 = -1$, $t_3 = 2$).

Задача 1 (МГУ, биофак, 1967). *Из пункта А в пункт Б выехала машина. Одновременно навстречу ей из пункта Б выехал велосипедист. Через три минуты после встречи машина мгновенно поворачивает, едет за велосипедистом и, догнав его, снова мгновенно поворачивает и прибывает в пункт Б. Если бы машина мгновенно повернула через 1 минуту после встречи, а велосипедист после встречи увеличил бы скорость в 15/7 раза, то машина затратила бы на всю дорогу то же самое время. Найти отношение скоростей велосипедиста и машины.*

Пусть x (*км/мин*) — скорость машины, а y (*км/мин*) — скорость велосипедиста. Заметим, что на движение машины от пункта *А* до первой встречи с велосипедистом в первом и втором случае уходит одно и то же время и что на движение машины от места первой встречи с велосипедистом до пункта *Б* в обоих случаях также уходит одинаковое время. Поэтому одно и то же время занимает движение машины от момента первой встречи с велосипедистом до второго прохождения места их первой встречи. Подсчитаем это время в каждом случае.

I. После встречи с велосипедистом машина ехала 3 *мин* в направлении пункта Б. На обратную дорогу до места встречи ей потребуется еще 3 *мин*. Велосипедист за это время удалится от места встречи на $6y$ *км*. Машина будет его догонять со скоростью $(x - y)$ *км/мин*, на это у нее уйдет $\frac{6y}{x-y}$ *мин*. На обратную дорогу до места встречи у нее уйдет также $\frac{6y}{x-y}$ *мин*, а всего $3 + 3 + 2\frac{6y}{x-y} = \left(6 + \frac{12y}{x-y}\right)$ *мин*.

II. Проводя аналогичные рассуждения, получим

$$1 + 1 + \frac{2 \cdot \frac{15}{7}y}{x - \frac{15}{7}y} + \frac{2 \cdot \frac{15}{7}y}{x - \frac{15}{7}y} = \left(2 + \frac{60y}{7x - 15y}\right) \text{ мин.}$$

Приравнивая найденные выражения, получаем уравнение

$$6 + \frac{12y}{x-y} = 2 + \frac{60y}{7x - 15y},$$

откуда

$$7x^2 - 16xy - 15y^2 = 0.$$

Это — однородное уравнение второй степени относительно x и y. Полагая $t = x/y$ (отношение скорости машины и велосипедиста) и решая уравнение $7t^2 - 16t - 15 = 0$, находим $t = 3$ (отрицательный корень не удовлетворяет условию задачи).

В этой задаче у нас было одно уравнение с двумя независимыми переменными. Такой случай встречается довольно редко, обычно в задачах переменные связаны некоторыми дополнительными соотношениями.

Задача 2 (МИСИ). *Решить уравнение*

$$20\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^2-5\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2+48\frac{x^2-4}{x^2-1}=0.$$

Введем новые неизвестные $u=\frac{x-2}{x+1}$, $v=\frac{x+2}{x-1}$. Получим уравнение $20u^2-5v^2+48uv=0$, однородное второй степени относительно u и v. Делим обе его части на v^2 (легко видеть, что в случае $u=v=0$ решений нет) и полагаем $\frac{u}{v}=t$. Получаем уравнение $20t^2+48t-5=0$ с корнями $t_1=-\frac{5}{2}$, $t_2=\frac{1}{10}$.

В первом случае $\frac{u}{v}=-\frac{5}{2}$; $\frac{x-2}{x+1}\cdot\frac{x-2}{x-1}=-\frac{5}{2}$; $\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}=-\frac{5}{2}$; $7x^2+9x+14=0$, это уравнение действительных корней не имеет.

Во втором случае $\frac{u}{v}=\frac{1}{10}$; $\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}=\frac{1}{10}$; $3x^2-11x+6=0$; $x_1=3$; $x_2=\frac{2}{3}$.

Задача 3 (МИСИ). *Решить уравнение*

$$2(x^2+x+1)^2-7(x-1)^2=13(x^3-1).$$

Положим $u=x-1$, $v=x^2+x+1$. Тогда уравнение примет вид $2v^2-7u^2=13uv$. В случае $v=u=0$ решений нет. Разделим обе части уравнения на v^2 и введем новое неизвестное $t=\frac{u}{v}$, получим уравнение $7t^2+13t-2=0$ с корнями $t_1=1/7$, $t_2=-2$.

В первом случае $\frac{x-1}{x^2+x+1}=\frac{1}{7}$, $x^2-6x+8=0$, $x_1=2$, $x_2=4$, во втором $\frac{x-1}{x^3+x+1}=-2$, $2x^2+3x+1=0$, $x_3=-1$, $x_4=-\frac{1}{2}$.

Ответ: $x_1=2$, $x_2=4$, $x_3=-1$, $x_4=-\frac{1}{2}$.

Задача 4 (МИСИ). *Решить уравнение*

$$x^2+2x+15=2x\sqrt{2x+15}. \qquad (3)$$

Введем еще одно неизвестное $u=\sqrt{2x+15}$. Получим однородное уравнение $x^2+u^2=2xu$. Его можно решать как обычно, а можно представить в виде $(x-u)^2=0$, откуда $x=u$. Из уравнения $x=\sqrt{2x+15}$ следует $x^2-2x-15=0$, $x_1=-3$, $x_2=5$. Значение $x=-3$ не удовлетворяет уравнению (3), а $x=5$ удовлетворяет.

Задача 5. *Решить уравнение*

$$2\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}=\sqrt[6]{x^2-1}.$$

Если положить $u=x+1$, $v=x-1$, то получится уравнение, которое можно было бы назвать «однородным степени 1/3», если бы было дано соответствующее определение. Чтобы не иметь дела с дробными степенями, положим

а) $u=\sqrt[6]{x+1}$, $u=\sqrt[6]{x-1}$, если $x\geqslant 1$;

б) $u=\sqrt[6]{-x-1}$, $v=\sqrt[6]{-x+1}$, если $x\leqslant -1$.

В первом случае приходим к уравнению $2u^2-uv-v^2=0$, откуда делением на v^2 находим, что $\sqrt[6]{\frac{x+1}{x-1}}=1$ (второй корень уравнения $2t^2-t-1=0$ следует отбросить), $\frac{x+1}{x-1}=1$, $x+1=x-1$, так что на промежутке $x\geqslant 1$ исходное уравнение корней не имеет.

Во втором случае (при $x\leqslant -1$) получаем уравнение $-2u^2-uv+v^2=$

$= 0$, откуда $\sqrt[6]{\frac{x+1}{x-1}} = \frac{1}{2}$, $x = -\frac{65}{63}$. Так как $-\frac{65}{63} \leqslant -1$, то это — корень исходного уравнения.

Задача 6. *Решить систему уравнений*

$$\begin{cases} 3x^2 - 2xy - y^2 = 0, \\ x^2 + 5y = 6. \end{cases}$$

Первое уравнение системы — однородное степени 2. Деля обе его части на y^2 (случай $y = x = 0$ не является решением системы) и полагая $t = \frac{x}{y}$, придем к квадратному уравнению $3t^2 - 2t - 1 = 0$, откуда $t_1 = 1$, $t_2 = -\frac{1}{3}$. Таким образом, либо $y = x$, либо $y = -3x$. Подставляя $y = x$, а затем $y = -3x$ во второе уравнение системы, найдем четыре ее решения: $x_1 = y_1 = 1$; $x_2 = y_2 = -6$;

$$x_{3,4} = \frac{15 \mp \sqrt{249}}{2},$$

$$y_{3,4} = \frac{-45 \pm \sqrt{249}}{2}.$$

Задача 7. *Решить систему уравнений*

$$\begin{cases} 3x^2 - \frac{25}{12}xy + 3y^2 = 50, \\ x^2 + y^2 = 25. \end{cases} \qquad (4)$$

Эта система характерна тем, что все члены, содержащие неизвестные, имеют вторую степень. Чтобы освободиться от свободного члена, умножим второе уравнение системы на 2 и вычтем его из первого. Рассмотрим систему уравнений, которая состоит из полученного уравнения (оно однородное) и второго уравнения исходной системы:

$$\begin{cases} x^2 - \frac{25}{12}xy - y^2 = 0, \\ x^2 + y^2 = 25. \end{cases} \qquad (5)$$

Система (5) равносильна системе (4).

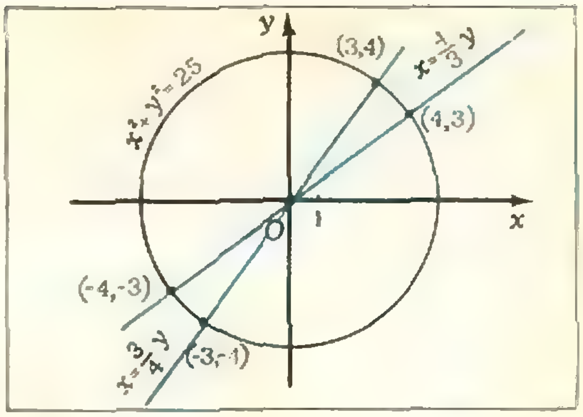


Рис. 2.

Из первого уравнения системы (5), положив $t = \frac{x}{y}$, находим: $t_1 = \frac{3}{4}$, $t_2 = \frac{4}{3}$. Подставляя $x = \frac{3}{4}y$ и $x = \frac{4}{3}y$ во второе уравнение системы, находим четыре решения: $x_{1,2} = \pm 3$, $y_{1,2} = \pm 4$; $x_{3,4} = \pm 4$, $y_{3,4} = \pm 3$.

Первое уравнение системы (5) определяет пару прямых с уравнениями $x = \frac{3}{4}y$ и $x = \frac{4}{3}y$, а второе — уравнение окружности с радиусом 5 и центром в начале координат. Решениями системы будут координаты точек пересечения прямых с окружностью (рис. 2).

Задача 8 (МИСИ). *Решить систему уравнений*

$$\begin{cases} 2x^2 - 3xy + y^2 = 3, \\ x^2 + 2xy - 2y^2 = 6. \end{cases}$$

Умножив первое уравнение системы на 2 и вычтя из него второе уравнение, придем к системе

$$\begin{cases} 3x^2 - 8xy + 4y^2 = 0, \\ x^2 + 2xy - 2y^2 = 6, \end{cases}$$

в которой первое уравнение — однородное, его решения $x = 2y$ и $x = \frac{2}{3}y$. Подставив их во второе уравнение системы, находим два решения: $x_{1,2} = \pm 2$, $y_{1,2} = \pm 1$.

Рассмотрим примеры тригонометрических уравнений, решение которых можно свести к решению однородных уравнений.

Задача 9. *Решить уравнение*

$$2\sin x+3\cos x=0.$$

Это уравнение является однородным первой степени относительно $\sin x$ и $\cos x$. Делим обе части уравнения на $\cos x$ (легко видеть, что при этом потери корней нет). Имеем: $2\operatorname{tg}x+3=0$, $\operatorname{tg}x=-\frac{3}{2}$, $x=-\operatorname{arctg}\frac{3}{2}+\pi k$ (k — целое).

Уравнение $a\sin^2 x+b\sin x\cos x+c\cos^2 x=0$ приводится к виду $a\operatorname{tg}^2 x+b\operatorname{tg}x+c=0$.

Задача 10. *Решить уравнение*

$$\sin^2 x-3\sin x\cos x+2\cos^2 x=0.$$

При делении частей уравнения на $\cos^2 x$ потери корней не будет, поэтому получаем уравнение $\operatorname{tg}^2 x-3\operatorname{tg}x+2=0$, откуда $\operatorname{tg}x_1=1$, $x_1=\frac{\pi}{4}+\pi k$; $\operatorname{tg}x_2=2$, $x_2=\operatorname{arctg}2+\pi m$ (k, m — целые).

Уравнение $a\sin x+b\cos x=c$ допускает много способов решения. Его можно привести к однородному уравнению относительно $\sin\frac{x}{2}$ и $\cos\frac{x}{2}$, подставив $\sin x=2\sin\frac{x}{2}\times\cos\frac{x}{2}$, $\cos x=\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}$, $c=c\left(\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}\right)$.

Задача 11. *Решить уравнение*

$$3\sin x+5\cos x=-3. \qquad (6)$$

Имеем: $3\sin x+5\cos x=-3$,

$$\sin^2\frac{x}{2}-3\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}-4\cos^2\frac{x}{2}=0,\quad \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}-3\operatorname{tg}\frac{x}{2}-4=0,\ \operatorname{tg}\frac{x_1}{2}=4,\ x_1=2\operatorname{arctg}4+2\pi k;\quad \operatorname{tg}\frac{x_2}{2}=-1,\ x_2=-\frac{\pi}{2}+2\pi m$$

(k, m — целые).

Заметим, что решение уравнения $a\sin x+b\cos x=c$ с помощью введения вспомогательного аргумента не всегда удобно. Решая, например, этим методом уравнение (6), получим

$$3\sin x+5\cos x=\sqrt{34}\left(\frac{3}{\sqrt{34}}\sin x+\frac{5}{\sqrt{34}}\cos x\right)=\sqrt{34}\sin\left[x+\arcsin\frac{5}{\sqrt{34}}\right],$$

$$\sin\left(x+\arcsin\frac{5}{\sqrt{34}}\right)=-\frac{3}{\sqrt{34}},$$

$$x=(-1)^{m+1}\arcsin\frac{3}{\sqrt{34}}-\arcsin\frac{5}{\sqrt{34}}+\pi m \quad (m \text{ — целое}).$$

Идея использования однородности при решении тригонометрических уравнений обогащается возможностью увеличивать на 2 степени одночленов относительно $u=\sin x$, $v=\cos x$ путем домножения их на $\sin^2 x+\cos^2 x$.

Задача 12. *Решить уравнение*

$$4\sin^3 x=\sin x+\cos x.$$

Домножая правую часть уравнения на $\sin^2 x+\cos^2 x$ и деля затем обе части на $\cos^3 x$, приходим к уравнению

$$3\operatorname{tg}^3 x-\operatorname{tg}^2 x-\operatorname{tg}x-1=0.$$

Догадавшись, что при разложении левой части на множители один из них должен равняться $\operatorname{tg}x-1$ (так как $\operatorname{tg}x=1$ удовлетворяет уравнению), мы без труда находим это разложение

$$(\operatorname{tg}x-1)(3\operatorname{tg}^2 x+2\operatorname{tg}x+1)=0$$

и ответ: $x=\frac{\pi}{4}+\pi k$ (k — целое).

Удачной заменой к однородным можно свести и некоторые показательные уравнения.

Задача 13 (МГУ, химфак, 1964). *Решить уравнение*

$$4^x=2\cdot 14^x+3\cdot 49^x.$$

Полагая $2^x=u$, $7^x=v$, приходим к однородному относительно u и v уравнению второй степени u^2-2uv-

$-3v^2 = 0$. Решая это уравнение, находим:

а) $\frac{u}{v} = -1$, $\left(\frac{2}{7}\right)^x = -1$ — решений нет;

б) $\frac{u}{v} = 3$, $\left(\frac{2}{7}\right)^x = 3$, $x = \log_{\frac{2}{7}} 3$.

Упражнения

1 (МГУ, мехмат, 1964). Решить уравнение

$$6\sqrt[3]{x-3} + \sqrt[3]{x-2} = 5\sqrt[6]{(x-2)(x-3)}$$

2 (НГУ, 1970). Решить уравнение

$$5^{\log_4(x^2)} - 3^{2\log_4(x^2/2)} =$$

$$= \sqrt{3^{\log_{\sqrt{2}}(2x^2)}} - 5^{\log_4(x^2)-1}$$

3 (УДН, 1971). Решить уравнение

$$(3-2\sqrt{2})^{x^2-6x+9} +$$

$$+ (3+2\sqrt{2})^{x^2-6x+9} = 6.$$

4 (МГУ, геофак, 1960). Решить уравнение

$$\sin 2x - \operatorname{tg}\frac{\pi}{6}\cdot\cos 2x = 1.$$

5 (МГУ, биофак, 1966). Решить уравнение

$$2\sin 4x - 3\sin^2 2x = 1.$$

6 (МГУ, химфак, 1964). Решить уравнение

$$3\cos^2 x - \sin^2 x - \sin 2x = 0.$$

7. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y\sqrt{xy} = 420, \\ y^2 + x\sqrt{xy} = 280. \end{cases}$$

8 (ЛПИ, 1963). Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{xy} = \dfrac{5}{2}, \\ x^2 - y^2 = 3. \end{cases}$$

9 (ЛПИ, 1964). Решить уравнение

$$7\cdot 3^{x+1} - 5^{x+2} = 3^{x+4} - 5^{x+3}.$$

10 (МГУ, геофак, 1967). В пустой резервуар по двум трубам одновременно начинает поступать чистая вода и раствор кислоты постоянной концентрации. После наполнения резервуара в нем получится 5%-ный раствор кислоты. Если бы в тот момент, когда резервуар был наполнен наполовину, подачу воды прекратили, то после наполнения резервуара в нем получился бы 10%-ный раствор кислоты. Определить, какая труба подает жидкость быстрее и во сколько раз.

11 (МИСИ). Решить уравнение

$$\frac{(34-x)\sqrt[3]{x+1} - (x+1)\sqrt[3]{34-x}}{\sqrt[3]{34-x} - \sqrt[3]{x+1}} = 30.$$

12. Система уравнений

$$\begin{cases} a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 = d_1, \\ a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2 = d_2 \end{cases}$$

имеет два решения: $x_1 = 2$, $y_1 = 3$; $x_2 = -5$, $y_2 = -7$. Можно ли утверждать, что множество решений системы не ограничивается парами (x_1y_1); (x_2y_2)? Если да, то какие еще решения имеет система?

13 (МГУ, геофак, 1962). Решить уравнение

$$2^{2x+2} - 6^x - 2\cdot 3^{2x+2} = 0.$$

14. Решить уравнение

$$\left(\sqrt{\sqrt{x^2-8x+7} + \sqrt{x^2-8x-9}}\right)^x +$$

$$+ \left(\sqrt{\sqrt{x^2-8x+7} - \sqrt{x^2-8x-9}}\right)^x =$$

$$= 2^{x+1}.$$

15. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2^{x-y} - 3\cdot 2^x + 2^{x+y+2} = 2, \\ 2^{x-y-1} - 2^x - 5\cdot 2^{x+y} = 1. \end{cases}$$

16. Решить уравнение

$$2(x^2+2) = 5\sqrt{x^3+1}.$$

ИНФОРМАЦИЯ

VI праздник юных математиков Закавказья

«Когда-то многие считали,
Что нуль не значит ничего»—

— доносятся со сцены звонкие голоса. Идет шестой праздник юных математиков.

На этот раз в Батуми приехали школьники ФМШ им. Комарова и члены математических кружков Дворца пионеров и школьников им. Б. Дзиеладзе из Тбилиси, ФМШ № 145 из Киева и ФМШ № 173 из Баку. Гостями и активными участниками праздника были члены редколлегии журнала «Квант», математики из Московского и Тбилисского университетов.

Организовали праздник Совет профсоюзов Аджарии, Отдел Просвещения Батумского Горисполкома, Батумский Горком ЛКСМ Грузии и школа № 7 г. Батуми. В празднике принял участие зав. отделом Министерства просвещения Грузии Л. С. Мпатобишвили.

Праздник состоялся в ноябре, но подготовка к нему началась намного раньше, еще летом. Уже второй год подряд Батумская школа № 7 организует летнюю математическую школу. Летом 1974 года на курорте Бешуми в одном из корпусов Республиканского пионерского лагеря висел лозунг: «Без математики ни шагу!». 35 будущих восьмиклассников школы № 7 провели лето в горах на высоте 2000 *м*. Математикой, физикой и астрономией с ними занимались члены редколлегии «Кванта», научные сотрудники МГУ и ЛГУ.

Занятия со школьниками проводили профессора А. А. Кириллов, В. П. Паламодов и О. С. Берлянд, математики и физики из МГУ М. С. Полякова, В. Л. Гутенмахер, А. Н. Земляков, М. Л. Козельцев, Ю. Б. Андреев, математики из Ленинграда Б. М. Беккер и Ю. И. Ионин, зав. отделом математики «Кванта» Л. Г. Макар-Лиманов.

Занятия были подытожены двумя олимпиадами. Чемпионами летней школы 1974 года стали *Марина Торопыгина* и *Виола Анжело*, вторые места заняли *Саша Ступин*, *Амиран Мелуа*, *Заза Гарибов*, *Рамаз Бежанидзе* и *Ира Мартынова*.

Романтики в Бешуми хоть отбавляй! Ребята вместе с преподавателями часто ходили в походы, штурмовали вершины, переправлялись через бурные речки, поднимались к снежникам.

Лекцию в летней математической школе читает Б. М. Беккер.

Тепло прошла встреча научных сотрудников МГУ и пионеров математического отряда с пограничниками.

Впечатлений от лагеря осталось много. Было чем поделиться с гостями на празднике математики.

4 ноября заместитель министра просвещения Аджарии Г. К. Катамидзе открыл праздник. Школьников приветствовали доцент Тбилисского университета А. Д. Бендукидзе, зам. главного редактора журнала «Квант» М. Л. Смолянский, руководители делегаций. Юных математиков приветствовали пионеры школы № 7.

После открытия состоялась встреча с редколлегией журнала «Квант».

5 ноября была научная конференция школьников. О рождении Грузинской математической школы рассказал А. Д. Бендукидзе. Затем с докладами на самые разнообразные темы выступили школьники. Были прочитаны доклады «О квадратуре круга»

Какую геометрическую теорему изображают ребята?

(*В. Котария*, 10 кл., Тбилиси), «Три замечательные задачи древности» (*И. Шиленкина*, 10 кл., Киев), «Равновеликие и равносоставленные фигуры» (*В. Масхулия*, 10 кл., Дворец пионеров, Тбилиси), «Средняя гармоническая нескольких чисел» (*М. Варамашвили*, 9 кл., Дворец пионеров, Тбилиси), «Свойства точек касания вписанной окружности» (*А. Резников*, 10 кл., Киев; этот доклад опубликован в 8 номере журнала), «Применение теоремы Эйлера к некоторым задачам» (*А. Георгян*, 8 кл., Батуми) и другие.

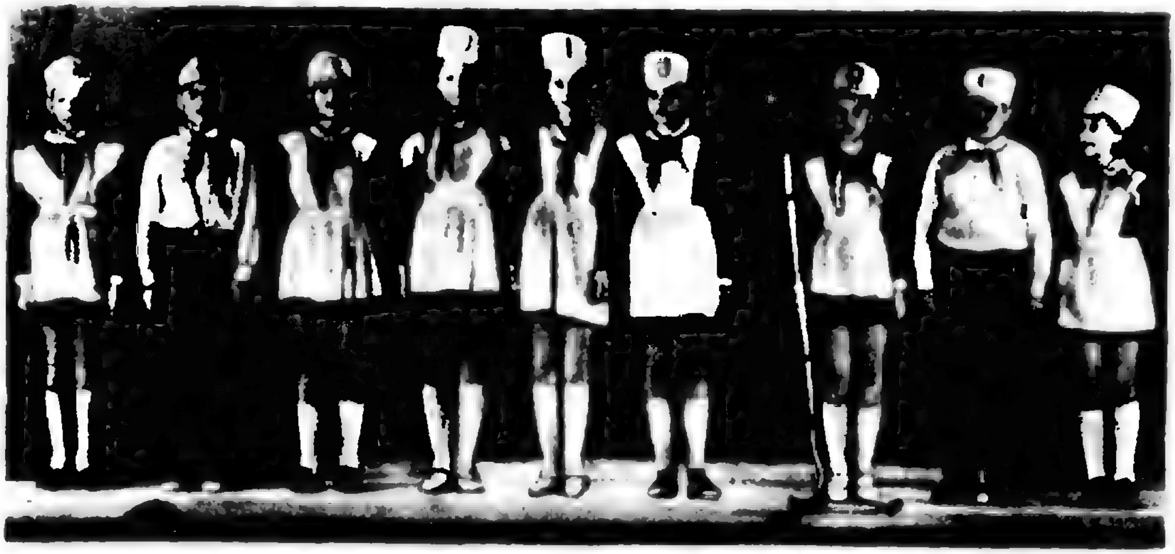
После научной конференции все участники праздника ездили на экскурсии в Салибаурский чайный совхоз.

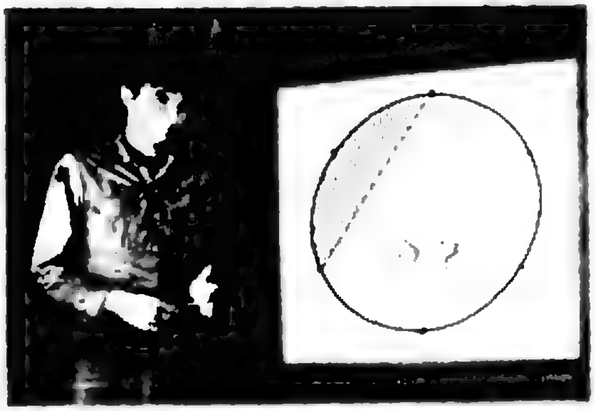
День 6 ноября был посвящен экскурсии по побережью Аджарии. Гости обошли знаменитый Ботанический сад на Зеленом мысе, полюбовались причудливыми скалами на берегу моря в Цихис-Дзири, побывали на курорте в Кобулети.

7 ноября гости участвовали в праздничной демонстрации, после которой были приглашены на «Вечер дружбы», организованный горкомом комсомола.

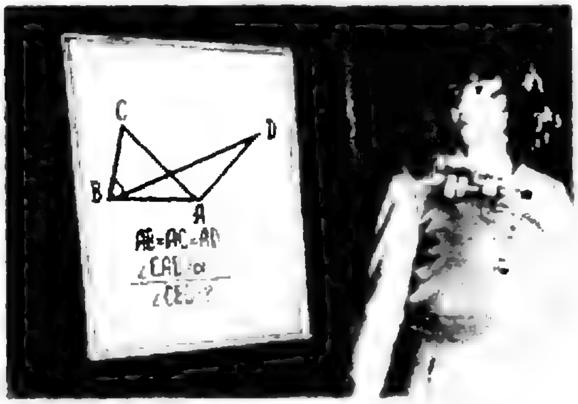
8 ноября — экскурсия в Батумский дельфинарий и аквариум. Во второй половине

«Было ли яблоко?»





Найти площадь заштрихованной фигуры



дня состоялся математический КВН. В состав жюри под председательством Л. С. Мнатобишвили вошли представители «Кванта», руководители делегаций.

По традиции командам сначала предложили изобразить, как Ньютон открыл закон всемирного тяготения и «разыграть» какую-нибудь геометрическую теорему. Яблоко у одних падало на Ньютона, у других не падало, а у третьих яблока вообще не было. Ну что ж, до сих пор историки науки ведут спор, было ли яблоко. Для пантомимы команды выбрали различные теоремы: теорему Фаллеса, теоремы о сумме углов треугольника, о перпендикуляре и наклонных и другие.

Затем началось самое интересное — решение задач. Вот некоторые из них:

1. Остап Бендер организовал в г. Арбатове раздачу слонов населению. На раздачу пришли 27 членов профсоюза и 35 не членов профсоюза. Членам профсоюза давалось одинаковое число слонов, одинаковое (но, возможно, другое) число слонов давалось и не членам профсоюза. В ходе раздачи оказалось, что при этом условии ее можно осуществить единственным способом.

Какое наибольшее число слонов могло быть у О. Бендера?

2. В Москве k высотных домов. Человек едет по кольцевой автостраде вокруг Москвы и видит их идущими в разном порядке. Может ли он увидеть все возможные варианты их следования, если: а) $k = 3$; б) $k = 4$?

3. Доказать, что натуральное число является точным квадратом тогда и только тогда, когда у него нечетное число делителей (включая 1 и само число).

Наиболее сложные задачи были предложены капитанам команд. Победителем вышел ученик киевской школы № 145 *А. Резников.*

Первое место в КВН заняли киевляне — 39 очков; второе — команда ФМШ им. Комарова — 30 очков; на третьем — батумцы — 21 очко.

Праздник закончился 9 ноября вечером занимательной математики. Школьники ФМШ им. Комарова показали постановку по статье М. И. Рейтмана «Транспортная задача» («Квант», 1974, № 7).

После этого ученики школы им. Комарова и члены математических кружков Дворца пионеров предлагали занимательные задачи (см. фотографии).

Шестиклассники школы № 7 показали юмористическую инсценировку «О нуле».

В роли математических магов и волшебников выступили ученики школы № 7. Они легко отгадывали число братьев, окон в комнате, номер этажа. Второй математический фокус с отгадыванием задуманной математической фигуры был основан на переводе чисел из десятичной системы счисления в двоичную.

В заключение ученики школы № 7 показали пьесу М. Романенко «Живая геометрия».

На торжественном закрытии праздника заведующая отделом просвещения Батумского горисполкома Д. А. Глонти вручила участникам праздника грамоты и памятные подарки. Вручала премии и редакция журнала «Квант». Номера «Кванта» с автографами членов редколлегии получили команды школы № 145 города Киева за победу в КВН и школы № 7 города Батуми за хорошую организацию праздника, а также школьники, активно участвовавшие в празднике математики: *М. Варамашвили, В. Котария* и *В. Масхулия* из Тбилиси, *А. Резников* и *И. Шиленкина* из Киева, *А. Георгян* и *В. Красиловский* — из Батуми.

В заключение мы выражаем надежду, что шестой праздник юных математиков надолго останется в памяти каждого его участника, а те, кто на этом празднике были пока лишь зрителями, безусловно, поймут, что математика очень интересная наука и ею надо много и серьезно заниматься.

М. Н. Жгенти

Всероссийский слет актива научных обществ учащихся

В весенние каникулы 1974/75 учебного года в Москве проходил первый Всероссийский слет актива научных обществ учащихся, организованный Министерством просвещения РСФСР, ЦК ВЛКСМ, Всесоюзным Советом Научно-технических обществ и Правлением общества «Знание» РСФСР.

В работе слета приняли участие более 500 школьников: представители школьных научных обществ, дворцов пионеров, малых академий и клубов юных любителей науки.

24 марта перед участниками слета гостеприимно распахнулись двери Концертного зала Московского городского Дворца пионеров и школьников. С приветственным словом к участникам слета обратился министр просвещения РСФСР А. И. Данилов. Он отметил, что члены научных обществ учащихся только еще начинают творческую работу. Важно **помнить**, что специалисты добиваются успеха лишь тогда, когда дерзают в науке, а не любуются собой, когда они скромны в оценке своего места и роли и когда отдают все свои силы и знания службе народу и Родине.

Участников слета приветствовала также секретарь ЦК ВЛКСМ З. Г. Новожилова. Она напомнила собравшимся слова товарища Л. И. Брежнева, произнесенные им на XVII съезде ВЛКСМ: «Страна, где люди, начинавшие свою трудовую жизнь с подручного кровельщика и ученика литейщика, овладевают высотами знаний, прокладывают человечеству путь к звездам, — замечательная страна! В судьбах Королева и Гагарина — ярчайший пример того, какие широкие просторы и возможности открывает социализм перед человеком труда, перед нашей молодежью».

От имени советских космонавтов делегатов слета приветствовал дважды Герой Советского Союза летчик-космонавт Н. Н. Рукавишников. Он выразил уверенность в том, что занятия в юношеских научно-технических обществах многим школьникам приносят огромную пользу. Польза эта прежде всего в том, что ребята получают конкретные результаты и приобретают важные навыки творческой работы, учатся работать со специальной научной литературой.

Руководитель секции математики и кибернетики на слете, доцент механико-математического факультета МГУ и член редколлегии журнала «Квант», кандидат физико-математических наук Н. Х. Розов в своем выступлении привел два афоризма, адресованных выдающимися учеными научной молодежи. Первый афоризм принадлежит И. Г. Петровскому, бывшему в течение многих лет ректором МГУ: «Увидеть Северный полюс совсем нетрудно. Трудно только дойти до того места, откуда он будет виден. Желаю каждому из вас дойти до того места, откуда будет виден ваш Северный полюс».

Второй афоризм принадлежит известному австрийскому физику Л. Больцману: «Нет ничего практичнее хорошей теории».

...Итак, открытие слета состоялось. На слете работало десять секций. Из них три имели непосредственное отношение к тематике журнала «Квант». Это — секция математики и кибернетики (руководители: Н. Х. Розов и М. Д. Комский — доцент Свердловского педагогического института, кандидат педагогических наук), секция физики (руководители: Н. С. Бабаев — старший научный сотрудник Института атомной энергии им. И. В. Курчатова, доктор физико-математических наук Э. М. Надгорный — заведующий лабораторией Института физики твердого тела АН СССР, доктор физико-математических наук), секция астрономии и космонавтики (руководители: А. В. Засов — старший научный сотрудник Государственного астрономического института им. П. К. Штернберга и К. А. Порцевский — директор Московского планетария).

Работа секций была чрезвычайно насыщенной и напряженной.

Расскажем вначале, как проходила работа секции астрономии и космонавтики.

В первый день, до начала работы секции, гости Москвы познакомились с отделом астрономии и космонавтики Дворца пионеров. Больше всего ребят собралось у летного тренажера юных космонавтов. Профессиональные дискуссии завязывались у стендов со снимками астрономических объектов.

К моменту открытия заседаний секции зал пионерского планетария, где происходили эти заседания, был переполнен. По списку должно было быть 38 делегатов слета, а в зале оказалось более 70. «Удвоение» произошло за счет юных астрономов столицы.

Из рассказов *Сергея Гусакова* (г. Москва, с. ш. № 31, 9 кл.) и *Анны Лапшинской* (г. Москва, с. ш. № 408, 9 кл.) о работе секции астрономии и физики атмосферы ЮНО Московского городского Дворца пионеров и школьников гости узнали о тематике научно-любительских наблюдений, об экспедициях, экспериментах и реферативных конференциях, об организации силами кружковцев клубов и кружков в школах и пионерских лагерях.

О многолетних исследованиях природы загадочных серебристых облаков доложил *Николай Власов* (г. Москва, с. ш. № 710, 9 кл.). Этот доклад был удостоен премии журнала «Квант».

После этих докладов гостям была предложена «мини-викторина»: пять вопросов и по одной минуте на размышление. Вот два из этих вопросов.

1. *Два корабля-спутника движутся по одной и той же орбите по инерции на расстоянии нескольких десятков километров друг от друга. Второй корабль получил дополнительное мгновенное ускорение по направлению орбитального движения. Как изменится в конце концов положение этого корабля относительно первого?*

Варианты ответа:

а) *догонит и состыкуется с первым,*
б) *обгонит первый,*
в) *отстанет от первого.*

2. *В открытый космос вынесен сосуд с водой. Представим себе, что сосуд исчез. Что произойдет с водой?*

Варианты ответа:

а) *замерзнет,*
б) *быстро рассеется в пространстве,*
в) *соберется в шар, сохранив свое агрегатное состояние.*

После викторины участники секции разделились на две группы. Любителей астрономии пригласили в лабораторию астрофизики Дворца, где им были предложены задачи практикума. Юным космонавтам предстояло пройти испытания на тренажерах.

В заключение первого дня работы секции ребята прослушали доклад *Олега Иваненко* и *Евгения Кузьмина* из Московского Дворца пионеров «Комплекс для исследования планет» и сообщение старшего научного сотрудника А. А. Большакова «Космос — человечеству».

Ребятам посчастливилось побывать в Звездном городке, где они встретились с космонавтом Ю. П. Артюхиным, осмотрели музей Центра подготовки космонавтов.

Второй и третий дни заседаний проходили в Московском планетарии. Здесь было заслушано 18 докладов. Большинство из них — итоги научно-любительских наблюдений, результаты практической работы по изготовлению астрономических инструментов и моделей космических комплексов, теоретические рефераты. Наибольший интерес и оживленную дискуссию вызвал доклад *Александра Мальцева* (г. Калининград, с. ш. № 32, 10 кл.) «Гравитационный коллапс, сингулярные точки, их роль во Вселенной»; этот доклад, показавший глубокое проникновение автора в суть проблемы релятивистской астрофизики, был отмечен премией журнала «Квант». Премии «Кванта» удостоен также доклад члена Челябинского научного общества учащихся *Андрея Сычикова* (г. Челябинск, с. ш. № 58, 9 кл.) «О результатах обработки наблюдений кометы Когоутека».

Помимо премий журнала «Квант» жюри присудило еще 4 премии: школьному научному обществу любителей астрономии с. ш. № 25 г. Ярославля, обществу любителей астрономии г. Крымска, школьному научному обществу любителей астрономии с. ш. № 32 г. Калининграда, обществу любителей астрономии с. ш. № 1 г. Верещагина Пермской области.

Следующим школьникам были присуждены индивидуальные премии: *Сергею Язеву* (г. Иркутск, с. ш. № 11, 10 кл.) — за доклад «Определение расстояний между штрихами пластинки микрометра зенитного телескопа»; *Станиславу Янковскому* (г. Москва, с. ш. № 21, 10 кл.) — за доклад «Изучение переменных звезд»; *Федору Фролову* (Елаурская с. ш. Ульяновской области, 10 кл.) — за доклад «Наблюдения мезосферных облаков»; *Евгению Воронову* (г. Горький, с. ш. № 40, 7 кл.) — за доклад «Изучение активности Солнца и ее земных проявлений»; *Михаилу Смирнову* и *Сергею Кирсанову* (г. Москва, с. ш. № 18, 7 кл.) — за работу по моделированию мембранных крыльев; *Георгию Безрукову* (г. Волгоград, с. ш. № 8, 8 кл.) — за доклад «Наблюдения больших планет и малых тел солнечной системы»; *Александру Луневу* (г. Ленинград, с. ш. № 30, 10 кл.) — за реферат «Циклы солнечной активности»; *Владимиру Белякову* (г. Хабаровск, с. ш. № 63, 10 кл.) — за доклад «Наблюдения Эроса»; *Ольге Плотниковой* (г. Новосибирск, с. ш. № 125, 10 кл.) — за доклад «Наблюдения серебристых облаков».

Пять школьников получили премии журнала «Юный техник»: *Василий Чулаков* (г. Верещагин Пермской обл., с. ш. № 1, 7 кл.); *Сергей Куралов* (г. Пермь, с. ш. № 133, 8 кл.); *Евгений Кузьмин* (г. Москва, с. ш. № 863, 8 кл.); *Олег Иваненко* (г. Москва, с. ш. № 7, 7 кл.); *Сергей Луговой* (г. Краснодар, с. ш. № 66, 8 кл.).

Перейдем теперь к работе секции математики и кибернетики. 24 марта она работала в Московском городском Дворце пионеров и школьников, 25 марта утром — на ВДНХ СССР в павильоне «Вычислительная техника» и после обеда — в московской физико-математической школе № 1140, а 26 марта — в Институте физики твердого тела АН СССР.

За это время было заслушано 18 докладов из 32, представленных участниками слета. Эти доклады были отобраны членами жюри и руководителями секции, как заслуживающие наибольшего внимания. Все они были результатом самостоятельной работы школьников.

Первая группа докладов касалась решения различных задач на ЭВМ.

«Вычисление длины отрезка внутри многоугольника» — так назывался доклад *Михаила Антонова* (г. Москва, с. ш. № 1140, 10 кл.). В нем рассказывалось о программе, составленной автором для решения такой задачи: *на плоскости в декартовой системе координат заданы координаты двух точек, через которые проведена прямая, и вершин выпуклого многоугольника; найти длину отрезка прямой, заключенного внутри этого многоугольника.* Работа выполнялась на ЭВМ «БЭСМ—4М». На этой же машине выполняли свои работы одноклассники Антонова — *Герман Зубков* («Вычисление двойного интеграла методом Монте-Карло») и *Лев Дроздов* («Вычисление длины маршрута, проходящего по сфере через точки, заданные полярными координатами»).

Ряд докладов представили участники секции математики и кибернетики Московского городского Дворца пионеров и школьников. Это *Борис Мандель* (г. Москва, с. ш. № 5, 8 кл., «Решение квадратных уравнений с помощью ЭВМ «Мир-2»), *Станислав Рачинский* (г. Москва, с. ш. № 149, 8 кл., «Программа вечного календаря» — определение дня недели по дате), *Олег Юрченко* (г. Москва, с. ш. № 170, 8 кл., «Математико-статистическая обработка экспериментальных данных на ЭВМ «Мир-2»).

Конкретный пример применения методов, о которых рассказал Олег, нашелся в докладе другого участника слета — *Ирины Антроповой* (г. Первоуральск Свердловской обл., с. ш. № 32, 10 кл.) «Применение методов математической статистики на производстве». В своем докладе Ирина рассказала о том, как проводится контроль толщины труб (идущих большими партиями) на Первоуральском Новотрубном заводе с применением методов математической статистики.

ЭВМ «Мир-1» использовала в своей работе *Ольга Рубина* (г. Горький, с. ш. № 1, 10 кл.), прочитавшая на слете доклад «Выбор оптимального варианта распределения флота по грузовым линиям». Эту работу предполагается использовать в учебной диспетчерской лаборатории.

«Моделирование игры машины с человеком» — так назывался доклад *Александра Иващука* (г. Омск, с. ш. № 125, 9 кл.). Саша составил программу (для ЭВМ «Раздан-2») популярной игры «крестики — нолики» на доске 6×6. Программа основана на тех же принципах, что и программа игры машины в шахматы (о ней рассказывалось в «Кванте», 1974, № 11, 12).

Теперь отметим две чисто математические работы. *Евгений Гришин*, *Анатолий Коромыслов* и *Вадим Шубин* (школа юных математиков при Пермском государственном университете, ребята учатся в 7 классе с. ш. № 65) представили доклад «Некоторые свойства геометрии на цилиндре Мебиуса». На слете его прочитал В. Шубин. Ребята выяснили, что на листе Мебиуса существуют пары точек, которые можно соединить тремя отрезками равной длины, а также некоторые другие интересные факты.

Вадим Кайманович (г. Ленинград, ФМШ № 30, 10 кл.) прочитал доклад «Математические законы денежной эмиссии». Вадим применил к исследованию денежной эмиссии (выпуску денег в обращение) в период 1918—1921 гг. приемы и методы, которыми обычно пользуются при математическом исследовании физических процессов.

О применении методов оптимизации к конкретным задачам производства рассказал *Геннадий Авидон* (г. Волгоград с. ш. № 68, 8 кл.) в докладе «Три линейные модели».

О теории игр и приложении к ней теории графов рассказал *Андрей Русаков* (г. Новосибирск, с. ш. № 130, 10 кл.).

Последние два доклада носят отчасти реферативный характер, хотя их авторы много поработали самостоятельно.

Упомянем еще доклад *Юрия Бахарева* (г. Челябинск, с. ш. № 2, 10 кл.) «Дискретная система радиотелеуправления».

Эта система была создана в секции автоматики и телемеханики НОУ при Челябинском политехническом институте. Ее предполагается применять в океанологических исследованиях.

В четырех докладах, представленных на слет, рассказывалось о работе математических обществ.

Так, например, в г. Малая Вишера десятый год работает математическое общество «Поиск» учащихся школы № 2. Это общество поддерживает связи с учеными Москвы и Ленинграда, помогают ему и учителя-пенсионеры. Общество имеет разветвленную сеть кружков, на занятиях которых разбираются различные темы, проводит викторины, конкурсы КВН, выставки. Члены этого общества регулярно побеждают на районных математических олимпиадах.

Более 120 ребят, увлеченных математикой, объединяет математическое общество «Интеграл» учащихся школы № 17 г. Северодвинска. Им помогают ученые Москвы, Ленинграда, преподаватели Архангельского педагогического института; читают лекции и сами ребята. Ежегодно это общество проводит математическую конференцию, причем, чтобы получить членский билет общества, учащиеся должны сами прочитать одну-две лекции, провести беседы. По инициативе общества после 9 класса организована практика на вычислительных машинах.

В школе № 68 г. Прокопьевска Кемеровской области математическое общество учащихся проводит лекции и семинары, математические вечера, школьные олимпиады, помогает оборудовать кабинеты, организует экскурсии в Новосибирский Академгородок. Не удивительно, что представители этого общества успешно выступают на городских и областных олимпиадах.

Клубу автоматики и кибернетики при Гатчинском Доме пионеров помогает Ленинградский институт ядерной физики. Ребята изучают теоретические основы кибернетики и делают наглядные пособия и устройства, демонстрирующие работу современных предприятий. Работы членов клуба «Промышленное производство алюминия», «Атомная электростанция», «Электронно-кибернетическая игра «Лабиринт» демонстрировались на ВДНХ СССР.

Работа секции математики и кибернетики не ограничивалась прослушиванием докладов. Ребята осмотрели павильон «Вычислительная техника» на ВДНХ СССР, побывали в физико-математической школе № 1140 г. Москвы, которая, кстати, провела для них физико-математический вечер. Особый интерес у ребят вызвало посещение Ногинского научного центра АН СССР. Осмотр действующего современного научно-исследовательского центра, его лабораторий, вычислительного центра — что может быть интереснее для будущих физиков и математиков.

Итоги работы секции математики и кибернетики были подведены 26 марта. Дипломы за активное участие в работе слета получили *Г. Авидон, И. Антропова, Ю. Бахарев, Е. Гришин, А. Иващук, В. Кайманович, А. Коромыслов, О. Рубина, А. Русаков* и *В. Шубин*. Четыре научных общества были отмечены грамотами: математическое общество учащихся с. ш. № 1140 г. Москвы, математическое общество учащихся с. ш. № 1 г. Улан-Удэ, математическое общество «Интеграл» учащихся с. ш. № 17 г. Северодвинска и секция математики юношеского научного общества Московского городского Дворца пионеров и школьников. Премии журнала «Квант» получили *С. Рачинский*, уже упомянутые общества «Интеграл» и «Поиск».

В работе секции физики приняли участие около 50 учащихся. На рассмотрение жюри было представлено 40 докладов, но за три дня работы секции удалось прослушать и обсудить только 15. Каждое сообщение, как правило, выслушивалось с большим вниманием, докладчикам задавали много вопросов, порой возникали оживленные дискуссии. Например, *Александру Полтораку* (г. Краснодар, с. ш. № 25, 10 кл.) пришлось дважды рассказывать о своей работе (эта работа проводилась под руководством сотрудников кафедры теоретической физики Кубанского государственного университета). Сашин доклад «Гравитационный аналог закона Ампера» был посвящен вопросу существования аналогии между гравитационными и электромагнитными взаимодействиями.

В первый день секция работала в Московском городском Дворце пионеров и школьников. Московские школьники, занимающиеся в кружках приборостроения, звукозаписи, радиоуправления и других кружках, и их руководители познакомили гостей со своей работой.

Первый доклад сделала *Лариса Алтухова* (г. Москва, с. ш. № 7, 8 кл.), тема ее доклада — «Оптический квантовый генератор». Лариса рассказала о принципах устройства и работы лазеров (так кратко называют оптические квантовые генераторы), дала сравнительную характеристику различных типов лазеров.

Затем перед ребятами выступил доктор физико-математических наук, лауреат Государственной премии Л. Н. Туницкий. Он рассказал об истории создания лазеров и продемонстрировал рубиновый и гелий-неоновый лазеры

На слете было сделано еще два доклада, посвященных оптическим квантовым генераторам. Это доклад *Сергея Амелькина* (г. Тюмень, с. ш. № 25, 10 кл.) «О некоторых проблемах стимулирования химических процессов лазерным излучением» (этим вопросом Сергей занимается уже два года) и доклад *Олега Баракина* (г. Казань, с. ш. № 131, 10 кл.) «Взаимодействие излучения ОКГ в режиме свободной генерации с поверхностью диэлектрика», в котором Олег рассказал об эксперименте, проведенном в лаборатории мощных оптических излучений на кафедре общей физики Казанского государственного университета.

Большой интерес вызвало сообщение *Сергея Голуба* (г. Челябинск, с. ш. № 69, 10 кл.) «Исследование светостойкости полимеров». В настоящее время полимерные материалы получили широкое распространение в технике и в быту. Для получения окрашенных полимеров в процессе полимеризации в качестве добавок вводят органические красители, которые оказывают влияние на физико-химические свойства полимеров, в частности на их светостойкость. Под влиянием света происходят процессы разрушения как красителя, так и самого полимера. Исследовать светостойкость полимеров, то есть их способность сохранять свои исходные свойства под воздействием света, и было целью работы, проделанной группой учащихся под руководством сотрудников кафедры экспериментальной и теоретической физики Челябинского государственного педагогического института.

На следующий день работа секции проходила в Институте атомной энергии им. И. В. Курчатова. Старший научный сотрудник института доктор физико-математических наук Н. С. Бабаев рассказал участникам слета об основных направлениях работы института.

Наиболее интересными сообщениями этого дня были сообщения *Дмитрия Морозова* (г. Дзержинск Горьковской обл., с. ш. № 2, 9 кл.) и *Александра Кипчатова* (г. Саратов, с. ш. № 9, 10 кл.).

Доклад Д. Морозова назывался «Электронные приборы для измерения механических величин в химическом машиностроении». Прежде всего Дмитрий рассказал о работе секции экспериментальной физики Клуба юных физиков, членом которой он является. Эта секция была создана в средней школе № 2 г. Дзержинска 10 лет тому назад, руководит ею учитель физики Лев Васильевич Пигалицин. Силами ребят в школе создан кабинет программированного обучения, в котором можно проводить контроль знаний учащихся всех классов и по всем предметам. Много приборов демонстрационного и лабораторного оборудования по физике сделано за время работы секции. А в этом учебном году установился контакт с Научно-исследовательским институтом химического машиностроения. В частности, работа, о которой рассказывалось в докладе, проводится (она еще не закончена) по заданию этого института. Один из отделов института работает над созданием вязкозиметра — прибора для измерения вязкостей различных жидкостей. Разрабатываемая конструкция напоминает медицинский шприц. Д. Морозову и С. Золотову было предложено сконструировать электронные приборы для измерения скорости движения вязкой жидкости из капилляра и давления жидкости на поршень вязкозиметра. Сейчас эти приборы уже сделаны и проходят проверку.

А. Кипчатов в докладе «МГД-генерирование электроэнергии» рассказал о магнитогидродинамическом принципе получения электрической энергии. В чем состоит этот принцип? Известно, что при движении проводника в магнитном поле в проводнике возникает э. д. с. индукции. Так работает обычный генератор электрического тока. Если же твердый проводник заменить движущимся с большой скоростью электропроводящим газом, то в нем тоже будет индуцироваться электрический ток. В докладе говорилось об истории создания, о различных типах МГД-генераторов, о задачах, возникших перед учеными при работе над созданием таких генераторов.

Третий день работы секции проходил в Институте физики твердого тела АН СССР. Тепло встретили участников слета ученые этого института. Заведующие лабораториями доктор физико-математических наук Э. М. Надгорный и доктор физико-математических наук, лауреат Ленинской премии В. Л. Броуде рассказали ребятам, над чем работают ученые института, какие проблемы существуют сегодня в физике твердого тела. Например, изучение свойств квазичастиц (фононов, дырок, экситонов, дислокаций) — одно из направлений исследований ученых. Фундаментальная практическая задача, над решением которой работают в институте, — научиться делать твердые тела с наперед заданными макросвойствами.

Во время экскурсии ребята посетили различные лаборатории и отделы института, познакомились с работой вычислительного центра.

В заключение, как и в первые два дня, состоялся семинар, на котором были заслушаны доклады еще нескольких участников слета.

«Возможные эффекты изменения гравитационной постоянной» — так назвал свой доклад *Михаил Попов* (г. Дубна, с. ш. № 8, 10 кл.). В последнее время в печати несколько раз сообщалось об экспериментах, из которых как будто следует, что гравитацион-

---

1. Александр Полторак (Краснодар) отвечает на вопросы.
2. Участники слета знакомятся с вычислительным центром Института физики твердого тела АН СССР.
3. В перерыве между заседаниями.
4. О геометрии листа Мебиуса рассказывает Вадим Шубин (Пермь).
5. Заключительный момент работы секции математики — награждение лучших докладчиков. Сотрудник редакции журнала «Квант» А. Виленкин вручает грамоту Александру Ивашуку (Омск).

Фото В. В. Бондарчука

1.

2.

3

4

5

ная постоянная уменьшается с течением времени (гипотезу, что физические константы могут изменяться со временем, высказывал еще Дирак). Эти сообщения широко обсуждаются, но окончательных выводов ученые еще не сделали.

Теперь расскажем кратко о нескольких работах, о которых не было доложено на слете, но, по мнению жюри, они заслуживают высокой оценки.

Игорь Гаврилов (г. Омск, с. ш. № 64, 10 кл.) представил доклад на тему: «Исследование влияния температурного режима системы охлаждения двигателя ЗИЛ-130 на его мощностные и экономические показатели и токсичность отработанных газов». В докладе рассказывается о результатах двухлетней работы, в которой автор принимал самое непосредственное участие, начиная с создания экспериментальной установки и до получения некоторых конкретных результатов. Работа проводилась в Сибирском автомобильно-дорожном институте.

«Кристаллы, их роль в природе и в науке» — так назывался реферат *Любы Барабашевой* (г. Свердловск, с. ш. № 262, 9 кл.). Это очень подробный и содержательный рассказ о структуре и свойствах кристаллов.

Несколько рефератов было посвящено истории физики. Среди них следует отметить работу «М. В. Ломоносов — основоположник молекулярно-кинетической теории», которую написал *Александр Павлють* (г. Чита, с. ш. № 42, 10 кл.).

По решению жюри по секции физики дипломами награждены: *Л. Алтухова, С. Амелькин, Л. Барабашева, В. Волынский, И. Гаврилов, С. Голуб, А. Кипчатов, Д. Морозов, А. Павлють, А. Полторак.*

Грамотами за хорошую работу награждены следующие научные общества учащихся: секция экспериментальной физики с. ш. № 2 г. Дзержинска Горьковской обл., научное общество «Квант» с. ш. № 13 г. Саратова, научное общество «Фотон» с. ш. № 70 г. Свердловска, секция теоретической физики научно-технического общества г. Норильска.

Премии журнала «Квант» получили: *О. Баракин, М. Попов* и научное общество учащихся с. ш. № 48 г. Волгограда.

На закрытии слета отмечалось высокое качество представленных работ. 79 из них уже нашли различное применение в народном хозяйстве, 37 работ школьников, выполненных в научных обществах, опубликованы в журналах и сборниках. Часть работ представлена на выставки.

Делегаты слета высказали большую сердечную благодарность учителям, заложившим фундамент знаний участников работы слета, и ученым, непосредственно руководившим работой научных обществ школьников.

В. Н. Березин, А. Н. Виленкин
Б. Г. Пшеничнер, В. А. Тихомирова

Библиотеке имени К. Д. Ушинского — 50 лет

Пятьдесят лет назад, в 1925 году, при Народном Комиссариате просвещения РСФСР была создана справочная библиотека. Активное участие в ее организации принимала Н. К. Крупская.

В 1932 году эта справочная библиотека становится Центральной библиотекой по народному образованию; в 1944 году она включается в систему научно-исследовательских учреждений Академии педагогических наук. В 1945 году библиотеке присвоили имя великого русского педагога К. Д. Ушинского.

Библиотека имени К. Д. Ушинского — это и богатое хранилище педагогических книг, журналов и газет, и хорошо оборудованные читальные залы... Но, прежде всего, это верный друг и помощник других педагогических библиотек, в том числе и школьных.

Библиотека ведет широкое библиографическое обслуживание педагогов, изучает и разрабатывает проблемы библиотековедения и научно-библиографической информации.

Мы поздравляем всех работников библиотеки имени К. Д. Ушинского с юбилеем и желаем больших творческих успехов в их благородном труде.

ИНФОРМАЦИЯ

Голубой экран — поступающим в вузы

С сентября начинаются занятия на Московских подготовительных телевизионных курсах, созданных в 1971 году Центральным телевидением совместно с Министерством высшего и среднего специального образования СССР.

Каждый год телекурсы принимают десятки тысяч слушателей. Опыт работы курсов свидетельствует, что большинство учащихся, систематически и добросовестно занимающихся в течение учебного года, поступают в высшие учебные заведения. В этой заметке рассказывается, как будет организована работа подготовительных телекурсов в 1975/1976 учебном году.

Телевизионные занятия проводятся в течение всего учебного года по трем дисциплинам: математике, физике и русскому языку. Основная цель телезанятий — систематизировать знания слушателей, привести их в соответствие с требованиями, предъявляемыми на вступительных экзаменах, создать условия, способствующие выработке и укреплению навыков самостоятельной работы, необходимых как для успешного обучения в вузе, так и для будущей деятельности каждого специалиста, инженера, ученого.

Подготовку учебных телепередач и организацию занятий совместно с Главной редакцией научно-популярных и учебных программ Центрального телевидения осуществляют: на отделениях математики и физики — Московский инженерно-физический институт, на отделении русского языка — Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова. В работе курсов наряду с этими вузами принимают участие Московский экономико-статистический институт, Московский энергетический институт, Московский институт инженеров геодезии, картографии и аэрофотосъемки и другие московские вузы. Курирует работу телекурсов Совет ректоров высших учебных заведений г. Москвы.

На телекурсах в основном принята лекционная форма занятий, однако значительная часть телеуроков отводится под практические занятия, консультации и обзорные передачи. Телезанятия проводят ведущие ученые и преподаватели московских вузов, учебные передачи сопровождаются демонстрациями экспериментов, физических приборов, показом фрагментов из кинофильмов, фотографий и т. п.

Для закрепления знаний слушателям регулярно предлагаются домашние задания, состоящие из задач, примеров и текстов различной трудности. Как правило, задания соответствуют тематике лекций, выполнение некоторых заданий требует использования знаний, полученных в течение всего предшествующего периода занятий. В предстоящем учебном году домашние задания будут публиковаться в еженедельном обозрении программ Центрального телевидения и радиовещания «Говорит и показывает Москва».

Ответы слушателей на домашние задания проверяются преподавателями курсов. Результаты проверки заносятся в картотеку, после чего почтовые карточки с ответами возвращаются адресатам. Кроме того, в течение года регулярно публикуются контрольные работы по пройденным темам и проводятся контрольные опросы во время телепередач.

В 1975/1976 учебном году, как и в прошлые годы, телекурсы будут проводить очные зачеты: зимой (примерно в январе — феврале) и весной (в конце апреля — в мае). Как показывает опыт работы курсов, встречи учащихся с преподавателями значительно повышают эффективность телеобучения: будущие абитуриенты, находясь в условиях, сходных с теми, которые бывают на вступительных экзаменах, не только проверяют свои знания, но и проходят своеобразную психологическую подготовку. С другой стороны, и преподаватели в результате непосредственного контакта с телезрителями могут установить, как воспринимается слушателями излагаемый материал, и, если это необходимо, внести соответствующие коррективы в свою работу. Наряду с приемом зачетов предполагается и периодическое проведение очных консультаций.

На очные зачеты и консультации вызываются слушатели, активно и систематически занимающиеся на телекурсах. Успешно сдавшие зачеты получат в конце учебного года Свидетельства об окончании Московских подготовительных телекурсов.

В предстоящем учебном году слушателям будут еженедельно предлагаться две передачи по математике, две — по физике и одна — по русскому языку. Для удобства учащихся (особенно тех, кто работает в разные смены) эти передачи будут повторяться в ту же неделю, но в другие дни и в другие часы.

Занятия на телекурсах будут состоять из двух циклов: основного (он закончится в мае 1976 года) и обзорно-консультационного (будет транслироваться в июне 1976 года). На уроках второго цикла рассматриваются вопросы, вызывающие наибольшие трудности при изучении и повторении учебного материала.

Зона приема передач «Для поступающих в вузы» в 1975/76 учебном году по сравнению с прошлыми годами расширилась — эти передачи смогут смотреть жители Москвы, Белорусской ССР, Литовской ССР, областей — Московской, Вологодской, Горьковской, Ивановской, Калининской, Калининградской, Калужской, Костромской, Липецкой, Рязанской, Смоленской, Тульской и Ярославской.

На Московские подготовительные телекурсы принимаются все желающие — и уже имеющие законченное среднее образование, и учащиеся — выпускники школ, ПТУ, средних специальных заведений. Прием на телекурсы проводится без конкурса.

Для зачисления слушатель должен прислать в одном конверте в адрес курсов «Анкету — заявление», «Регистрационную карточку» и конверт со своим обратным адресом.

«Анкета-заявление» оформляется на обычной почтовой карточке. На лицевой стороне ее следует написать свой адрес и номер телефона (домашнего или служебного), если он имеется. Обратная (чистая) сторона карточки заполняется ответами на вопросы анкеты, образец которой мы приводим. Все записи надо делать параллельно узкой стороне карточке. В правом верхнем углу проставьте буквы, соответствующие отделениям, на которых вы собираетесь заниматься (если вы предполагаете заниматься на всех трех отделениях, то проставьте три буквы: «Ф» — физика, «М» — математика, «Р» — русский язык). Под ответами на вопросы анкеты напишите текст заявления о приеме (см. образец) с перечислением выбранных вами отделений, поставьте дату и подпись.

Ф; М; Р

АНКЕТА-ЗАЯВЛЕНИЕ

1. Фамилия, имя, отчество
2. Год рождения.
3. Род занятий (учусь, работаю).
4. Место работы, должность, стаж (если работаете).
5. В какой вуз собираетесь поступать.

Прошу принять меня на отделения физики, математики и русского языка Московских подготовительных телекурсов для поступающих в вузы.

Подпись, дата

фото
3×4

М

РЕГИСТРАЦИОННАЯ КАРТОЧКА

1. Фамилия, имя, отчество.
2. Место учебы (если учитесь).
3. Последняя годовая оценка по математике, полученная Вами в школе или среднем специальном учебном заведении.
4. В какой вуз собираетесь поступать.

Подпись, дата

«Регистрационная карточка» оформляется также на почтовой карточке. На лицевой стороне ее обязательно напишите свой адрес; чистую оформите так, как указано на образце. В левый верхний угол приклейте фотографию (размер 3 *см* × 4 *см*). Надпись «Регистрационная карточка» делается на сантиметр ниже края почтовой карточки. Все записи выполняются параллельно узкой стороне. Для каждого отделения заполняется отдельная «Регистрационная карточка», в правом верхнем ее углу проставляется одна из букв «Ф», «М», «Р», соответствующая выбранному отделению.

На письмах с заявлениями в адрес курсов слушатель должен проставлять в левом верхнем углу конверта те же буквы («Ф», «М», «Р»), что и в «Анкете-заявлении».

В конверте с обратным адресом слушателя ему будут высланы «Извещение о зачислении на телекурсы» и «Аннотации телевизионных занятий». В «Извещении о зачислении на телекурсы» указывается номер присвоенного слушателю шифра, в «Аннотациях» содержится программа занятий, рекомендуемая литература, методические указания к выполнению домашних заданий и правила их оформления, советы, как вести самостоятельно учет успеваемости и т. д.

Адрес телекурсов: *113162, Москва, Шаболовка 37, Главная редакция научно-популярных и учебных программ, Московские подготовительные телекурсы.*

А. В. Качанов, И. Н. Наслузов

РЕЦЕНЗИИ, БИБЛИОГРАФИЯ

Солнце, воздух и вода

Пожалуй, именно эти три слова: солнце, воздух и вода — являются основными в науке о погоде — метеорологии. Метеорология уже давно перестала быть чисто описательной наукой, сейчас ее проблемами занимаются представители точных наук — геофизики и математики.

Например, изучение процессов, происходящих в атмосфере нашей планеты, является важнейшей частью геофизических исследований. Знание основных закономерностей движения воздушных масс, структуры и эволюции атмосферы, законов распространения и поглощения в ней электромагнитных и звуковых волн нужно морякам и радистам, летчикам и астрономам. Но можно сказать, что основной целью физики атмосферы — одного из разделов современной геофизики — является систематическое изучение погоды и климата, влияющих так или иначе едва ли не на все стороны нашей жизни.

С рассказа о наблюдениях за погодой и начинается небольшая книга Т. Чандлера «Воздух вокруг нас» *). Она посвящена описанию физических процессов, которые приводят к изменениям погоды и климата, описанию динамики воздушной оболочки нашей планеты. Автор рассказывает о структуре атмосферы, ее химическом составе и распределении температуры по высоте, о тепловом балансе Земли и атмосферы.

Изложение построено таким образом, что читателю не требуется никаких предварительных знаний об атмосферной физике. Все специальные (не слишком, впрочем, многочисленные) термины подробно разъясняются, основное внимание при этом уделяется именно их физическому смыслу. Подробно разъясняется, например, понятие об альбедо различных поверхностей (так называется доля солнечной энергии, отраженная поверхностью). Читатель узнает, что около 19% солнечной энергии поглощается при прохождении через атмосферу, около 34% отражается обратно в космическое пространство от верхней поверхности облаков и земной поверхности и 47% достигает поверхности нашей планеты и поглощается ею.

Поглощение солнечной энергии приводит к непрерывному движению земной атмосферы. Сложные движения воздушных масс, характер ветров на разных широтах и на различных высотах, устойчивость ветров — эти вопросы относятся к основным в атмосферной физике. Полное описание их на строгом математическом языке пока еще дело будущего. Чандлер рассказывает обо всем этом качественно, иллюстрируя свой рассказ наглядными схемами и картами.

Описывая типы облаков, наблюдающихся на разных высотах, автор знакомит читателей с теориями испарения и конденсации, с конвекцией и образованием ледяных кристаллов. Он приводит схему образования осадков, рассказывает о различных гипотезах и теориях в этой области. Понимание физической сущности процессов испарения и конденсации является важнейшей предпосылкой для планирования и осуществления программы орошения и обводнения. Атмосфера Земли содержит свыше 13 миллиардов тонн влаги. Скорость круговорота влаги в атмосфере составляет около 16 миллионов тонн в секунду или 505 миллиардов тонн в год. Чандлер приводит и еще несколько интересных цифр. Атмосфера 36 раз в год полностью обновляет запас влаги, другими словами, молекула водяного пара попадает на Землю в среднем через 10 дней после испарения. Такие расчеты сделать нетрудно, и они являются очень поучительными.

Естественным является и включение в книгу раздела «Синоптическая метеорология», посвященного вопросам формирования воздушных потоков, взаимодействия фронтов теплого и холодного воздуха, образования циклонов и антициклонов. На первый взгляд, в синоптических картах и схемах разобраться не так-то легко. После чтения книги Чандлера эти трудности как бы сами собой исчезают, и читатель вполне сможет сам составлять простейшие схемы движения воздушных потоков.

Заключительные разделы книги посвящены климатам. Здесь рассказывается о том, какие физические факторы являются существенными для образования местных климатов, как и почему дуют местные ветры в прибрежных и лесных районах, как влияют на климат естественные условия (рельеф местности, наличие водоемов и т. п.).

Книга Т. Чандлера «Воздух вокруг нас» вводит в увлекательную и многообещающую область физики; читатели «Кванта», без сомнения, прочтут ее с большим интересом и пользой.

Ю. М. Брук

---

*) Т. Чандлер. Воздух вокруг нас. Л., Гидрометеоиздат, 1974, Тираж 60 000 экз., 144 стр., цена 54 к.

Новые книги

В этом номере мы продолжаем публиковать аннотации на книги, выходящие в 1975 году, представляющие интерес для наших читателей. В III квартале 1975 года выйдут в свет следующие книги (заказы можно направлять через магазины «Книга — почтой»).

Математика

Издательство «Наука»

1. Бабинская И. Л. *Задачи математических олимпиад.* Объем 8 л., тираж 100 000 экз., цена 28 к.

Сборник содержит задачи по арифметике, алгебре и геометрии. Он составлен из задач, рекомендованных для областных и республиканских олимпиад, и задач областных и всесоюзных олимпиад.

В сборнике имеется большое количество задач, рассчитанных на средние классы (начиная с четвертого). Ко всем задачам даны ответы и указания или подробные решения.

Книга может быть с успехом использована в работе математических кружков, при подготовке и проведении олимпиад.

Она предназначена учащимся средней школы, учителям математики, руководителям математических кружков.

Издательство «Мир»

2. Бизам Д., Герцег Я. *Игра и логика.* Пер. с венг. Объем 21 л., тираж 100 000 экз., цена 1 р. 29 к.

Книга венгерских математиков Д. Бизама и Я. Герцега посвящена логическим задачам.

Пользуясь элементарными средствами, авторы учат читателя умению последовательно мыслить и решать задачи, «думая, но не вычисляя». Книга снабжена тщательно разработанной системой специальных указателей, которые помогают ориентироваться в особенностях задач.

Книга представляет интерес для самых широких кругов читателей — любителей занимательной математики.

Физика

Издательство «Наука»

1. Эллиот Л., Уилкокс У. *Физика.* Пер. с англ., изд. 3-е. Объем 51 л., тираж 200 000 экз., цена 1 р. 25 к.

Книга является элементарным учебником по физике, который рассчитан на читателя, впервые знакомящегося с физикой и имеющего самые элементарные сведения из математики. Способ изложения материала продуман так, чтобы читатель, переходя от самых простых и привычных понятий к более сложным, постоянно вдумывался в сущность физических явлений, сам искал и находил правильные решения, был активным участником в процессе познания и усвоения основных законов физики.

Книга рассчитана на самый широкий круг читателей: учащихся школ, лиц, занимающихся самообразованием, и представляет большой интерес для преподавателей физики в средней школе.

2. Яворский Б. М., Селезнев Ю. А. *Справочное руководство по физике для учащихся старших классов, абитуриентов вузов и самообразования.* Объем 27 л., тираж 200 000 экз., цена 96 к.

В «Справочном руководстве» даны определения всех основных физических понятий, сформулированы физические законы и кратко разъяснена сущность описываемых ими явлений.

Руководство содержит сведения по всем разделам курса физики, которые изучаются в средней школе и средних специальных учебных заведениях. В некоторых главах приведены примеры решения задач.

Руководство по физике рассчитано на школьников старших классов. Оно может быть использовано абитуриентами при подготовке к приемным экзаменам в вузы, а также теми, кто интересуется физикой и занимается самообразованием.

3. *Элементарный учебник физики*, т. II. Электричество и магнетизм, под ред. Г. С. Ландсберга изд. 9-е. Объем 30 л., тираж 300 000 экз., цена 94 к.

Достоинством курса является глубина изложения физической стороны различных процессов в природе и технике. Изложение материала ведется простым, ясным языком. Книга богато иллюстрирована.

Рассчитана на преподавателей физики и учащихся старших классов средней школы. Может служить ценным пособием для самообразования.

4. Зигель Ф. Ю. *Сокровища звездного неба.* Путеводитель по созвездиям и Луне, изд. 3-е, исправл. и дополн. Объем 20 л., тираж 50 000 экз., цена 1 р. 40 к.

Популярный рассказ о звездном небе. Читатель узнает из книги о самых ярких звездах и наиболее интересных небесных телах, находящихся в том или ином созвездии, о делении звездного неба на созвездия, о том, как находить созвездия, какие созвездия видны зимой, весной, летом и осенью. Специальные разделы посвящены Млечному Пути, движению планет по небесному своду. В новое издание включен обширный раздел, посвященный описанию лунной поверхности, а также ряд справочных материалов.

Для чтения книги не требуется никаких предварительных знаний. В то же время читатель получит много полезных сведений из астрономии и физики. Живость и простота изложения делают книгу доступной и интересной самому широкому кругу читателей.

5. Дагаев М. М. *Наблюдения звездного неба*, изд. 3-е. Объем 9 л., тираж 50 000 экз., цена 38 к.

В книге рассказывается об ориентировании по звездному небу и об основных причинах изменения условий видимости созвездий на протяжении года. Описываются наиболее яркие объекты, доступные наблюдениям в малые телескопы. Приводятся методы простейших наблюдений планет, Луны, переменных звезд, метеоров и искусственных спутников Земли, вполне доступные начинающим любителям астрономии. Заключительная глава книги содержит список небесных объектов, рекомендуемых для начальных наблюдений. Специальный раздел посвящен описанию метода изготовления простейшего самодельного телескопа.

Книга рассчитана на начинающих любителей астрономии и может служить пособием в работе астрономических кружков.

6. Барабой В. А. *Солнечный луч*. Объем 11 л., тираж 40 000 экз., цена 36 к.

В книге рассказывается о роли Солнца в возникновении и развитии жизни на Земле. Рассматриваются новейшие достижения фотобиологии, в частности, учение об антагонизме излучений разной длины и особенности действия лазерного луча на организм. Подробно освещены успехи отечественных и зарубежных фотохимиков и радиобиологов.

Книга рассчитана на широкие круги читателей.

7. Резанов И. А. *Атлантида: Фантазия или реальность?* Объем 8 л., тираж 30 000 экз., цена 30 к.

В книге излагаются новые взгляды на проблему Атлантиды. На основании имеющихся геологических и археологических данных восстанавливается обстановка катастрофического извержения вулкана Санторин в Эгейском море в XIV в. до н. э., вызвавшего гибель критомикенской цивилизации. Автор анализирует возможные причины исчезновения Атлантиды, рассказывает о новейших океанологических и геофизических исследованиях в Атлантическом океане и Средиземном море.

Книга рассчитана на широкий круг читателей.

Издательство «Мир»

8. Кэлдер Н. *Беспокойная Земля*. Пер. с англ. Объем 17 л., тираж 50 000 экз., цена 1 р. 09 к.

Книга Найгела Кэлдера — популярное изложение новой теории развития земной коры, получившей название глобальной тектоники и дающей ряд оригинальных объяснений процессов формирования современного лика Земли.

Живо, доходчиво, иллюстрируя материал интересными примерами, Кэлдер рассказывает об образовании океанов, смещении континентов, возникновении гигантских горных цепей, землетрясениях и вулканизме.

Простота и убедительность изложения серьезных проблем современной геологии, наглядность и красочность помещенных в книге рисунков, бесспорно, привлекут внимание к книге Кэлдера самых разных читателей — от учащихся старших классов до специалистов-геологов.

9. Уитни Ч. *Открытие нашей Галактики*. Пер. с англ. Объем 20 л., тираж 50 000 экз., цена 1 р. 34 к.

Книга известного американского астронома, профессора Гарвардского университета Ч. Уитни «Открытие нашей Галактики» посвящена развитию астрономии. Эта книга отличается от большинства аналогичных отечественных и зарубежных изданий подчеркнутым историзмом изложения. Ч. Уитни прослеживает путь, пройденный человеческим познанием, от смутных мистических представлений древних до современных космологических концепций. В эпилоге книги автор сжато рассказывает о внегалактических объектах, привлекающих сейчас внимание астрофизиков: квазарах, сейфертовских и радиогалактиках.

Книга написана живым и образным языком на высоком научном и литературном уровне. Она представляет большой интерес для всех любителей астрономии.

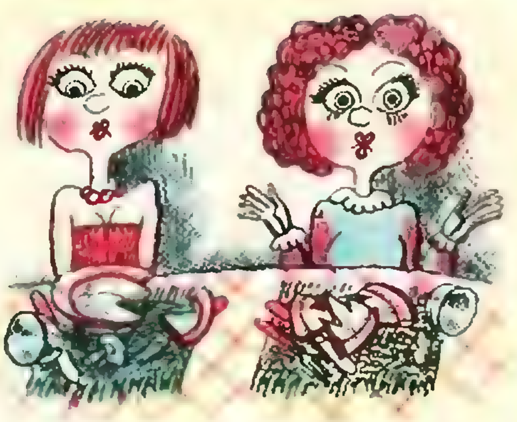
Издательство «Просвещение»

10. Лукашик В. И. *Физическая олимпиада*. Объем 10 л., тираж 100 000 экз., цена 40 к.

В книге рассказывается о том, как учащимся VI—VII классов, интересующимся физикой, подготовиться и провести физическую олимпиаду. Содержащийся в книге материал поможет учащимся расширить свои знания по физике и проверить их на решении задач, требующих сообразительности и большого внимания. К задачам, приведенным в пособии, даны ответы и решения или краткие указания.

Т. С. Петрова,
М. Л. Смолянский

«Квант» для младших школьников

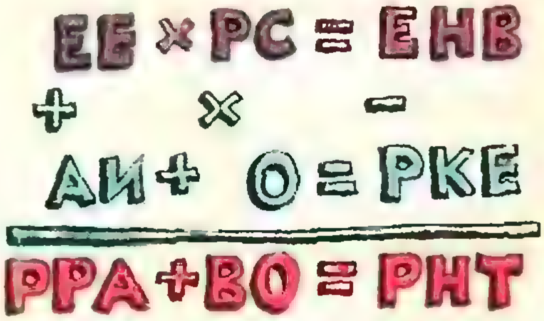


Задачи

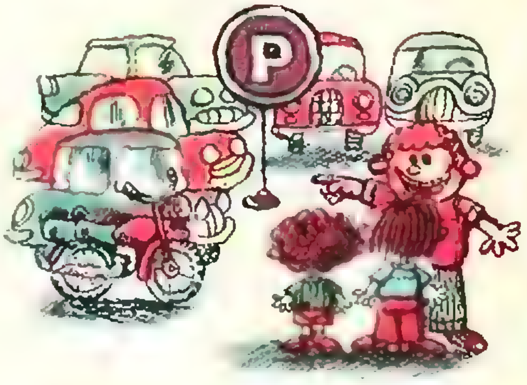
1. а) За круглым столом сидят 50 гостей, из которых 25 — женщины. Доказать, что найдется гость, оба соседа которого — женщины.

б) Пусть женщин — 26, и пусть двое гостей разбили свои приборы. Доказать, что стол можно повернуть так, что оба разбитых прибора окажутся у женщин.

2. Вместо букв на рисунке надо подобрать цифры (одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры), чтобы выполнялись указанные соотношения.



3. Три товарища Петя, Толя и Витя подошли к стоянке автомашин и мотоциклов. Любуясь машинами, Петя от нечего делать сосчитал все транспортные средства — их оказалось 45. Толя сосчитал все колеса — их оказалось 115. Мотоциклов с коляской было в два раза меньше, чем мотоциклов без коляски. Сколько на стоянке было машин и сколько мотоциклов?



4. Запишите в строчку одно за другим 10 первых простых чисел в возрастающем порядке. В полученном многозначном числе зачеркните половину цифр так, чтобы число, образованное оставшимися цифрами, было а) наименьшим; б) наибольшим.

5. В кастрюлю с водой опустили маленький сосуд, в котором тоже находится вода. Кастрюлю ставят на газ, вода в кастрюле начинает кипеть. Будет ли кипеть вода в маленьком сосуде?

Рисунки Э. Назарова

Ю. Г. Горст

На даче

Рассказ-задача

В одно из майских воскресений семиклассники Коля и Петя приехали на пустующую в это время дачу петиных родителей, чтобы подготовиться к последней контрольной работе по физике.

День был жаркий, и в комнате было душно.

— Знаешь что,— сказал Петя,— в такой жаре у меня мозги что-то плохо работают. Давай-ка включим холодильник и подождем, пока он немного остудит комнату.

Коля не возражал. Через час после включения холодильника, когда температура в комнате несколько понизилась, ребята взялись за учебники.

Однако, долго поработать им не пришлось. На этот раз взмолился Коля:

— Петя, я сегодня плохо позавтракал, и у меня так разыгрался аппетит, что физика не идет в голову. Не мешало бы нам слегка перекусить.

Петя осмотрел дачные запасы.

— Устроят тебя яйца всмятку? — спросил он. (Коля кивком головы подтвердил свое согласие.) Вот только... нашел я две электроплитки, но ни на одной нет спирали. А, вот и несколько спиралей. Может быть, соединим последовательно две спирали и поставим их на одну плитку, чтобы быстрее закипела вода?

Коля задумался.

— По-моему,— произнес он,— вода закипит быстрее, если спираль не удлинить, а наоборот, укоротить.

Разгорелся спор, и для его разрешения ребята поставили на одну из плиток удвоенную спираль, а на другую — полспирали. Затем налили в одинаковые кастрюли одинаковое количество воды и стали ждать, на какой плитке вода закипит раньше.

Прав оказался Коля. Сварив яйца и утолив голод, ребята возобновили свои занятия.

Когда наступили сумерки, Петя включил электрическую лампочку.

— Что-то освещение слабовато,— пожаловался Коля. Наверное, лампочка малой мощности.

— 127 *в*, 60 *вт*,— прочитал надпись на лампочке Петя. Сейчас посмотрю в кладовой, не найдется ли чего-нибудь получше. Так, эта лампочка на 40 *вт* — она нам ни к чему, а вот эта, хотя и 60-ваттная, но зато на 220 *в*. Давай включим ее: у нее хоть напряжение побольше.

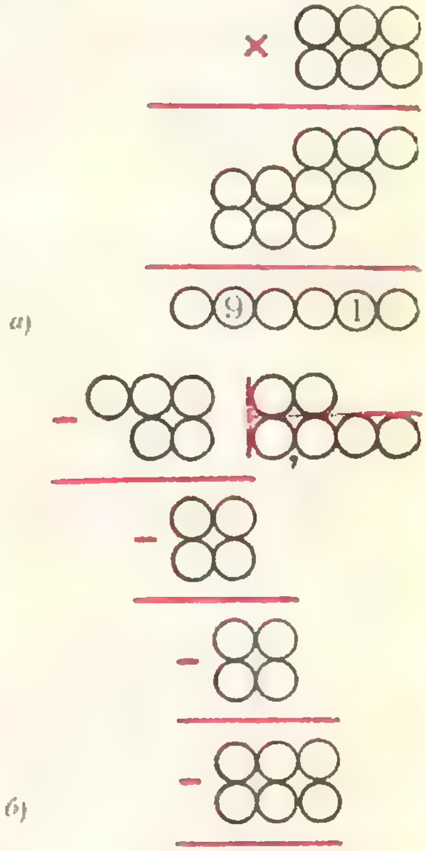
Когда Петя ввернул в патрон лампочку, в комнате стало значительно светлее, и ребята еще около часа просидели над книгами.

Возвращаясь домой, они чувствовали себя хорошо подготовленными к контрольной работе по теме «Электричество».

Какие противоречия физическим законам заметили вы в этом рассказе?

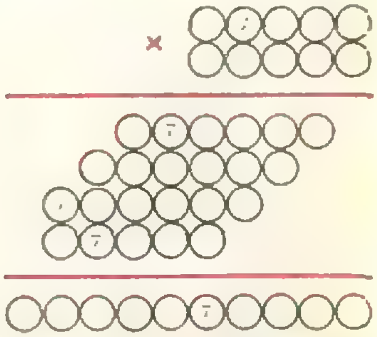
Ребусы

1. Впишите в пустые кружки цифры так, чтобы перед вами были правильно выполненные действия умножения и деления.



Л. П. Мочалов

2. В следующем примере все цифры, кроме семерок, заменены пустыми кружками



Известно, что все цифры обоих сомножителей разные. Известно также, что и в произведении все цифры разные. Требуется восстановить пример.

Э. Рекстин

Б. А. Кордемский

Как? А если невозможно, то почему?

Описанные ниже приключения случились на континенте «Математика». Участники и очевидцы этих приключений утверждают, что все происходило в точном соответствии с их рассказами. Мы предлагаем вам расследовать эти сообщения и разобраться в возникших у рассказчиков недоумениях и вопросах.

Вечный скиталец

Так с горечью назвал себя первый рассказчик и показал нам «маршрутную карту» своих скитаний (рис. 1). Его дом (*Д*) находится в центральном треугольнике нарисованного «плана местности». Цифры, размещенные в остальных треугольниках, предписывают путнику, покидающему треугольник, сделать столько шагов, сколько указано в этом треугольнике (шагом называется переход в любой соседний треугольник через его сторону, но не через вершину). Так, войдя в треугольник с цифрой 4 (вверху «плана местности»), путник обязан далее сделать 4 шага — пройти, например, через треугольники 7, 8, 1 в треугольник с цифрой 2; отсюда сделать 2 шага (например, в треугольники 1, 6) и так далее.

— С какого бы из 24 окрашенных треугольников я ни начинал маршрут,— жалуется рассказчик,— я никак не могу попасть в дом и остаться там. Почему?

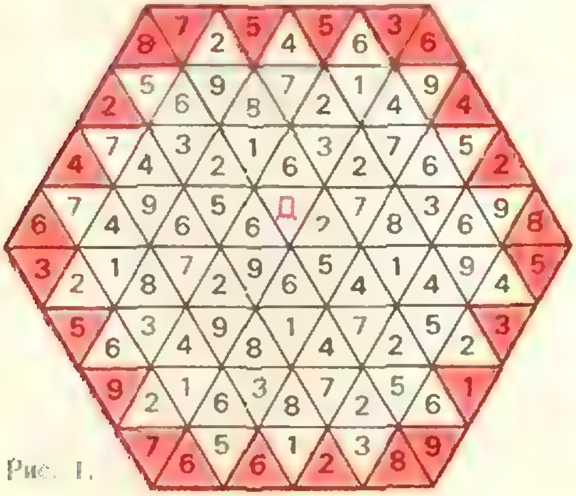


Рис. 1.

Алгоритм сильнее случая

Действующее лицо следующего математического приключения — контролер. Вчера он разложил 90 доброкачественных деталей в 9 ящиков поровну и в отдельный ящик — 10 бракованных деталей. Эти 10 деталей оказались забракованными потому, что каждая из них весила 0,9 *г*, а любая доброкачественная весит 1 *г*. Ящики он не пометил и сегодня не может вспомнить, в котором из них лежат бракованные детали.

Придется взвешивать, причем поскорее — детали пора отправлять. По взвешивать по одной детали из каждого наудачу выбранного ящика — надеяться на случай: если не повезет, то придется делать 9 взвешиваний. Контролер обошелся одним взвешиванием. Каким образом?

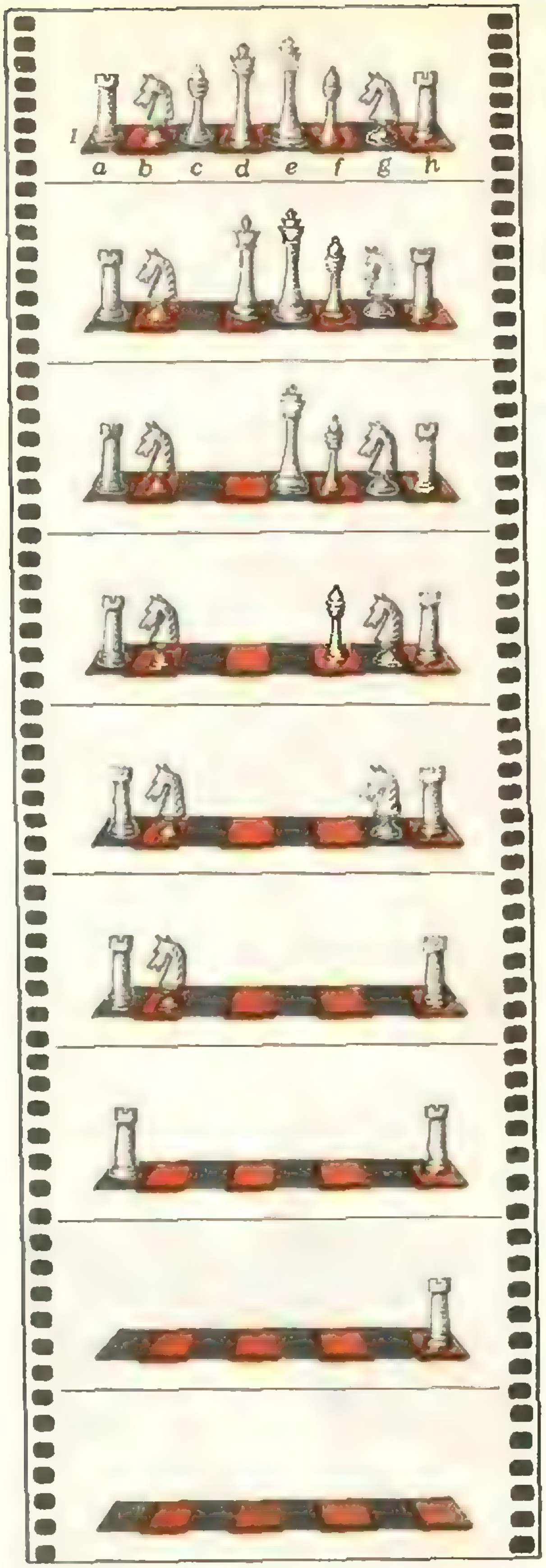


Рис. 2.

Трюк кинооператора

Третий рассказчик принес фильм, показывающий одну из возможных последовательностей удаления (по одной) всех восьми фигур, расположенных на первой горизонтали шахматной доски. При этом можно начать с любой фигуры, а затем расширять образующийся промежуток по желанию как вправо, так и влево. Кадры из этого фильма приведены на рисунке 2.

— Фильм приготовил мой друг, кинооператор,— сказал третий рассказчик.— Он заинтриговал меня сообщением о том, что знает трюк, с помощью которого ему удалось легко установить число всех возможных последовательностей удаления фигур. Их оказалось 128.

Расследуйте это сообщение.

Недоумение завхоза

На рисунке 3 представлен план-схема первого этажа склада. Разрывы в линиях обозначают двери. Внутренние и наружные двери расположены так, что завхоз, начиная обход помещений первого этажа из комнаты *B*, ухитрялся пройти через каждую дверь ровно один раз, например по маршруту, указанному непрерывной линией на рисунке 3.

При реконструкции склада были добавлены две наружные двери

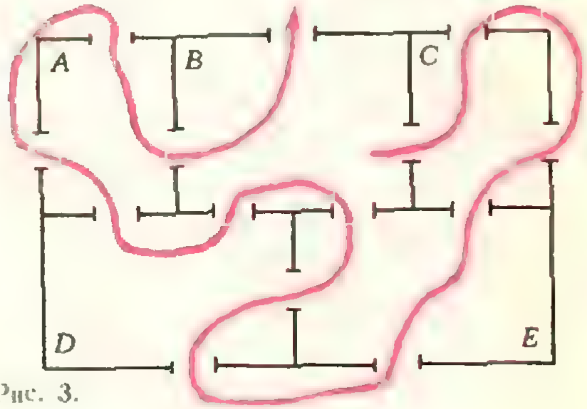


Рис. 3.

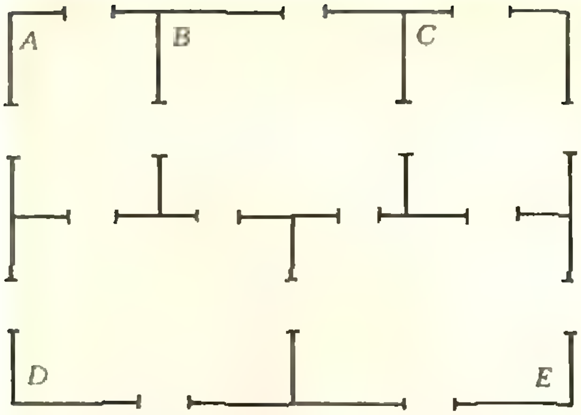


Рис. 4.

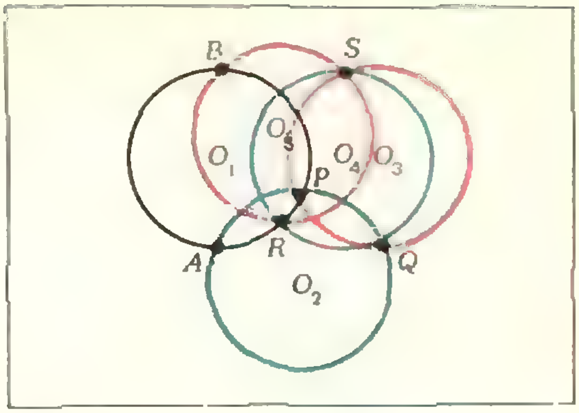


Рис. 5.

(рис. 4), и теперь завхозу никак не удается обойти все комнаты, проходя через каждую дверь один раз, откуда бы он ни начинал обход.

Архитектор, желая порадовать завхоза, согласился заделать одну из дверей, сохранив при этом две добавленные двери. Теперь завхоз снова нашел маршрут, отвечающий «условиям игры». Его маршрут и начинался и кончался внутри здания.

Действительно ли невозможно на втором варианте плана (рис. 4) найти маршрут, проходящий через каждую дверь по одному разу, или, может быть, такой маршрут существует, только завхоз его не нашел? Какую дверь надо заделать, чтобы вновь появился требуемый маршрут?

Пятак в руках находчивого ученика

Вот что приключилось однажды на уроке геометрии. Учитель предложил задачу «на построение». Нарисована окружность (ее центр не указан), на которой отмечена точка A. Требуется найти диаметрально противоположную точку B.

— *У меня нет циркуля,— заявил ученик.— Можно, я воспользуюсь пятаком?*

Учитель позволил, но потребовал дать обоснованное решение. В результате глубоких размышлений ученик с помощью пятака:

1) построил окружность O_1 и отметил на ней произвольную точку A (рис. 5);

2) построил окружность O_2, пересекающую окружность O_1 в точке A и в какой-то точке P;

3) через точку P провел окружность O_3, пересекающую O_2 в какой-либо точке Q;

4) через точку Q провел окружность O_4, пересекающую O_1 в какой-либо точке R, а окружность O_3 — в какой-либо точке S;

5) приложил пятак к точкам R и S так, чтобы проведенная с помощью пятака окружность O_5 прошла через эти точки; пересечение окружностей O_5 и O_1 дало искомую точку B.

При обосновании построения ученик отметил, что если равные окружности с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках M и N, то O_1MO_2N — ромб.

Дома, пользуясь тем же пятаком, ученик

а) построил окружность, касающуюся заданной «пятачковой» окружности в произвольно выбранной на ней точке;

б) при заданном луче OA построил точку B, принадлежащую воображаемому лучу OB, составляющему с лучом OA угол 30°.

Проверьте все это.

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

К статье «Электродинамика движущихся сред»

1. Пусть электрическое поле направлено вдоль оси Y, а магнитное — вдоль оси Z ($E_y = E$, $E_x = E_z = 0$, $B_z = B$, $B_y = B_x = 0$). Для того чтобы электрическое поле в движущейся системе отсчета обратилось в нуль, согласно формулам (3) статьи требуется, чтобы скорость движения системы была равна $v = \frac{E}{B}$ и направлена по оси X.

Рассмотрим движение частицы в этой системе отсчета. Поскольку электрического поля нет, то движение ее определить легко: частица будет вращаться вокруг силовых линий магнитного поля, то есть в плоскости XY, радиус вращения будет равен $\frac{mu}{eB}$, где u — начальная скорость, m — масса, а e — заряд частицы. При этом направление вращения положительно заряженной частицы будет образовывать левый винт с направлением индукции магнитного поля, а отрицательно заряженной частицы (например, электрона) — правый.

В неподвижной системе отсчета на это движение накладывается еще поступательное движение со скоростью v. Если $v \ll c$, то можно воспользоваться обычным законом сложения скоростей. В результате получим, что частица движется в плоскости XY по одной из трех траекторий, изображенных на рисунке 1. Случай *а*) соответствует большой начальной скорости частицы, когда $u > v$. В этом случае частица часть времени движется в направлении, обратном направлению скорости v, совершая петлеобразное движение. Если $u < v$, возвратного движения нет (случай *б*)). Наконец, при $u = v$ траекторией оказывается циклоида (случай *в*)).

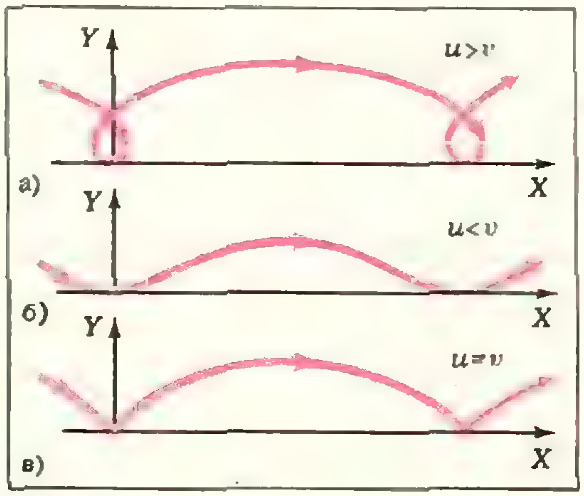


Рис. 1.

Заметим, что знак скорости v не зависит от знака заряда, поэтому как положительные, так и отрицательные частицы имеют одинаковое поступательное движение в скрещенных полях. Это движение называется дрейфом. В результате дрейфа нейтральная среда, состоящая из одинакового числа свободно движущихся положительных и отрицательных частиц (например, плазма), перемещается в направлении, перпендикулярном как к электрическому, так и к магнитному полям.

2. Пусть пластины конденсатора расположены в плоскости XZ, расстояние между пластинами равно d и скорость v направлена вдоль оси X. В системе отсчета, связанной с конденсатором, имеется только электрическое поле E'_y, направленное вдоль оси Y', причем разность потенциалов между пластинами конденсатора равна $\Delta\varphi_0 = -E'_y d$.

В неподвижной системе отсчета мы также имеем две параллельные заряженные пластины, расстояние между которыми равно d (сокращения этого расстояния не происходит, так как оно измеряется в направлении, перпендикулярном движению системы). Таким образом, для электрического поля в неподвижной системе отсчета можно написать $\Delta\varphi = -E_y d$, где $\Delta\varphi$ и E_y — соответственно разность потенциалов и напряженность электрического поля. Используя связь между E_y и E'_y (см. формулы (7) в статье), находим, что

$$\Delta\varphi = \frac{-E'_y d}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{\Delta\varphi_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}.$$

Заметим, что в системе отсчета, связанной с конденсатором, магнитное поле равно нулю. Это не так в подвижной системе отсчета, в которой имеется отличный от нуля ток, обусловленный движением зарядов конденсатора. Поэтому при использовании обратных преобразований полей (см. формулы (3)) нельзя получить ответ, в котором $\Delta\varphi$ и $\Delta\varphi_0$ просто поменяются местами.

3. Будем считать, что электрон представляет собой точечный заряд, и поместим его в начало координат движущейся системы отсчета K'. Магнитное поле в системе отсчета K' будем считать равным нулю (хотя это и неверно для настоящего электрона, так как он обладает отличным от нуля магнитным моментом). Напряженность электрического поля, созданного электроном в точке с радиусом-вектором $\mathbf{r}$, равна $\mathbf{E} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e}{r^3}\mathbf{r}$

(это обычный закон Кулона, записанный в векторной форме). Обозначим через x', y' и z' координаты рассматриваемой точки (то есть $r = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$). Тогда проекции напряженности электрического поля в системе отсчета K' равны

$$E'_x = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e}{r^2}\frac{x'}{r},$$

$$E'_y = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e}{r^2}\frac{y'}{r},$$

$$E'_z = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e}{r^2}\frac{z'}{r}.$$

В неподвижной системе координат K, начало координат которой в рассматриваемый момент совпадает с началом координат системы отсчета K', согласно формулам (3), (7) и (8) будем иметь

$$E_x = E'_x,\quad E_y = \frac{E'_y}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},\quad E_z = \frac{E'_z}{\sqrt{1 - v^2/c^2}};$$

$$B_x = 0,\quad B_y = -\frac{vE'_z}{c^2\sqrt{1 - v^2/c^2}},\quad B_z = \frac{vE'_y}{c^2\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Подставим в эти формулы значения E'_x, E'_y, и E'_z. Учитывая, что вследствие сокращения расстояний вдоль оси X $x' = \frac{x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$, в то время как $y' = y$ и $z' = z$, и введя обозначения $\beta = v/c$, получим

$$E_x = -\frac{ex(1-\beta^2)}{4\pi\varepsilon_0\left(\sqrt{x^2 + (y^2+z^2)(1-\beta^2)}\right)^3},$$

$$E_y = -\frac{ey(1-\beta^2)}{4\pi\varepsilon_0\left(\sqrt{x^2 + (y^2+z^2)(1-\beta^2)}\right)^3},$$

$$E_z = -\frac{ez(1-\beta^2)}{4\pi\varepsilon_0\left(\sqrt{x^2 + (y^2+z^2)(1-\beta^2)}\right)^3};$$

$$B_x = 0,$$

$$B_y = \frac{evz(1-\beta^2)}{4\pi\varepsilon_0 c^2\left(\sqrt{x^2 + (y^2+z^2)(1-\beta^2)}\right)^3},$$

$$B_z = -\frac{evy(1-\beta^2)}{4\pi\varepsilon_0 c^2\left(\sqrt{x^2 + (y^2+z^2)(1-\beta^2)}\right)^3}.$$

Можно заметить, что электрическое поле перестает быть сферически симметричным. Рассмотрим случай, когда $\beta \to 1$, то есть $v \to c$. Электрическое поле всюду обращается в нуль, за исключением плоскости $x = 0$, которая перпендикулярна направлению движения электрона. В этой плоскости $E_x = 0$, а компоненты E_y и E_z растут как $1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ (при $v \to c$). Таким образом, электрическое поле движущегося электрона как бы сплющивается.

К статье «Бесповторные последовательности»

1. Пусть $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_{2n-1}, a_{2n}\}$ — произвольная последовательность длины $2n$. Разобьем эту последовательность на n пар: a_1, a_2; a_3, a_4; …; a_{2n-1}, a_{2n}. Для того чтобы последовательность A была бесповторной, необходимо, чтобы каждая пара была бесповторной. Очевидно, что таких пар 90. Из 90 пар можно составить 90^n различных последовательностей длины $2n$. Следовательно,

$$|\text{Б}(2n)| \leqslant 90^n \text{ и } \frac{|\text{Б}(2n)|}{10^{2n}} \leqslant \frac{90^n}{10^{2n}} = \left(\frac{9}{10}\right)^n.$$

2. Обозначим через A_2 последовательность $\{1, 2, 1\}$, через — A_3 последовательность $\{A_2, 3, A_2\}$, …, через A_9 — последовательность $\{A_8, 9, A_8\}$. Эта последовательность A_9 и является искомой.

3. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ — бесповторная последовательность, составленная из цифр 1, 2, 3. Рассмотрите последовательность, полученную заменой в исходной последовательности цифры 1 на $\{1, 2, 3\}$, цифры 2 — на $\{1, 2, 1, 2, 1\}$, цифры 3 — на $\{1, 2, 2, 1\}$.

5. Пусть $a_1, a_2, a_3, \ldots$ — бесконечная бесповторная последовательность. Тогда последовательности

$$a_2, a_3, \ldots,$$
$$a_3, a_4, \ldots,$$
$$a_4, a_5, \ldots$$

также бесповторные. Покажите, что все они различны.

6. Поскольку различных цифр 10, то для любого n среди наших одиннадцати дробей можно указать две дроби, у которых в n-м разряде стоят одинаковые цифры. Пусть при $n = 1$ это будет пара дробей i_1 и j_1, при $n = 2$ — пара дробей i_2, j_2 и так далее. Но различных пар, составленных из чисел, не превосходящих 11, — конечное число, и значит, хотя бы одна пара встретится бесконечное число раз.

К статье «Задача на дом»

1. При

$$a_3 = -\frac{a_1b_2c_2 + a_2b_1c_1}{(b_1+b_2)(c_1+c_2)},$$

$$b_3 = -\frac{a_2b_1c_2 + a_1b_2c_1}{(c_1+c_2)(a_1+a_2)},$$

$$c_3 = -\frac{a_2b_2c_1 + a_1b_1c_2}{(a_1+a_2)(b_1+b_2)}.$$

При этом

$$\frac{1}{A}=(b_1+b_2)(c_1+c_2)(b_1c_2-b_2c_1)$$

и т. д.

Особняком стоит случай, когда, например, $a_1+a_2=0$. Разберите его самостоятельно.

2. $x=3\alpha^2+4\beta^2+4\alpha\beta$, $y=5\alpha^2-4\beta^2+4\alpha\beta$, $z=2\alpha^2+8\beta^2+16\alpha\beta$, где α и β — произвольные целые числа.

4. Указание. Разделите обе части на $xyzv$.

Ответ.

$$\begin{aligned} x&=\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma),\\ y&=\alpha\gamma(\alpha+\beta+\gamma),\\ z&=\alpha\beta(\alpha+\beta+\gamma),\\ v&=\alpha\beta\gamma, \end{aligned}$$

где α, β, γ — целые.

К статье «Однородные уравнения»

1. $x_1=\frac{190}{63}$; $x_2=\frac{2185}{728}$. Указание. Положить $u=\sqrt[6]{|x-2|}$, $v=\sqrt[6]{|x-3|}$.

2. $x_1=2$; $x_2=-2$. Указание. Перейти к логарифмам по основанию 2. Положить $u=5^{\log_2 x^2}$; $v=3^{\log_2 x^2}$.

3. $x_1=4$; $x_2=2$. Указание. Положить $u=(\sqrt{2}-1)^{2\,(x^2-6x+9)}$; $v=(\sqrt{2}+1)^{2\,(x^2-6x+9)}$, тогда $uv=1$.

4. $x_1=\frac{\pi}{4}+\pi k$, $x_2=\frac{5\pi}{12}+\pi m$ (k, m — целые).

5. $x=\frac{1}{4}\arccos\frac{3}{5}+\frac{\pi k}{2}$ (k — целое).

6. $x_1=\frac{\pi}{4}+\pi k$, $x_2=-\operatorname{arctg}3+\pi n$ (n, k — целые).

7. $x=18$, $y=8$. Указание. Разделить первое уравнение на второе. Получится уравнение относительно $\sqrt{\frac{x}{y}}$.

8. $x_1=2$, $y_1=1$; $x_2=-2$, $y_2=-1$.

9. $x=-1$. Указание. Положить $u=3^x$; $v=5^x$.

10. Вода подается быстрее в два раза. Указание. Легко найти концентрацию кислоты в растворе, подаваемом по второй трубе (15%). Обозначив через x скорость подачи жидкости по первой трубе, y по второй, получим однородное уравнение.

11. $x_1=26$, $x_2=-7$. Указание. Сократить выражение, стоящее в левой части на $\sqrt[3]{34-x}-\sqrt[3]{x+1}$, положить $u=\sqrt[3]{34-x}$, $v=\sqrt[3]{x+1}$. Получится система уравнений

$$\begin{cases} u^2v+uv^2=30,\\ u^3+v^3=35. \end{cases}$$

13. $x=-2$.

14. $x_1=-1$, $x_2=9$. Указание. Ввести неизвестные $v=2^x$, $u=$

$$=\left(\sqrt{\sqrt{x^2-8x+7}-\sqrt{x^2-8x+9}}\right).$$

Уравнение станет однородным относительно u и v: $u^2+v^2=2uv$.

15. $x=1$, $y=-1$. Указание. Положить $u=2^{\frac{x-y}{2}}$; $v=2^{\frac{x+y}{2}}$, тогда $uv=2^x$.

16. $x=\frac{5\pm\sqrt{37}}{2}$. Указание. Воспользоваться равенством: $x^2+2=(x+1)+(x^2-x+1)$.

К головоломкам

(см. «Квант» № 8, 4-я с. обл.)

1. $$\begin{array}{c} 67\times14=938\\ +\quad\times\quad-\\ 308+17=325\\ \hline 375+238=613 \end{array}$$

2. $$\begin{array}{c} 47\times15=705\\ +\quad\times\quad-\\ 81+31=112\\ \hline 128+465=593 \end{array}$$

3. $$\begin{array}{c} 3\times4-7=5\\ +\quad:\quad-\quad+\\ 2\times4-5=3\\ +\quad+\quad+\quad:\\ 2\times4-4=4\\ \hline 7+5:6=2 \end{array}$$

4. $$\begin{array}{c} 3\times5-9=6\\ +\quad\times\quad-\quad+\\ 6:2+5=8\\ :\quad-\quad+\quad:\\ 3\times1-1=2\\ \hline 3+9-5=7 \end{array}$$

К статье «Конструирование уравнений по графикам функций»

(см. «Квант» №8)

1. а) (см. рис. 5 статьи). На «основном» промежутке $(0,\pi)$ функция $u(t)$, не определенная в точках $t=\pi n$, имеет уравнение $u_0=t$, $t\in(0,\pi)$. Сдвигая график u_0 на $n\pi$ вдоль оси абсцисс, получим

$$u_n=t-n\pi,\quad t\in(n\pi,\ (n+1)\pi).$$

При целых значениях $n=0,\ \pm1,\ \pm2,\dots$ это уравнение и дает уравнение искомой функции $u(t)$. Заметим, что

$$\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}t)=t-n\pi,\ t\in(n\pi,\ (n+1)\pi)\quad(n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \dots).$$

Если функция определена в точках πn слева, то $u(t)=t-n\pi$, $t\in(n\pi,\ (n+1)\pi]$; если в тех же точках функция определена справа, то $u(t)=t-n\pi$, $t\in[n\pi,\ (n+1)\pi)$. В обоих случаях $n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \dots$ Вся линия описывается двумя уравнениями

$$\begin{cases} u(t)=\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}t),\\ t(u)=n\pi,\ u\in[0,\pi] \end{cases}$$

$(n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \dots)$.

б) (см. рис. 6 статьи). На «основном» промежутке $[-\pi, \pi]$ уравнение функции $u(t)$ имеет вид

$$u_0 = |t|, \quad t \in [-\pi, \pi].$$

Сдвигая график u_0 вдоль оси абсцисс, получим

$$u_n = |t - 2n\pi|, \quad t \in [\pi(2n-1), \pi(2n+1)].$$

Если n пробегает все целые значения, то полученное уравнение есть уравнение искомой функции $u(t)$. Заметим, что имеет место равенство

$$u(t) = \arccos(\cos t) = |t - 2n\pi|,$$
$$t \in [\pi(2n-1), \pi(2n+1)],$$
$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

в) (см. рис. 7). На «основном» промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ функция имеет уравнение

$$u_0 = \begin{cases} t, t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]; \\ -t + \pi, t \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]. \end{cases}$$

Сдвигая график на $n2\pi$, получим

$$u_n = \begin{cases} t - 2\pi n, \\ t \in \left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right]; \\ -(t - 2\pi n) + \pi, \\ t \in \left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right]. \end{cases}$$

После преобразований две строчки можно заменить одной:

$$u_m = (-1)^m |t - m\pi|,$$
$$t \in \left[\frac{\pi}{2} + (m-1)\pi, \frac{\pi}{2} + m\pi\right],$$
$$(m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

(При $m = 2n$ получается первая строчка; при $m = 2n + 1$ — вторая.)
Имеет место равенство:

$$u(t) = \arcsin(\sin t) = (-1)^m |t - m\pi|,$$
$$t \in \left[\frac{\pi}{2} + (m-1)\pi, \frac{\pi}{2} + m\pi\right],$$
$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

2. $u(t) = A|\sin t|$.

3. На $[0, 2\pi]$ функция имеет уравнение

$$u_0 = \begin{cases} A\sin t, t \in [0, \pi]; \\ 0, t \in [\pi, 2\pi]. \end{cases}$$

Уравнение всей функции при $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

$$u(t) = \begin{cases} A\sin(t - n2\pi), \\ t \in [2\pi n, \quad \pi(2n+1)]; \\ 0, t \in [\pi(2n+1), \pi(2n+2)]. \end{cases}$$

Две строчки можно заменить одной:

$$u(t) = \frac{1 + (-1)^m}{2} A\sin t,$$
$$t \in [m\pi (m+1)\pi],$$
$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

4. График функции $S(t)$ на $[0, \pi]$ получен сдвигом данной синусоиды: на $\frac{\pi}{2}$ — вправо (вдоль оси абсцисс) и на A — вверх (вдоль оси ординат). Поэтому

$$S_0 = A\sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right) + A = -A\cos t + A,$$
$$t \in [0, \pi].$$

Сдвигая график S_0 на $n\pi$ вправо и на $n \cdot 2A$ вверх, получим уравнение функции:

$$S(t) = -A\cos(t - n\pi) + A(2n+1),$$
$$t \in [n\pi, (n+1)\pi], \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

К статье «Подарок веселого капитана»

(см. Квант № 8)

Расшифровка деления в предположении описки: $102508 : 49 = 2092$ и $8963{,}9 : 29 = 309{,}1$; $2463{,}3 : 23 = 107{,}1$. Указание. Надо найти все двузначные числа (делитель), кратные которым имеют вид 2∗ и ∗∗1, и проверить их.

Капитан вложил в шкатулку 272 рубля, а деление $(272 : 8 = 34)$ и запись кодового числа выполнил в троичной системе счисления: $101002_3 : 22_3 = 1021_3$. Это решение получится, если испытать все двузначные числа (делитель), записанные в троичной системе, произведение каждого из которых на 1 и 2 имеет вид 2∗ и ∗∗1.

В «фокусе сложения» использованы соответственно системы счисления с основанием 10, 9, 8, 12.

К задачам «Квант» для младших школьников»

(см. «Квант № 8)

1. 301 деталь. Общее число взятых деталей можно найти как сумму арифметической прогрессии, а именно, если из первого ящика

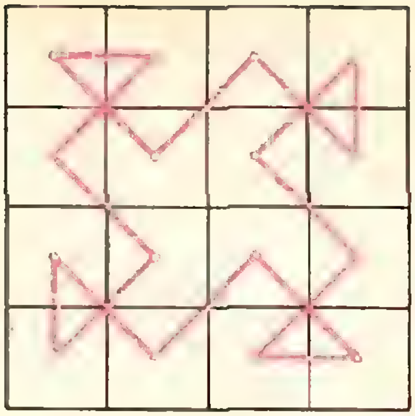


Рис. 2.

взяли x деталей, то из всех вместе их взяли $x + 2x + 3x + \ldots + 100x = 5050x$. В последнем ящике было деталей $100x + 1$, во всех вместе $10\,000x + 100$. Получаем уравнение $10\,000x + 100 - 5050x = 14\,950$, откуда $x = 3$.

2. Вода с поверхности моря все время испаряется, поэтому соленость морской воды не уменьшается.

3. Четыре (см. рисунок 2). Указание. В каждое угловое поле ведет лишь один диагональный ход.

4. По строкам:

$$\begin{array}{c} 17 \times 28 = 476 \\ 99 + \ \ 9 = 108 \\ \hline 116 + 252 = 368. \end{array}$$

Указание. Легко видеть, что Я = 9, Е = 1, Д = 0.

5. Чтобы из цифр числа можно было составить шесть и только шесть двузначных чисел, необходимо, чтобы это число было трехзначным: $\overline{abc}$. Складывая $\overline{ab}$, $\overline{ac}$, $\overline{bc}$, $\overline{ba}$, $\overline{ca}$, $\overline{cb}$, получим $22\ (a + b + c)$. По условию $11\ (a + b + c) = 100a + 10b + c$, или $10c + b = 89a$. Но $10c + b$ — число двузначное; значит, и $89a$ — число двузначное, $a = 1$. Номер квартиры — 198.

К заметке «524288 японских головоломок»

(см. «Квант» № 1, 4-я с. обл.)

Редакция получила много писем с решениями «сопутствующих» задач. Но только четырем читателям удалось сложить предложенную головоломку. Это *С. Ж. Левитин* (Днепропетровск), *Л. А. Лузина* (Ленинград), *А. С. Безбородов* (Иваново), *В. И. Добнюк* (Омск).

Еще два читателя сложили головоломку, переворачивая фигурки: *В. И. Дупленко* (Днепродзержинск) и *С. Кардашевский* (Макеевка).

Головоломки этого типа называются «полимино» (по аналогии с домино). Их придумал известный математик С. В. Голомб. Прочесть о них можно в книжках: С. В. Голомб. Полимино («Мир», 1975) и М. Гарднер. Математические новеллы («Мир», 1974).

Остается сказать, что головоломок типа «7А», а именно они были предложены читателям «Кванта», собрать не удалось ни Голомбу, ни Гарднеру. Впервые их сложили в Японии. На рисунке 3 приведено решение С. Ж. Левитина.

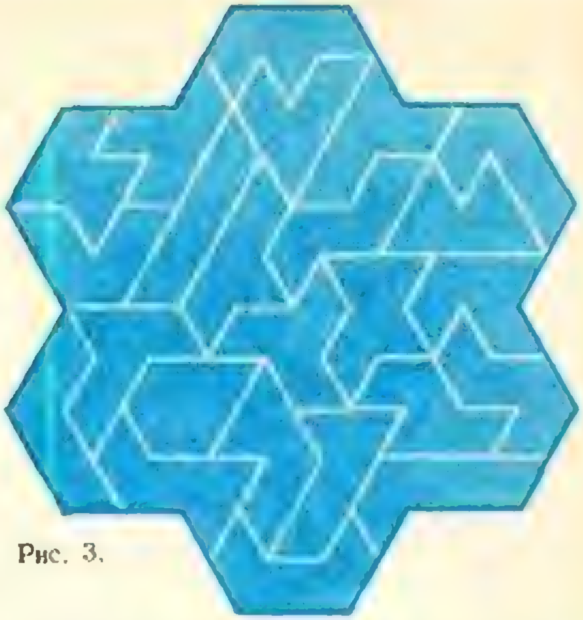


Рис. 3.

К задачам

(см. «Квант» № 8, с. 48)

1. Медиана, проведенная из вершины угла B. **2.** $n = 7$. **4.** (10, 2, 1, 1, ..., 1) и (4, 4, 1, 1, ..., 1). **5.** В 3 раза. **6.** Достаточно 24 выстрела.

Корректор *Л. С. Сомова*

117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.
«Квант», тел. 231-08-11. Сдано в набор 17/VI 1975 г.
Подписано в печать 30/VII 1975 г.
Бумага $70\times100^1/_{16}$. Физ. печ. л. 5
Усл. печ. л. 6,5. Уч.-изд. л. 7,44 Тираж 348 280 экз.
Т-09284. Цена 30 коп. Заказ 1282

Чеховский полиграфический комбинат
Союзполиграфпрома
при Государственном комитете Совета
Министров СССР по делам издательств,
полиграфии и книжной торговли.
г. Чехов Московской области

Рукописи не возвращаются

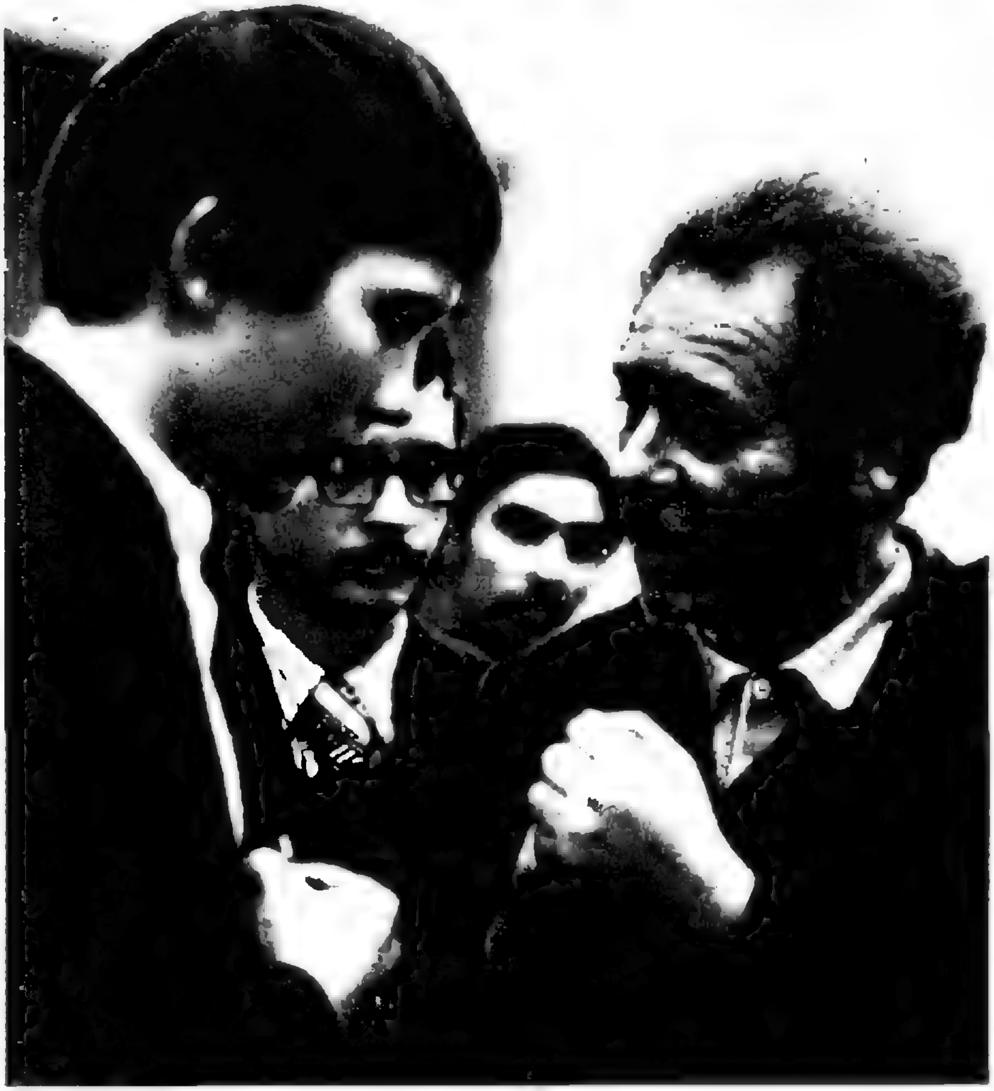
Всероссийский слет актива научных обществ учащихся

△

Летчик-космонавт СССР, дважды Герой Советского Союза Н. Н. Рукавишников дает автографы участникам слета.

Читателям журнала „Квант" хочется пожелать больших успехов в изучении самой сложной и интересной науки, успехов в будущей научной деятельности!

Летчик-космонавт СССР



Заведующий лабораторией Института физики твердого тела АН СССР, доктор физико-математических наук, лауреат Ленинской премии В. Л. Броуде рассказывает о своей работе

◁ Фото В. В. Бондарчика

Всероссийский слет актива научных обществ учащихся

△ Л. Королева рассказывает о работе секции теоретической физики НОУ г. Норильска.

Ю. Бахарев демонстрирует систему радиотелеуправления, созданную в НОУ г. Челябинска ▷

Участники слета на экскурсии в Институте ▽ физики твердого тела АН СССР.

Цена 30 коп.
Индекс 70465

9

К нашим читателям

Продолжается подписка на 1976 год на научно-популярный физико-математический журнал «Квант»

«Квант» адресован всем школьникам 6—10 классов, которые любят математику и физику, любят решать задачи

Наш журнал полезен и тем школьникам, которые еще не увлеклись физикой или математикой, но хотели бы получше познакомиться с этими науками

Сейчас происходит коренная переработка школьных программ по математике и физике «Квант» активно участвует в этой работе В 1976 году на страницах журнала будут систематически публиковаться статьи, разъясняющие материал новых программ

Много материалов будет опубликовано для школьников 10 классов, готовящихся к поступлению в институт

В 1976 году «Квант» будет продолжать печатать статьи для младших школьников Объем этих публикаций будет существенно расширен

«Квант» полезен также и преподавателям Материалы, публикуемые в «Кванте», могут быть использованы на занятиях математических и физических кружков и на факультативных занятиях

Читайте в «Кванте» в 1976 г

Статьи, посвященные опытам, которые можно провести над моделями как физического, так и математического происхождения

Большое количество статей будет посвящено новой программе в школе Так, в статьях А Г Мордковича школьники познакомятся с понятием производной и ее применением при решении задач

Вот уже пятый год раздел журнала «Задачник «Кванта»» учит школьников решать задачи повышенной трудности по математике и физике В работе этого раздела принимают участие школьники из городов и сел Читатели, регулярно присылающие правильные решения, получают право участия в областных олимпиадах Редакция консультирует школьников, присылающих решения задач

Для поступающих в вузы в 1976 году будут опубликованы статьи на следующие темы Математика тождественные преобразования иррациональных уравнений, проверка решений, уравнения с параметрами доказательство неравенств, использование монотонности функции при решении уравнений и неравенств, решение тригонометрических уравнений, решение задач на тела вращения прямоугольная проекция при решении стереометрических задач, «скрытые» данные в условии задачи

Физика законы идеальных газов, электрический ток, линии передач, трансформаторы, построение изображений (пластинка линза, зеркало), оптические приборы, глаз, интерференция

Мы будем продолжать знакомить наших читателей с новыми книгами, представляющими для них интерес, рассказывать о работе физико-математических школ, об олимпиадах, о работе различных вузов со школьниками и т д

Подписка на «Квант» принимается без ограничения в пунктах приема подписки «Союзпечать», отделениями связи, на почтамтах При подписке ссылайтесь на наш индекс

70465 Цена номера 30 коп

НОМЕР
10

Основан в 1970 году

квант

1975

10

Научно-популярный
физико-математический
журнал
Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической
литературы

Главный редактор
академик И. К. Кикоин

Первый заместитель
главного редактора
академик А. Н. Колмогоров

Редакционная коллегия:

М. И. Башмаков,
С. Т. Беляев,
В. Г. Болтянский,
Н. Б. Васильев,
Ю. Н. Ефремов,
В. Г. Зубов,
П. Л. Капица,
В. А. Кириллин,
главный художник
А. И. Климанов,
С. М. Козел,
зам. главного редактора
В. А. Лешковцев,
Л. Г. Макар-Лиманов,
А. И. Маркушевич,
Н. А. Патрикеева,
И. С. Петраков,
Н. Х. Розов,
А. П. Савин,
И. Ш. Слободецкий,
зам. главного редактора
М. Л. Смолянский,
Я. А. Смородинский,
В. А. Фабрикант,
А. Т. Цветков,
М. П. Шаскольская,
С. И. Шварцбурд,
А. И. Ширшов.

Редакция:

В. Н. Березин,
А. Н. Виленкин,
И. Н. Клумова,
художественный редактор
Т. М. Макарова,
Н. А. Минц,
Т. С. Петрова,
В. А. Тихомирова,
зав. редакцией
Л. В. Чернова

В НОМЕРЕ:

2 Штаб советской науки
4 Ленин о науке
5 Ученые о Ленине
6 *О. А. Жаутыков, А. Г. Кубесов.* Выдающийся математик средневековья
9 *Л. Г. Асламазов.* Почему звучит скрипка
17 *З. Я. Тьмеладзе.* Физика и линейные неравенства
24 *М. А. Маневич, М. М. Слуцкин.* ЭВМ в конструкторском бюро

Лаборатория «Кванта»

30 *М. М. Дагаев.* Полное лунное затмение

Математический кружок

32 *А. М. Степин, А. Т. Таги-Заде.* Слова с ограничениями

Задачник «Кванта»

38 Задачи М346—М350; Ф358—Ф362
40 Решения задач М308—М315; Ф318—Ф321

Практикум абитуриента

48 *С. Б. Белый.* Учитесь делать дополнительные построения

Рецензии, библиография

52 *И. С. Петраков.* История математики
53 *Е. П. Левитан.* Книга о космических фейерверках
55 *Т. С. Петрова, М. Л. Смолянский.* Новые книги

«Квант» для младших школьников

56 Задачи
57 Головоломки Дьюдени
61 **Ответы, указания, решения**
Смесь (*8, 16, 23, 54, 60*)

© Главная редакция физико-математической литературы издательство «Наука», «Квант», 1975 год.

Штаб советской науки

В октябре 1975 года в Москве проводится торжественная юбилейная сессия Академии наук СССР, посвященная 250-летию с момента ее основания. Сессия проходит как всенародный праздник советской науки и смотр ее выдающихся достижений.

Академия наук нашей страны была создана по указу Петра I, изданному 28 января 1724 года (по старому стилю). Однако торжественное открытие Академии состоялось уже после смерти Петра I в августе 1725 года.

Празднование юбилея Академии наук СССР началось еще в 1974 году. За это время в ее институтах и научных учреждениях были проведены научные сессии и общие собрания. Торжественные собрания прошли также в республиканских Академиях наук. Были организованы многочисленные выставки и смотры результатов научных работ, проходившие под девизом «Достижения науки — народному хозяйству». Состоялись встречи крупнейших ученых с коллективами рабочих и колхозников. Нынешняя юбилейная сессия завершает эти торжества.

История Академии наук неотделима от истории отечественной науки. 250 лет — большой срок. И за это время роль и место Академии в нашей науке подвергались значительным изменениям. Эти перемены неизбежно отражались на состоянии всех областей русской науки.

В период, предшествовавший Великой Октябрьской социалистической революции, состояние математики и физики в России было существенно различным. Труды Н. И. Лобачевского, М. В. Остроградского, П. Л. Чебышева, А. М. Ляпунова, А. А. Маркова, В. А. Стеклова создали всемирный авторитет русской математике. Физика же в России была развита значительно слабее. Правда, и ее в этот период украшали имена А. Г. Столетова, П. Н. Лебедева, Н. А. Умова, но общий уровень развития русской физики был существенно ниже, чем за рубежом, и она не оказывала заметного влияния на развитие мировой физики. Недаром выдающийся физик А. Ф. Иоффе в своих воспоминаниях о дореволюционной отечественной физике писал, что большинство талантливых русских физиков вынуждено было выполнять свои исследования в иностранных институтах и лабораториях.

Октябрьская революция коренным образом изменила положение науки в нашей стране. Наука превратилась в одно из важнейших средств построения нового социалистического общества. Огромное внимание успешному развитию молодой советской науки уделял В. И. Ленин. В невероятно тяжелых условиях гражданской войны и хозяйственной разрухи Ленин стремился сделать все возможное для помощи ученым, которые вместе со всем народом терпели жестокую нужду и лишения. Он потратил много сил на то, чтобы объединить усилия ученых и направить их на решение важнейших проблем народного хозяйства. Ленин глубоко верил в то, что «перед союзом представителей науки, пролетариата и техники не устоит никакая темная сила» *). И русские

---

*) В. И. Ленин. Полное собрание сочинений. Т. 40, с. 189.

ученые сознательно шли на огромные жертвы, мужественно переносили трудности, стоявшие на пути развития нашей науки. Вспоминая об этом, А. М. Горький писал: «Я наблюдал, с каким скромным героизмом, с каким мужеством творцы русской науки переживали мучительный голод и холод, видел, как они работали и как умирали. Мои впечатления за это время сложились в глубокий и почтительный восторг перед Вами — герои свободной, бесстрашной, исследующей мысли. Я думаю, что русские ученые, их жизнь и работа в годы войны и блокады дали миру великий урок мужества и выдержки».

Постоянная поддержка и помощь науке со стороны Коммунистической партии и Советского правительства вызвали невиданный научный подъем в нашей стране. За сравнительно короткий исторический отрезок времени советская физика, математика, механика и астрономия вышли на самые передовые рубежи мировой науки. Советские ученые успешно решили целый ряд необычайно сложных научно-технических проблем. Они создали атомное и водородное оружие, навсегда похоронив надежды империалистов на военное превосходство. Они проложили человечеству путь к мирному использованию атомной энергии. Ученые нашей страны успешно осуществляют разностороннюю программу исследования и использования космического пространства. Они оказывают огромную помощь в разработке и совершенствовании электронных вычислительных машин. Благодаря трудам наших ученых возникли целые новые области физико-математических наук.

Ученые всех стран с огромным вниманием следят теперь за развитием советской науки. Недаром многие научные журналы, выходящие в нашей стране, переводятся и переиздаются в наиболее развитых капиталистических странах. Русское слово «спутник» вошло без изменения во все языки мира, а дата запуска первого советского искусственного спутника Земли часто рассматривается в зарубежных странах как начало новой эры в организации науки и образования. Физики всех стран без перевода пользуются и другим научным термином — «Токамак», родившимся в нашей стране. «ТОроидальная КАмера в МАгнитном поле» — так назвали свою необычайно перспективную экспериментальную установку для изучения горячей плазмы и управляемых термоядерных реакций советские ученые. Подобные установки построены и строятся сейчас во многих странах.

Академия наук СССР — подлинный штаб советской науки. Она объединяет сотни крупнейших ученых, возглавляющих отдельные области современной науки в нашей стране. В ее многочисленных институтах и научных центрах, расположенных на всей территории Советского Союза, трудится огромная армия научных сотрудников.

Более четверти века на нашей планете происходит невиданная научно-техническая революция, охватившая фактически все области науки и техники. Наука на наших глазах превратилась в непосредственную производительную силу общества, она прочно объединяется с производством и оказывает на него необычайно важное, определяющее влияние. Прогресс производства — совершенствование технологии, орудий труда, способов обработки материалов, методов управления не только станками, но и целыми заводами — в наши дни неразрывно связан с прогрессом науки. Мир социализма, активно участвуя в этой революции, приобретает все необходимое для построения коммунизма. Плоды этой революции открывают нам путь к материально-технической базе коммунизма и построению коммунистического общества.

Трудно переоценить роль науки в строительстве коммунизма. Ведь такого общественного строя на Земле еще никогда не было, и учиться здесь нам просто не у кого. Научный анализ, марксистско-ленинские методы исследования — вот компас, по которому мы проверяем верность нашего пути.

Да здравствует же советская наука и ее генеральный штаб — Академия наук СССР!

Ленин о науке

Ниже приводятся высказывания В. И. Ленина, заимствованные из его работ или воспоминаний современников.

...Только социализм освободит науку от ее буржуазных пут, от ее порабощения капиталу, от ее рабства перед интересами грязного капиталистического корыстолюбия. Только социализм даст возможность широко распространить и настоящим образом подчинить общественное производство и распределение продуктов по научным соображениям относительно того, как сделать жизнь всех трудящихся наиболее легкой, доставляющей им возможность благосостояния. (В. И. Ленин. Полное собрание сочинений. Т. 36, с. 381).

...Я лично глубоко интересуюсь наукой и придаю ей громадное значение. Когда вам что нужно будет, обращайтесь прямо ко мне. (Из воспоминаний академика С. Ф. Ольденбурга)

...Ведь вот, только бы победить нам все эти интервенции, все эти внутренние восстания кулаков, помещиков и буржуазии, и тогда мы устроим так, что деятели науки, культуры, искусства, литературы — все будут обеспечены у нас так, как нигде в свете. Именно к нам будут ехать все ученые, чтобы делать всевозможные исследования, создавать лучшие лаборатории, при самых лучших возможностях исследований и постановки работ по животрепещущим научным вопросам. (Из беседы с А. М. Горьким)

...Если наука в будущем должна дать то, во что вы верите, — обновление жизни, то необходимо, чтобы те широкие массы, которые теперь стоят близко к власти, которые теперь имеют возможность регулировать жизнь, чтобы они понимали значение науки. Вы должны сделать им доступным и понятным значение тех отвлеченных истин, которые отдельные люди понимают, но которые масса, которой раньше не предоставлялось возможности подойти близко к этой науке, пока еще не понимает. (Из речи академика С. Ф. Ольденбурга на II Всесоюзном съезде Советов)

...Имейте в виду, что теперь широкие массы, стряхнув с себя старую власть, взяли свою жизнь в собственные руки, они являются вершителями жизни, в которой и вам, представителям науки, принадлежит соответствующее место. Но место это и вообще возможность надлежащим образом работать научно будет зависеть от того, насколько значение науки будет понято массами, насколько они смогут на нее посмотреть не как на праздное, ненужное для жизни времяпрепровождение, а как на тяжелый по своей сложности, необходимый и производительный труд. Мы, я и другие, конечно, понимаем значение науки, но сейчас не в нашем понимании дело, а в понимании масс. Естественно поэтому, что в первую голову внимание государства будет обращено на те науки, которые помогают нам выявлять и применять на деле наши естественные богатства, особенно нужные разоренной войнами стране, т. е. науки естественные и математические и экономические. (Из доклада академика С. Ф. Ольденбурга на Общем собрании Академии наук 22 января 1927 года)

...Узнав о согласии Вице-президента Академии наук академика В. А. Стеклова сотрудничать с Советским правительством, В. И. Ленин сказал: «Вот так, одного за другим, мы перетянем всех русских и европейских Архимедов, тогда мир, хочет не хочет, а — перевернется!» (Из речи академика А. В. Топчиева на сессии Академии наук, посвященной 90-летию со дня рождения В. И. Ленина, 21 апреля 1960 года)

Ученые о Ленине

...Нам — людям науки — особенно дорога в величавом облике Ленина его неустанная забота о процветании советской науки. С первых же дней существования Советской власти Ленин пристально занимался вопросами, связанными с развитием науки. В известных директивах Ленина еще в 1918 году четко были определены задачи Академии наук в деле экономического возрождения страны, в деле развития производительных сил нашей Родины. Мы горды тем, что Академия наук во всей своей деятельности неизменно руководствовалась указаниями Ленина. (Из речи президента Академии наук академика В. Л. Комарова 14 февраля 1944 года)

...В настоящее время наши историки, изучая подлинные материалы и документы первых лет революции, убеждаются в громадной активной роли Владимира Ильича в реформе Академии наук. Коротко говоря, дальнейшее развитие Академии, грандиозные размеры которого мы знаем теперь, было предусмотрено уже в первых указаниях Владимира Ильича. В первые же месяцы революции Владимир Ильич дал санкцию на организацию целого ряда научно-исследовательских институтов в Москве и в Ленинграде...

...В. И. Ленин с первых же шагов революции принял все меры для дальнейшего широкого роста и научных кадров, и научных учреждений. Этого требовала страна, которая должна была превратиться в страну социалистическую. Вместе с тем исключительное внимание со стороны Владимира Ильича к науке определялось, конечно, не в малой степени и тем, что сам он был величайшим ученым и оставил нам незабываемый пример как важности достигнутых результатов, так и методов научной работы. (Из речи академика С. И. Вавилова, посвященной памяти В. И. Ленина, 20 января 1940 года)

...Строя новую жизнь, осуществляя величайший в мире социальный переворот, борясь за новое Советское государство в разоренной войной, нищей и невежественной стране, Ленин не переставал думать о культурном строительстве и научном росте. С большим вниманием, с исключительной заботливостью относился он к науке и ученым. Всем известны факты его непосредственного вмешательства в вопросы, касающиеся научного строительства; вероятно, многие знают уже и о том, как много содействовал он нашей Академии наук в ее стремлении поставить и развить исследовательскую работу, нарушенную в годы войны и революции. (Из речи президента Академии наук академика А. П. Карпинского 21 января 1928 года)

...О диапазоне его знаний наглядно свидетельствуют и его богатейшее неоценимое литературное наследство, и те заметки, которые оставлены им на полях громадного количества прочитанных им книг. Просмотрите «Философские тетради» Ленина, и вам нетрудно будет видеть, какой глубокий, вдумчивый характер имели его конспекты, какую перекличку вел он в них с выдающимися представителями ученого мира. Так неустанно, изо дня в день оттачивалась острая мысль Ленина, одинаково сильная как в тонком анализе, так и в мощном синтезе...

...Владимир Ильич был не просто носителем мирового знания, он был ярчайшим представителем передовой, не отделяющей себя от народа и его нужд науки, той науки, которая создается не только для уразумения окружающих нас явлений жизни, но и для преобразований их на пользу трудящихся, науки революционеров, идущей на смену науке доктринеров. (Из воспоминаний академика Г. М. Кржижановского)

О. А. Жаутыков,
А. Г. Кубесов

Выдающийся математик средневековья

В этом году широко отмечается 1100-летие со дня рождения великого ученого и мыслителя Востока Абу Наср Мухаммед аль-Фараби. Уже в течение нескольких лет активно изучается его творческое наследие — недавно в Алма-Ате вышли «Математические трактаты» аль-Фараби.

В этой заметке рассказывается о некоторых его достижениях в области математики.

Одним из наиболее значительных культурных центров Средней Азии был Отрарский округ, расположенный в бассейне реки Сыр-Дарьи. Главный город этой области Отрар, или Фараб, как его называли арабские завоеватели, является родиной нескольких выдающихся представителей науки и культуры всего средневекового Востока. Наиболее крупным из них был великий мыслитель, ученый-энциклопедист, разносторонний математик Абу Наср Мухаммед аль-Фараби, родившийся в 870 году. Он получил образование сначала у себя дома в Отраре, а затем в Багдаде. Еще при жизни аль-Фараби получил прозвище «ал-муаллим ассани» — второго учителя. (Первым учителем «ал-муаллим аль-авзал» называли великого мыслителя античности Аристотеля.)

Аль-Фараби умер в Дамаске в 950 г.

Аль-Фараби принадлежит около ста пятидесяти трудов по самым различным отраслям знания. Почти все они написаны на арабском языке — языке науки того времени. В его научной деятельности большое место занимают физико-математические дисциплины. По свидетельству историков только по геометрии, астрономии и музыке аль-Фараби принадлежит около 70 трудов, большинство которых утрачено.

В настоящее время изучен ряд трактатов аль-Фараби. Эти сочинения опубликованы в русском переводе с подробными комментариями *). Аль-Фараби использовал арифметику, геометрию, тригонометрию в трудах по теории музыки, астрономии и математической географии. Остановимся вкратце на некоторых достижениях аль-Фараби в области математики.

Аль-Фараби в «Перечислении наук» старается по-своему определить разделы, предмет и содержание всех отраслей математики своего времени (арифметики, геометрии, оптики, математической астрономии). Он одним из первых в истории математики определяет предмет новой отрасли математики — алгебры. «Эта наука, — пишет ученый, — является общей как для арифметики, так и для геометрии. Она содержит разнообразные искусные методы нахождения чисел...». Он одним из первых устанавливает однозначное соответствие между геометрическими величинами и числами и при этом вводит особый термин «узм» для количественной (числовой) характеристики величины. Это начинание в дальнейшем получило развитие и сыграло большую роль в создании математики переменных величин.

---

*) Аль-Фараби. Математические трактаты. Алма-Ата, 1972.

Вопреки сложившейся традиции аль-Фараби включает прикладную математику, как он ее называет — «науку об искусных приемах», в число основных математических разделов.

Большая заслуга принадлежит аль-Фараби в развитии геометрии, особенно конструктивной геометрии. В трактате о геометрических построениях он впервые в истории математики в систематической форме излагает методы решения многочисленных задач конструктивной геометрии, особо важные задачи на построение с помощью циркуля постоянного раствора.

Приведем одно из двух построений параболы по точкам, по-видимому, впервые предложенное аль-Фараби. Параболу он называет «лекалом зажигательного зеркала». Он пишет: «Если мы хотим построить (зажигательное) зеркало, то сначала построим лекало, определяющее зеркало. Для этого проведем круг, полурадиус которого равен величине расстояния, на котором мы хотим зажечь предмет. (Центр круга—точка E, см. рис. 1.) Проведем его диаметр AB. Отложим на линии BE от точки B несколько равных отрезков. Чем эти отрезки меньше, тем будет лучше и точнее лекало. Пусть это отрезки BC, CD и DE. Проведем через точки C, D и E линии под прямым углом (к BE) и продолжим их в обе стороны до точек K, L и M. Соединим B и K, B и L, B и M. Построим линию CN равную линии BK, линию DO, равную линии BL, линию EP, равную линии BM. Соединим точки B, N, O и P, и выполним лекало по этой линии». (Докажите правильность построения!)

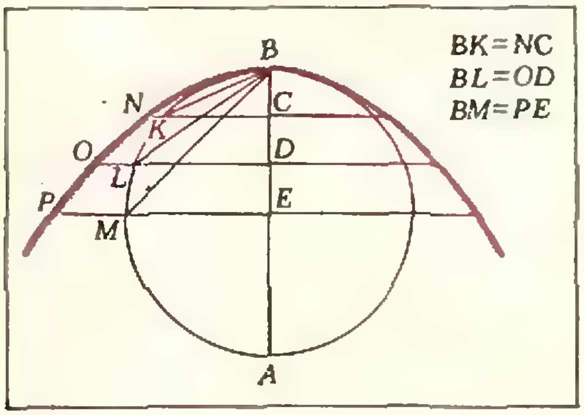


Рис. 1.

Большой интерес для истории математики представляют исследования аль-Фараби по тригонометрии. Наиболее важным является введение им линий тангенса и котангенса в тригонометрическом круге: раньше эти функции определялись только как тени гномона (шеста). Он определяет тангенс и котангенс как отрезки касательных к окружности. Аль-Фараби впервые формулирует теорему синусов для произвольного треугольника.

По аль-Фараби «синус есть половина хорды удвоенной дуги». Он добавляет к известным до него соотношениям между тригонометрическими функциями новые соотношения, в том числе

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}.$$

В «Книге приложений к «Альмагесту»*) он одним из первых доказал теорему синусов для прямоугольного сферического треугольника. Аль-Фараби широко применяет тригонометрию для решения разнообразных задач математической астрономии.

У аль-Фараби мы встречаем интересные высказывания о *вероятностных понятиях*. В «*Трактате о том, что* правильно и что неправильно в приговорах звезд» он дает оценку возможности более и менее вероятных событий, приводит классификацию возможностей: «невозможное», «редко возможное», «равновероятное», «возможное в большинстве случаев», «достоверное». Аль-Фараби призывает исследовать явления, «возможные в большинстве случаев», считая, что «опыт полезен в отношении явлений, возможных в большинстве случаев».

---

*) «Альмагест» — сочинение Птолемея, величайшего астронома античного мира.

В «Большой книге музыки» и в его обработках «Альмагеста» широко рассматривались функциональные зависимости, комбинаторные задачи, инфинитезимальные идеи и другие вопросы математического содержания. Большой интерес представляют функциональные зависимости, рассмотренные аль-Фараби в связи с созданием теории музыки. Аль-Фараби, например, находит количественные соотношения между высотой звука (y) в трубе духового инструмента и другими физическими величинами в виде следующей функциональной зависимости:

$$y = \frac{k\sigma Fh}{Dd},$$

где k — коэффициент пропорциональности, D — диаметр трубы, h — расстояние отверстия от мундштука, d — диаметр отверстия, σ — характеристика гладкости, F — сила вдувания источника. Все эти соотношения выражаются словесно.

Труды аль-Фараби по математике оказали большое влияние на математическое творчество Абу-л-Вафы (940—998), Ибн Сины (980—1037), аль-Бируни (973—1050), Омара Хайяма (1048—1131), Наср ад-Дина ат-Туси (1201—1274), Роджера Бэкона (1214—1294), Леонардо да Винчи (1452—1519) и других.

Задачи наших читателей

1. Доказать, что если $a_1a_2\ldots a_n = p^n$ (p, n — целые), то справедливо неравенство

$$(a_1^2+1)(a_2^2+1)\ldots(a_n^2+1) \geqslant (p^2+1)^n.$$

С. Т. Берколайко

2. Найти возможно более простую формулу общего члена последовательности

$$1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, \ldots$$

Можно ли ее записать, используя лишь функции $y = \sqrt{x}$, $y = [x]$ и арифметические операции?

А. М. Асташов

3. Легко проверить следующие равенства:

$$\sqrt{49} = 4 + \sqrt{9},$$
$$\sqrt{64} = 6 + \sqrt{4},$$
$$\sqrt{81} = 8 + \sqrt{1},$$
$$\sqrt{100} = 10 + \sqrt{0}.$$

Этот ряд можно продолжить следующим образом:

$$\sqrt{121} = 12 - \sqrt{1},$$
$$\sqrt{144} = 14 - \sqrt{4}.$$

Можете ли вы вывести общую формулу, объясняющую эти равенства?

С. Р. Гусейнов

4. Существует ли треугольник, у которого биссектриса делится точкой пересечения биссектрис пополам?

5. Доказать, что точка пересечения биссектрис треугольника делит каждую из них (считая от основания) в отношении, равном отношению основания треугольника к сумме двух других его сторон.

И. А. Страшкевич

Л. Г. Асламазов

Почему звучит скрипка

При движении тела в какой-либо среде возникают силы сопротивления движению, стремящиеся замедлить его. Механическому движению одного твердого тела по поверхности другого препятствуют силы сухого трения; в жидкости или газе появляются вязкое трение и аэродинамическое сопротивление и. т. п.

Взаимодействие тела со средой — довольно сложный процесс, приводящий обычно к тому, что энергия тела со временем переходит в тепло, или, как говорят физики, происходит диссипация энергии. Однако сопротивление среды может играть и обратную роль — увеличивать энергию тела. При этом, как правило, возникают колебания. Например, сила сухого трения между полозьями саней и снегом тормозит движение саней, и эта же сила, действующая между смычком и струной, вызывает колебания струны. Как вы увидите дальше, причиной возникновения колебаний является падающая зависимость силы трения от скорости движения. Колебания возникают тогда, когда сила трения уменьшается при увеличении скорости.

Аналогичные явления происходят не только в механических, но и в электрических системах, в которых колебания возбуждаются при падающей зависимости напряжения от силы тока.

Рассмотрим сначала процесс возникновения механических колебаний.

Колебания струны

Звучание скрипки вызывается движением смычка. Невозможно, конечно, объяснить здесь все сложные явления, связанные с особенностями звучания скрипки. Однако попробуем разобраться, почему возникают колебания скрипичной струны, когда по ней ведут смычком.

Силы трения между смычком и струной — это силы сухого трения. Можно говорить о силах трения покоя и о силах трения скольжения. Первая сила возникает между соприкасающимися, но неподвижными друг относительно друга телами, вторая — при скольжении одного тела по поверхности другого.

Сила трения покоя, как известно, может принимать любые значения (в зависимости от внешней силы) от нуля до максимальной силы трения покоя $F^0_{\text{тр}}$, при этом она всегда равна по величине и противоположна по направлению внешней силе.

Сила трения скольжения зависит от материала тел и от состояния трущихся поверхностей, а также от относительной скорости этих тел. О последнем мы и будем говорить более подробно. Характер зависимости от скорости для разных тел различен; нередко при увеличении скорости скольжения вначале происходит уменьшение силы трения скольжения, а затем она начинает возрастать. График зависимости абсолютной величи-

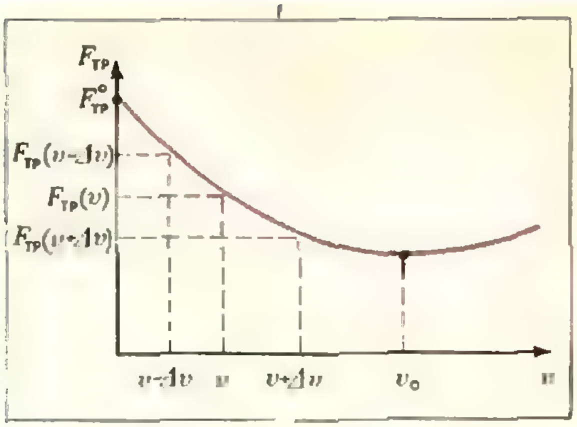


Рис. 1.

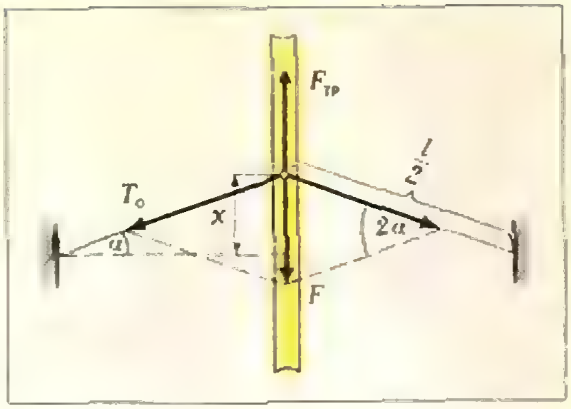


Рис. 2.

ны силы сухого трения от скорости в этом случае показан на рисунке 1. В скрипке силы трения между смычком и струной как раз и имеют такой характер. Вертикальный участок при $v=0$ соответствует силам трения покоя. Если относительная скорость струны и смычка v соответствует падающему участку $0<v<v_0$, то увеличению относительной скорости на некоторую малую величину Δv соответствует уменьшение силы трения, и наоборот, при уменьшении скорости соответствующее изменение силы трения положительно (см. рис. 1). Как вы сейчас увидите, именно благодаря этой особенности может увеличиваться энергия струны за счет работы сил сухого трения.

При движении смычка струна отклоняется вместе с ним. При этом сила трения покоя уравновешивается силами натяжения струны (рис. 2). Равнодействующая F сил натяжения пропорциональна отклонению струны x от положения равновесия:

$$F=2T_0\sin\alpha=\frac{4T_0}{l}x,$$

где l — длина струны, а T_0 — сила натяжения струны, которую при малых отклонениях можно считать постоянной. Поэтому при движении струны вместе со смычком сила F будет расти, и в тот момент, когда она станет равной максимальной силе трения покоя $F^0_{тр}$, начнется проскальзывание.

Будем пока для простоты считать, что в момент начала скольжения изменение силы трения происходит скачком: она уменьшается от максимальной величины силы трения покоя до небольшой силы трения скольжения. Иными словами, после начала скольжения движение струны можно считать почти свободным.

В момент срыва скорость струны равнялась скорости смычка, и вначале струна будет продолжать двигаться в сторону движения смычка. Но теперь равнодействующая сил натяжения ничем не скомпенсирована, поэтому она будет тормозить движение струны, замедляя его. В какой-то момент скорость струны упадет до нуля, затем струна начнет двигаться в противоположную сторону, и после максимального отклонения от положения равновесия она опять будет двигаться в сторону движения смычка. А смычок продолжает двигаться равномерно со скоростью u. В некоторый момент скорости струны и смычка сравняются. При этом между струной и смычком проскальзывания уже нет, и появляется сила трения покоя, равная равнодействующей сил натяжения.

При дальнейшем движении струны до положения равновесия силы натяжения уменьшаются и, соответственно, уменьшается сила трения покоя. После прохождения струной положения равновесия процесс повторяется.

Соответствующий график зависимости отклонения струны от времени показан на рисунке 3, *а*. Движение струны периодическое, причем в каждом периоде имеется два разных участка. Например, на участке $0<t<t_1$ струна движется вместе со смычком с постоянной скоростью u, так что отклонение x линейно зависит от времени ($\operatorname{tg}\alpha = u$). В момент t_1 происходит срыв, и при $t_1<t<t_2$ изменение x со временем происходит по синусоидальному закону. В момент t_2, когда касательная к синусоиде имеет тот же наклон, что и начальный прямолинейный участок (условие равенства скоростей), струна вновь захватывается смычком.

Рисунок 3, *а* соответствует идеальному случаю, когда сила трения скольжения отсутствует и поэтому нет потерь энергии при свободном ходе струны. Полная работа силы трения покоя на линейных участках за период при этом также равна нулю, так как при отрицательных x совершается отрицательная работа (сила трения направлена против движения), а при $x>0$ совершается такая же по величине, но положительная работа.

Что же происходит в случае, когда сила трения скольжения отлична от нуля? Трение скольжения приводит к потерям энергии. Движение струны при проскальзывании теперь описывается графиком, показанным на рисунке 3, *б*. При отрицательных отклонениях эта кривая более пологая, чем при положительных. Поэтому зацепление струны смычком происходит при меньшем по величине отрицательном отклонении x_2, чем *положительное отклонение* x_1, соответствующее срыву. В результате сила трения покоя во время сцепления струны со смычком совершает за период положительную работу

$$A = \frac{k\left(x_1^2 - x_2^2\right)}{2},$$

где $k = \frac{4T_0}{l}$ — коэффициент пропорциональности между величиной силы трения покоя и отклонением струны.

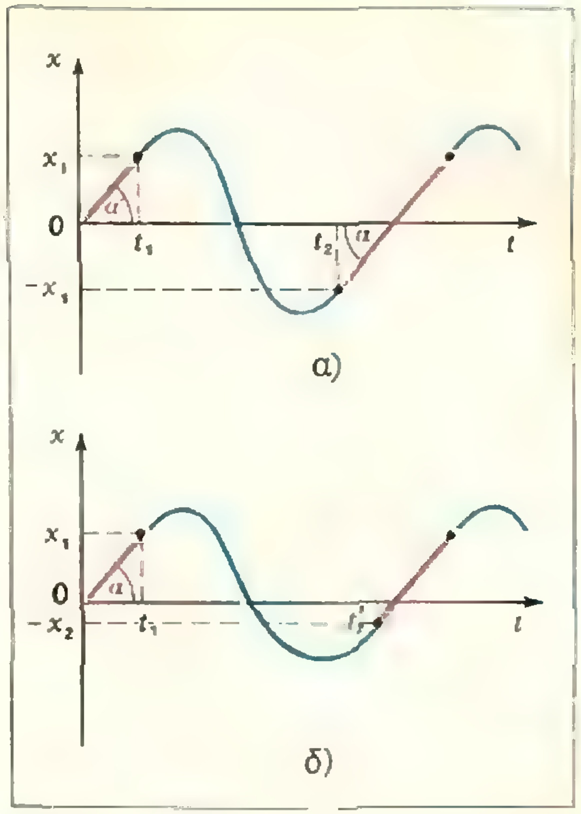


Рис. 3.

Эта работа как раз и компенсирует потери энергии за счет сил трения скольжения. Колебания струны являются незатухающими.

Энергетический баланс

Вообще говоря, для пополнения энергии струны за счет сил трения не обязательно, чтобы происходило сцепление струны со смычком. Достаточно, чтобы относительная скорость смычка и струны при колебаниях струны находилась в пределах падающего участка зависимости силы трения скольжения от скорости. Рассмотрим более подробно явление возбуждения колебаний струны в этом случае.

Пусть смычок опять движется с некоторой постоянной скоростью u, а струна отклонена от положения равновесия на x_0 так, чтобы равнодействующая $F(x_0)$ сил упругости уравновешивала силу трения скольжения $F_{тр}(u)$. Если струна случайно отклонится в сторону движения смычка, то относительная скорость уменьшится. В результате сила трения возрастет (относительная скорость соответствует падающему участку!), и струна отклонится еще больше. При дальнейшем отклонении упругая сила в какой-то момент обязательно превысит силу трения (упругая сила пропорциональна величине отклонения, а сила трения скольжения не может превзойти максимального значения силы трения покоя), и струна начнет двигаться в обратную сторону. Она пройдет положение равновесия, снова отклонится, остановится и т. д. Таким образом возбудятся колебания струны.

Важно, что эти колебания будут незатухающими. В самом деле, при движении струны со скоростью Δv в сторону смычка сила трения совершает положительную работу, а при обратном движении — отрицательную. Но относительная скорость $v_1 = u - \Delta v$ в первом случае меньше, чем скорость $u_2 = u + \Delta v$ во втором случае, а следовательно, сила трения $F_{тр}(u - \Delta v)$, наоборот, больше, чем $F_{тр}(u + \Delta v)$. Таким образом, положительная работа сил трения при движении струны в сторону смычка больше, чем отрицательная работа при ее возвратном движении, и в целом силы трения совершают положительную работу. Амплитуда колебаний будет увеличиваться. Однако лишь до определенного предела. При $v > v_0$ (см. рис. 1) скорость выходит за пределы падающего участка, и тогда отрицательная работа силы трения уже может стать больше, чем положительная. Энергия, а значит, и амплитуда колебаний будут уменьшаться.

В результате установится такая амплитуда колебаний, при которой полная работа сил трения равна нулю (говоря точнее, эта работа компенсирует потери энергии вследствие сопротивления воздуха, неупругого характера деформаций и т. п.). С этой постоянной амплитудой и будут происходить незатухающие колебания струны.

Возбуждение звуковых колебаний при движении одного твердого тела по поверхности другого происходит очень часто. Сухое трение в дверной петле может вызвать скрип двери. Скрипят половицы, обувь. Скрип можно произвести просто пальцем, проведя им по какой-нибудь гладкой поверхности. Явления, происходящие при этом, во многом аналогичны возбуждению колебаний скрипичной струны. Вначале проскальзывания нет, и возникает упругая деформация. Затем происходит срыв, и возбуждаются колебания тела. Колебания не затухают, так как благодаря падающей характеристике сил сухого трения поставляется необходимая энергия за счет работы этих сил.

При изменении характера зависимости сил трения от скорости скрип исчезает. Известно, например, что для этого достаточно смазать трущиеся поверхности. Сила жидкого трения (при малых скоростях) пропорциональна скорости, и условий, необходимых для возбуждения колебаний, нет. Наоборот, когда хотят возбудить колебания, поверхности обрабатывают специальным образом, чтобы сделать уменьшение сил трения при увеличении скорости более резким. Смычок скрипки, например, для этого натирают канифолью.

Знание законов сил трения помогает решать важные практические задачи. При обработке металла на токарном станке иногда возникает вибрация резца. Эти колебания вызываются силами сухого трения между резцом и металлической стружкой, скользящей по его поверхности при обточке металла (рис. 4). Зависимость силы трения от скорости стружки (скорости обработки) для ряда высококачественных сталей оказывается падающей. Этим, как мы уже знаем, можно объяснить колебания резца.

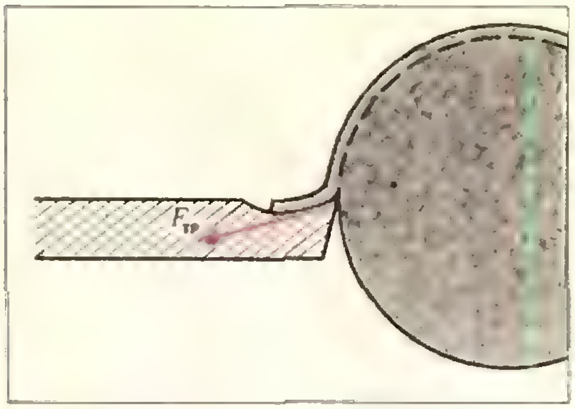


Рис. 4.

Для борьбы с вибрацией используется, например, специальная заточка резца, при которой нет скольжения стружки. Тем самым устраняется причина возникновения колебаний.

Отрицательное сопротивление

Теперь речь пойдет об аналогичных явлениях (возникновения колебаний) в электрических системах. Для описания электрической системы удобно пользоваться вольтамперной характеристикой, т. е. зависимостью напряжения в системе от силы тока. Например, для обычного сопротивления справедлив закон Ома: напряжение пропорционально току, и вольтамперная характеристика — прямая линия, проходящая через начало координат. Однако для многих систем (электронной лампы, газоразрядной трубки, транзистора и т. п.) зависимость напряжения от тока более сложная.

Оказывается, что в том случае, если вольтамперная характеристика является падающей, т. е. если при увеличении тока через систему напряжение на ней уменьшается, в системе могут возбуждаться электрические колебания. Такими свойствами обладают некоторые полупроводниковые устройства, неоновая лампа, электрическая дуга и т. д. У всех этих приборов вольтамперная характеристика имеет падающий участок, и это в определенных условиях приводит к возбуждению колебаний.

Попробуем разобраться в причинах возникновения электрических колебаний при падающей вольтамперной характеристике. Прежде всего проведем аналогию с механическими системами. При прохождении тока по проводнику электрические силы совершают работу, пропорциональную приложенному напряжению. Эта работа равна работе сил сопротивления движению зарядов. Поэтому можно сказать, что силы сопротивления пропорциональны напряжению. С другой стороны, скорость направленного движения зарядов связана прямой пропорциональной зависимостью с силой тока. Таким образом, падающая зависимость напряжения от силы тока соответствует падающей зависимости силы сопротивления от скорости, а это, как мы уже знаем, приводит к возбуждению колебаний.

Проведем теперь более подробный анализ условий возникновения электрических колебаний, используя такие же, как в механике, энергетические соображения. Пусть вольтамперная характеристика системы такая, как показано на рисунке 5. Зная ток, по этой характеристике можно найти напряжение, и наоборот. Пусть, например, в системе течет постоянный ток i_0; тогда напряжение равно U_0. Если по каким-либо причинам возникла также небольшая переменная составляющая тока, так что

$$i = i_0 + \Delta i_0 \sin \omega t,$$

то напряжение тоже станет переменным:

$$U = U_0 + \Delta U_0 \sin \omega t$$

(Δi_0 и ΔU_0 — амплитуды переменной составляющей тока и напряжения соответственно). Очевидно, что при падающей вольтамперной характеристике переменный ток и переменное напряжение колеблются в противо-

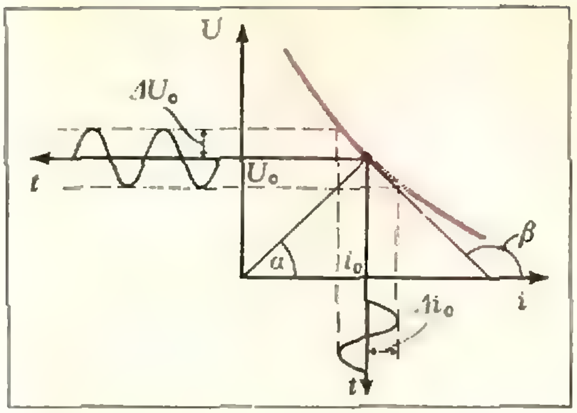


Рис. 5.

фазе (ток и напряжение одновременно проходят положение равновесия, но знаки тока и напряжения в одинаковые моменты всегда разные и, следовательно, сдвиг фаз $\varphi = \pi$).

Мощность переменного тока, как известно, определяется формулой

$$P = \frac{\Delta U_0 \Delta i_0}{2} \cos\varphi = \Delta U_д \Delta i_д \cos\varphi,$$

где $\Delta U_д$ и $\Delta i_д$ — действующие значения напряжения и тока, φ — сдвиг фаз между напряжением и током. В нашем случае $\cos\varphi = -1$ и, следовательно, $P < 0$. Этот результат имеет простой физический смысл. Он означает, что переменный ток не расходует, а наоборот, увеличивает свою энергию (так же, как увеличивалась при колебаниях энергия струны за счет падающей зависимости сил сопротивления от скорости). Эта энергия, очевидно, черпается из энергии постоянного тока, мощность которого $P_0 = U_0 i_0$ всегда положительна. Таким образом, при падающей вольтамперной характеристике энергия переменного тока со временем будет увеличиваться, и амплитуда колебаний будет нарастать.

Для количественного рассмотрения этого вопроса вводят понятие отрицательного электрического сопротивления, которым обладают системы с падающими вольтамперными характеристиками. Впрочем, понятие сопротивления при нелинейной зависимости напряжения от тока требует некоторого уточнения. Поговорим об этом более подробно.

Если через систему при постоянном напряжении U_0 течет постоянный ток i_0, то сопротивление определяется по формуле

$$R = U_0/i_0$$

и называется статическим сопротивлением, или сопротивлением постоянному току. Как видно из рисунка 5, эта величина равна тангенсу угла наклона прямой, проведенной из начала координат в точку вольтамперной характеристики, соответствующую току i_0 и напряжению U_0:

$$R = \operatorname{tg}\alpha.$$

Эта величина, вообще говоря, зависит от силы тока i_0. Если у системы характеристика линейная, то R совпадает с обычным сопротивлением проводника и не зависит от тока.

В случае переменного тока вводится понятие дифференциального сопротивления, или сопротивления переменному току r. Оно определяется тангенсом угла наклона касательной к вольтамперной характеристике (см. рис. 5): $r = \operatorname{tg}\beta$ и по абсолютной величине равно отношению амплитуд переменного напряжения и тока: $|r| = \Delta U_0/\Delta i_0$. Для обычного проводника $r = R$, однако в общем случае нелинейной вольтамперной характеристики сопротивления постоянному и переменному току разные.

Если вольтамперная характеристика имеет падающий участок, то на этом участке касательная к кривой составляет тупой угол с осью токов (угол β на рисунке 5), тангенс этого угла отрицателен и, следовательно, отрицательна величина r. Таким образом, системы с падающей вольтамперной характеристикой обладают отрицательным дифференциальным сопротивлением.

Мощность переменного тока $P = (\Delta i_д)^2 r = (\Delta U_д)^2/r$ на отрицательном сопротивлении r — отрицательная. Это опять отражает тот факт, что энергия переменного тока при

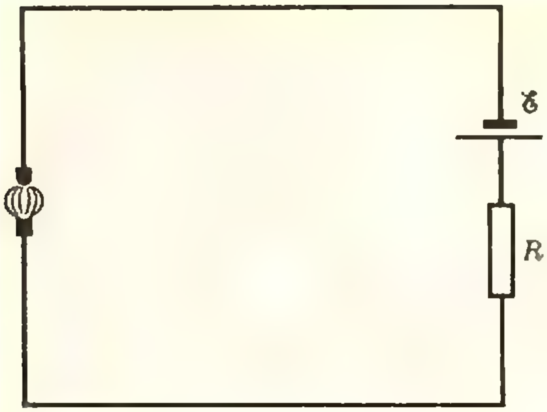


Рис. 6, *а*.

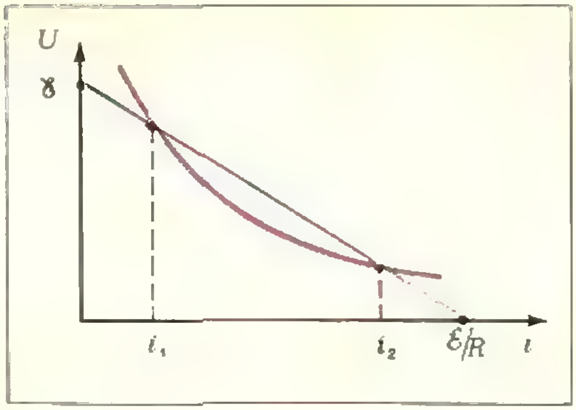


Рис. 6, *б*.

падающей вольтамперной характеристике увеличивается со временем.

Используя понятие отрицательного сопротивления, исследуем, например, устойчивость электрической дуги (рис. 6, *а*), включенной последовательно с обычным сопротивлением R и источником постоянной э. д. с. $\mathscr{E}$ (будем считать, что внутреннее сопротивление источника тока включено в сопротивление R). Эта задача имеет практическое значение, так как при использовании дуги для сварки или в качестве источника света она должна гореть устойчиво, без колебаний тока.

Прежде всего найдем, какой постоянный ток может течь в такой цепи. По закону Ома для всей цепи сумма падений напряжения равна электродвижущей силе:

$$U(i) + iR = \mathscr{E}.$$

Перенеся слагаемое iR в правую часть, получим, что напряжение на дуге $U(i)$ равно $\mathscr{E} - iR$. С другой стороны, $U(i)$ определяется вольтамперной характеристикой. Поэтому возможные токи можно найти графически как точки пересечения вольтамперной характеристики и зависимости $\mathscr{E} - iR$, причем последняя, очевидно, изображается прямой с отрицательным наклоном (рис. 6, *б*).

Как видно, в принципе, имеются два пересечения и, соответственно, в цепи возможны два значения тока i_1 и i_2. Оба ли тока устойчивы?

При возникновении переменного тока его амплитуды на дуге и на сопротивлении R одинаковы (они включены последовательно). Поэтому, сравнивая генерируемую на отрицательном сопротивлении дуги энергию $(\Delta i_д)^2 r$ и потери энергии на обычном сопротивлении $(\Delta i_д)^2 R$, мы видим, что условием нарастания колебаний будет $|r| > R$. Обратимся теперь опять к рисунку 6, *б*. Легко видеть, что при токе i_1 дуга имеет большее по абсолютной величине отрицательное сопротивление, чем R (наклон касательной больше, чем у прямой), и условие возникновения колебаний выполнено. При токе i_2, наоборот, $R > |r|$, и колебания не могут возникнуть. Таким образом, можно сказать, что дуга будет гореть устойчиво при положительном полном сопротивлении цепи.

Если дугу включить в колебательный контур, то в нем могут возникнуть *незатухающие колебания*. Для этого необходимо, чтобы полное сопротивление контура (сумма обычного сопротивления контура и отрицательного сопротивления дуги) было бы отрицательным. Однако для получения незатухающих электромагнитных колебаний сейчас используют не вольтову дугу, а более надежные электрические системы с отрицательным сопротивлением. Сюда относится, например, ламповый генератор (в котором отрицательное сопротивление создается за счет обратной связи между сеткой и анодом лампы),

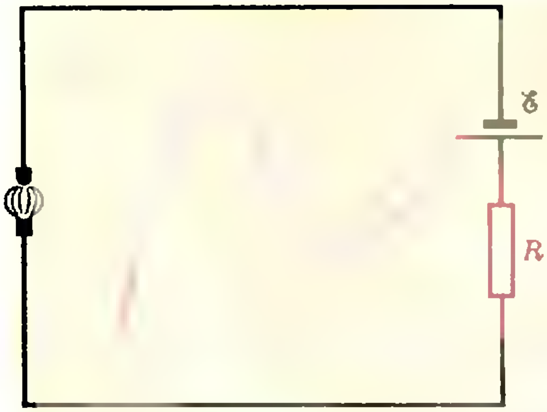


Рис. 6, *а*.

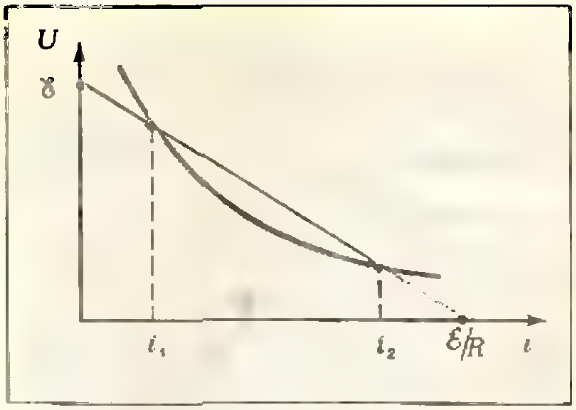


Рис. 6, *б*.

падающей вольтамперной характеристике увеличивается со временем.

Используя понятие отрицательного сопротивления, исследуем, например, устойчивость электрической дуги (рис. 6, *а*), включенной последовательно с обычным сопротивлением R ■ источником постоянной э. д. с. $\mathcal{E}$ (будем считать, что внутреннее сопротивление источника тока включено ■ сопротивление R). Эта задача имеет практическое значение, так как при использовании дуги для сварки или ■ качестве источника света она должна гореть устойчиво, без колебаний тока.

Прежде всего найдем, какой постоянный ток может течь ■ такой цепи. По закону Ома для всей цепи сумма падений напряжения равна электродвижущей силе:

$$U(i) + iR = \mathcal{E}.$$

Перенеся слагаемое iR ■ правую часть, получим, что напряжение на дуге $U(i)$ равно $\mathcal{E} - iR$. С другой стороны, $U(i)$ определяется вольтамперной характеристикой. Поэтому возможные токи можно найти графически как точки пересечения вольтамперной характеристики ■ зависимости $\mathcal{E} - iR$, причем последняя, очевидно, изображается прямой с отрицательным наклоном (рис. 6, *б*).

Как видно, ■ принципе, имеются два пересечения и, соответственно, ■ цепи возможны два значения тока i_1 ■ i_2. Оба ли тока устойчивы?

При возникновении переменного тока его амплитуды на дуге и на сопротивлении R одинаковы (они включены последовательно). Поэтому, сравнивая генерируемую на отрицательном сопротивлении дуги энергию $(\Delta i_д)^2 r$ и потери энергии на обычном сопротивлении $(\Delta i_д)^2 R$, мы видим, что условием нарастания колебаний будет $|r| > R$. Обратимся теперь опять ■ рисунку 6, *б*. Легко видеть, что при токе i_1 дуга имеет большее по абсолютной величине отрицательное сопротивление, чем R (наклон касательной больше, чем у прямой), и условие возникновения колебаний выполнено. При токе i_2, наоборот, $R > |r|$, и колебания не могут возникнуть. Таким образом, можно сказать, что дуга будет гореть устойчиво при положительном полном сопротивлении цепи.

Если дугу включить ■ колебательный контур, то ■ нем могут возникнуть *незатухающие колебания*. Для этого необходимо, чтобы полное сопротивление контура (сумма обычного сопротивления контура ■ отрицательного сопротивления дуги) было бы отрицательным. Однако для получения незатухающих электромагнитных колебаний сейчас используют не вольтову дугу, а более надежные электрические системы с отрицательным сопротивлением. Сюда относится, например, ламповый генератор (в котором отрицательное сопротивление создается за счет обратной связи между сеткой и анодом лампы),

Физика и линейные неравенства

З. Я. Тьмеладзе

Механика

Пушки революции грохотали на улицах Парижа. Картечь гвардейцев взрябила штукатурку у самой баррикады.

— Ты ранен, Этьен?

— Пустяки, царапина. Королевские гвардейцы стреляют из того особняка с колоннами. Если мы их не выбьем оттуда, нам не продержаться до прихода отряда печатников.

— А наша пушка их не достанет?

— Нет, мало толку от этой махины. Вот если бы ее удалось вкатить на ту площадку! Эй, Жан-Батист... Ох, это уже серьезнее,— простонал Этьен, схватившись за грудь.

— Что с вами, мосье?

— Гражданин Этьен, а не мосье! Ты уже не в монастыре бенедиктинцев, мальчик, а в революционной армии. Пока меня перевязывают, вкати с ребятами пушку вон на ту площадку.

— Слушаюсь, гражданин Этьен!

— Постойте,— вмешался Пьер.— А выдержит ли площадка? Если она рухнет, мы лишимся единственной пушки.

— Это наш последний шанс,— прошептал Этьен, теряя сознание.

— Что ты там рисуешь, Жан-Батист? Снова геометрия? Берись лучше за ружье, а пушкой нам нельзя рисковать!

— Гражданин Пьер! Пользуясь затишьем, я готов доказать вам, что никакого риска нет. Пушку можно вкатывать.

— Ну, попробуй! Я ведь пришел на баррикады из университета, из этого болота, где процветают бездарности. Клянусь не возвращаться туда, пока профессорам не запретят читать лекции по шпаргалкам. Итак?

— Площадка имеет форму квадрата со стороной в 4 метра, она опирается на четыре столба (см. рис. 1). Каждый столб выдерживает одну тонну, а пушка вместе с расчетом и ядрами весит 2,5 тонны. Сама площадка надежна, могут сломаться только столбы, не так ли, гражданин Пьер?

— Допустим; но учти, столбы вместе выдержат 4 тонны только в том случае, если положить груз в центр площадки. А пушку нам придется сдвинуть, так что ее центр тяжести будет в точке M — иначе не прострелять особняк.

— Давайте теперь определим, какую максимальную силу можно при-

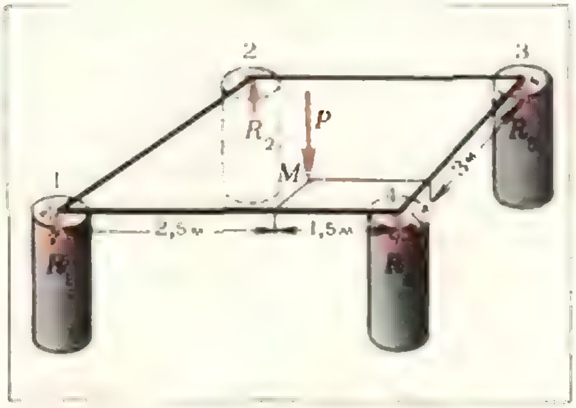


Рис. 1.

ложить в точке M. Если эта сила больше веса пушки — то все в порядке, и мы заставим гвардейцев дорого заплатить за смерть Этьена. Обозначим усилия в столбах, на которые опирается площадка, через R_1, R_2, R_3 и R_4 и потребуем, чтобы было

$$\begin{cases} R_1 \leqslant 1, \\ R_2 \leqslant 1, \\ R_3 \leqslant 1, \\ R_4 \leqslant 1. \end{cases} \qquad (1)$$

Положительные значения усилий указывают на сжатие в столбах, отрицательные — на растяжение.

— Так-то оно так, но что из этого? Ведь это неравенства, а не уравнения, что о них можно сказать? Не помню, чтобы о них писали что-либо славные граждане Лагранж и Даламбер.

— И я не помню, хотя и изучал их труды. Но продолжим рассуждения. Силы R_1, R_2, R_3 и R_4 не могут быть любыми, они должны удовлетворять условиям равновесия. Два из них получатся, если приравнять нулю моменты от всех сил, действующих на площадку, относительно линий *1—4* и *1—2*. Учитывая, что момент — это произведение силы на плечо, получаем два уравнения:

$$4R_2 + 4R_3 - P = 0, \qquad (2)$$

$$4R_3 + 4R_4 - 2{,}5P = 0. \qquad (3)$$

Третье уравнение равновесия нужно получить из равенства нулю суммы всех сил, действующих на площадку — иначе эта площадка упала бы вниз или вознеслась на небо.

— Подобно тому ловкачу, которого так чтят церковники[1] — вставил Пьер.

— Отсюда получаем уравнение

$$R_1 + R_2 + R_3 + R_4 = P, \qquad (4)$$

— записал Жан-Батист, покраснев скорее из-за богохульственной остроты вольнодумца, чем из-за пули, просвистевшей у его уха. Из трех уравнений (2), (3) и (4) четыре неизвестных R_1, R_2, R_3, R_4, конечно, не определить. Но можно добавить такое условие: сила P должна быть максимальна. Запишем его так: $P \to \max$. Кроме того, у нас есть еще неравенства (1).

— Чудáя задача,— сморщил лоб гражданин Пьер.— Я не удивлюсь, если еще лет сто пятьдесят она не будет иметь названия. Не говорю уж о гражданах Даламбере и Лагранже, у которых ее почему-то...

— Оставим в стороне пророчества и тени великих и решим эту несложную задачу,— продолжал Жан-Батист.— Для этого выразим из уравнений (2) и (3) R_3 и R_4:

$$R_3 = \frac{1}{4}P - R_2,$$

$$R_4 = \frac{1}{4}\left(\frac{5}{2}P - 4R_3\right) = \frac{3}{8}P + R_2 \qquad (5)$$

и подставим их значения в уравнение (4); получим:

$$R_1 + R_2 + \frac{1}{4}P - R_2 + \frac{3}{8}P + R_2 = P.$$

Отсюда можно найти P:

$$P = \frac{8}{3}(R_1 + R_2) \qquad (6)$$

и подставить в уравнения (5):

$$R_3 = \frac{2}{3}R_1 - \frac{1}{3}R_2, \quad R_4 = R_1 + 2R_2.$$

Теперь систему неравенств (1) можно переписать лишь для двух переменных R_1 и R_2 (остальные исключены с помощью трех уравнений):

$$\begin{cases} R_1 \leqslant 1, \\ R_2 \leqslant 1, \\ \frac{2}{3}R_1 - \frac{1}{3}R_2 \leqslant 1, \\ R_1 + 2R_2 \leqslant 1. \end{cases} \qquad (7)$$

— Хорошо, но нельзя ли поскорее? Огонь усиливается.

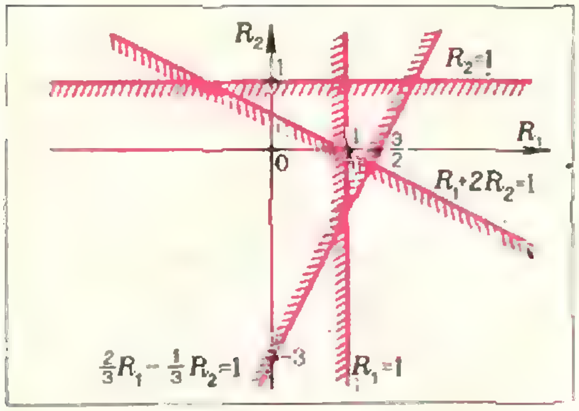


Рис. 2.

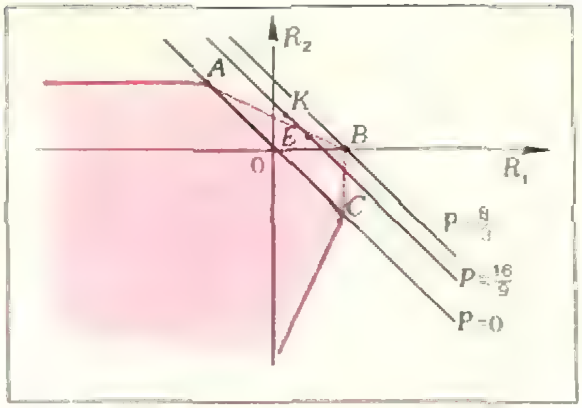


Рис. 3.

— *Осталось немного. Давайте изобразим* эти неравенства графически. Введем оси координат R_1 и R_2 (рис. 2).

Неравенство $R_1 \leqslant 1$ означает, что допустимые значения R_1 должны лежать не правее линии $R_1 = 1$, а $R_2 \leqslant 1$,— что не выше линии $R_2 = 1$ — обозначим это штриховкой. Полагая $R_1 = 0$, из третьего неравенства системы (7) находим $R_2 \geqslant -3$, а полагая $R_2 = 0$, получаем $R_1 \leqslant 3/2$. Проведя через точки с координатами $(0, -3)$ и $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ прямую и заштриховав ее сверху, получим графический образ третьего неравенства. Наконец, таким же способом изображаем и четвертое неравенство.

— Но, кажется, не все эти линии нужны.

— Верно! Самое существенное представлено на рисунке 3, где закрашена допустимая область значений сил R_1 и R_2. Точки внутри этой области, включая границу, удовлетворяют всем неравенствам. Но это еще не все. В допустимой области нужно найти такую точку, в которой P, определяемое равенством (6), принимает наибольшее значение. Для начала построим линию

$$P = \frac{8}{3}(R_1 + R_2) = 0.$$

Она проходит через начало координат, как показано на рисунке 3.

— *Но это нам мало что дает:* ясно, что нулевую силу площадка выдержит.

— Разумеется. Но почему выдержит? Потому, что линия $P = 0$ пересекает допустимую область.

— Постой! Мне не совсем понятно. На линии $P = \frac{16}{9}$ есть точки, которые лежат вне допустимой области, скажем, точка K. Если в столбах возникнет распределение усилий, отвечающее этой точке, то площадка рухнет и...

— Вы не правы. Хотя я и не умею этого доказать, но чувствую: если материал столбов пластичен, то *конструкция не разрушится при* $P = \frac{16}{9}$. В ней возникнет распределение усилий, выражаемое какой-то точкой E внутри допустимой области. Правда, неизвестно, какой именно точкой, но это уже неважно.

Рассмотрим теперь семейство линий $P = \frac{8}{3}(R_1 + R_2) = \text{const} > 0.$

Они параллельны линии $P = 0$ (ведь угловые коэффициенты у них одни и те же). Из этих линий нужно выбрать ту, которая дальше всего отстоит от линии $P = 0$, но при этом пересекает допустимую область. Это линия $P = \frac{8}{3}(1 + 0) = \frac{8}{3}$, проходящая через точку B с координатами $R_1 = 1$, $R_2 = 0$. Понятно?

— Честно говоря, не совсем. Давно не занимался математикой. Революция требует от меня, чтобы я чаще заглядывал в географические карты, чем в учебник геометрии.

— Отлично! Вспомним географию! Представьте себе, что ABC — это граница участка на местности, который равномерно повышается с юго-запада на северо-восток, а линии $P = \text{const}$ — это горизонтали на географической карте. Чем выше отметка местности, тем больше в ней значение P. Ясно, что самая высокая отметка будет в точке B, где $P = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$. Это больше, чем весит наша пушка $\left(2\frac{2}{3} > 2\frac{1}{2}\right)$. Значит, пушку площадка выдержит.

— Закатывайте, граждане, пушку! — закричал Пьер вместо ответа: натиск гвардейцев нарастал, и медлить дальше было нельзя.— Гражданин Жан-Батист Фурье! Именно ты должен быть профессором математики! Смерть тиранам!

И Жан-Батист Фурье стал профессором математики созданного в 1794 году нового учебного заведения — Нормальной школы! Бездарные конкуренты не смогли этому помешать: в том же году революционный Конвент действительно издал закон, запрещавший профессорам пользоваться во время лекций записками.

Рождение линейного программирования

Только на склоне лет, в 1823 году, признанный математик Жан-Батист Фурье (1768—1830), бывший друг Наполеона, бывший префект департамента Изер и создатель «Теории теплоты», выступил во Французской Академии с несколько странным по тем временам докладом о линейных неравенствах, в котором он рассказал постановку и указал путь решения описанной выше задачи. Но не была ли она ясна ему раньше, когда юношей он попал в революционный Париж? Ведь ничего особенно сложного в этой задаче нет — во всяком случае, теория рядов Фурье, принадлежащая тому же автору, куда сложнее.

Тем не менее название этой задачи — *линейное программирование* — родилось лишь в сороковых годах нашего века. Самые известные приложения линейного программирования связаны с экономикой *). Однако необходимость найти экстремум линейной функции при ограничениях в виде системы линейных уравнений и неравенств возникает в самых разнообразных задачах, в том числе и весьма далеких от экономики. Примером служит рассмотренная выше задача механики о действии сосредоточенной силы на квадратную пластинку — первое известное нам приложение линейного программирования.

В более общем виде задача линейного программирования формулируется так. *Имеется n неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Требуется найти такие их значения, которые удовлетворяют системе ограничений*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \leqslant a_1, \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n \leqslant a_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{r1}x_1 + \ldots + a_{rn}x_n \leqslant a_r, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n \leqslant a_m \end{cases}$$

и доставляют максимум функции

$$z = p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n,$$

носящей название «целевой». Коэффициенты $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{mn}$ и свободные члены $a_1, \ldots, a_m$ при этом считаются заданными.

---

*) См. статью: А. Б. Каток, Экономика и линейные неравенства, «Квант» 1971, № 3, 4.

Иногда вместо максимума целевой функции требуется найти ее минимум — это зависит от смысла задачи (в этом случае можно искать максимум функции $z_1 = -z$). Заметим, что экстремум функции z (минимум или максимум) всегда находится на границе допустимой области. Это обстоятельство использует самый распространенный метод решения задачи линейного программирования — симплекс-метод, которого мы здесь не касаемся.

А как же все-таки быть с физическим обоснованием задачи Фурье? Прав ли он был, считая, что сама природа помогает конструкции найти то, быть может, единственное распределение внутренних усилий, при котором конструкция способна выдержать внешнюю нагрузку? Да, для пластичного материала это так. Собственно, механики подозревали это обстоятельство еще до Фурье, но строгая теория была построена лишь в 1936 году советским ученым А. А. Гвоздевым. Согласно этой теории, конструкция как бы сама, повинуясь силам природы, решит вышеупомянутую задачу линейного программирования и найдет для себя наилучшее распределение внутренних усилий. Найдет, если оно существует,— при нагрузке в 3 тонны на упомянутую площадку безопасного распределения усилий в столбах уже не найдется, и площадка рухнет.

Электричество

Чтобы убедиться в применимости линейного программирования к электрическим сетям, перенесемся с улиц Парижа в современную школу. Изобретатели Витя и Коля собирают таинственное устройство (о назначении которого они просили не говорить) по схеме, представленной на рисунке 4.

Устройство состоит из двух источников ЭДС, трех сопротивлений и трех приборов, названия которых представляют профессиональную тайну изобретателей. Нам удалось только узнать, что прибор № 1 требует тока не менее чем 2 *а*, прибор № 2 — не менее 1 *а*, а на приборе № 3 напряжение должно быть не менее 1,5 *в*. Все было готово к началу эксперимента, когда выяснилось неожиданное затруднение: у Вити и Коли оказалось всего 5 батареек с ЭДС 1 *в* каждая. Попытки включать их наугад к успеху не приводили: приборы не срабатывали. Изобретатели зашли было в тупик, но тут Коля вспомнил о линейном программировании и начал рассуждать.

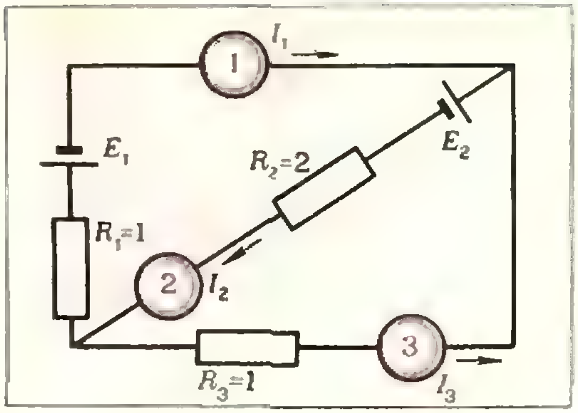


Рис. 4.

— Задачу можно сформулировать следующим образом. Требуется подобрать источники ЭДС, чтобы они обеспечивали заданные токи и напряжения в сети и сумма ЭДС была минимальной:

$$z = E_1 + E_2 \to \min. \qquad (8)$$

Формула (8) определяет целевую функцию задачи линейного программирования. Составим ограничения. Сумма токов в каждом узле сети должна быть равна нулю:

$$-I_1 + I_2 - I_3 = 0. \qquad (9)$$

Сеть состоит из двух контуров, вдоль каждого из которых суммарное падение напряжений должно равняться сумме ЭДС:

$$\begin{aligned} I_1 + 2I_2 &= E_1 + E_2, \\ 2I_2 + I_3 &= E_2. \end{aligned} \qquad (10)$$

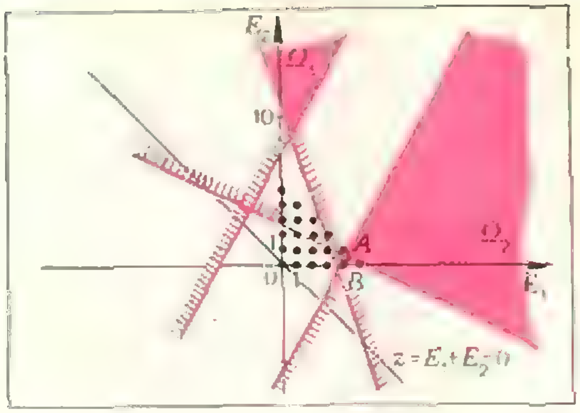


Рис. 5.

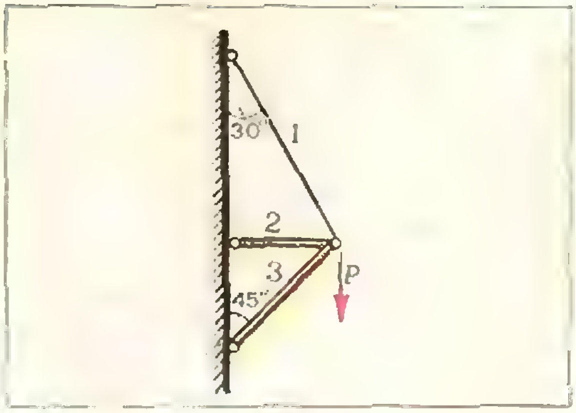


Рис. 6.

Наконец, особенности секретных приборов требуют, чтобы токи и напряжения в них подчинялись ограничениям

$$I_1\geqslant 2,\quad I_2\geqslant 1,\quad |U_3|\geqslant 1{,}5. \qquad (11)$$

Задача отыскания значений I_1, I_2, I_3, E_1, E_2, удовлетворяющих ограничениям (9)—(11) и доставляющих минимум целевой функции (8), есть задача линейного программирования. Выразив из уравнений (9) и (10) токи через ЭДС E_1 и E_2: $I_1=\frac{1}{5}(3E_1+E_2)$, $I_2=\frac{1}{5}(E_1+2E_2)$, $I_3=\frac{1}{5}(-2E_1+E_2)$, и подставив значения ЭДС в неравенства (11), получаем три ограничения:

$$\begin{cases} 3E_1+E_2\geqslant 10, \\ E_1+2E_2\geqslant 5, \\ |-2E_1+E_2|\geqslant 7{,}5. \end{cases}$$

— Не пойдет, — сказал Витя, который тоже был знаком с линейным программированием. — Здесь есть знаки модуля, что ты будешь с ними делать?

— Запишу третье ограничение в виде двух неравенств

$$E_2-2E_1\geqslant 7{,}5;\quad E_2-2E_1\leqslant -7{,}5,$$

— отпарировал Коля. — Теперь изобразим прямые, отвечающие всем неравенствам-ограничениям (см. рис. 5), и получим две допустимые области Ω_1 и Ω_2 (E_1 и E_2 положительны) и прямую, соответствующую целевой функции. Из рисунка видно, что оптимальное решение достигается *в точке* A, *в которой* $E_1=4$, $E_2=0{,}5$.

— Дробить батарейки нельзя, — запротестовал Витя, хозяин батареек. — Решение должно быть целочисленным. Давай округлим решение до целых: поставим вместо E_1 четыре батарейки, а вместо E_2 — одну.

— Не торопись и положи паяльник, — остановил его рассудительный Коля. — Ведь видно, что точка $E_1=4$, $E_2=1$ лежит вне допустимой области, третий прибор работать не будет.

Так наши друзья выяснили коварное свойство задачи линейного программирования: решения не всегда можно округлять до целых значений. Из-за этого пришлось специально разработать целочисленное линейное программирование, которое справляется с этой трудностью. К счастью, ребятам

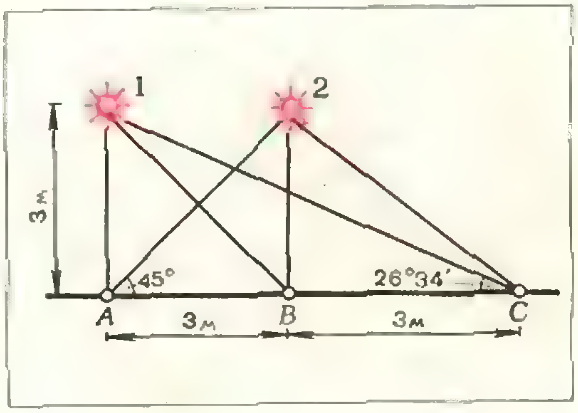


Рис. 7.

удалось получить решение. Все допустимые точки, изображающие разные варианты подключения пяти батареек, показаны на рисунке 5 черными точками. Лишь одна из них — точка B — лежит в допустимой области. Она и дает оптимальное целочисленное решение $E_1=5$, $E_2=0$, хотя значение целевой функции в точке B будет больше, чем в точке A.

Заметим, что задачи такого типа — на определение оптимальных параметров технических устройств (например, количества используемых батареек) — называются *задачами оптимального проектирования*, или *оптимального синтеза*. Они встречаются сейчас в самых различных областях техники.

Упражнения

1. Какой наибольший груз P может выдержать система (см. рис. 6), состоящая из троса *1*, выдерживающего растяжение в 1 *т*, и двух распорок *2* и *3*, каждая из которых выдерживает сжатие в 2 *т*, но не выдерживает никакого растяжения?

2. Измерение тока и падения напряжения на участке цепи дали следующие результаты:

Номер измерения	1	2	3
I	4	5	7
U	3	4	5

Каким следует принять сопротивление R, чтобы при рассмотренных значениях I закон Ома ($U=RI$) выполнялся с минимальной абсолютной погрешностью для U?

3. В цепь № 1 включены последовательно три сосуда с электролитами, соответственно содержащими $CuSO_4$, $CuCl_2$ и $NiCl_2$, а в цепь № 2 — три сосуда с электролитами, содержащими $CuCl_2$, $NiSO_4$ и $NiCl_2$. Через них пропускается ток в 100 *а*. Сколько времени должна работать каждая цепь, чтобы с наименьшими затратами электроэнергии получить 2000 *мг* меди и 3000 *мг* никеля, но при этом выделить не более 5000 *мг* хлора?

4. В точках 1 и 2 (рис. 7) нужно поместить два точечных источника света, освещающих горизонтальную площадку под ними. Какими должны быть силы источников I_1 и I_2 (в свечах), чтобы освещенность в точках B и C была не ниже 100 *лк*, в точке A — 200 *лк*, а общая сила источников была минимальной?

Задачи наших читателей

1. Найти трехзначное число, цифры которого образуют геометрическую прогрессию, такое, что если сложить его с числом, записанным теми же цифрами, но в обратном порядке, то в сумме получится простое число.

В. Н. Кибирев

2. Два кота утащили со склада 1975 сосисок, связанных в 99 цепочек. Принявшись за трапезу, коты по очереди стали перекусывать по одной перемычке между сосисками, и если при этом образовывались отдельные сосиски, то кот, перекусивший перемычку, тут же эти сосиски съедал.

Какой кот съест больше сосисок при правильной «стратегии» — начинающий трапезу или второй? Какова правильная стратегия?

А. А. Григорян

3. Определить, существует ли цифра m (если да, то чему она равна) такая, что при любом натуральном k число

$$\underbrace{99\ldots9}_{k}\, m\, \underbrace{00\ \ldots0}_{k}\, 4$$

— полный квадрат.

М. И. Левин

4. Доказать неравенства:

$$\frac{1}{2}<\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^2}+$$

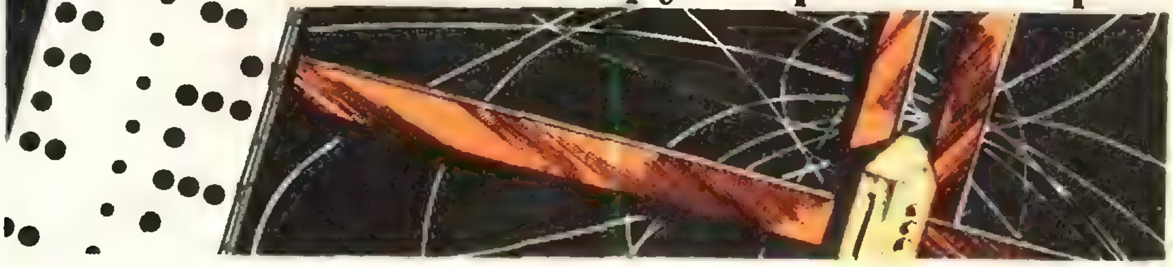
$$+\cdots\frac{1}{n^2}<\frac{2}{3}$$

(при $n\geqslant 8$).

С. Т. Берколайко

М. А. Маневич,
М. М. Слуцкин

ЭВМ в конструкторском бюро



В настоящее время в связи с появлением чертежных автоматов, управляемых электронными цифровыми вычислительными машинами, возникла реальная возможность автоматизации многих графических работ, проводимых в конструкторских бюро. К таким работам можно отнести построение проекционных чертежей машиностроительных деталей, разверток поверхностей, аксонометрических [объемных] изображений и т. д. Использование чертежных автоматов и ЭВМ оказывает неоценимую услугу инженерам-конструкторам, разрабатывающим чертежи поверхностей сложных технических форм.

Эпюр Монжа

Поясним сначала, как строится проекционный чертеж.

Выберем в пространстве прямоугольную декартову систему координат $Oxyz$ (рис. 1, *а*). Обозначим координатные плоскости xOy, xOz, yOz соответственно через H, V, W, и будем их называть *плоскостями проекций*. Опустим на них из произвольной точки A внутри первого октанта $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$ перпендикуляры Aa, Aa' и Aa'': a — горизонтальная, a' — фронтальная, a'' — профильная проекции точки A. Вращая плоскости H и W вокруг осей Ox и Oz, совместим их с плоскостью V. Тогда в одной плоскости V мы получим изображение пространственной системы координат $Oxyz$ и проекций точки A (рис. 1, *б*; в дальнейшем точки пространства мы будем обозначать прописными буквами, а их проекции — такими же строчными со штрихами). Аналогично строятся проекции фигур — множеств точек.

Анализируя рисунок 1, приходим к выводу, что точка A пространства вполне задана двумя своими проекциями, например, a и a'. Это

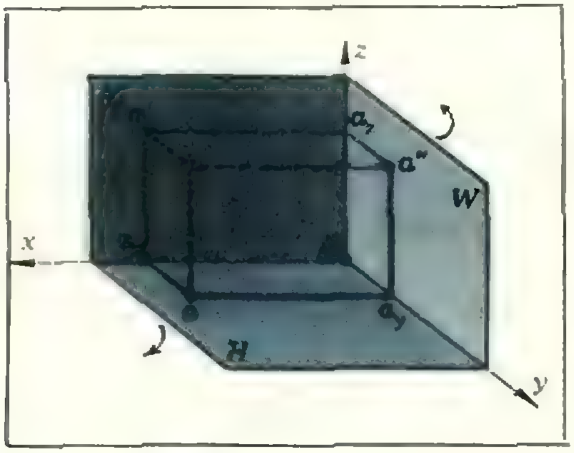


Рис. 1, *а*.

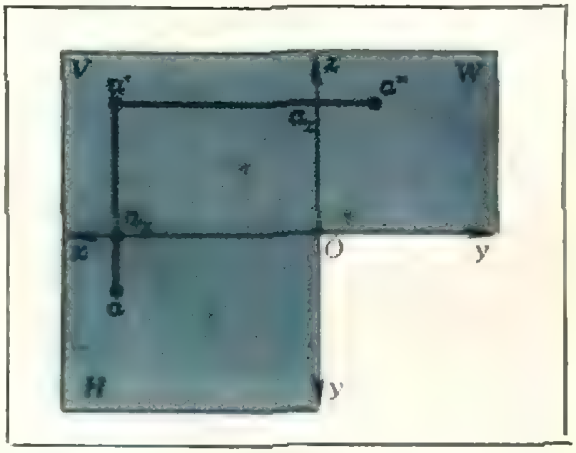


Рис. 1, *б*.

следует из того, что абсцисса ее $x = Oa_x$, ордината $y = a_x a$ и аппликата $z = a_x a'$ определяются из чертежа однозначно. Таким образом, для задания фигуры достаточно иметь две ее проекции.

Чертеж, полученный описанным методом, называют *проекционным чертежом, эпюром Монжа**) или *комплексным чертежом*.

Построение линии пересечения поверхностей

За кульманом стоит конструктор. Он чертит изображение какой-то детали. В некоторых местах поверхность детали имеет резкие переходы, уступы отверстия, выемки. Вот появились на чертеже изображения двух цилиндрических поверхностей, которые образовали как бы ступеньку в детали. Конструктор остановился. «В чем дело?» — спрашиваете вы. «Опять попалась линия пересечения, но не беда! Сейчас построю несколько точек, принадлежащих двум поверхностям, а потом проведу через них плавную кривую по лекалу», — говорит конструктор. И вот на чертеже стали появляться отдельные точки линии пересечения.

С точки зрения графических операций построение линии пересечения поверхностей сводится к нахождению отдельных ее точек. Для этого данные поверхности Φ_1 и Φ_2 (рис. 2) *рассекают третьей вспомогательной* поверхностью T (если пересекаются поверхности вращения, то в качестве вспомогательных поверхностей чаще всего используются сферы и плоскости), а затем определяют *линии пересечения* m и n вспомогательной поверхности T с двумя данными Φ_1 и Φ_2 и точку K пересечения построенных линий. Такой прием повторяют много раз, чтобы полученные точки можно было соединить плавной линией.

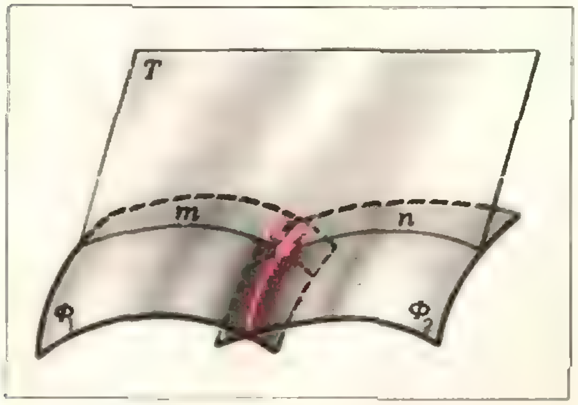


Рис. 2.

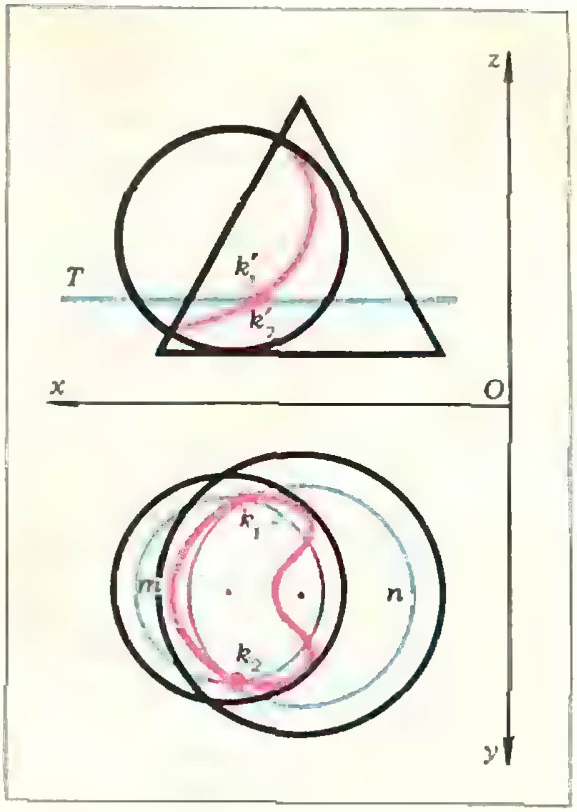


Рис. 3.

П р и м е р 1. *Построить линию пересечения сферы и прямого кругового конуса, заданных на проекционном чертеже* (рис. 3).

Выберем произвольную плоскость T, параллельную горизонтальной плоскости проекций. Эта плоскость рассекает сферу и конус по окружностям m и n соответственно, пересекающимся в точках K_1 и K_2. Построив эти окружности на горизонтальной плоскости проекций, получим точки

---

*) Гаспар Монж (1746—1818) — французский геометр.

k_1 и k_2, принадлежащие горизонтальной проекции линии пересечения (рис. 3). Фронтальные проекции k_1'' и k_2'' точек K_1 и K_2 будут в данном случае совпадать. Проделав это для ряда вспомогательных плоскостей, параллельных T, мы получим точки, общие для сферы и конуса, а соединив их плавными кривыми на каждой проекции, получим приближенные проекции линии пересечения. Чем больше точек будет построено, тем точнее получится кривая.

Но как бы мы ни старались, точность подобных построений ограничена, полученная линия пересечения далека от идеальной, а потраченное время значительно. Эти недостатки могут быть ликвидированы с помощью ЭВМ и чертежного автомата. Действительно, вычислительная машина производит миллионы действий за считанные секунды, а некоторые современные чертежные автоматы за одну секунду проводят отрезки прямых длиной более 300 *мм*.

При автоматизации процесса построения линии пересечения на чертеже выполняются следующие этапы.

1) *Записываются уравнения поверхностей, заданных на чертеже.*

2) *С помощью ЭВМ определяются координаты x, y, z отдельных точек линии пересечения* (с аналитической точки зрения определение линии пересечения сводится к решению системы уравнений).

3) *Координаты полученных точек подаются на чертежный автомат в виде специальных команд движения пера.*

Каждый этап является самостоятельной задачей, иногда нелегкой. Поясним их более подробно на примере 2, аналогичном примеру 1. Для простоты дальнейших рассуждений выберем систему координат так, чтобы ось Oz совместилась с осью конуса, а ось x проходила через центр сферы.

Пример 2. *Найти линию пересечения сферы радиуса* $r=50$, *центр которой имеет координаты* $x_0=30$, $y_0=0$, $z_0=0$ *в декартовой прямоугольной системе координат $Oxyz$, и прямого кругового конуса, вершина которого лежит на оси Oz в точке* $x_1=y_1=0$, $z_1=70$, *ось совпадает с осью Oz, а диаметр основания, касающегося сферы, равен* 120 (эти данные взяты из рисунка 4, масштаб на рисунке указан).

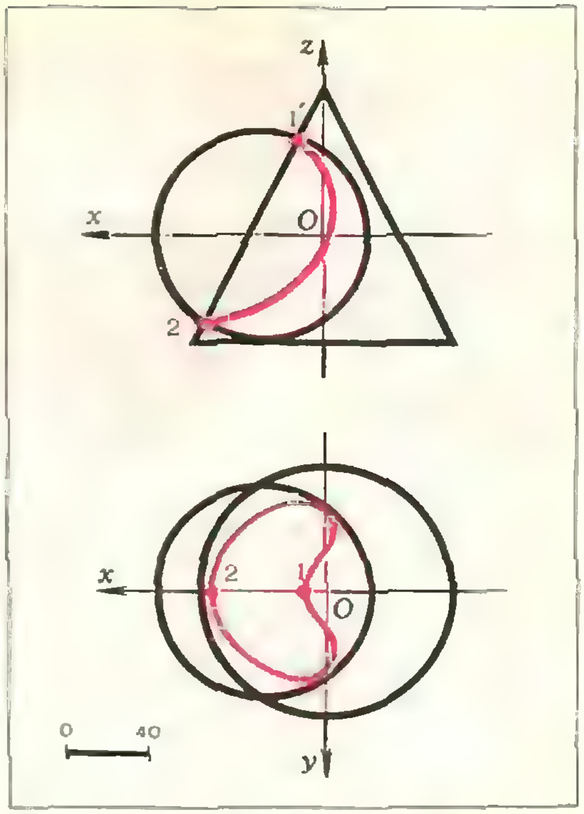


Рис. 4.

Первый этап. Рассмотрим сначала сферу с центром в начале координат и радиусом r (рис. 5). Возьмем на ее поверхности произвольную точку M. Пусть ее координаты x, y, z. Нетрудно доказать (с помощью теоремы Пифагора), что для точки M будет выполняться следующее равенство:

$$x^2+y^2+z^2=r^2.$$

Этому равенству удовлетворяют координаты любой точки, лежащей на поверхности сферы, и не удовлетворяют координаты точек, не лежащих на поверхности сферы. Это равенство и есть *уравнение сферы*.

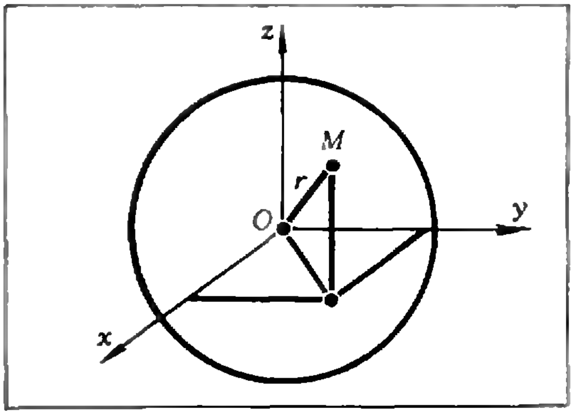


Рис. 5.

Уравнение сферы радиуса 50, центр которой сдвинут по оси Ox на 30 единиц влево (именно такая сфера задана в примере 2), будет

$$(x-30)^2+y^2+z^2=50^2.$$

Можно показать, что

$$x^2+y^2-\frac{1}{4}(z-70)^2=0$$

— уравнение прямого кругового конуса, заданного на рисунке 4. При фиксированом $z=z_0$ оно принимает вид $x^2+y^2=\frac{(z_0-70)^2}{4}$ и задает окружность — сечение конуса плоскостью $z=z_0$.

В данном примере мы быстро написали уравнения поверхностей в силу их простоты. Но, вообще говоря, уравнение поверхности, заданной на чертеже, надо выводить. В этом заключается задача первого этапа.

Итак, мы имеем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2+y^2-\frac{1}{4}(z-70)^2=0, \\ (x-30)^2+y^2+z^2=50^2. \end{cases}$$

Второй этап. Вычтем из первого уравнения полученной системы второе. После простых преобразований получим выражение

$$x=\frac{1}{48}z^2-\frac{7}{12}z-\frac{75}{12}, \qquad (*)$$

которое является уравнением фронтальной проекции линии пересечения конуса и сферы. Уравнение (*) задает параболу, часть ее и изображена на рисунке 4.

Рассматривая теперь горизонтальную проекцию, из системы получим:

$$x^2+y^2-\frac{1}{4}\left(\sqrt{50^2-(x-30)^2-y^2}-70\right)^2=0.$$

Вот какую линию описывает это уравнение, сразу и не скажешь.

Чтобы построить обе кривые на проекциях, будет давать переменной z в уравнении (*) последовательно значения (например, с шагом $\Delta z=0{,}1$) в пределах— $42{,}5\leqslant z\leqslant 46{,}5$ (эти пределы соответствуют крайним точкам 1′ и 2′ на фронтальной проекции, см. рис. 4). Для каждого значения переменной z сначала вычислим по формуле (*) значение переменной x, а затем (из уравнения сферы) найдем значение y по формуле

$$y=\pm\sqrt{50^2-z^2-(x-30)^2}.$$

Указанный процесс вычислений легко осуществляется на ЭВМ. Таким образом, ЭВМ за короткий промежуток времени вычислит и напечатает координаты x, y, z более 200 точек линии пересечения. Теперь эти координаты надо в виде команд подать на чертежный автомат. Начинается третий этап.

Чертежный автомат

Существуют разные виды чертежных автоматов, которые по-разному стыкуются с вычислительными машинами. Современные чертежные автоматы (их часто называют *графопостроителями*) типа Итекан (СССР), Бенсон (Франция; см. рис. 6), Дигиграф (Чехословакия) могут работать и от перфоленты, и от магнитной ленты, на которые выдает информацию вычислительная машина. Чертежный автомат может стыковаться с ЭВМ прямо через специальное переходное электронное устройство.

Большинство существующих чертежных автоматов выполнены с ли-

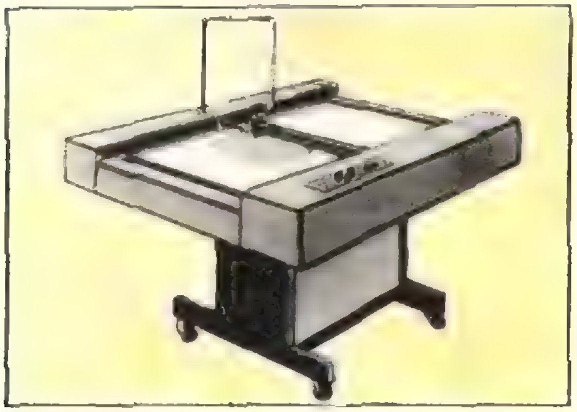


Рис. 6.

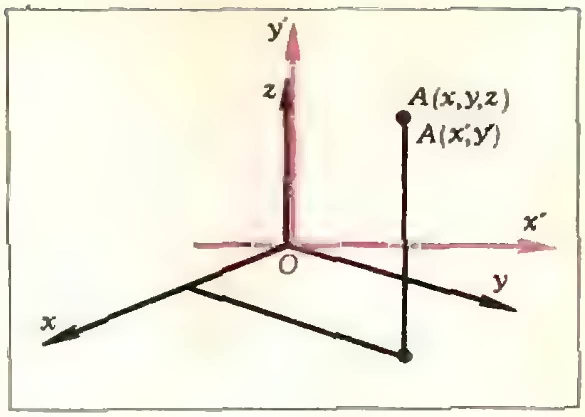


Рис. 7.

нейной и круговой интерполяцией. Это означает, что если задать координаты двух точек A и B, то перо чертежного автомата может провести либо отрезок прямой AB, либо дугу окружности, проходящей через точки A и B (при этом дополнительно задается ее центр). Поскольку ЭВМ вычисляет координаты достаточно большого числа точек, ломаная линия, нарисованная пером автомата (даже в виде отрезков), получается довольно плавной.

Построение аксонометрических изображений

При проектировании различных штампов нередко требуется начертить не только проекционный чертеж, но и аксонометрическое изображение поверхности. Как же научить чертежный автомат вычерчивать аксонометрическое изображение?

На рисунке 7 показано изображение произвольной точки A в аксонометрических осях Ox, Oy, Oz. Эта точка имеет три координаты, и ее изображение построено по определенным геометрическим правилам. Но чертежный автомат не знает ни этих правил, ни что такое аксонометрические координаты x, y и z. Он работает по двум осям, например, x' и y'. Произвольная точка A (x, y, z) имеет какие-то две координаты по этим осям. Очевидно, должна существовать связь между координатами x' и y' и аксонометрическими координатами x, y, z для произвольной точки на плоскости. Эта связь известна и записывается так:

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z, \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z, \end{aligned} \qquad (**)$$

где a_{ij} $(i=1,2;\ j=1,2,3)$ — числа, принимающие определенные значения для данного выбора осей.

Например, для изометрии (в этом случае оси проведены под углами 120° друг к другу) уравнения (**) принимают следующий вид:

$$x' = -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y,$$

$$y' = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + z.$$

Таким образом, ЭВМ должна пересчитать координаты x, y, z в координаты x' и y' по формулам (**) и подать их в нужной последовательности на чертежный автомат, который и вычерчивает аксонометрическое изображение.

Построение разверток поверхностей

Будем представлять себе поверхность гибкой, но не растяжимой криволинейной пленкой. Существуют поверхности, которые можно постепенно деформировать и совместить с плоскостью так, что при этом не будет ни разрывов, ни складок. Такие поверхности называются *развертывающимися*, а фигура, полученная после совмещения их с плоскостью, называется *разверткой*.

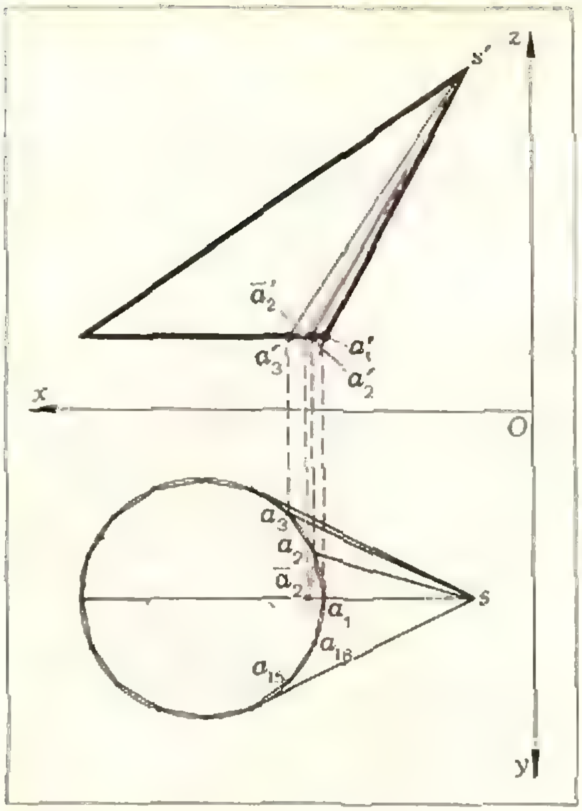


Рис. 8.

Идея графического построения развертки поверхности заключается в следующем: *в поверхность вписывается многогранная поверхность Ф, плоские грани которой обычно являются треугольниками. Затем на плоскости строятся все грани в натуральную величину в определенной последовательности.*

Пример 3. *Построить развертку наклонного конуса с круговым основанием, заданного на проекционном чертеже* (рис. 8).

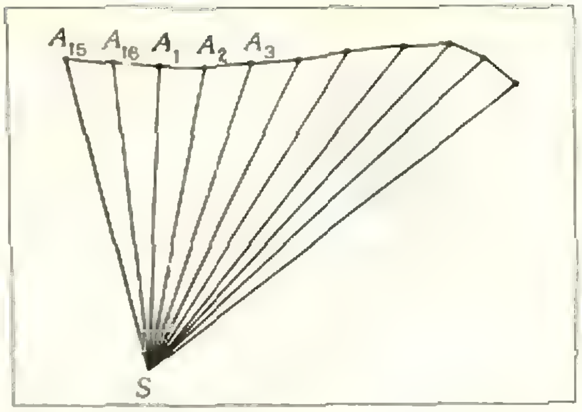


Рис. 9.

Поступаем следующим образом. Разбиваем основание конуса точками A_1, A_2,... на n равных частей, например, на 16, и соединяем их с вершиной S. Тогда на чертеже мы получим две проекции наклонной пирамиды (с треугольными гранями), вписанной в конус. Теперь надо построить грани пирамиды в натуральную величину. Рассмотрим грань SA_1A_2. Ее горизонтальная проекция будет sa_1a_2, фронтальная — $s'a_1'a_2'$. Нетрудно видеть, что $s'a_1'$ — натуральная величина стороны SA_1, a_1a_2 — натуральная величина стороны A_1A_2. Чтобы найти натуральную величину стороны SA_2, повернем ее вокруг вертикальной оси, проходящей через вершину S, так, чтобы она стала параллельна фронтальной плоскости проекций V ($s\overline{a}_2$ на горизонтальной проекции). Из полученной точки $\overline{a}_2$ проводим линию связи до пересечения с фронтальной проекцией основания конуса в точке $\overline{a}_2'$ — $s'\overline{a}_2'$ и будет натуральной величиной стороны SA_2. Аналогично находятся длины сторон SA_3, SA_4 и т. д.

Теперь на отдельном листе бумаги построим грань SA_1A_2 (рис. 9), к ней пристроим грань SA_2A_3 и т. д. В результате получим развертку наклонной пирамиды, которая будет приближенной разверткой наклонного конуса.

При увеличении числа граней вписанной пирамиды развертка становится все более точной, но ее построение вручную становится практически невозможным. Положение спасает ЭВМ, которая по заданной программе вычисляет координаты точек A_1, A_2, A_3,... в некоторой системе координат и подает их на чертежный автомат в виде команд движения пера. При большом количестве точек отрезки ломаной будут малы, а линия, нарисованная автоматом, — плавной кривой.

ЛАБОРАТОРИЯ «КВАНТА»

Полное лунное затмение

М. М. Дагаев

Полное лунное затмение — явление довольно редкое. Но вот в ночь с 18 на 19 ноября 1975 г. его можно будет наблюдать почти на всей территории Советского Союза, кроме самых восточных районов, где уже в самом начале затмения начнется день и Луна зайдет за горизонт.

Луна обращается вокруг Земли в направлении с запада на восток и когда она своим левым краем входит в земную тень, начинается лунное затмение. Пока Луна не полностью погрузилась в земную тень, затмение называют частным и фазы Φ лунного затмения определяются долей b лунного диаметра d, покрытой земной тенью: $\Phi = b/d$. По мере погружения Луны в земную тень фаза затмения возрастает и в момент полного погружения становится равной единице — начинается полное лунное затмение.

Во время полного затмения фаза определяется по формуле:

$$\Phi = \frac{R + r - \Delta}{2r},$$

где R — угловой радиус земной тени, r — угловой радиус лунного диска и Δ — угловое расстояние между центрами лунного диска и земной тени. В середине предстоящего полного лунного затмения $R = 40'07'' \approx 40',1$, $r = 15'07'' \approx 15',1$ и $\Delta = 22'53'' \approx 22'9$; поэтому наибольшая фаза полного затмения $\Phi_{max} = 1,07$.

Все фазы лунного затмения будут видны на территории, расположенной к западу от линии, проходящей вблизи Кяхты, Улан-Удэ и Олекминска к Сангару и острову Врангеля, а также севернее географической параллели $\varphi = 71°$, где в эту ночь Луна не заходит за горизонт. Восточнее этой линии полное затмение тоже будет видно, но до его окончании Луна в частном затмении зайдет за горизонт. Восточнее же линии, проходящей от Буреи через Нелькан и Певск к острову Врангеля, можно будет видеть только частные фазы.

Обстоятельства лунного затмения по московскому времени приведены в следующей таблице:

Явление	Момент времени	Фаза затмения
Начало затмения	18 ноября 23 ч 38 *мин*	0,00
Частные фазы	19 ноября 0 06	0,38
	0 34	0,74
Начало полного затмения	1 02	1,00
Наибольшая полная фаза	1 23	1,07
Конец полного затмения	1 44	1,00
Частные фазы	2 12	0,74
	2 40	0,38
Конец частного затмения	3 08	0,00

Чтобы узнать моменты тех же явлений по местному времени, нужно к табличным моментам прибавить разницу между местным и московским временем. Так, например, в Новосибирске, время которого отличается от московского на 4 часа, частное лунное затмение начнется 19 ноября в 3 *ч* 38 *мин*, а полное — в 5 *ч* 02 *мин*.

Наблюдения полных лунных затмений дают науке обширный материал для изучения структуры земной тени и состояния верхних слоев земной атмосферы. К таким наблюдениям относятся оценки общего (интегрального) блеска Луны в разных фазах затмения, оценки цвета Луны и отдельных деталей ее поверхности, определение моментов покрытия земной тенью деталей лунной поверхности.

Оценки общего блеска Луны могут быть проведены различными способами с помощью простейших приборов.

Один из способов состоит в том, что Луна рассматривается в школьный телескоп (или просто в бинокль со стороны объектива). Подобрав заранее подходящий дымчатый (нейтральный) светофильтр, можно ослабить блеск Луны до блеска звезд нулевой звездной величины (например, Веги, Арктура, Капеллы) и в течение всего затмения через равные промежутки времени (5—10 *мин*) сравнивать блеск Луны, наблюдаемой в телескоп, с блеском звезд различной звездной величины, наблюдаемых невооруженным глазом. Для сравнения нужно выбрать звезды в пределах от 0 до 4 звездной величины и запомнить их взаимное расположение, чтобы во время наблюдений быстро и безошибочно отыскивать их на небе. Когда блеск Луны станет очень слабым, нужно убрать светофильтр и продолжать наблюдения без него.

Если у вас есть чувствительный фотоэкспонометр, то изменение интегрального блеска Луны во время затмения можно изучать по его показаниям. Для этого перед входным отверстием фотоэкспонометра следует жестко установить трубку таких размеров, чтобы она защищала фотоэлемент от рассеянного света неба, а сквозь нее проходил бы только свет от Луны. Так, при длине трубки 60 *см* ее внутренний диаметр должен быть равен 10 *мм*. Внутреннюю поверхность трубки покрывают черной матовой краской. Фотоэкспонометр с трубкой укрепляют на тубусе телескопа так, чтобы трубка была параллельна тубусу. При наблюдениях телескоп направляют на Луну и все время ведут за ней. Показания фотоэкспонометра и характеризуют блеск Луны.

Интересные результаты можно получить, регистрируя видимость звезд невооруженным глазом или в 6-кратный бинокль на протяжении всего затмения (включая и его частные фазы) в определенной области неба. (Чтобы на результатах наблюдений не сильно сказывалось поглощение света в земной атмосфере, необходимо выбрать область неба с неизменной высотой над горизонтом. Обычно это либо область вокруг Полярной звезды, либо область зенита. В ночь затмения вблизи области зенита будут находиться созвездия Персея и Возничего.) Предварительно со звездных атласов нужно скопировать на кальку около 30 звезд последовательно убывающего блеска от 4 до 6 звездной величины (или, при наблюдении в бинокль, до 8,2 звездной величины), пронумеровать их, а во время затмения через каждые 5 *мин* регистрировать номера наиболее слабых звезд, видимых на пределе зрения. Зная звездную величину отмеченных звезд, можно найти степень ослабления лунного света в различных фазах затмения.

Все описанные способы требуют обязательной регистрации времени с точностью до 1 *мин* и двух-трех наблюдений до начала затмения и после его окончания.

Цвет Луны следует оценивать при полном затмении, описывая его словами или по шкале Данжона.

Шкала Данжона: 0 — затмение очень темное, в середине затмения Луна почти или совсем не видна; 1 — затмение темное, серое, детали поверхности Луны совершенно не видны; 2 — затмение темно-красное или рыжеватое, около центра тени наблюдается более темная часть; 3 — затмение красно-кирпичного цвета, тень окружена сероватой или желтоватой каймой; 4 — затмение медно-красное, очень яркое, внешняя зона светлая, голубоватая.

Фотографы-любители могут сфотографировать затмение на цветную пленку, сделав серию снимков (30—35 шт.) с одинаковой экспозицией. По изображениям Луны можно будет судить и о цвете, и об изменении блеска Луны.

Моменты начала и конца покрытия земной тенью крупных деталей лунной поверхности (с точностью до 5—10 *с*), степень их видимости, моменты их полного исчезновения (если это произойдет) и появления, а также цвет земной тени и каймы вокруг нее можно зарегистрировать при наблюдении в телескоп с наибольшим возможным увеличением. Схематическую карту лунной поверхности можно найти в школьном учебнике астрономии.

Если вам удастся получить интересные результаты, присылайте их по адресу: 103009, Москва, К-9, а/я 918, Астрономическая секция ВАГО.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
КРУЖОК

Слова с ограничениями

А. М. Степин,
А. Т. Таги-Заде

Эта статья по теме очень близка к статье Г. А. Гуревича «Бесповторные последовательности», которая была опубликована в «Кванте» № 9 за этот год. Статья посвящена вычислению количества (и доказательству существования) слов любой длины (в том числе, и бесконечной), в данном алфавите с ограничениями, — попутно в ней решается задача М300 из «Задачника «Кванта», № 12, 1974. У Гуревича же вычислялось количество (и доказывалось существование) последовательностей любой длины (и бесконечной), у которых никакая группа цифр не встречается два раза подряд, и решалась задача М310.

Комбинаторная техника, с помощью которой решены задачи М300 и М310 (и их обобщения), находит широкое применение в серьезной математической науке: теории групп, теории алгебр, алгебраической теории чисел.

Наше знакомство со словами и с алфавитами мы начнем с разбора задачи М300, предлагавшейся в «Задачнике «Кванта», см. «Квант» № 12 за 1974 год.

Задача М300

Алфавит состоит из трех букв a, b, c. Назовем словом последовательность любой длины, состоящую из этих букв. При образовании слов некоторые буквосочетания (длины два и более) считаются запрещенными. Известно, что в списке запрещенных буквосочетаний все слова имеют разную длину.

Докажите, что существуют слова любой длины, не содержащие запрещенных буквосочетаний.

Задаче М300 можно придать иную — «развлекательную» — форму:

По городу с прямоугольной планировкой улиц ездит некий автомобилист. Попав на *перекресток*, он либо продолжает ехать прямо, либо поворачивает налево или направо (поворачивать назад нельзя!) — с учетом того, что правилами уличного движения запрещены некоторые комбинации этих поворотов (налево и направо) и проезда прямо. Известно, что все запрещенные комбинации имеют *длину* не меньше двух (например, длина комбинации «налево — направо» равна двум) и что нет различных комбинаций одинаковой длины. Оказывается, что если город достаточно велик и автомобилист стартует в центре, то, несмотря на все запреты, он может проехать в этом городе любое заданное число перекрестков.

Решать задачу М300 все же удобно в терминологии «букв» и «слов».

Запрещенные буквосочетания мы будем называть отмеченными словами и считать слово *хорошим*, если оно не содержит внутри себя ни одного отмеченного слова. Совокупность отмеченных слов мы иногда будем называть *списком запретов* или *ограничений*. Слово, содержащее внутри себя хотя бы одно отмеченное слово, назовем *плохим*.

Обозначим число хороших слов длины l через G_l. Чтобы доказать существование хороших слов любой длины, достаточно показать, что при любом натуральном l число G_l больше нуля. Мы же сейчас покажем, что для любого l хороших слов длины l довольно много: $G_l \geqslant 2^l$.

Упорядочим отмеченные слова по длине и обозначим через l_i длину i-го отмеченного слова ($l_i \geqslant i$).

Лемма 1. *Для чисел G_l справедливо неравенство*

$$G_l \geqslant 3\cdot G_{l-1} - \sum_{l_i,\ 2\leqslant l_i\leqslant l} G_{l-l_i}\ {}^{*)} \qquad (1)$$

(G_1, очевидно, равно трем; положим G_0 равным единице).

Доказательство. Заметим, что все хорошие слова длины l содержатся среди слов, получающихся приписыванием справа одной из букв a, b, c к хорошим словам длины $l-1$. При таком приписывании получается $3\cdot G_{l-1}$ слов, среди которых, помимо хороших слов, могут быть и некоторые плохие слова длины l. Оценим их число. Очевидно, что в полученном плохом слове отмеченное слово может находиться только в его конце, то есть оно устроено так: последние l_i букв образуют отмеченное слово, а первые $l-l_i$ букв — хорошее слово ($2\leqslant l_i\leqslant l$). Число плохих слов (длины l) описанного типа, оканчивающихся отмеченным словом длины l_i, не больше числа хороших слов длины $l-l_i$, то есть числа G_{l-l_i} (по условию у нас есть только одно отмеченное слово длины l_i). Всего же в результате приписывания справа одной из букв a, b, c к хорошим словам длины $l-1$ получится не более $\sum\limits_{l_i, 2\leqslant l_i\leqslant l} G_{l-l_i}$ плохих слов. Значит, среди получившихся $3\cdot G_{l-1}$ слов длины l хороших слов не меньше

$$3\ G_{l-1} - \sum_{l_i, l\leqslant 2_i\leqslant l} G_{l-l_i}.$$

Неравенство (1) сыграет главную роль при оценке числа G_l.

Лемма 2. *Для любого натурального l '*

$$G_l \geqslant 2G_{l-1}. \qquad (2)$$

Доказательство леммы 2 проведем методом математической индукции.

База индукции: $l=1$; очевидно, что $G_1\geqslant 2\cdot G_0$.

Шаг индукции: Предположим, что неравенство (2) выполнено для всех натуральных $l\leqslant L$, то есть

$$\left|\begin{array}{l} G_L\geqslant 2\cdot G_{L-1},\\ G_{L-1}\geqslant 2\cdot G_{L-2},\\ \quad\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ ,\\ G_2\geqslant 2\cdot G_1.\end{array}\right. \qquad (2')$$

Докажем, что $G_{L+1}\geqslant 2\cdot G_L$.

Из неравенств (2′) имеем:

$$G_L\geqslant 2\cdot G_{L-1}\geqslant 2^2\cdot G_{L-2}\geqslant\ldots\geqslant 2^k\cdot G_{L-k},$$

то есть

$$G_{L-k}\leqslant G_L/2^k, \qquad (2'')$$

где $k=1, 2, \ldots, L$.

Учитывая оценки (2″), неравенство (1) и сноску к нему, получим, что

$$G_{L+1}\geqslant 3\cdot G_L - \sum_{l_i, 2\leqslant l_i\leqslant L+1} G_{L+1-l_i}\geqslant$$

$$\geqslant 3\cdot G_L - \sum_{k=1}^{l} G_{L-k}\geqslant {}^{*)}$$

$$\geqslant 3\cdot G_L - G_L\cdot\sum_{k=1}^{l}\frac{1}{2^l}\geqslant$$

$$\geqslant G_L\cdot(3-1) = 2\cdot G_L,$$

а это и требовалось доказать.

Поскольку $G_{l-1}\geqslant 2\cdot G_{l-2}$, $G_{l-2}\geqslant 2G_{l-3}$, ..., $G_1\geqslant 2\cdot G_0=2$, то $G_l\geqslant 2^l$, и мы получаем теорему 1:

Для любого натурального l в условии задачи М300 число хороших слов длины l не меньше, чем 2^l:

$$G_l\geqslant 2^l, \qquad (3)$$

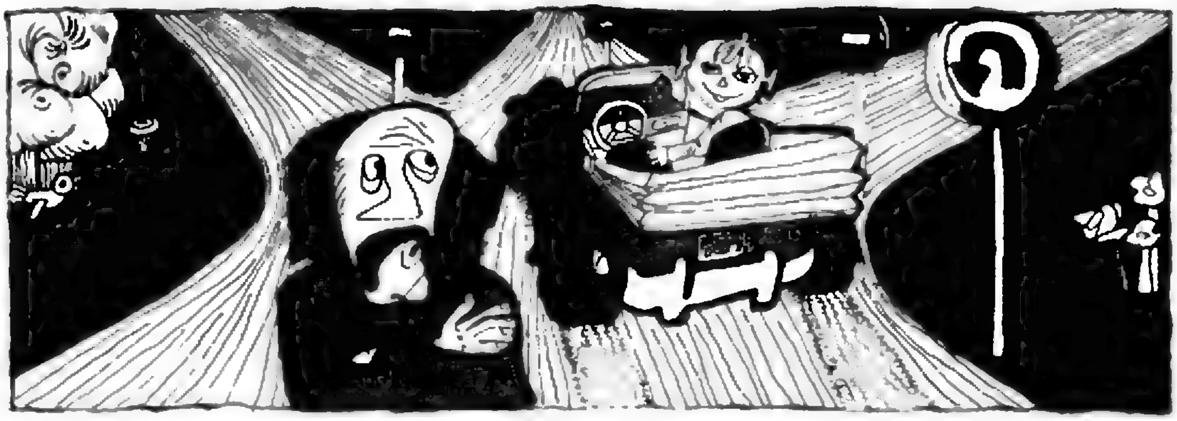
которой и заканчивается решение нашей задачи.

---

*) Сумма $\sum\limits_{l_i, 2\leqslant l_i\leqslant l} G_{l-l_i}$ — это, вообще говоря, не то же самое, что $\sum\limits_{i=2}^{l} G_{l-i}$: в первой сумме производится суммирование лишь по таким значениям l_i, $2\leqslant l_i\leqslant l$, для которых в списке запретов есть отмеченное слово соответствующей длины l_i (то есть, l_i принимает, быть может, не все из значений 2, 3, . . ., l): так, если в списке запретов нет отмеченного слова длины 3, то в сумме $\sum\limits_{l_i, 2\leqslant l_i\leqslant l} G_{l-l_i}$ член G_{l-3} отсутствует

*) Здесь уже обычная сумма:

$$\sum_{k=1}^{l} G_{L-k} = G_{L-1}+G_{L-2}+\ldots+G_{L-l}.$$



Бесконечные слова

Теперь мы знаем, что в «словаре» задачи М300 есть хорошие слова любой длины. А есть ли в нем бесконечно длинные хорошие слова?

Сейчас мы докажем, что если список отмеченных слов конечен (есть лишь конечное число запрещенных буквосочетаний), то существует и бесконечно длинное хорошее слово. Однако отметим сразу, что на самом-то деле требование конечности списка отмеченных слов не существенно: утверждение о существовании бесконечно длинного хорошего слова остается верным и в случае бесконечного числа запретов *).

Возьмем самое длинное отмеченное слово (так как по предположению число отмеченных слов конечно, это можно сделать); пусть его длина равна n. Выберем натуральное N так, чтобы N было больше n. Поскольку у нас есть хорошие слова любой длины, возьмем хорошее слово длины $N\cdot(3^N+1)$, обозначим его через A. Разделим слово A на (3^N+1) равных по длине частей B_k длины N: если

$$A = x_1,\quad x_2,\quad \ldots,\quad x_{N\cdot(3^N+1)}.$$

где x_i — это a, либо b, либо c, то $B_k = x_{N\cdot(k-1)+1}, x_{N\cdot(k-1)+2}, \ldots, x_{N\cdot k}$.

Поскольку A — хорошее слово, каждое B_k — тоже хорошее слово длины N. Но в нашем алфавите всего три буквы (a, b, c), поэтому различных хороших слов длины N будет не более, чем 3^N. У нас же получилось (3^N+1) хороших слов B_k; значит, среди них есть одинаковые. Пусть, например, $B_{n_1}=B_{n_2}$ и $n_1<n_2$. Возьмем кусок слова A, состоящий из частей B_k с номерами k от n_1 до n_2-1 включительно. Это будет хорошее слово C длины $m\geqslant N$:

$$C = x_{N\cdot(n_1-1)+1},\ \ldots,\ x_{N\cdot(n_2-1)}.$$

Припишем к слову C справа то же самое слово C. Получим слово D длины $2m$:

$$D = x_{N\cdot(n_1-1)+1},\ \ldots,\ x_{N\cdot(n_2-1)},$$
$$x_{N\cdot(n_1-1)+1},\ \ldots,\ x_{N\cdot(n_2-1)}.$$

Докажем, что D — хорошее слово.

Предположим противное: $D = CC$ — плохое слово; тогда оно содержит какое-то отмеченное слово. Очевидно, что это отмеченное слово

---

*) Доказательство этого факта вы можете найти в статье Г. А. Гуревича «Бесповторные последовательности» (см. «Квант» № 9). В статье Гуревича фактически доказано, что из свойства *«есть как угодно длинное хорошее слово»* следует свойство *«есть и бесконечно длинное хорошее слово»*, то есть что в действительности существование хороших слов любой длины эквивалентно существованию бесконечно длинного хорошего слова. Мы же докажем, что в наших предположениях существует *периодическое бесконечное слово*, и укажем способ, позволяющий такое слово построить (дадим, как принято говорить, *конструктивное* доказательство).

может находиться только в области «склейки» двух хороших слов C, так что его пересечение с «правым» и «левым» словами C непусто. Но $B_{n_1} = B_{n_2}$ и длина любого отмеченного слова меньше N; значит, это отмеченное слово должно лежать в области «склейки» частей B_{n_2-1} и B_{n_2} хорошего слова A, а этого не может быть, и, следовательно, слово D — хорошее.

Понятно, что бесконечное *периодическое* слово $CC\ldots C\ldots$ с периодом C будет также хорошим, а это, собственно, и даст все, что нужно.

Итак, наш автомобилист может разъезжать по городу бесконечно долго, не нарушая при этом правил уличного движения!

Интересный пример

Вернемся к неравенству (1), с доказательства которого мы начали решение задачи М300; перепишем его так:

$$G_l - 3\cdot G_{l-1} + \sum_{l_i,\, 2\leqslant l_i\leqslant l} G_{l-l_i} \geqslant 0. \qquad (4)$$

Насколько точно это неравенство? Можно ли в нем знак «$\geqslant$» заменить знаком «$=$»? Вообще говоря, нельзя, и вот почему.

Число $3\cdot G_{l-1}$ — это число слов, получившихся приписыванием справа к хорошим словам длины $l-1$ одной из букв a, b, c; среди таких слов находятся все хорошие слова длины l. Вычитая из числа $3\cdot G_{l-1}$ числа G_{l-l_i}, где l_i — какие-то из значений 2, 3, ..., l (возможно, и все значения), мы тем самым как бы вычеркиваем из построенных слов длины l все те плохие слова, которые получатся, если к хорошему слову длины $l-l_i$ добавить отмеченное слово длины l_i. Но при этом может получиться так, что какое-то плохое слово длины l окажется вычеркнутым несколько раз из числа $3\cdot G_{l-1}$ получившихся слов. Если же среди наших $3\cdot G_{l-1}$ слов длины l нет слов, получающихся из хороших слов длины $l-l_i$ приписыванием справа отмеченного слова длины l_i, то соответствующее число G_{l-l_i} вообще вычитать не надо.

Однако при некоторых дополнительных условиях на список запретов вместо рекуррентных неравенств (4) для чисел G_l (l — любое) будут выполняться аналогичные рекуррентные равенства:

$$G_l - 3\cdot G_{l-1} + \sum_{l_i,\, 2\leqslant l_i\leqslant l} G_{l-l_i} = 0. \qquad (4')$$

В таких случаях G_l записывается явно в виде функции от l, и для каждого конкретного значения l число G_l можно посчитать.

В частности, из сказанного следует, что для справедливости рекуррентных равенств типа (4′) достаточно таких двух условий:

1°. *Среди слов длины l, получающихся приписыванием справа одной из букв a, b, c к хорошим словам длины $l-1$, находятся все слова, получающиеся из хороших слов длины $l-l_i$ приписыванием справа отмеченного слова длины l_i* (оно по предположению есть в списке запретов).

2°. *Каждое полученное таким приписыванием (одной буквы) плохое слово длины l представляется в виде какого-то хорошего слова (меньшей длины) и отмеченного слова единственным образом.*

Условие 2° выполняется, если в списке запретов никакое отмеченное слово не является концом какого-нибудь другого отмеченного слова.

Упражнение 1. Проверьте, что для алфавита из трех букв и списка отмеченных слов ab, acb, $accb$, ..., $\underbrace{ac\ldots cb}_{s-2}$ выполняются условия 1° и 2°, и что для чисел G_l справедливы такие рекуррентные соотношения:

$$G_l - 3\cdot G_{l-1} + G_{l-2} + \ldots + G_{l-s} = 0 \text{ *)}. \qquad (5)$$

(s — длина самого длинного отмеченного слова).

Если список запретов упражнения 1 ограничить двумя отмеченными словами ab

---

*) Уравнения вида $G_l + b_1 G_{l-1} + b_2 G_{l-2} + \ldots + b_s G_{l-s} = 0$ ($b_1, \ldots, b_s$ — некоторые постоянные), называются *конечно-разностными* уравнениями; о методах их решения можно прочесть в книге А. О. Гельфонда «Исчисление конечных разностей». М., «Наука», Глава V, § 4, п. 2

и acb, то мы получим уравнение

$$G_l - 3 \cdot G_{l-1} + G_{l-2} + G_{l-3} = 0. \qquad (5')$$

Решение уравнения (5') будем искать в виде

$$G_l = \lambda^l. \qquad (5'')$$

Подставляя (5'') в (5'), получим уравнение

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + \lambda + 1 = 0,$$

имеющие три различных корня:

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 1 + \sqrt{2}, \quad \lambda_3 = 1 - \sqrt{2}.$$

Общее решение уравнения (5') записывается так:

$$G_l = C_1 + C_2 (1 + \sqrt{2})^l + C_3 \ (1 - \sqrt{2})^l,$$

где C_1, C_2 и C_3 — постоянные, определяющиеся из начальных условий:

$$G_0 = 1, \ G_1 = 3, \ G_2 = 8.$$

Получается такая система для определения C_1, C_2, C_3:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 = 1, \\ C_1 + C_2 (1 + \sqrt{2}) + C_3 (1 - \sqrt{2}) = 3, \\ C_1 + C_2 (3 + 2\sqrt{2}) + C_3 (3 - 2\sqrt{2}) = 8, \end{cases}$$

из которой находим

$$C_1 = -\frac{1}{2}, \quad C_2 = \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad C_3 = \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2},$$

значит,

$$G_l = - \frac{1}{2} + \left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot (1 + \sqrt{2})^l + \left(\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot (1 - \sqrt{2})^l$$

(в частности, $G_3 = 20$).

Обобщение задачи М300

Пусть теперь алфавит состоит из n букв $a_1, a_2, \ldots, a_n$, а в списке отмеченных слов (длины не меньше двух) имеется не более m различных слов одинаковой длины.

Сейчас мы докажем, что при некоторых ограничениях на числа n и m и в таком «словаре» будут сколь угодно длинные хорошие слова, причем для каждого натурального l (l — длина слова) — опять-таки довольно много.

Как и при решении задачи М300 (для М300 имеем: $n=3$, $m=1$) вначале нужно доказать

Лемму 3. *При выполнении условий «обобщенной задачи М300» для чисел G_l хороших слов длины l верны такие соотношения:*

$$G_l \geq n \cdot G_{l-1} - \sum_{l_i, 2 \leq l_i \leq l} m_i \cdot G_{l-l_i}, \qquad (6)$$

где через m_i обозначено число отмеченных слов длины l_i (G_1, очевидно, равно n, а G_0 снова полагаем равным 1).

Лемма 3 доказывается в точности теми же рассуждениями, что и лемма 1 (см. с. 33); мы ее доказывать не будем.

Так как по условию каждое m_i не больше m (в дальнейшем мы будем считать $m = \max\{m_i\}$ и называть m *кратностью* системы ограничений), то

$$G_l \geq n \cdot G_{l-1} - m \cdot \sum_{l_i, 2 \leq l_i \leq l} G_{l-l_i}. \qquad (7)$$

Следующий после леммы 3 шаг — доказательство важной леммы 4:

Если

$$m \leq \left(\frac{n-1}{2}\right)^2, \qquad (8)$$

то существует такое $\lambda > 1$, что для любого натурального l

$$G_{l+1} \geq \lambda \cdot G_l. \qquad (9)$$

Лемма 4, как и лемма 2 первого параграфа, доказывается методом математической индукции с использованием неравенства (7) и соотношений (2') и (2''), в которых число «2» заменяется буквой «λ» (см. с. 33). Индукционный переход от L к $L+1$ возможен, поскольку квадратное относительно λ неравенство $n - \frac{m}{\lambda - 1} \geq \lambda$ с неотрицательным (в силу (8)) дискриминантом $\left[\left(\frac{n-1}{2}\right)^2 - m\right]$ имеет решение

$$\lambda_{1,2} = \frac{n+1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{n-1}{2}\right)^2 - m}.$$

Так как $G_1 = n \cdot G_0$ (напомним, что $G_0 = 1$) и

$$n \geq \frac{n+1}{2} + \sqrt{\left(\frac{n-1}{2}\right)^2 - m},$$

то

$$G_1 \geq \left(\frac{n+1}{2} + \sqrt{\left(\frac{n-1}{2}\right)^2 - m}\right) \cdot G_0,$$

и существование числа $\lambda > 1$ доказано.

Наконец, аналогично теореме 1, мы получим теорему 2:

Если в условии «обобщенной задачи М300» $m \leq \left(\frac{n-1}{2}\right)^2$, то

$$G_l \geq \left(\frac{n+1}{2} + \sqrt{\left(\frac{n-1}{2}\right)^2 - m}\right)^l.$$

Блокирующие ограничения

А нужно ли вообще ограничение (8) на кратность системы запретов?

Мы уже видели, что условие $m \leqslant \left(\frac{n-1}{2}\right)^2$ достаточно для существования сколь угодно длинного хорошего слова. Это условие нельзя, вообще говоря, ослабить. В самом деле, при $n = 2$ для алфавита из двух букв a и b получаем условие на кратность $m \leqslant \frac{1}{4}$. Положим $m = 1$ и возьмем в качестве отмеченных такие три слова:

$$ab,\ aaa,\ bbbb.$$

Докажем, что тогда не существует хороших слов длиннее пяти. Систему запретов, для которой нет хороших слов сколь угодно большой длины, будем называть *блокирующей*.

Доказательство (от противного).

Предположим, что существует хорошее слово длины 6. Оно кончается буквой a, или буквой b.

Если это слово кончается буквой b, то поскольку сочетание ab запрещено, то наше «хорошее» слово состоит только из букв b, чего не может быть, так как сочетание $bbbb$ запрещено.

Пусть это хорошее слово (длины 6) кончается буковой a; рассмотрим его предпоследнюю букву: — если она b, то и все остальные буквы (5 штук) должны быть b — а этого не должно быть. Значит, наше слово оканчивается на aa. Возьмем теперь третью от конца букву нашего слова: если это опять a, то сказывается запрет aaa, если же это b — то остальные буквы (4 штуки) — тоже b, и сказывается запрет $bbbb$.

Приведем еще один пример блокирующей системы запретов — для алфавита из трех букв a, b, c. Для такого алфавита условие (8) нам дает, что m должно быть не больше 1. Положив $m = 2$, т. е. предположив, что можно отмечать по два слова одинаковой длины, возьмем в качестве отмеченных следующие слова:

$$ab,\ ac;\ bcb,\ bcc;\ aaaa,\ bbbb;\ ccccc.$$

Упражнение 2. Докажите, что эти отмеченные слова образуют блокирующее ограничение на хорошие слова.

Какую максимальную длину в этом случае имеет хорошее слово?

Из рассмотренных для $n = 2$ и 3 примеров следует, что существует блокирующая система запретов с кратностью m, такой, что

$$\left(\frac{n-1}{2}\right)^2 < m \leqslant \left(\frac{n-1}{2}\right)^2 + 1.$$

Но для произвольного натурального n и целого m, где

$$\left(\frac{n-1}{2}\right)^2 < m \leqslant \left(\frac{n-1}{2}\right)^2 + 1,$$

существование бокирующей системы запретов для алфавита из n букв с кратностью m не доказано. Докажем, что для алфавита из n букв $a_1, \ldots, a_n$ блокирующая система запретов с кратностью $m = \frac{n(n-1)}{2}$ существует. Действительно, возьмем такую систему запретов

$$(1)\ a_1a_2,\ (2)\ a_1a_3, \ldots, (n-1)\ a_1a_n,$$
$$(n)\ a_2a_3, \ldots, \left(\frac{n(n-1)}{2}\right) a_{n-1}a_n.$$

Тогда хороших слов длины больше $2n$ не будет, а единственным хоршим словом длины $2n$ будет слово

$$a_na_na_{n-1}a_{n-1} \ldots a_1a_1.$$

Но, конечно, в каждом конкретном случае все зависит от того, как устроена система запретов. Достаточно, например, для алфавита из двух букв a, b ($n = 2$) и $m = 1$ взять в качестве отмеченных слова

$$aa,\ aba,\ abaa,\ abaab,\ \ldots,$$

как мы получим, что существует даже бесконечно длинное, периодическое слово $bb \ldots b \ldots$. Более того, можно взять m равным даже четырем (и уж конечно — двум и трем), а в качестве отмеченных, например, слова:

$$aa,\ ab,\ ba,\ aab,\ aba,\ baa,\ aaa,$$

и мы снова получим бесконечное хорошее слово $bb \ldots b \ldots$.

В заключение мы предлагаем читателям, заинтересовавшимся «проблемой хороших слов», порешать задачи.

1. Докажите, что для алфавита a, b не существует системы блокирующих ограничений, состоящей меньше чем из трех слов.
2. Докажите, что в случае $n = 3$ и $m = 2$ не существует бокирующей системы меньше чем из шести отмеченных слов.
3. Докажите, что если для алфавита a, b, c отмечены слова ca, cb, ba, то G_l растет как l^2.
4. Докажите, что $G_{l_1+l_2} \leqslant G_{l_1} \cdot G_{l_2}$.
5. Докажите, что для алфавита из n букв существует блокирующая система ограничений с кратностью m, такой, что

$$\frac{n(n-2)}{2} + 2 \leqslant m < \frac{n(n-2)}{2} + 3.$$

задачник кванта

Решения задач из этого номера можно посылать не позднее 1 декабря 1975 г. по адресу: 113035 Москва, Ж-35, Б. Ордынка, 21/16, журнал «Квант». После адреса на конверте напишите, решения каких задач вы посылаете, например: «Задачник «Кванта», М346, М347» или «...Ф359». Решения задач по каждому из предметов (математике и физике), а также новые задачи просьба присылать в отдельных конвертах. Задачи из разных номеров журнала присылайте также в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки ваших решений). Условия оригинальных задач, предлагаемых для публикации, присылайте в двух экземплярах вместе с вашими решениями этих задач (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»). После формулировки задачи мы обычно указываем, кто предложил нам эту задачу. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Наиболее трудные задачи отмечены звездочкой. В этом учебном году победители нашего конкурса будут приглашены на областные и республиканские олимпиады.

Задачи

М346 — М350; Ф358 — Ф362

М346. Точка K — середина стороны AB квадрата $ABCD$, а точка L делит диагональ AC в отношении $3:1$ (рис. 1). Докажите, что угол KLD — прямой.

Ю. Г. Богатуров (ученик 10 класса, г. Кутаиси)

М347. Двое играют в такую игру. Первый загадывает два числа от 1 до 25, а второй должен их угадать. Он может назвать любые два числа от 1 до 25 и узнать у первого, сколько из названных им чисел — 0, 1 или 2 — совпадают с загаданными. За какое минимальное число вопросов он сможет наверняка определить загаданные числа?

А. А. Григорян

М348. В таблицу 10×10 записаны числа от 1 до 100 по порядку. Затем в каждой строке и в каждом столбце ровно у половины чисел поставлен знак минус. Докажите, что в получившейся таблице сумма всех чисел равна нулю.

С. М. Агеев

М349. Какому условию должны удовлетворять длины сторон треугольника, чтобы треугольник, составленный из а) высот, б) медиан, в) биссектрис данного треугольника, был подобен данному?

А. П. Савин

М350*. С белого углового поля шахматной доски размерами $n\times m$ (n и m больше 1) начинает двигаться слон. Дойдя до края доски, слон

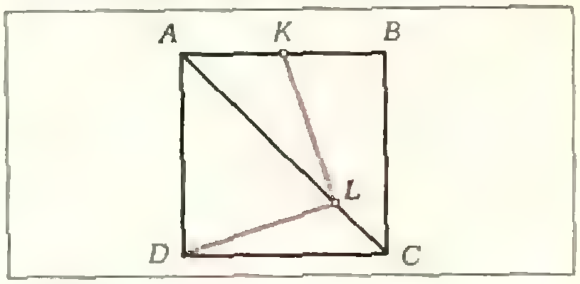


Рис. 1.

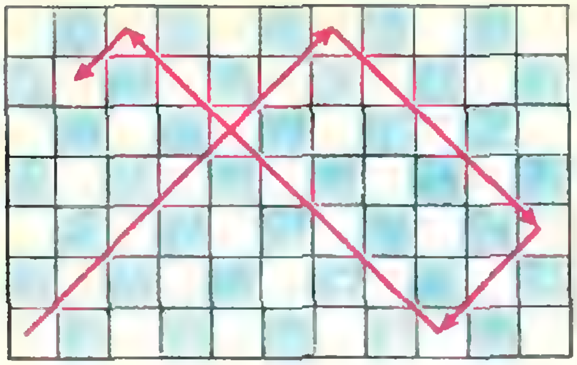


Рис. 2.

поворачивает под прямым углом (рис. 2). Попав в угол, он останавливается.

а) При каких n и m слон обойдет все белые поля доски?

б) Сколько всего полей он обойдет на доске $n \times m$?

Рассмотрите в качестве примеров доски размерами 10×15, 10×25, 15×25.

Е. Я. Гик, А. Б. Жорницкий

Ф358. Неоднородный стержень длины l может стоять у вертикальной стены, образуя угол не менее 45° с полом. Коэффициент трения стержня о пол и о стену равен $\sqrt{3}$. На какой высоте находится центр тяжести стержня?

Ф359. В цилиндрическом сосуде под поршнем находится насыщенный водяной пар при температуре $t = 20°$C. При изотермическом медленном вдвигании поршня в цилиндр было отведено количество тепла $Q = 20$ *ккал*. Какая работа была совершена при этом внешними силами, действующими на поршень?

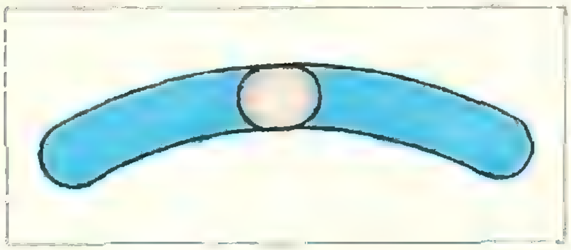


Рис. 3.

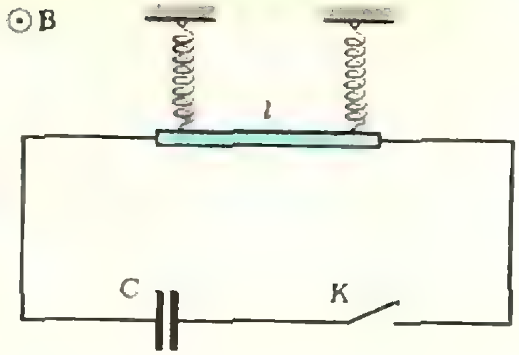


Рис. 4.

Ф360. Для измерения ускорения используется изогнутая трубка, заполненная водой, в которой имеется пузырек воздуха (рис. 3). Трубка изогнута по дуге окружности. Как связано положение пузырька с ускорением трубки?

Ф361. Прямолинейный проводник длины l и массы m подвешен на двух пружинах жесткости k в горизонтальном однородном магнитном поле с индукцией B (рис. 4). При замыкании ключа K конденсатор емкости C, заряженный до разности потенциалов U, замыкается на проводник и разряжается. При этом возникают колебания проводника. Определить амплитуду этих колебаний, если время разряда конденсатора много меньше периода колебаний проводника.

Ф362. Слоистый конденсатор состоит из трех металлических параллельных пластин площадью S. Пространства между пластинами заполнены диэлектриками с диэлектрическими проницаемостями ε_1 и ε_2 и удельными сопротивлениями ρ_1 и ρ_2. Толщины слоев диэлектриков d_1 и d_2. Конденсатор находится под постоянным напряжением U. Определить заряд средней пластины при установившемся токе в цепи.

Решения задач

М308-М315; Ф318-Ф321

М308. *Если при любом* x
$$a_1\cos x + a_2\cos 2x + \ldots + a_n\cos nx \geqslant -1,$$
то для чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *выполнено неравенство*
$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \leqslant n.$$
Докажите это утверждение: а) для $n=2$; *б) для* $n=3$; *в) для любого натурального* n.

а) Достаточно положить $x=\dfrac{2\pi}{3}$.

б) Положите последовательно $x=\dfrac{\pi}{2}$, $x=\pi$, $x=\dfrac{3\pi}{2}$ и сложите получившиеся неравенства.

в) Докажем предварительно следующую формулу: если $\varphi=\dfrac{2k\pi}{n+1}$, где k и n — целые числа, причем k не делится на $n+1$, то
$$\cos\varphi+\cos 2\varphi+\cos 3\varphi+\ldots+\cos n\varphi=-1. \qquad (*)$$
Пусть даны точки O и A_0. Повернув точку A_0 на угол φ относительно точки O, получим точку A_1. Из точки A_1 тем же поворотом получим точку A_2, из точки A_2 — точку A_3 и так далее. Так как $(n+1)\varphi=2k\pi$, то точка A_{n+1} совпадет с точкой A_0. Сумма векторов $\overrightarrow{OA_0}, \overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OA_2}, \ldots, \overrightarrow{OA_n}$ равна нуль-вектору. Действительно, при повороте каждого из этих векторов на угол φ относительно точки O на тот же угол должен повернуться и вектор, равный их сумме. Так как, с другой стороны, вектор, равный сумме векторов $\overrightarrow{OA_0}, \overrightarrow{OA_1}, \ldots, \overrightarrow{OA_n}$, не изменится при этом повороте (ибо точка A_0 перейдет в точку A_1, точка A_1 — в точку $A_2, \ldots$, точка A_n — в точку A_0), то он равен нуль-вектору.

Предположим теперь, что точка O является началом координат, а вектор $\overrightarrow{OA_0}$ имеет длину 1 и направлен по оси абсцисс. Так как проекция суммы векторов на любую ось равна сумме их проекций на эту ось, то сумма проекций векторов $\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OA_2}, \ldots, \overrightarrow{OA_n}$ на ось абсцисс равна -1 (проекция вектора $\overrightarrow{OA_0}$ на ось абсцисс равна 1). Но эти проекции равны, очевидно, $\cos\varphi, \cos 2\varphi, \ldots, \cos n\varphi$, откуда и следует формула $(*)$.

Формулу $(*)$ можно доказать и иначе, умножив обе ее части на $2\sin\dfrac{\varphi}{2}$ и воспользовавшись формулой
$$2\sin\frac{\varphi}{2}\cos k\varphi=-\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)\varphi+\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)\varphi,$$
— сделайте это самостоятельно.

Перейдем к решению задачи в).

Взяв произвольное число x_1, положим $x_2=2x_1$, $x_3=3x_1, \ldots, x_n=nx_1$. При $x=x_1$, $x=x_2$, $x=x_3, \ldots, x=x_n$ получим неравенства:
$$a_1\cos x_1+a_2\cos 2x_1+a_3\cos 3x_1+\ldots+a_n\cos nx_1\geqslant -1,$$

$$a_1\cos x_2 + a_2\cos 2x_2 + a_3\cos 3x_2 + \ldots + a_n\cos nx_2 \geqslant -1,$$
$$a_1\cos x_3 + a_2\cos 2x_3 + a_3\cos 3x_3 + \ldots + a_n\cos nx_3 \geqslant -1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_1\cos x_n + a_2\cos 2x_n + a_3\cos 3x_n + \ldots + a_n\cos nx_n \geqslant -1.$$

Учитывая, что $kx_l = klx_1 = lkx_1 = lx_k$, эти неравенства можно переписать так:

$$a_1\cos x_1 + a_2\cos x_2 + a_3\cos x_3 + \ldots + a_n\cos x_n \geqslant -1,$$
$$a_1\cos 2x_1 + a_2\cos 2x_2 + a_3\cos 2x_3 + \ldots + a_n\cos 2x_n \geqslant -1,$$
$$a_1\cos 3x_1 + a_2\cos 3x_2 + a_3\cos 3x_3 + \ldots + a_n\cos 3x_n \geqslant -1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_1\cos nx_1 + a_2\cos nx_2 + a_3\cos nx_3 + \ldots + a_n\cos nx_n \geqslant -1.$$

Сложив эти неравенства и положив $x_1 = \dfrac{2\pi}{n+1}$ (тогда $x_2 = \dfrac{4\pi}{n+1}$, $x_3 = \dfrac{6\pi}{n+1}$, …, $x_n = \dfrac{2n\pi}{n+1}$), придем на основании формулы (*) к неравенству

$$-a_1 - a_2 - a_3 - \ldots - a_n \geqslant -n,$$

откуда

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n \leqslant n \text{ *)}.$$

Ю. И. Ионин

◆

М309. а) *При каких n многочлен $x^{2n} + x^n + 1$ делится на $x^2 + x + 1$?*

б) *При каких n число*

$$1\underbrace{0\ldots0}_{n}1\underbrace{0\ldots0}_{n}1$$

делится на 37?

а) Рассмотрим три случая, соответствующие различным остаткам от деления n на 3.

1°. Пусть $n=3k$; тогда

$$x^{6k} + x^{3k} + 1 = (x^{6k} - 1) + (x^{3k} - 1) + 3 =$$
$$= (x^3 - 1)(x^{6k-3} + x^{6k-6} + \ldots + 1) +$$
$$+ (x^3 - 1)(x^{3k-3} + x^{3k-6} + \ldots + 1) + 3 =$$
$$= (x^2 + x + 1)\cdot Q(x) + 3,$$

где $Q(x) = (x - 1)[(x^{6k-3} + x^{6k-6} + \ldots + 1) + (x^{3k-3} + \ldots + 1)]$.

Следовательно, если $n=3k$, то многочлен $x^{2n} + x^n + 1$ при делении на $x^2 + x + 1$ дает в остатке 3.

2°. Пусть $n = 3k + 1$. Имеем

$$x^{6k+2} + x^{3k+1} + 1 = (x^{6k+2} - x^2) + (x^{3k+1} - x) +$$
$$+ (x^2 + x + 1) = x^2(x^{6k} - 1) + x(x^{3k} - 1) + (x^2 + x + 1)$$

В 1° мы показали, что многочлены $(x^{6k} - 1)$ и $(x^{3k} - 1)$ делятся на $(x^3 - 1)$, следовательно, и на $(x^2 + x + 1)$; поэтому при $n = 3k + 1$ многочлен $x^{2n} + x^n + 1$ делится на $x^2 + x + 1$.

3°. Пусть $n = 3k + 2$. Тогда

$$x^{6k+4} + x^{3k+2} + 1 = x^4(x^{6k} - 1) + x^2(x^{3k} - 1) + x^4 + x^2 +$$
$$+ 1 = x^4(x^{6k} - 1) + x^2(x^{3k} - 1) + x(x^3 - 1) + (x^2 + x +$$
$$+ 1) = (x^2 + x + 1)[(x - 1)R(x) + 1],$$

где $R(x) = x^4(x^{6k-3} + \ldots + 1) + x^2(x^{3k-3} + \ldots + 1) + x$, и многочлен $x^{2n} + x^n + 1$ снова делится на $x^2 + x + 1$.

---

*) Аналогично решена эта задача в книге Полиа и Сеге «Задачи и теоремы из анализа».

Итак, ответ в задаче а) таков:

многочлен $x^{2n}+x^n+1$ делится на x^2+x+1, если n не кратно трем.

б) При решении этой задачи можно воспользоваться результатом пункта а), поскольку все многочлены, получающиеся при делении, — частные и остатки — имеют целые коэффициенты. Действительно, при $x=10$ мы получим соответственно

$$x^2+x+1=111,\ x^{2(n+1)}+x^{(n+1)}+1=1\underbrace{0\ldots0}_{n}1\underbrace{0\ldots0}_{n}1.$$

С другой стороны, $10^{2m}+10^m+1$ делится на 3 при всех m, и вопрос о том, делится ли $10^{2m}+10^m+1$ на 37, эквивалентен вопросу о делимости $10^{2m}+10^m+1$ на $37\cdot3=111$. Ответ в этой задаче такой: число $1\underbrace{0\ldots0}_{n}1\underbrace{0\ldots0}_{n}1$ делится на 37, если n кратно 3 или если n при делении на 3 дает остаток 1.

Ф. Г. Шлейфер

М311. *) *Из одной бактерии получилось 1000 следующим образом: вначале бактерия разделилась на две, затем одна из двух получившихся бактерий разделилась на две, затем одна из трех получившихся бактерий разделилась на две и так далее. Докажите, что в некоторый момент существовала такая бактерия, число потомков которой среди 1000 бактерий, получившихся в конце, заключено между* 334 *и* 667.

◆

Пусть некоторая бактерия, у которой N потомков среди 1000 бактерий, разделилась на две, у которых соответственно N' и N'' потомков. Тогда $N=N'+N''$, и поэтому одно из чисел N' и N'' не меньше $N/2$.

Рассмотрим последовательность бактерий $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_m$, где A_1 — самая первая бактерия, A_{k+1} (для $k=1, 2, \ldots, m-1$) — та из двух бактерий, возникших при делении A_k, у которой не меньше потомков, чем у ее *сестры*, и A_m — одна из 1000 бактерий, которые получились в конце. Пусть A_k имеет N_k потомков. Тогда последовательность

$$N_1=1000,\ N_2, N_3, \ldots, N_{m-1},\ N_m=1$$

убывающая, но каждый член в ней не меньше половины предыдущего: $N_k>N_{k+1}\geqslant N_k/2$. (На рисунке 1, изображающем процесс деления бактерий в виде «генеалогического дерева», показана цепочка бактерий $A_1, A_2, \ldots, A_6$; здесь $N_1=16$, $N_2=9$, $N_3=5$, $N_4=3$, $N_5=2$, $N_6=1$.) Если выбрать j так, что $N_{j-1}\geqslant 668$, а $N_j<668$, то получим $334\leqslant N_j\leqslant 667$, то есть бактерия A_j будет удовлетворять заданному условию.

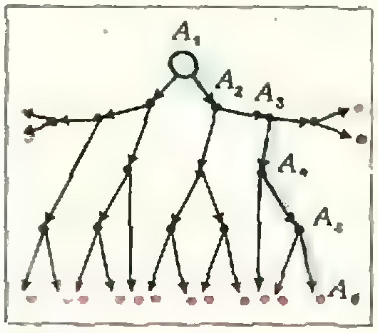


Рис. 1.

Точно так же можно доказать, что если в конце получилось M бактерий, то для любого натурального c найдется бактерия, число потомков которой N удовлетворяет условиям $c\leqslant N<2c$.

Н. Б. Васильев

М312. *В параллелограмм P_1 вписан параллелограмм P_2, в который в свою очередь вписан параллелограмм P_3, причем стороны P_3 параллельны сторонам P_1. Докажите, что хотя бы одна сторона параллелограмма P_3 по длине не меньше половины параллельной ей стороны P_1.*

◆

Заметим прежде всего, что если параллелограмм $ABCD$ *вписан в параллелограмм $KLMN$* (см. рис. 2), то они имеют общий центр симметрии O. Это следует из того, что при симметрии относительно O параллелограмм $KLMN$ переходит в себя, а сторона AB параллелограмма $ABCD$ переходит в равный по длине и параллельный отрезок с концами на соответствующих сторонах параллелограмма $KLMN$, то есть в отрезок CD.

---

*) Решение задачи М310 содержится в статье Г. А. Гуревича «Бесповторные последовательности» («Квант», 1975, № 9).

Поэтому у параллелограммов P_1, P_2 и P_3 — общий центр симметрии. Из этого получаем, что четыре закрашенных параллелограмма, расположенных в углах K, L, M и N, конгруэнтны; обозначим длины их сторон соответственно через x и y.

Пусть a и b — длины сторон параллелограмма P_3. Тогда длины сторон параллелограмма P_1 равны $(a+2x)$ и $(b+2y)$. Нам нужно доказать, что либо $a \geqslant \frac{a+2x}{2}$, либо $b \geqslant \frac{b+2y}{2}$, то есть, что либо $a \geqslant 2x$, либо $b \geqslant 2y$. Это будет так, если мы докажем такое неравенство: $ab \geqslant 4xy$.

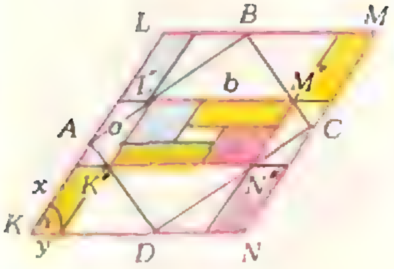


Рис. 2.

Рассмотрим параллелограмм, три вершины которого — точки A, L и B. Поскольку диагональ AB делит его и угловые параллелограммы — левый нижний и правый верхний — на конгруэнтные треугольники, то площади параллелограммов, закрашенных на рисунке 2 синим, равны. Точно так же равны площади параллелограммов, закрашенных желтым, красным и зеленым: все закрашенные параллелограммы равновелики. Очевидно (см. рисунок), что суммарная площадь закрашенных параллелограммов не превышает площади параллелограмма P_3. Но площадь одного закрашенного параллелограмма равна $xy \cdot \sin\alpha$, а площадь параллелограмма P_3 равна $ab \cdot \sin\alpha$; значит,

$$ab \geqslant 4xy,$$

что и требовалось.

И. Н. Клумова

◆

M313. *Дан угол с вершиной O. Рассмотрим множество четвертых вершин M параллелограммов $ONML$, вершины N и L которых лежат на сторонах данного угла, а площадь равна постоянной величине. (Это множество называется гиперболой.) Докажите, что на биссектрисе этого угла и на ее продолжении найдутся такие точки F_1 и F_2 (где $|F_1O| = |F_2O|$), для которых разность расстояний*

$$||F_1M| - |F_2M||$$

не зависит от точки M.

Пусть 2α — заданный угол, A — вершина гиперболы (точка ее пересечения с биссектрисой), A' — симметричная ей точка относительно O, KMQ — перпендикуляр к этой биссектрисе, проходящий через M (K лежит на биссектрисе, Q — на стороне угла, см. рис. 3).

Введем обозначения: $r_1 = |F_1M|$, $r_2 = |F_2M|$, $a = |OA| = |OA'|$, $x = |ON|$, $y = |OL|$, $r = |OM|$, $\varphi = \widehat{AOM}$, наконец, c — искомое расстояние точек F_1 и F_2 от вершины O угла (центра гиперболы). (Для знающих аналитическую геометрию: x и y — косоугольные координаты точки M, а r и φ — ее полярные координаты.)

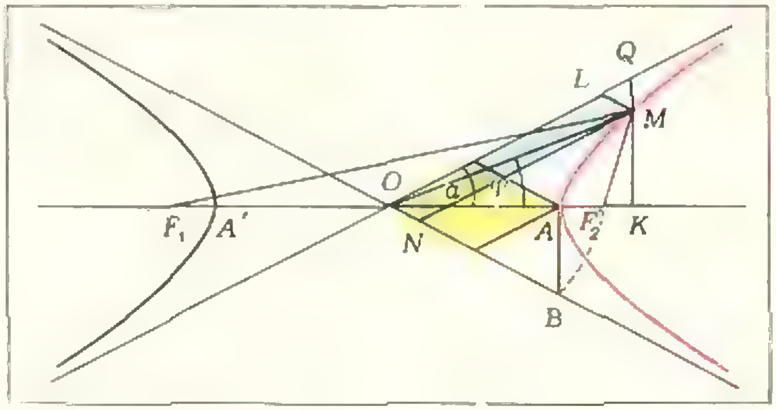


Рис. 3.

По условию задачи, синий и желтый параллелограммы должны иметь одинаковую площадь:

$$k = xy \sin 2\alpha = \left(\frac{a}{2\cos\alpha}\right)^2 \sin 2\alpha,$$

откуда

$$xy = \frac{a^2}{4\cos^2\alpha}. \qquad (1)$$

Нужно найти такое положение F_1 и F_2 (то есть такое значение c), чтобы разность $r_2 - r_1$ была одной и той же для всех точек M гиперболы. В частности, для ее вершины A эта разность $||F_1A| - |F_2A||$, вследствие симметрии ($|F_2A| = |F_1A'|$), равна $|A'A| = 2a$ (оси гиперболы). Значит, эта разность должна быть равна

$$r_2 - r_1 = 2a. \qquad (2)$$

Найдем выражения r_1 и r_2 через постоянные a, c и α (в эти выражения войдут, конечно, и какие-то переменные величины). Применяя теорему косинусов для треугольников F_1MO, F_2MO и OMN, имеем:

$$r_{1,2}^2 = c^2 + r^2 \pm 2cr\cos\varphi \qquad (3)$$

(верхний знак для r_1, нижний для r_2) и

$$r^2 = x^2 + y^2 + 2xy\cos 2\alpha. \qquad (4)$$

Угол φ можно из формулы (3) сразу исключить: из чертежа видно, что

$$r\cos\varphi = |OK| = |OQ|\cos\alpha = (|OL| + |LQ|)\cos\alpha = (|OL| + |LM|)\cos\alpha = (x+y)\cos\alpha;$$

следовательно,

$$r_{1,2}^2 = c^2 + r^2 \pm 2c(x+y)\cos\alpha. \qquad (3')$$

Подставляя (4) в (3′) и используя условие (1) и тождества $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$ и $x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy$, получаем:

$$r_{1,2}^2 = c^2 + (x+y)^2 - 2xy + 2xy\cos 2\alpha \pm 2c(x+y)\cos\alpha =$$

$$= c^2 + (x+y)^2 - \frac{a^2}{2\cos^2\alpha} +$$

$$+ \frac{a^2}{2\cos^2\alpha}(2\cos^2\alpha - 1) \pm 2c(x+y)\cos\alpha =$$

$$= \left[c^2 - \frac{a^2}{\cos^2\alpha}\right] + [(x+y)^2 + a^2 \pm 2c(x+y)\cos\alpha]. \qquad (5)$$

До сих пор c было произвольным. Подберем его теперь так, чтобы формула (5) приобрела возможно более простой вид. Положим $c = \dfrac{a}{\cos\alpha}$ (тогда $|OF_2| = |OB|$, см. рисунок). Тогда формула (5) принимает следующий вид:

$$r_{1,2}^2 = (x+y)^2 + a^2 \pm 2(x+y)\,a = [(x+y) \pm a]^2.$$

Из рисунка ясно, что $x + y > a$ ($|OQ| > |OA|$); следовательно,

$$r_1 = (x+y) + a, \quad r_2 = (x+y) - a.$$

Отсюда получается $r_1 - r_2 = 2a$. Интересно заметить, что $r_1 + r_2 = 2(x+y)$, т. е. *сумма расстояний любой точки гиперболы до ее фокусов равна периметру параллелограмма, лежащего в определении гиперболы.*

И. Н. Бронштейн

М315. *) *На каждом ребре выпуклого многогранника поставлена стрелка так, что в каждую вершину многогранника входит и из каждой выходит хотя бы одна стрелка. Докажите, что существуют по крайней мере две грани многогранника, каждую из которых можно обойти по периметру, двигаясь в соответствии с направлениями стрелок на ее сторонах.*

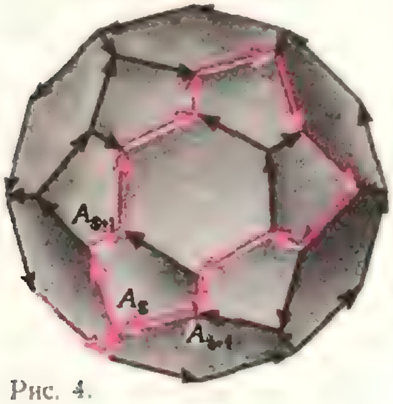


Рис. 4.

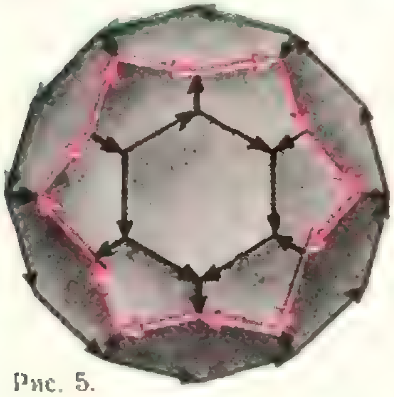


Рис. 5.

Назовем последовательность

$$A_1A_2,\ A_2A_3,\ \ldots,\ A_{l-1}A_l$$

ребер многогранника *путем*

$$P = A_1A_2\ldots A_l,$$

если на всех этих ребрах стрелки направлены в одну сторону: либо от A_1 к A_2, от A_2 к A_3, ..., от A_{l-1} к A_l, либо же от A_l к A_{l-1}, от A_{l-1} к A_{l-2}, ..., от A_2 к A_1.

Так как по условию в каждую вершину многогранника входит и из каждой выходит хотя бы одна стрелка, то любой путь можно удлинить в обе стороны, присоединяя к его концам новые ребра.

Начав с произвольного ребра A_1A_2 многогранника (оно, очевидно, является путем), будем последовательно строить пути $A_1A_2A_3$, $A_1A_2A_3A_4$ и так далее, до тех пор, пока не получится такой путь, в котором одна из вершин встречается дважды: $A_s = A_l$, $1 \leqslant s < l$. Таким образом мы получим *замкнутый* путь $P_0 = A_sA_{s+1}\ldots A_l$ (у него все вершины, кроме крайних, $A_s = A_l$, различны, рис. 4). Так как многогранник выпуклый, то путь P_0 делит его поверхность на две области D и D'. Покажем, что в каждой области имеется по крайней мере одна грань, которую можно обойти по периметру, двигаясь в соответствии с направлениями стрелок на ее сторонах.

Возьмем область D; пусть она состоит из $k_0 \geqslant 1$ граней многогранника. Если $k_0 = 1$, то эта область (ограниченная путем P_0) является нужной гранью. Если же $k_0 > 1$, то в области D есть ребро A_lB, не входящее в путь P_0 (причем A_l входит в P_0). Начав с этого ребра, будем строить путь через вершину B внутри области D до тех пор, пока не получится путь, у которого одна из вершин встречается дважды (если мы выйдем на границу области D, то дальше по пути P_0 возвратимся к A_l). Так мы получим новый замкнутый путь P_1 (рис. 5). Путь P_1 лежит внутри области D и не совпадает с P_0; значит, область, ограниченная путем P_1, состоит из $k_1 < k_0$ граней многогранника. Если $k_1 = 1$, то P_1 ограничивает искомую грань; если же $k_1 > 1$, то точно так же построим замкнутый путь P_2, ограничивающий область, которая состоит из $k_2 < k_1$ граней, и так далее. Так как все числа k_i — натуральные и $k_{i+1} < k_i$, то за конечное число шагов мы получим замкнутый путь P_0, ограничивающий ровно одну — искомую — грань.

Вторую искомую грань можно найти точно так же, рассматривая D' — вторую из областей, на которые путь P_0 разделил наш многогранник.

А. М. Зубков

Ф318. *При каком C_1 емкость системы конденсаторов, показанной на рисунке 6, равна: а) C; б) kC $(k \neq 1)$; в) C_1?*

◆

Пусть рассматриваемая система конденсаторов присоединена к источнику с напряжением U. Из соображений симметрии следует, что заряды конденсаторов емкости kC будут одинаковыми. Обозначим их через Q. Аналогично равны заряды q конденсаторов емкости C. Заряд конденсатора C_1 обозначим через q_1. Расставим произвольно знаки зарядов отдельных обкладок конденсаторов (см. рис. 6).

Заряд $Q_x = Q + q$ системы конденсаторов связан с напряжением $U = U_2 + U_3 = \frac{q}{C} + \frac{Q}{kC}$, приложенным к системе, соотношением $Q_x = C_xU$, где C_x — емкость системы, то есть

$$Q + q = C_x\left(\frac{q}{C} + \frac{Q}{kC}\right). \qquad (1)$$

---

*) Решение задачи М314 будет опубликовано в следующем номере журнала.

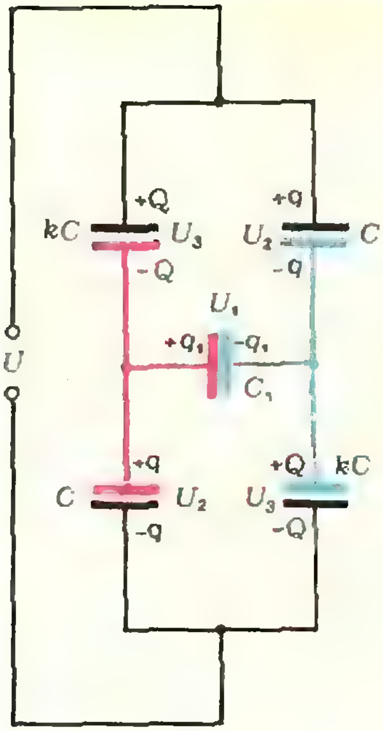


Рис. 6.

Ф319. *На расстоянии 2F от собирающей линзы $Л_1$ с фокусным расстоянием F находится светящийся предмет. Освещенность четкого изображения предмета на экране при этом равна E_0. Между экраном и линзой $Л_1$ поместили рассеивающую линзу $Л_2$ с фокусным расстоянием — 2F. Для получения четкого изображения предмета пришлось экран передвинуть на расстояние, равное F. Определить освещенность изображения предмета во втором случае.*

Работа сил электростатического поля по перенесению любого, а значит и единичного, заряда по замкнутой траектории всегда равна нулю. Обойдя, например, верхний контур (см. рис. 6) против часовой стрелки, получим

$$U_1 - U_2 + U_3 = \frac{q_1}{C_1} - \frac{q}{C} + \frac{Q}{kC} = 0. \qquad (2)$$

Воспользуемся также законом сохранения заряда. Часть системы, показанная на рисунке 6 красным цветом (можно рассмотреть и участок, показанный синим цветом), до присоединения системы к источнику была нейтральной. Так как эта часть изолирована, ее суммарный заряд останется равным нулю:

$$q + q_1 - Q = 0. \qquad (3)$$

Из уравнений (1)—(3) следует, что

$$C_x = \frac{2kC + (1 + k)C_1}{2C_1 + (1 + k)C} C.$$

Отсюда легко получить, что

а) $C_x = C$ при $C_1 = -C$, что невозможно;

б) $C_x = kC$ $(k \neq 1)$ при $C_1 = -kC$, что также невозможно;

в) $C_x = C_1$ при $C_1 = \sqrt{k} C$.

◆

Из условия задачи следует, что изображение предмета, создаваемое линзой $Л_1$, находится от нее на расстоянии 2F (это легко проверить по формуле линзы). Пусть рассеивающую линзу $Л_2$ поместили на расстоянии x от линзы $Л_1$ (рис. 7). Очевидно, что для получения четкого изображения экран пришлось отодвинуть дальше от линз. Прежнее изображение, созданное линзой $Л_1$, можно рассматривать как мнимый предмет для линзы $Л_2$. Тогда расстояние от «предмета» до линзы $Л_2$ будет $2F - x$, а расстояние от изображения до этой линзы $3F - x$. Из формулы линзы

$$-\frac{1}{2F - x} + \frac{1}{3F - x} = -\frac{1}{2F}$$

можно найти x. Вычисления дают $x = F$.

Теперь найдем линейное увеличение линзы $Л_2$:

$$Г = \frac{H}{h} = \frac{3F - x}{2F - x} = 2.$$

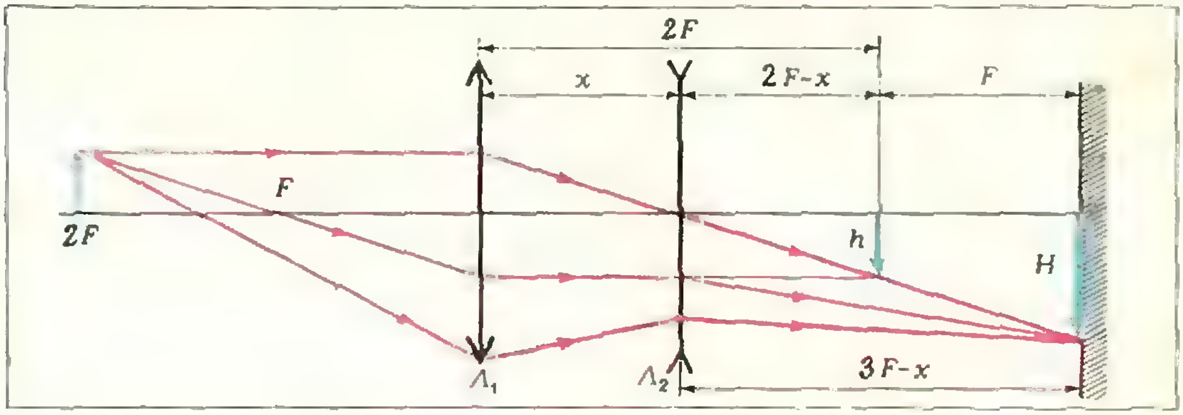


Рис. 7.

Следовательно, если через линзу $Л_2$ проходит весь световой поток, который падал на линзу $Л_1$, то во втором случае этот поток распределяется по площади в $Г^2 = 4$ раза большей. Поэтому освещенность изображения будет в четыре раза меньше, то есть $E = E_0/4$.

Ф320. *В откачанном сосуде емкостью $V = 1$ л находится 1 г гидрида урана UH_3. При нагреве до температуры $t_1 = 400°C$ гидрид полностью разлагается на уран (атомный вес $A = 238$) и водород. Найти давление водорода в сосуде при этой температуре.*

◆

Реакция разложения гидрида урана идет по уравнению
$$2UH_3 = 2U + 3H_2,$$
то есть из 482 г (из двух молей) гидрида урана получается 476 г (два моля) урана и 6 г (три моля) водорода. Соответственно, из 1 г гидрида урана получится $m = 6/482$ г водорода. Считая водород идеальным газом, найдем его давление при данных условиях ($T = 673°K$, $V = 10^{-3}$ $м^3$). Из уравнения состояния идеального газа

$$p = \frac{m}{\mu}\frac{RT}{V} \approx 35 \cdot 10^3 \ н/м^2.$$

Ф321. *На горизонтальную мембрану насыпан мелкий песок. Мембрана совершает колебания с частотой $\nu = 500$ гц в вертикальной плоскости. Какова амплитуда колебаний мембраны, если песчинки подскакивают на высоту $h = 3$ мм по отношению к положению равновесия мембраны?*

◆

Пусть колебания мембраны происходят по закону
$$x = A \sin \omega t,$$
где x — смещение от положения равновесия, A — амплитуда, $\omega = 2\pi\nu$ — циклическая частота колебаний. В начальный момент времени $t = 0$ мембрана и песчинки на ней находятся в положении равновесия. Затем мембрана удаляется от положения равновесия, например, вверх.

На песчинку, движущуюся вместе с мембраной, действуют две силы: сила тяжести $m\mathbf{g}$ и сила $\mathbf{N}$ реакции мембраны (рис. 8). Запишем уравнение движения песчинки:
$$N - mg = ma.$$
В момент отрыва песчинки сила реакции N обращается в нуль, и, следовательно, ускорение песчинки $a = -g$. Таким образом, песчинка отрывается от мембраны в тот момент времени t_0, когда ее ускорение равно $-g$. Дальше песчинка продолжает двигаться до высоты h как тело, брошенное вертикально вверх на высоте h_0, равной отклонению мембраны от положения равновесия в момент t_0, с начальной скоростью v_0, равной скорости мембраны в тот же момент t_0 (см. рис. 8). По закону сохранения механической энергии

$$mgh_0 + \frac{mv_0^2}{2} = mgh. \qquad (*)$$

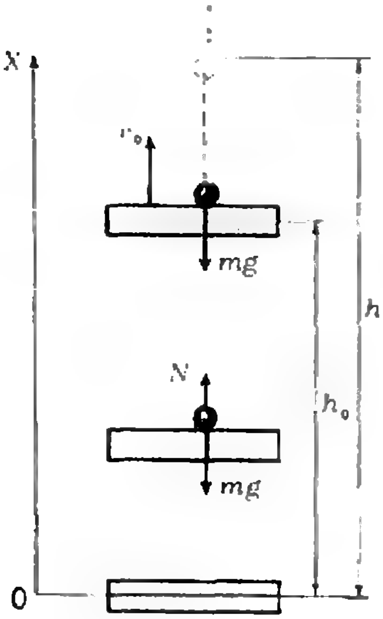


Рис. 8.

Рассмотрим теперь более подробно движение мембраны и свяжем величины h_0 и v_0 с амплитудой колебаний мембраны.

Скорость мембраны в любой момент времени равна $v = \omega A \sin(\omega t + \pi/2) = \omega A \cos \omega t$, а ускорение $a = -\omega^2 x = -\omega^2 A \sin \omega t$. В момент отрыва t_0

$$v = v_0 = \omega A \cos \omega t_0,$$
$$a = -g = -\omega^2 A \sin \omega t_0,$$
$$x = h_0 = A \sin \omega t_0.$$

Из уравнения ускорения $\sin \omega t_0 = \frac{g}{\omega^2 A}$, следовательно, $h_0 = g/\omega^2$ и $v_0 = \omega A \cos \omega t_0 = \sqrt{\omega^2 A^2 - g^2/\omega^2}$

Подставив значения h_0 и v_0 в уравнение (*), получим
$$A = \frac{\sqrt{2gh\omega^2 - g^2}}{\omega^2} \approx 77{,}2 \cdot 10^{-6} \ м \approx 0{,}077 \ мм.$$

Б. Б. Буховцев

ПРАКТИКУМ
АБИТУРИЕНТА

Учитесь делать дополнительные построения

С. Б. Белый

Почти каждую геометрическую задачу можно решить несколькими способами. Всегда интересно попытаться найти наиболее простое, «красивое» решение — тем более, что такие решения высоко оцениваются экзаменаторами. В этом очень часто помогают дополнительные построения. В одних случаях эти построения напрашиваются сами собой, в других они не так очевидны и требуют от решающего большого опыта, изобретательности, геометрической интуиции.

Перейдем к рассмотрению конкретных задач.

З а д а ч а 1. *На катетах AC, BC прямоугольного треугольника вне его построены квадраты $ACDE$ и $BCKF$. Из точек E и F на продолжение гипотенузы опущены перпендикуляры EM и FN. Доказать, что $EM + FN = AB$.*

В прямоугольном треугольнике ACB проведем высоту CL (см. рис. 1). Очевидно, что $\Delta ACL = \Delta EAM$, $\Delta BCL = \Delta FBN$. Поэтому $EM = AL$, $FN = LB$, $EM + FN = AL + LB = AB$.

З а д а ч а 2. (МФТИ, 1970). *Найти высоту равнобедренной трапеции, если ее диагонали взаимно перпендикулярны, а площадь трапеции равна S.*

Проведем через вершину C прямую, параллельную диагонали BD до пересечения с продолжением основания трапеции AD в точке E (см. рис. 2). Так как трапеция равнобедренная, а диагонали ее взаимно перпендикулярны, то треугольник ACE — равнобедренный и прямоугольный (докажите!). В треугольнике ACE проведем высоту CF, обозначим ее длину через h. Ясно, что $AF = CF$, но AF равно средней линии трапеции, поэтому $S = h^2$. Следовательно, $h = \sqrt{S}$.

Как видим, эта задача совсем простая, основной трудностью при

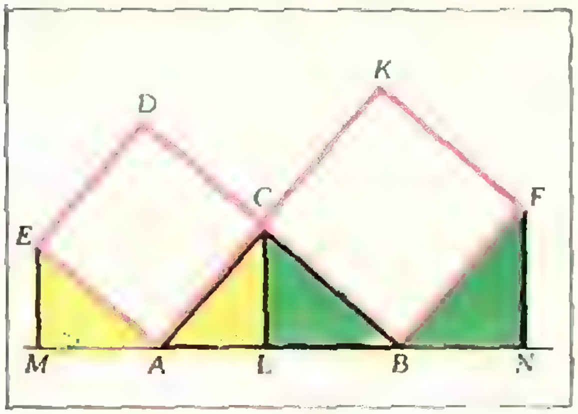


Рис. 1.

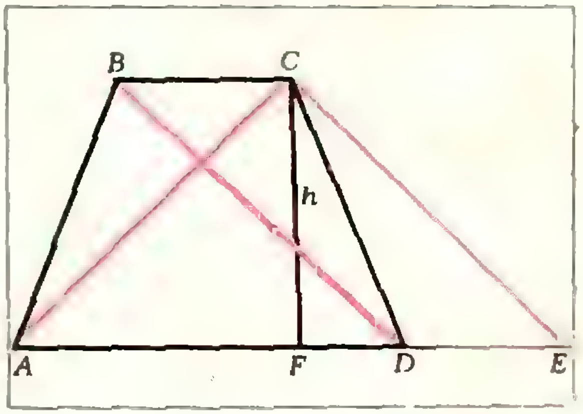


Рис. 2.

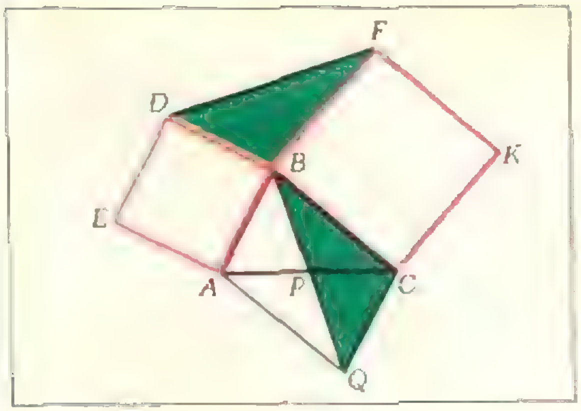


Рис. 3.

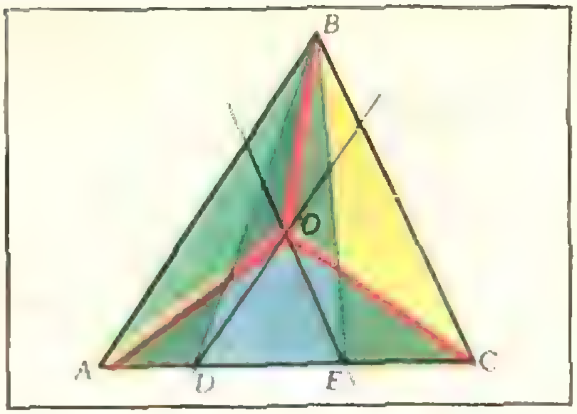


Рис. 4.

ее решении было догадаться сделать подходящие дополнительные построения.

Задача 3. *На сторонах AB и BC треугольника ABC построены вне его квадраты $ABDE$ и $BCKF$. Доказать, что отрезок DF в два раза больше медианы BP треугольника.*

Достроим треугольник ABC до параллелограмма, а медиану BP продолжим до его диагонали (см. рис. 3). Пусть $\measuredangle ABC = \alpha$, тогда $\measuredangle DBF = 180^\circ - \alpha$. Но и $\measuredangle BCQ = 180^\circ - \alpha$, а стороны, заключающие эти углы, также равны между собой, поэтому $\Delta DBF = \Delta QCB$. Следовательно, $BQ = 2BP = DF$.

Задача 4. *Внутри треугольника найти такую точку, что если ее соединить отрезками прямых с вершинами треугольника, то треугольник разделится на три части, площади которых относятся как $m:n:q$.*

Основание AC треугольника ABC разделим точками D и E на три части в данном отношении $m:n:q$ (рис. 4). Через точку D проведем прямую, параллельную стороне AB, а через точку E — прямую, параллельную BC. Докажем, что точка O пересечения этих прямых — искомая. Для доказательства соединим вершину B с точками D и E. $S_{\Delta AOB} = S_{\Delta ABD}$, так как эти треугольники имеют общее основание AB и равные высоты. Аналогично $S_{\Delta BOC} = S_{\Delta BEC}$, а следовательно и $S_{\Delta AOC} = S_{\Delta DBE}$. Но площади треугольников ABD, DBE, EBC относятся как $m:n:q$, так как все они имеют одинаковую высоту. Следовательно, $S_{\Delta AOB} : S_{\Delta AOC} : S_{\Delta BOC} = m:n:q$.

Задача 5. *Через точку пересечения медиан треугольника ABC проведена прямая l, пересекающая стороны AB и AC. Доказать, что сумма расстояний от прямой l до вершин B и C равна расстоянию от нее до вершины A.*

Пусть O — точка пересечения медиан треугольника, AD — медиана (рис. 5). Опустим перпендикуляры BM, DL, CN, AK на прямую l. Легко видеть, что DL — средняя линия трапеции $BMNC$, $DL = \frac{BM + CN}{2}$, и $\Delta AKO \backsim \Delta DLO$, поэтому $\frac{DL}{AK} = \frac{DO}{OA} = \frac{1}{2}$ и $AK = 2DL = BM + CN$.

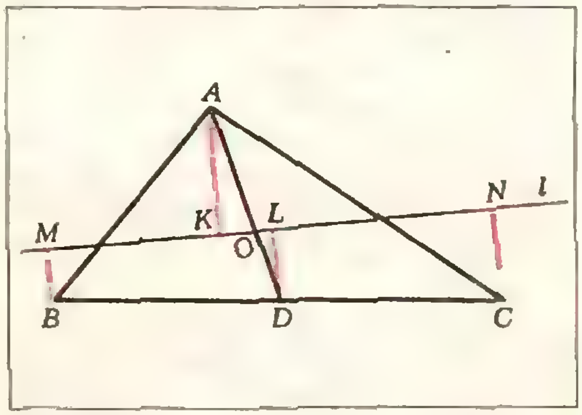


Рис. 5.

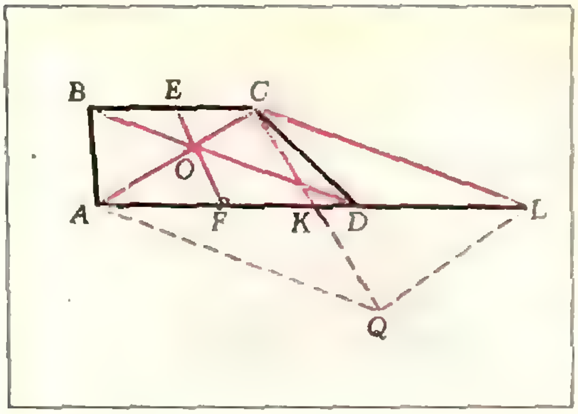


Рис. 6.

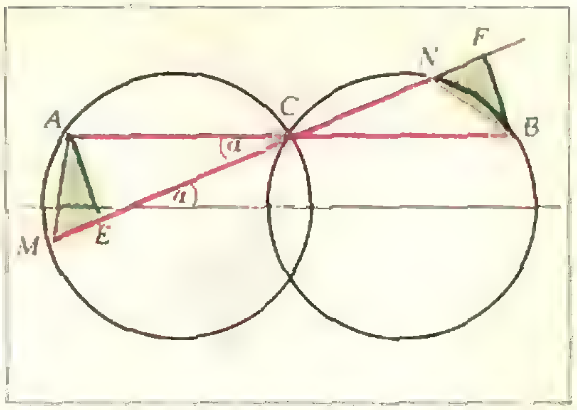


Рис. 7.

З а д а ч а 6. (МГУ, мехмат, 1973). *В трапеции диагонали равны 3 и 5, а отрезок, соединяющий середины оснований, равен 2. Найти площадь трапеции.*

Прежде всего заметим, что точки E и F — середины оснований BC и AD трапеции $ABCD$ (см. рис. 6) — и точка O пересечения диагоналей лежат на одной прямой (докажите!). Через точку C проведем две прямые: одну параллельно диагонали BD до пересечения с продолжением основания AD в точке L, другую — параллельно EF. Поскольку OF — медиана треугольника AOD, то CK — медиана треугольника ACL. Теперь достроим треугольник ACL до параллелограмма, а медиану CK до его диагонали. $S_{\square ABCD} = S_{\Delta ACL} = S_{\Delta ACQ}$ (почему?). Остается заметить, что ΔACQ прямоугольный, $S_{\Delta ACQ} = 6$.

З а д а ч а 7 (МФТИ, 1970). *Две равные окружности пересекаются в точке C. Через точку C проведены две прямые, пересекающие данные окружности в точках A, B и M, N соответственно. Прямая AB параллельна линии центров, а прямая MN образует угол α с линией центров. Длина AB равна a. Найти длину отрезка MN.*

Из точек A и B опустим перпендикуляры AE и BF на прямую MN (см. рис. 7). Пусть $\sphericalangle AMC = \beta$, тогда $\sphericalangle CNB = 180^\circ - \beta$ (почему?), а $\sphericalangle FNB = \beta$. Из равенства треугольников AEC и BFC (по гипотенузе и углу) следует, что $AE = BF$. А так как $\sphericalangle AMC = \sphericalangle FNB$, то $\Delta AEM = \Delta BFN$ и $ME = NF$. Поэтому $MN = EF = EC + CF =$

$$= \frac{a}{2}\cos\alpha + \frac{a}{2}\cos\alpha = a\cos\alpha.$$

З а д а ч а 8 (МФТИ, 1973). *Две окружности радиусов R и r $(R > r)$ имеют внешнее касание в точке A. Через точку B, взятую на большей окружности, проведена прямая линия, касающаяся меньшей окружности в точке C. Найти длину отрезка BC, если хорда AB равна a.*

Через центр O меньшей окружности и точку B проведем прямую (см. рис. 8). Тогда $BC^2 = OB^2 - r^2$. По теореме косинусов

$$OB^2 = (R + r)^2 + R^2 - \\ -2R(R + r)\cos\sphericalangle AO_1B,$$

откуда

$$\cos\sphericalangle AO_1B = \frac{2R^2 - a^2}{2R^2}.$$

Следовательно,

$$BC^2 = (R + r)^2 + R^2 - 2R(R + r) \times \\ \times \frac{2R^2 - a^2}{2R^2} - r^2 = a^2\left(\frac{R + r}{R}\right),$$

$$BC = a\sqrt{1 + \frac{r}{R}}.$$

З а д а ч а 9 (МГУ, биофак, 1973). *Через середину M стороны BC параллелограмма $ABCD$, площадь которого равна 1, и вершину A проведена прямая, пересекающая диаго-*

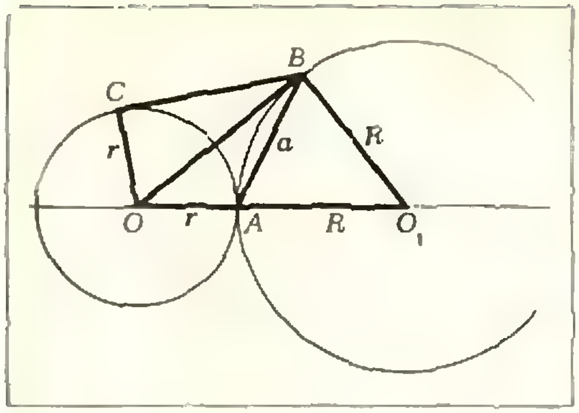


Рис. 8.

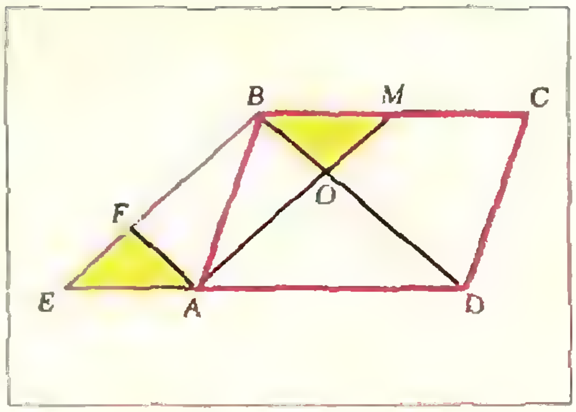


Рис. 9.

наль BD в точке O. Найти площадь четырехугольника OMCD.

Через точку B проведем прямую параллельно AM до перессечения с продолжением стороны AD в точке E, а через точку A—прямую AF параллельно BD (см. рис. 9), $S_{\triangle EBD}=\frac{3}{4}$ (почему?). Теперь в силу подобия треугольников EFA и EBD мы можем записать: $\frac{S_{\triangle EFA}}{S_{\triangle EBD}}=\frac{EA^2}{ED^2}$.

Но $\frac{EA^2}{ED^2}=\frac{1}{9}$, отсюда находим $S_{\triangle EFA}=\frac{1}{12}$. Но $S_{\Delta EFA}=S_{\Delta BOM}$, и теперь мы можем найти площадь четырехугольника $OMCD$:

$$S_{OMCD}=S_{\triangle BDC}-S_{\triangle BOM}=\frac{5}{12}.$$

Сделаем некоторые выводы. Приступая к решению геометрической задачи, нужно иметь в виду, что обычно геометрическая задача может быть решена несколькими способами. Поэтому, если у вас появилась идея решения задачи, но вы видите, что путь к решению довольно длинный, то постарайтесь найти другой подход к решению. При этом следует помнить, что существенную помощь могут оказать дополнительные построения.

Упражнения

1 (МФТИ, 1963). Найти площадь треугольника, медианы которого равны 12, 15 и 21 *см*.

2 (МФТИ, 1967). Основания равнобочной трапеции относятся как 3 : 2. На большем основании, как на диаметре, построена окружность, высекающая на меньшем основании отрезок, равный половине этого основания. В каком отношении окружность делит боковые стороны трапеции?

3 (МФТИ, 1969). В прямоугольной трапеции диагонали взаимно перпендикулярны, а основания относятся, как $m:n$. Найти отношение диагоналей трапеции.

4 (МФТИ, 1970). В трапеции $ABCD$ длина большего основания AD равна a, $BC\perp CD$, $AB=BC$, $BD\perp AB$. Найти стороны трапеции.

5. (МФТИ, 1970). В равнобедренной трапеции с острым углом α при основании окружность, построенная на боковой стороне как на диаметре, касается другой боковой стороны. В каком отношении она делит большее основание трапеции?

6 (МГУ, экономич. ф-т, 1964). В трапеции с основаниями a и b через точку пересечения диагоналей проведена прямая, параллельная основаниям. Найти отрезок этой прямой, заключенный между боковыми сторонами трапеции.

7 (МГУ, химфак, 1967). В треугольнике ABC из вершины A проведена прямая, пересекающая сторону BC в точке D, находящейся между точками B и C, причем $CD:BC=\alpha$ (где $\alpha<\frac{1}{2}$). На стороне BC между точками B и D взята точка E и через нее проведена прямая, параллельная стороне AC и пересекающая сторону AB в точке F. Найти отношение площадей трапеции $ACEF$ и треугольника ADC, если известно, что $CD=DE$.

8 (МГУ, мехмат, 1973). В трапеции $ABCD$ точки K и M являются соответственно серединами оснований $AB=5$ и $CD=3$. Найти площадь трапеции, если треугольник AMB — прямоугольный, а DK — высота трапеции.

РЕЦЕНЗИИ. БИБЛИОГРАФИЯ

История математики

В трехтомном коллективном труде «История математики» (изд. «Наука», М., 1970—1972), в подготовке которого участвовали профессора А. П. Юшкевич — он же редактор всего издания, — И. Г. Башмакова, Б. А. Розенфельд и другие видные специалисты в этой области, описана история математики с древнейших времен до XIX столетия.

Для правильного понимания современной науки необходимо знание ее истории. Тем более полезна история, содержащая изложение сущности основных открытий, идей, методов. Рецензируемая книга вводит читателей в мир науки, иногда похожий на мир фантазии. Она написана таким увлекательным и ярким языком, что читается с необычной легкостью.

Первый том состоит из двух частей: «Математика в древности» и «Математика в средние века». Сначала освещается развитие математики в доисторические времена, развитие счета, возникновение числовых обозначений, геометрических понятий. Затем читатель знакомится с математикой древнеегипетского царства, с первыми папирусами, с вавилонской шестидесятеричной системой счисления и клинописной записью решения некоторых квадратных уравнений, с измерением площадей и объемов и первыми применениями теоремы Пифагора в общем случае. Чрезвычайно интересно приведенное в конце первой части описание истории математики древней Греции. Если до этого решались отдельные задачи, то в древней Греции родилась наука. Книга знакомит читателя с наиболее видными древнегреческими учеными и их трудами. Из второй части первого тома читатель узнает о математике древнего и средневекового Китая, древней и средневековой Индии, затем дается описание математики в странах ислама VIII—X веков, в частности, Средней Азии. Далее рассматривается математика феодальной Европы и Закавказья, ее возникновение и влияние на ее развитие математики древней Греции, Византии и арабов. Интересно описание математики и рассказы о математиках эпохи Возрождения.

Второй том знакомит читателя с революцией в математике в XVII столетии. Подробно рассматриваются открытия в каждой области науки. Здесь читатель знакомится с Декартом, его геометрией, математическими работами Ферма, Дезарга и многих других математиков. Интересна и вполне доступна глава, знакомящая читателей с открытием дифференциального и интегрального исчисления Ньютоном и Лейбницем.

Третий том знакомит читателя с математикой XVIII столетия, временем бурного развития различных отраслей математики и в первую очередь математического анализа. В этой главе дается описание трудов одного из крупнейших математиков XVIII века петербургского академика Эйлера, а также Маклорена, Даламбера, Д. Бернулли, Лагранжа, Гаусса и других.

Более сложна глава по теории вероятностей. Для чтения ее математической части требуется знание основных понятий теории вероятностей. Но и описательная ее часть сама по себе интересна.

Отдельная глава посвящена геометрии. В ней рассматриваются аналитическая и дифференциальная геометрия на плоскости и в пространстве, кривые высших порядков. Особо освещаются работы Клеро, Монжа, Эйлера. Интересно изложена история и основные понятия сферической геометрии и тригонометрии.

Две заключительные главы относятся к решению обыкновенных дифференциальных уравнений и дифференциальных уравнений с частными производными и вариационному исчислению. Большая часть материала этих глав требует специальной математической подготовки. Однако читатели «Кванта» могут по этим главам познакомиться с историей вопроса и постановкой задач.

К сожалению, тираж этой интересной и хорошо оформленной книги невелик и она уже стала библиографической редкостью. Необходимо переиздать книгу большим тиражом в расчете на массового читателя: учащихся физико-математических школ, учителей, студентов и вообще любителей математики.

И. С. Петраков

Книга о космических фейерверках

«В период Чжун-Цин, во второй год, 10-ю луну в день Квэй-Хао появилась необыкновенная звезда посредине Нан-Мэн. Она была величиной с бамбуковые счеты и последовательно показывала пять цветов. Постепенно она уменьшала свой блеск к 6-й луне следующего года, когда исчезла». Так со ссылкой на лунный календарь и счетом лет по периодам правления императоров рассказывается в китайской летописи о появлении звезды-гостьи. Ученые установили, что эта звезда появилась 7 декабря 185 г. н. э. и была видна до июля 186 г.

Что же происходило в это время на небе? Астрономы уверены, что в летописи говорится о вспыхнувшей сверхновой звезде, ставшей ярче Венеры.

Вспышки сверхновых — очень редкое явление. В нашей Галактике последнюю вспышку сверхновой наблюдали Кеплер и его современники в 1604 году. Конечно, это не означает, что с тех пор в Галактике не вспыхивали сверхновые, так как некоторые из них астрономы могли случайно не заметить, а другие не были видны с наблюдательного пункта.

Но астрономия XX века далеко шагнула за пределы нашей Галактики. В беспредельном мире галактик астрономы регулярно открывают сверхновые: с 1885 г. число сверхновых, зарегистрированных в других галактиках, превысило 100. Уже налажено патрулирование галактик с целью открытия в них сверхновых. В эту работу включились астрономы многих стран.

Но почему вспышки сверхновых так интересуют астрономов? Наблюдаемое гигантское увеличение блеска (некоторые из сверхновых иногда превосходят по блеску галактику, в которой они вспыхнули!), а также тщательный анализ спектров сверхновых и непрерывно расширяющихся оболочек, выброшенных этими звездами, свидетельствуют о том, что сверхновые — это взрывающиеся звезды. Вспышки сверхновых относятся к одному из самых грандиозных явлений, происходящих сейчас во Вселенной, уступая, пожалуй, лишь загадочным процессам в ядрах галактик и квазаров. Астрономы имеют серьезные основания думать, что исследование далеко еще не ясных процессов, вызывающих и сопровождающих вспышки сверхновых, окажет существенное влияние на наши представления о происхождении и развитии звезд, о синтезе химических элементов во Вселенной, о происхождении космических лучей, о природе нетеплового оптического, рентгеновского, гамма- и радиоизлучений.

О том, как буквально по крупицам сведений постепенно складывались наши знания о сверхновых и новых звездах, рассказывается в книге московского астронома Ю. П. Псковского, которая так и называется. «Новые и сверхновые звезды» *).

Со сверхновыми читатель встретится во второй части книги, на страницах которой очень «физично», образно и доступно повествуется о том, как астрономы открывают и исследуют сверхновые звезды.

Вы наверняка с огромным интересом прочитаете о пульсарной эпопее, узнаете о том, как английские радиоастрономы во главе с профессором А. Хьюишем открыли пульсары по поразительно строгой периодичности всплесков их радиоизлучения, как ученые пришли к мысли о том, что пульсары — это быстровращающиеся нейтронные звезды. Те самые нейтронные звезды, которые около сорока лет назад были предсказаны академиком Л. Д. Ландау и некоторыми другими физиками-теоретиками, но до сих пор оставались неоткрытыми, несмотря на многочисленные титанические попытки астрономов-наблюдателей, мечтавших обнаружить нейтронные звезды во Вселенной.

Открытие пульсаров позволило астрономам «увидеть» финальную стадию эволюции некоторых звезд. Такие звезды в конце своего жизненного пути должны стремительно сжиматься. Начинают разрушаться и дробиться на нейтроны и протоны ядра атомов вещества звезды. Образовавшиеся протоны поглощают электроны и, выделяя энергию, тоже превращаются в нейтроны. Образование нейтронной звезды — катастрофический взрывной процесс с бурным выделением энергии. При взрыве возникает ударная волна, выбрасывающая наружные слои звезды и порождающая расширяющуюся газовую оболочку. Все это мы и видим как вспышку далекой сверхновой. Далекой? А не может ли сверхновая вспыхнуть где-нибудь поблизости? А не вспыхивали ли такие звезды вблизи нашей Солнечной системы в прошлом? И на эти вопросы вы найдете ответы в книге Ю. П. Псковского.

Мы уже упомянули, что сверхновым посвящена не вся книга Ю. П. Псковского, а лишь вторая ее половина. О чем же рассказывается в первой? Прежде всего об обыкновенных звездах и о

---

*) Ю. П. Псковский. Новые и сверхновые звезды. М., «Наука», 1974.

новых звездах. Автор очень сжато и понятно сообщает много важных сведений о природе звезд. Особенно содержательны главы, посвященные различным типам новых звезд. Одним из существенных результатов, полученных в итоге недавних исследований новых звезд, является вывод о том, что новые звезды, как правило, входят в состав двойных систем звезд. Астрономы давно исследуют различные типы двойных звезд, но лишь сравнительно недавно выяснилось, что одним из компонентов двойной системы может быть не обыкновенная звезда, а новая или новоподобная. Возможны и еще более экзотически варианты, когда в паре с обычной звездой оказывается «обыкновенный» радиопульсар или рентгеновские источники, или даже «черные дыры»...

Ю. П. Псковский подробно описывает, как выглядит процесс развития вспышки новой; рассказывает о гипотезах, касающихся причин взрыва в новых звездах. Автор книги приходит к выводу, что «гипотезы о причинах вспышек новых звезд пока еще носят чисто схематический характер и только начинают разрабатываться всерьез». Вместе с тем он подчеркивает, что «для астрономов стало несомненно: наше Солнце не принадлежит и не будет принадлежать к классу звезд, из которых образуются новые». Это, конечно, чрезвычайно важный и очень приятный для обитателей Земли вывод: вряд ли кому-либо доставило бы удовольствие узнать, что наше Солнце — звезда, способная взорваться если не как сверхновая, то хотя бы как новая!

В книге Ю. П. Псковского много сложного материала. Но стремление автора изложить его в интересной и доступной для неспециалиста форме делает книгу увлекательной и полезной, особенно для тех, кто интересуется астрономией и «астрономическими приложениями» физики.

Е. П. Левитан

Вечный двигатель?

Представьте себе, что два шара (назовем их A и B) погружены в жидкость. Плотность жидкости равна ρ, плотности шаров соответственно ρ_1 и ρ_2, их объемы — V_1 и V_2. Будем считать, что жидкость занимает все пространство, шары взаимодействуют между собой и с жидкостью гравитационными силами, а плотности их таковы, что $\rho_1 < \rho < \rho_2$.

Рассмотрим поведение шаров в жидкости. На шар A действует сила притяжения со стороны шара B и сила притяжения со стороны «зеркального изображения» шара B — шарика жидкости объема $V_2' = V_2$. Силы притяжения шара A ко всем другим объемам жидкости скомпенсированы. Так как $\rho_2 > \rho$, то результирующая сила, действующая на шар A, будет направлена в сторону шара B. Те же самые рассуждения показывают, что результирующая сила, действующая на шар B, будет направлена от шара A. Действующие на шары силы будут сообщать им ускорения. Таким образом, шар B будет убегать от A, а шар A будет догонять B. Подобрав размеры шаров и их плотности так, чтобы сообщаемые ускорения были одинаковы (например, пусть размеры шаров одинаковы, а $\rho = \frac{\rho_1 + \rho_2}{2}$), получим систему, которая может быть разогнана сама собой до сколь угодно больших скоростей. А как же быть с законом сохранения энергии? И импульса? Нельзя ли таким способом создать вечный двигатель?

Увы! Вечный двигатель не выйдет. В своих рассуждениях, которые привели нас к парадоксу, мы забыли еще одну силу, действующую на каждый шарик. Попробуйте найти эту силу. Найдите, как на самом деле будут вести себя шарики. Рассмотрите, что произойдет, если оба шара будут тяжелее или легче жидкости. Вы увидите замечательные явления: в некоторых случаях шары будут притягиваться друг к другу, в других случаях отталкиваться — совсем как электрические заряды. Попробуйте наиболее полно решить эту задачу, рассмотреть все возможные варианты и пофантазировать. Вы получите удовольствие, как от настоящего научного исследования.

В. К. Игнатович,
А. А. Чешков

Новые книги

В этом номере мы публикуем аннотации на книги, выходящие в IV квартале 1975 года. Заказы на книги надо оформлять через специализированные магазины или магазины «Книга — почтой».

Математика

Издательство «Наука»

1. Маркушевич А. И. *Целые функции.* Издание 2-е. Объем 5 л., тираж 30 000 экз., цена 15 к.

Все важнейшие функции, изучаемые в курсе математики средней школы, являются либо целыми (многочлен, показательная функция, синус, косинус), либо частными двух целых функций (дробно-рациональная функция, тангенс, котангенс и т. д.), либо, наконец, функциями, обратными по отношению к названным. Однако элементарные функции — это лишь простейшие представители обширного класса целых функций.

Настоящая книжка знакомит читателя, не владеющего этой теорией, с важнейшими свойствами целых функций. Книга рассчитана на всех лиц, желающих расширить и углубить свои математические познания.

2. Лысенко В. И. *Николай Иванович Фусс (1755—1825).* Объем 7 л., тираж 10 000 экз., цена 50 к.

В книге освещена жизнь, научная и педагогическая деятельность математика, механика, астронома Николая Ивановича Фусса (1755—1825), действительного члена Петербургской академии наук, ее непременного секретаря, сотрудника и ближайшего помощника знаменитого Леонарда Эйлера. В книге использованы материалы Архива Академии наук СССР и редкие печатные источники, дан обзор трудов Н. И. Фусса, приведена обширная библиография.

Книга рассчитана на всех любителей истории математики.

Издательство «Просвещение»

3. *Хрестоматия по истории математики.* Под редакцией А. П. Юшкевича. Объем 23 л., тираж 40 000 экз., цена 90 к.

Предлагаемая книга содержит подборку оригинальных текстов по арифметике, алгебре, теории чисел и геометрии, характеризующих развитие указанных областей математики, начиная с древнего Вавилона и древнего Египта.

Книга будет полезна учителям математики, ученикам старших классов, а также всем интересующимся математикой и ее историей.

4. Кордемский Б. А. *Математика изучает случайности.* Объем 10 л., тираж 100 000 экз., цена 38 к.

Книга представляет собой популярное введение в теорию вероятностей. Она рассчитана на учащихся старших классов средней школы. На конкретных примерах, взятых из реальной жизни и различных областей науки, читатель постепенно знакомится со своеобразием мира случайных событий, с их основными законами.

В пособии рассказывается о создателях науки, дается краткий обзор начальных этапов ее развития. В конце каждой главы имеется достаточный набор задач для самостоятельного решения.

Физика

Издательство «Наука»

1. *Элементарный учебник физики.* Под редакцией Г. С. Ландсберга. Том III. (Колебания и волны, оптика, строение атома.) Издание 9-е. Объем 36 л., тираж 300 000 экз., цена 1 р. 13 к.

Достоинством курса является глубина изложения физической стороны различных процессов в природе и технике. Изложение материала ведется простым, ясным языком. Книга богато иллюстрирована.

Рассчитана на преподавателей физики и учащихся старших классов средней школы. Может служить ценным пособием для самообразования.

2. Гребенников Е. А., Рябов Ю. А. *Поиск и открытие планет.* Объем 8 л., тираж 25 000 экз., цена 30 к.

Книга в популярной форме рассказывает о том, как были открыты три планеты Солнечной системы, невидимые невооруженным глазом, — Уран, Нептун и Плутон. Читатель узнает о законах, управляющих движением тел Солнечной системы, и о том, как эти законы были применены к поискам новых планет. Отдельные главы книги посвящены открытиям малых планет — астероидов, а также поискам планет, более близких к Солнцу, чем Меркурий, и более далеких от Солнца, чем Плутон.

3. Идельсон Н. И. *Этюды по истории планетных теорий.* Объем 30 л., тираж 20 000 экз., цена 2 р. 20 к.

Книга известного советского астронома профессора Н. И. Идельсона состоит из отдельных историко-научных очерков-этюдов, в которых в увлекательной форме рассказывается о классических теориях небесной механики: теории тяготения, теории фигуры Земли, теории движений небесных тел.

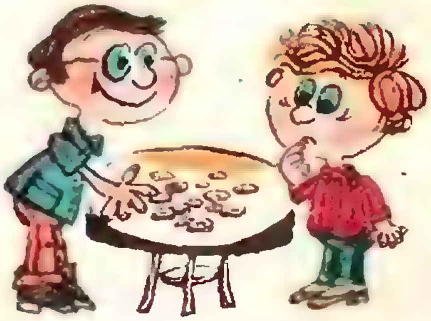
Т. С. Петрова,
М. Л. Смолянский

«Квант» для младших школьников

Задачи

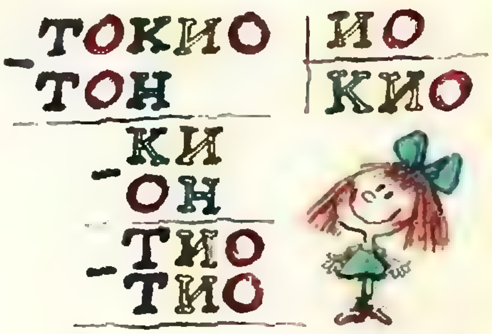
1. Был жаркий день, и четыре супружеские пары, гуляя, выпили в течение дня 44 стакана лимонада. Анна выпила 2 стакана, Мария — 3, Софья — 4, Дарья — 5. Андреев выпил столько же, сколько и его жена; Борисов выпил стаканов вдвое больше, чем его жена; Васильев — втрое больше своей жены, а Груздев выпил стаканов лимонада в четыре раза больше, чем его жена.

Кто на ком женат?



2. Возьмем множество четырехзначных чисел, у которых цифры тысяч и десятков — нечетные, а сотен и единиц — четные, причем в каждом из этих четырехзначных чисел нет одинаковых цифр. Сколько чисел из этого множества делится на девять? Сколько делится на три?

3. У Пети был один рубль монетами достоинством не более 10 копеек. Вася взял у Пети по одной монете каждого типа, и у Пети стало на 15 копеек меньше. Сколько было у Пети монет каждого достоинства, если монет самого большого достоинства было на 4 больше, чем всех остальных монет?



4. В примере на деление одинаковые цифры заменили одинаковыми буквами (а разные — разными); то, что получилось, вы видите на рисунке. Попробуйте восстановить пример.

5. Термометр быстро вынимают из расплавленного олова. И в первый момент столбик ртути немного поднимается. Объясните, почему это происходит.

Рисунки Э. Назарова

Головоломки Дьюдени

На страницах нашего журнала не раз упоминались имена многих известных популяризаторов математики: Гуго Штейнгауза, Сэма Лойда, Мартина Гарднера, Льюиса Кэррола (автора, по-видимому, знакомой всем и любимой всеми «Алисы в Стране Чудес»). Сейчас мы хотим рассказать вам еще об одном замечательном мастере головоломок — Генри Э. Дьюдени (1857—1930): в этом году, в той же серии, что и три книги Гарднера, книги Штейнгауза и Кэррола, вышла его прекрасная книга «520 головоломок» *).

Составление и решение головоломок было для Дьюдени не только профессией (Дьюдени — талантливый самоучка: он никогда не учился в колледже) — это было его призванием, делом его жизни. Если какая-нибудь интересная идея приходила ему в голову за обедом, то он в задумчивости начинал рисовать... прямо на скатерти. Ответы же, которые сам Дьюдени давал к своим головоломкам (их мы опубликуем в следующем номере «Кванта»), очень часто даже и нельзя назвать «решениями» — скорее это блестящие догадки. Книга «520 головоломок» будет, безусловно, интересна всем любителям математики. Вам же, ребята, она будет особенно полезна: в ней очень много доступных для вас задач. Ниже мы публикуем подборку задач из книги Г. Э. Дьюдени. Публикацию подготовила И. Н. Клумова.

Лестницы метро

Как-то, выходя из станции метро «Керли-стрит», мы столкнулись с молодым атлетом Перси Лонгменом. Он остановился на эскалаторе и сказал:

— Вверх по эскалатору я всегда иду. Знаете ли, лишняя тренировка никогда не помешает. Этот эскалатор самый длинный на линии — почти тысяча ступенек. Но вот что интересно — и это относится и к другому, меньшему эскалатору, по которому мне часто приходится подниматься: если, поднимаясь вверх, я шагаю через две ступеньки, то на последний шаг приходится одна ступенька; если я шагаю через три ступеньки — то две ступеньки; если через четыре,— то пять; если через пять — то четыре; если через шесть — то пять и, наконец, если я шагаю через семь ступенек, то на последний шаг приходится шесть ступенек. Почему так происходит, не знаю.

Когда Перси пошел дальше вверх, перешагивая через три ступеньки сразу, мы рассмеялись и мой спутник сказал:

— Он едва ли подозревает, что если бы делал шаги в 20 ступенек, то на последний шаг ему их осталось бы 19!

Сколько ступенек в эскалаторе на станции «Керли-стрит», если верхнюю площадку считать ступенькой, а нижнюю нет? **)

Взвешивание ребенка

— Прошлым летом я был свидетелем одного забавного случая на железнодорожной станции, — сказал мой приятель. — Небольшая семья стояла перед автоматическими весами, рассчитанными на 200 фунтов, безрезультатно пытаясь решить трудную задачу — взвесить ребенка. Едва родители оставляли ребенка одного на весах, он начинал реветь и спрыгивал с них, при этом отцу приходилось удерживать собаку Фидо, тоже желавшую принять участие в этой операции. Наконец, отец вместе с ребенком и Фидо взобрался на весы, а я их сфотографировал.

---

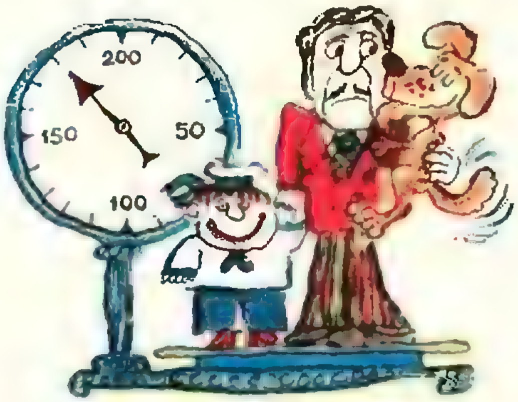
*) Генри Э. Дьюдени. 520 головоломок. М., «Мир», 1975.

**) Автор исходит из молчаливого предположения, что эскалаторы неподвижны

Тут приятель показал мне фотографию, с которой я срисовал показания весов.

— После этого мужчина повернулся к своей жене и сказал: «Мне кажется, дорогая, что вместе с ребенком я вешу на 162 фунта больше, чем собака, а собака весит на 70% меньше, чем ребенок. Нам дома следует все хорошенько обдумать».

Мне тоже захотелось разобраться самому в этой задаче. Как вы думаете, сколько весило милое дитя?



Решающий голос

Съезд Объединенного общества странствующих попрошаек (более известного под названием Союза бродяг) собрался, чтобы решить вопрос о том, следует ли объявить забастовку, требуя сокращения рабочего дня и увеличения подаяний. Было решено, что при голосовании те члены общества, которые отдадут свои голоса в пользу забастовки, останутся стоять, а те, кто против, сядут.

— Джентльмены, — сказал председатель собрания после подсчета голосов, — я имею удовольствие сообщить, что забастовка утверждена большинством голосов, составляющим четвертую часть оппозиции. (*Громкие возгласы одобрения.*)

— Господин председатель, — крикнули сзади, — кое-кто из нас не смог сесть.

— Почему?

— Да здесь нет стульев.

— Тогда, быть может, те, кто хотел, но не смог сесть, не откажутся поднять руки... Я вижу, вас двенадцать человек, так что забастовка отменяется большинством в один голос. (*Свистки и беспорядок в зале.*)

Сколько членов общества попрошаек участвовало в голосовании?

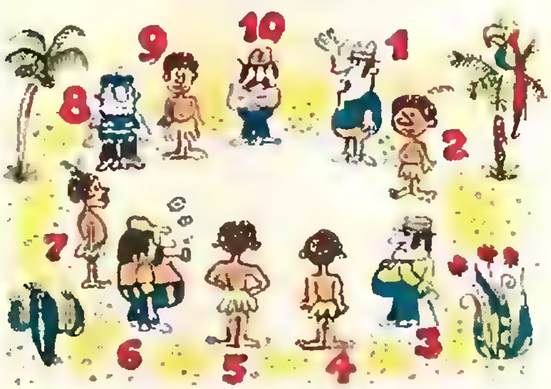
Исправьте ошибку

Хильде Вильсон потребовалось умножить некоторое число на 409, но она сделала ошибку, которую часто допускают дети, начинающие изучать арифметику: первую цифру произведения на 4 она поместила не под третьей цифрой справа, как положено, а под второй. (Мы все так делали в детстве, когда в сомножителе встречался нуль.) В результате этой маленькой ошибки Хильда получила число, отличающееся ни много, ни мало на 328 320 от правильного ответа.

Какое число Хильда умножала на 409?

Пэт Мерфи

Много лет назад произошел такой случай. Участники одной экспедиции попали в лапы кровожадных дикарей. Их вождь, получив богатые подарки, наконец смягчился и разрешил пленникам уйти, но при условии, что половина из них будет выпорота. В состав экспедиции входило 5 англичан и 5 туземцев-носильщиков. Англичане решили избежать порки, встав в круг таким образом, как показано на рисунке, и поручив Пэту Мерфи (№ 1) назвать число, отсчет до которого использовался бы в качестве считалочки.



Тот, на кого выпадало названное число, выходил из круга и отправлялся на экзекуцию, а счет продолжался с этого места снова и до тех пор, пока названное число не выпадало на следующего человека, и т. д.

Если бы Пэт правильно запомнил число и начал счет с того, кого нужно, то замысел белых удался бы на славу. Но бедный Пэт перепутал число и не с того человека начал счет. В результате все англичане оказались выпоротыми, а носильщики нет.

Не могли бы вы указать:

1) число, которое назвал бедняга Пэт, и человека, с которого начинался счет;

2) число, которое следовало назвать, и человека, с которого следовало начинать счет?

В каждом случае нужно найти минимальное число.

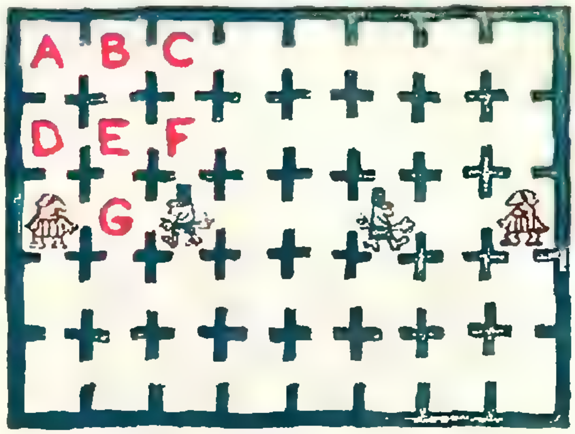
Кошки и мышки

Однажды утром за столом профессора Рэкбрейна оживленно обсуждался вопрос об уничтожении грызунов, когда внезапно профессор сказал:

— Если некоторое количество кошек съели в общей сложности 999 919 мышек, причем все кошки съели по одинаковому числу мышек, то сколько всего было кошек?

Кто-то высказал предположение о том, что, быть может, одна кошка съела всех мышек, но Рэкбрейн возразил, что он сказал *«кошек»*. Тогда кто-то другой дерзнул предположить, что каждая кошка съела одну мышь, но профессор заметил, что он сказал *«мышек»*. Он добавил также, дабы помочь присутствующим, что каждая кошка съела больше мышек, чем было кошек.

Какой же ответ будет верным?



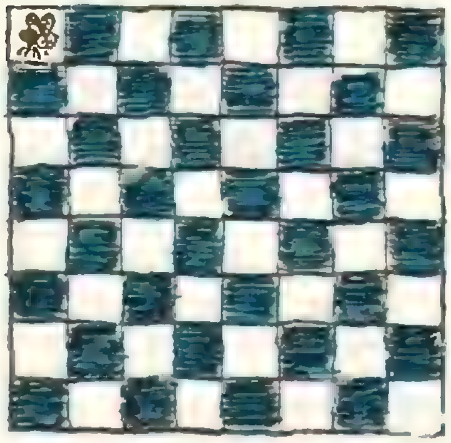
Погоня

Начертите на листе бумаги поле, которое изображено на рисунке и воспользуйтесь фишками, представляющими двух охранников (люди в высоких шапках) и двух узников. Вначале разместите фишки так, как показано на рисунке. Первый игрок передвигает каждого охранника через дверь из одной камеры в любую соседнюю. Затем второй игрок передвигает каждого узника через дверь в любую соседнюю камеру и т. д. до тех пор, пока каждый охранник не схватит своего узника. Если какой-либо охранник хватает узника, то он вместе со своей жертвой выбывает из игры, а другая пара продолжает игру.

Например, охранник может пойти в камеру F (для простоты мы рассмотрим лишь одну пару охранник-узник), затем узник перейдет в камеру D, охранник — в камеру E, узник — в камеру A, охранник — в камеру B, узник — в камеру D и т. д. Может показаться, что погоня охранника за узником безнадежно затянется, но, проявив немного смекалки, вы сумеете настичь беглеца.

Путь мухи

Муха села на левый верхний квадрат шахматной доски (см. рисунок), а затем проползла по всем белым квадратам. При этом она ни разу не заползала на черный квадрат и не прошла по одному и тому же пересечению (где пересекаются вертикальная и горизонтальная линии) более одного раза.

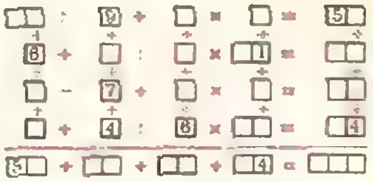


Не могли бы вы начертить путь мухи? Его можно проделать, двигаясь 17 прямыми курсами.

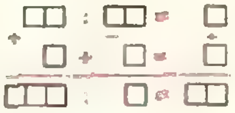
Ребусы

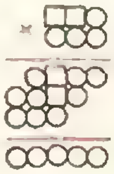
1. В пустые квадратики поставьте соответствующие цифры так, чтобы, производя последовательно (слева направо и сверху вниз) указанные арифметические действия, получать в результате число, стоящее после знака равенства.

Ребус составлен так, что пятый столбец совпадает с пятой строкой. Ни одно число в ребусе не равно нулю и не начинается нулем (кончаться нулем числа могут).



2. В пустые квадратики поставьте соответствующие цифры так, чтобы выполнялись указанные соотношения. Ни одно число в ребусе не равно нулю и не начинается нулем (кончаться нулем числа могут).





3. В примере на умножение одна из цифр всюду заменена квадратиком, а вместо других цифр поставлены кружки. Попробуйте восстановить пример.

Л. П. Мочалов

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

К статье «Почему звучит скрипка»

1. Колебания возбуждаются так же, как у струны со смычком, но при падающей зависимости момента сил трения от относительной угловой скорости маятника и оси.

2. Ток в цепи определяется графически точками пересечения прямой $U(i) = \mathscr{E} - iR$ с вольтамперной характеристикой лампы (рис. 1). Скачки тока происходят при значениях сопротивления $R_1 = \operatorname{tg}\alpha_1$ (при уменьшении сопротивления) и $R_2 = \operatorname{tg}\alpha_2$ (при увеличении сопротивления), определяемых наклоном касательных к вольтамперной характеристике. Зависимость тока от сопротивления показана на рисунке 2.

3. При отклонении тока от заданного значения i в цепи возникает э. д. с. индукции, равная $-L\dfrac{\Delta i}{\Delta t}$, где L — индуктивность вольтовой дуги. Закон Ома в этом случае имеет вид: $\mathscr{E} - L\dfrac{\Delta i}{\Delta t} = U(i) + iR$. Отсюда находим скорость изменения тока: $\dfrac{\Delta i}{\Delta t} = \dfrac{\mathscr{E} - iR - U(i)}{L}$. Обратимся теперь к рисунку 6, *б* в статье и исследуем устойчивость токов i_1 и i_2. Легко видеть, что когда ток меняется вблизи значения i_2, увеличению тока соответствует отрицательное значение выражения $\mathscr{E} - iR - U(i)$ и, следовательно, отрицательная скорость изменения тока. Это означает, что после отклонения ток будет уменьшаться, стремясь возвратиться к значению i_2. При уменьшении тока, наоборот, $\dfrac{\Delta i}{\Delta t} > 0$, и ток будет увеличиваться до величины i_2. Поэтому значение тока i_2 устойчивое. Аналогичные рассуждения для тока i_1 показывают, что это значение неустойчивое — отклонения будут нарастать. Таким образом, мы получаем (так же, как и с помощью энергетических рассуждений), что устойчивым является состояние с полным положительным сопротивлением цепи.

4. Колебания тока в дуге вызывают колебания ее температуры. Вследствие этого температура и плотность воздуха возле дуги также периодически изменяются, и возникает звуковая волна.

К статье «Физика и линейные неравенства»

1. $P_{\max} = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{2}\right) m.$

2. Ответ. $R = \dfrac{8}{11}$ *ом.*

Указание. Если обозначить наибольшее отклонение напряжения от закона Ома через z, то получим следующую задачу линейного программирования:

$$\begin{cases} -z \leqslant 3 - 4R \leqslant z, \\ -z \leqslant 4 - 5R \leqslant z, \\ -z \leqslant 5 - 7R \leqslant z, \\ z \to \min. \end{cases}$$

3. $t_1 \approx 8$ (*с*), $t_2 \approx 46$ (*с*). Указание. Система линейных неравенств и целевая функция имеют вид

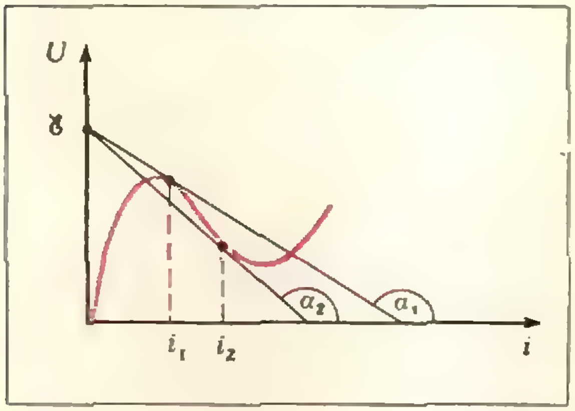


Рис. 1.

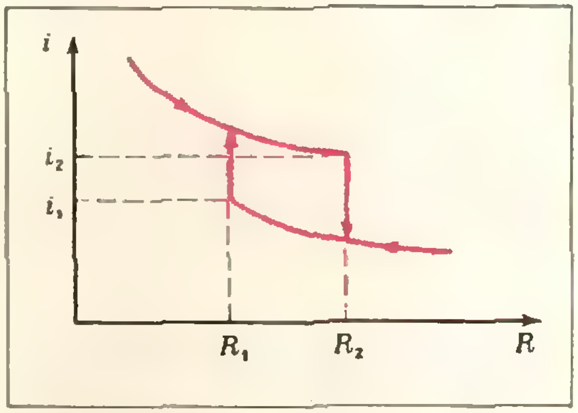


Рис. 2.

$$\begin{cases} 0{,}656t_1 + 0{,}328t_2 \geqslant 20, \\ 0{,}304t_1 + 0{,}608t_2 \geqslant 30, \\ 0{,}734t_1 + 0{,}734t_2 \leqslant 50, \\ z = t_1 + t_2 \to \min. \end{cases}$$

4. $I_1 \approx 990$ (*св*), $I_2 \approx 2260$ (*св*). Указание. Пользуясь законами освещенности, следует составить следующую задачу линейного программирования:

$$\begin{cases} \dfrac{\cos 0^\circ}{9} I_1 + \dfrac{\cos 45^\circ}{18} I_2 \geqslant 200, \\ \dfrac{\cos 45^\circ}{18} I_1 + \dfrac{\cos 0^\circ}{9} I_2 \geqslant 100, \\ \dfrac{\cos 63^\circ 26'}{45} I_1 + \dfrac{\cos 45^\circ}{18} I_2 \geqslant 100, \\ z = I_1 + I_2 \to \min. \end{cases}$$

К статье «Учитесь делать дополнительные построения»

1. $48\sqrt{6}$ *см*^{2}. Указание. Через вершину A треугольника ABC провести прямую, параллельную медиане m_c до пересечения с продолжением медианы m_b в точке B', и заметить, что $S_{\triangle AOB'} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC}$, где O — точка пересечения медиан.

2. 1 : 2, считая от меньшего основания. Указание. Заметить, что боковая сторона трапеции равна радиусу окружности, и воспользоваться теоремой о секущих.

3. $\sqrt{\dfrac{m}{n}}$. Указание. Через вершину B трапеции $ABCD$ ($AB \perp AD$) провести прямую, параллельную диагонали AC, до пересечения с продолжением основания AD в точке K; в ΔKBD $\angle B = 90^\circ$.

4. $AB = BC = \dfrac{a(\sqrt{5}-1)}{2}$ $CD = a\sqrt{\sqrt{5}-2}$. Указание. Опустить перпендикуляр BE на AD.

5. $\sin 2\alpha : 1$. Указание. В трапеции $ABCD$ (AD — большее основание) провести высоту BE, точку O (центр окружности) соединить с точками E и M (точкой касания) и провести прямую $ON \parallel AD$. Рассмотреть подобные треугольники ABE и ONM.

6. $\dfrac{2ab}{a+b}$. Указание. Через точку пересечения искомого отрезка и боковой стороны трапеции провести прямую, параллельную другой боковой стороне, до пересечения с основаниями трапеции; рассмотреть полученные подобные треугольники.

7. $4(1-\alpha)$. Указание. Из точек E и D опустить перпендикуляры на сторону AC.

8. 8. Указание. Через точку M провести прямую, перпендикулярную основаниям трапеции.

К заметке «Вечный двигатель?»

(см. с. 54)

На шар A, масса которого $m_1 = \rho_1 V_1$, действует гравитационная сила

$$F_1 = \gamma \frac{m_1 m_2}{R^2} - \gamma \frac{m_1 m_2'}{R^2} = \gamma \frac{m_2 - m_2'}{R^2} m_1 -$$

равнодействующая силы притяжения со стороны шара B ($m_2 = \rho_2 V_2$) и силы притяжения со стороны «зеркального отражения» шара B — шарика B' ($m_2' = \rho V_2$). Силу F_1 можно назвать весом шара A в поле тяжести шара B. По аналогии с «обычным» весом — весом тел в поле тяжести Земли — можно считать, что в поле силы тяжести шара B все тела приобретают «ускорение свободного падения»

$$g' = \gamma \frac{m_2 - m_2'}{R^2}.$$

Однако $\mathbf{F}_1$ — не единственная сила, действующая на шар A: мы забыли еще одну силу — выталкивающую силу Архимеда. Как известно, эта сила $\mathbf{F}_1'$ равна по величине весу жидкости, вытесненной шаром A, то есть

$F_1' = \gamma \dfrac{m_2 - m_2'}{R^2} m_1'$, где $m_1' = \rho V_1$ — масса вытесненной жидкости. Направление этой силы противоположно направлению $\mathbf{F}_1$. Итак, результирующая сила, действующая на шар A, равна

$$\mathbf{F}_A = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_1; \; F_A = \gamma \frac{m_2 - m_2'}{R^2} (m_1 - m_1').$$

Аналогичным образом можно найти результирующую силу, действующую на шар B:

$$F_B = \gamma \frac{m_2 - m_2'}{R^2} (m_1' - m_1).$$

Видно, что $F_B = -F_A$, то есть силы взаимодействия шаров удовлетворяют третьему закону Ньютона.

При $\rho_1 < \rho < \rho_2$ силы F_A и F_B направлены наружу, то есть шары расталкиваются. Если же $\rho_1 > \rho$ и $\rho_2 > \rho$, то силы F_A и F_B направлены внутрь, то есть шары притягиваются.

Будем считать, что шар «заряжен» положительно, если его плотность $\rho_ш$ больше плотности жидкости ρ, будем считать его «нейтральным», если $\rho_ш = \rho$, и «заряженным» отрицательно, если $\rho_ш < \rho$. При этом мы имеем некоторую аналогию с электростатикой. Разница только в том, что у нас притягиваются одноименные «заряды», а разноименные отталкиваются.

К задачам «Квант» для младших школьников»

(см. «Квант» № 9).

1. а) Разобьем 50-угольник на два правильных 25-угольника. Поскольку женщин 25, то в вершинах одного из 25-угольников не меньше 13 женщин. Но $13 > 25/2$, поэтому две женщины сидят в соседних вершинах 25-угольника, а между ними только одна вершина 50-угольника — искомая.

б) Пусть гости, у которых разбиты приборы, соединены диагональю длины a. Нужно найти женщин, удаленных друг от друга на a.

Если a — не наибольшая диагональ, то от каждой женщины идут две такие диагонали, всего $2 \cdot 26 = 52$ диагонали, а диагоналей длины a всего 50; значит, какие-то две из них совпадают. Пусть это диагональ AB. Тогда $AB = a$, A и B — искомые женщины.

Если a — максимальная диагональ, то от каждой женщины идет одна такая диагональ; их 26, а диагоналей всего 25, опять две диагонали совпадают.

2.

$$\begin{array}{r}
22 \times 13 = 286 \\
+ \quad \times \quad - \\
97 + \ \ 5 = 102 \\
\hline
119 + 65 = 184.
\end{array}$$

Указание. Легко видеть, что $\overline{A} = 9$, $\overline{K} = 0$, $\overline{P} = 1$.

3. [illegible] машин, 39 мотоциклов, из них 13 с коляской.

4. а) 11111229; б) 77192329. Указание. Впереди надо оставлять наименьшие (наибольшие) цифры, пока это возможно.

5. Вода в маленьком сосуде кипеть не будет.

К статье «На даче»

(см. «Квант» № 9)

В рассказе два противоречия физическим законам.

1. При включении холодильника температура в комнате не понижается, а повышается, так как электрическая энергия потребляемая холодильником, превращается в тепло *).

2. 127-вольтная лампочка горит ярче, чем 220-вольтная той же мощности, включенная в электрическую сеть с напряжением 127 *в*. Действительно, первая лампочка имеет ту же номинальную мощность, что и вторая, при меньшем напряжении, поэтому из формулы мощности электрического тока $P = \frac{U^2}{R}$ следует, что сопротивление у первой лампочки меньше, чем у второй. Но тогда (как показывает та же формула) при одинаковом напряжении первая лампочка дает большую реальную мощность, чем вторая.

Замечание. Если вы посчитали, что эпизод с электрическими плитками описан неверно, то в этом вы не правы. Как известно, сопротивление проводника пропорционально его длине, поэтому спираль на первой плитке имеет большее сопротивление, чем на второй. Отсюда следует (опять ссылаемся на формулу мощности $P = \frac{U^2}{R}$), что при одинаковом напряжении первая плитка имеет меньшую мощность, чем вторая.

К статье «Как? А если невозможно, то почему?»

(см. «Квант» № 9)

Вечный скиталец. Секрет невозможности попасть в «дом Д» заключается в том, что все ячейки делятся на два множества: вида ∇ и вида Δ. Все ячейки вида ∇ заполнены нечетными числами, а ячейки вида Δ — четными. При переходе из ячейки в соседнюю виды ячеек чередуются. Очевидно, что если путник совершает маршрут, состоящий из числа шагов, указанного в «нечетной» ячейке (∇), то непременно попадает в «четную» ячейку (Δ). Если же путник очередную серию шагов совершает из ячейки Δ, в которой записано четное число, то он вновь оказывается в «четной» ячейке (Δ). А дом путника принадлежит множеству «нечетных» ячеек вида ∇. Следовательно, домой наш путник никогда не попадет.

Алгоритм сильнее случая. Ящики надо перенумеровать и положить на платформу весов одну деталь из ящика № 1, отдельно (столбиком) две детали из ящика № 2, три — из ящика № 3, ..., десять — из ящика № 10. На платформе весов окажется 10 столбиков, объединяющих 55 деталей.

Определяем вес этих деталей и полученное число вычитаем из 55. Число десятых, содержащихся в разности, указывает номер ящика с бракованными деталями.

Трюк кинооператора. Трюк кинооператора — прием «решения с конца». Очевидно, что последней удаляемой фигурой является одна из двух ладей. Предположим, что процедуру удаления фигур мы зафиксировали на кинопленку и пустили ее в обратном направлении. Что мы увидим? Руку, ставящую одну из белых ладей на a1 или на

---

*) Более подробно об этом можно прочитать в решении задачи Ф285, «Квант», 1975, № 3. *(Прим. ред.)*

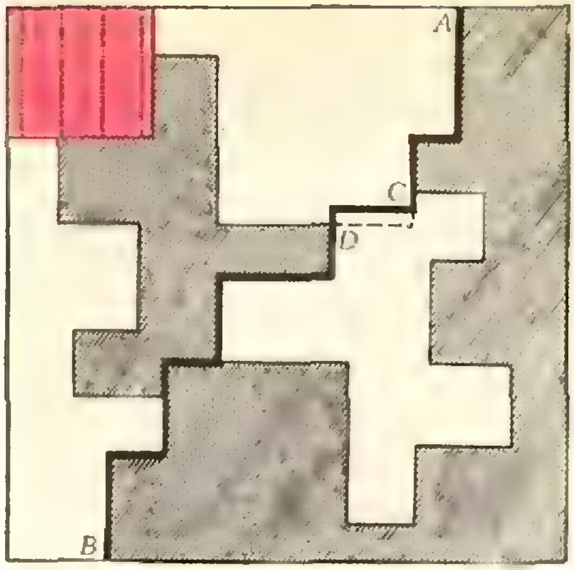


Рис. 3.

h1 (две возможности для первого хода «с конца»). Второй ход «с конца» дает $2 \cdot 2 = 4$ варианта заполнения полей доски соответствующими фигурами (ладьями и конями) и так далее до тех пор, пока останется одно поле для одной последней фигуры. Всего получается $2^7 \cdot 1 = 128$ возможных различных последовательностей (и фильмов) восстановления (а значит, и удаления) восьми фигур.

Недоумение завхоза. Будем считать, что кроме пяти комнат, показанных на плане (см. рис. 3 в статье), есть еще и шестая — та, в которую ведут наружные двери (сад). Существование маршрута с заданным свойством зависит лишь от количества комнат с нечетным числом дверей. Действительно, если входишь в комнату с четным числом дверей, то всегда и выйдешь из этой комнаты, пройдя через каждую дверь по разу. Поэтому такие комнаты можно не учитывать в дальнейших рассуждениях.

Рассмотрим комнату с нечетным числом дверей. Если начало маршрута вне такой комнаты, то конец — внутри, и наоборот. Следовательно, заданный маршрут существует тогда, когда есть лишь две комнаты (вместе с «наружной») с нечетным числом дверей. В одной из них маршрут начинается, в другой — кончается. Первый план удовлетворяет условию существования решения: есть только две комнаты с нечетным числом дверей — «наружная» (7 дверей) и «*B*» (5 дверей).

На втором плане (рис. 4 в статье) — 4 комнаты с нечетным числом дверей («*B*», «*D*», «*E*» и «наружная»). Искомый маршрут должен иметь два разрозненных «начала» и два разрозненных «конца», следовательно, непрерывным быть не может. Надо заделать одну дверь, общую для двух комнат с нечетным числом дверей.

Пятак в руках находчивого ученика. В результате построения окружностей O_1 и O_2 имеем: $O_1A \# PO_2$. Пара окружностей O_2 и O_3 дает: $PO_2 \# O_3Q$. Далее $O_3Q \# RO_4$, $RO_4 \# O_5S$ и, наконец, $O_5S \# BO_1$. Получаем $O_1A \# BO_1$, откуда и следует, что точка B диаметрально противоположна точке A.

К головоломке Дьюдени

(см. «Квант» № 9, 1-ю с. обл.)

Первое, что приходит в голову — это разрезать одеяло по жирной зигзагообразной линии на нашем рисунке. Но это не верно: получившиеся части не совпадают по форме и размерам. Разрез следовало бы вести не по участку *C*, а по пунктирной линии *D*, но «шов» по линии *D* не проходит. На самом же деле нужно вырезать заштрихованную часть. (Лоскут в левом верхнем углу показан для ориентации.)

К задачам

(см. «Квант» № 9, с. 29)

2. Провести окружность с центром в точке F и радиусом $|AF|$. Пусть она пересекает параболу в точке K, тогда отрезок KA — искомый (для случая, когда эта окружность не пересекает параболу, ответ найдите самостоятельно).

3. Указание. Воспользуйтесь признаком делимости на 9.

К ребусам

(см. «Квант», № 10, с. 60)

1. (По строчкам)
27 : 9 + 7 × 5 = 50,
6 + 2 : 4 × 11 = 22,
9 − 7 + 1 × 6 = 18,
8 + 4 : 6 × 22 = 44,
50 + 22 + 18 + 44 = 134.

2. 99 : 11 = 9,
3 + 5 = 8,
102 : 6 = 17.

3. 339 × 264 = 89 496.

(см. «Квант», № 9, с. 72)

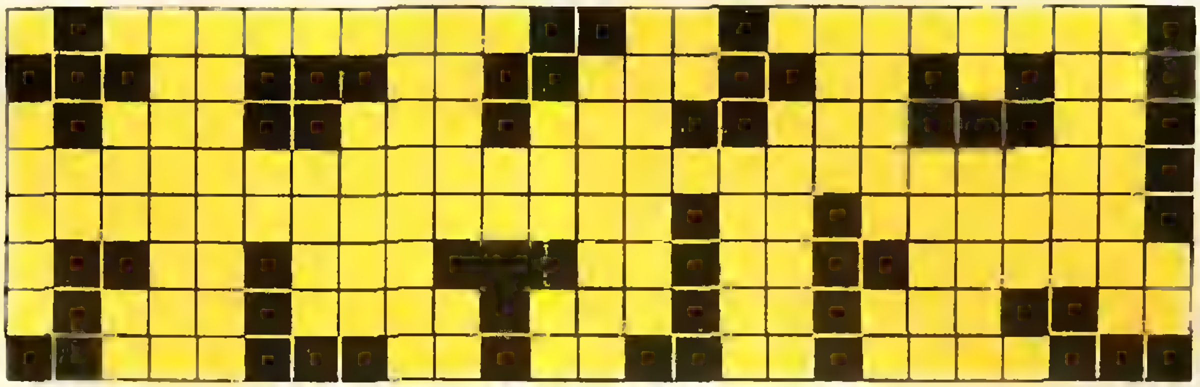
1. а) 998 × 191 = 190 618;
б) 100 : 32 = 3,125.
2. 87 654 × 19 320 = 1 693 475 280.

Корректор Л. С. Сомова

113035 Москва, Ж-35, Б. Ордынка 21/16.
«Квант», тел. 234-08-11. Сдано в набор 17/VII-75 г.
Подписано в печать 5/IX-75 г.
Бумага 70×108$^1/_{16}$. Физ. печ. л. 4
Усл. печ. л. 5,2 Уч.-изд. л. 5,67 Т-14877
Цена 30 коп. Заказ 1539 Тираж 348 357 экз

Чеховский полиграфический комбинат
Союзполиграфпрома
при Государственном комитете Совета Министров
СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли, г. Чехов Московской области

Рукописи не возвращаются

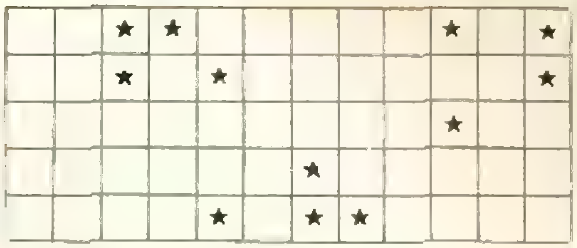


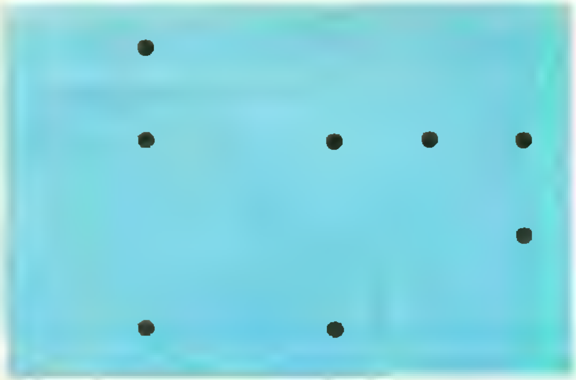
Головоломки

Пентамино-пасьянс

Двенадцать пентамино (рис. сверху) уложены в прямоугольник (рис. справа). Восстановить границы фигур, если каждая звездочка попадает ровно в одно пентамино.

Л. П. Мочалов



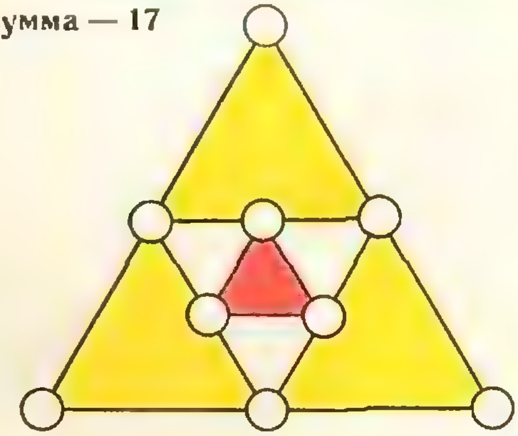


Разрежьте прямоугольник

На листе клетчатой бумаги изображен прямоугольник (рис. слева). Разрежьте его на восемь одинаковых частей так, чтобы в каждой из них находилась одна черная точка.

Ю. А. Аленков

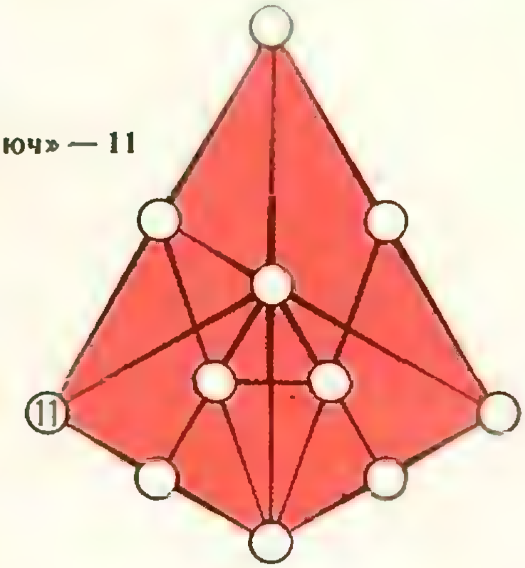
Сумма — 17



В пустые кружки фигуры расставьте цифры от 1 до 9 так, чтобы их сумма по периметру каждого заштрихованного треугольника равнялась 17. Задача имеет два существенно различных решения. Найдите их.

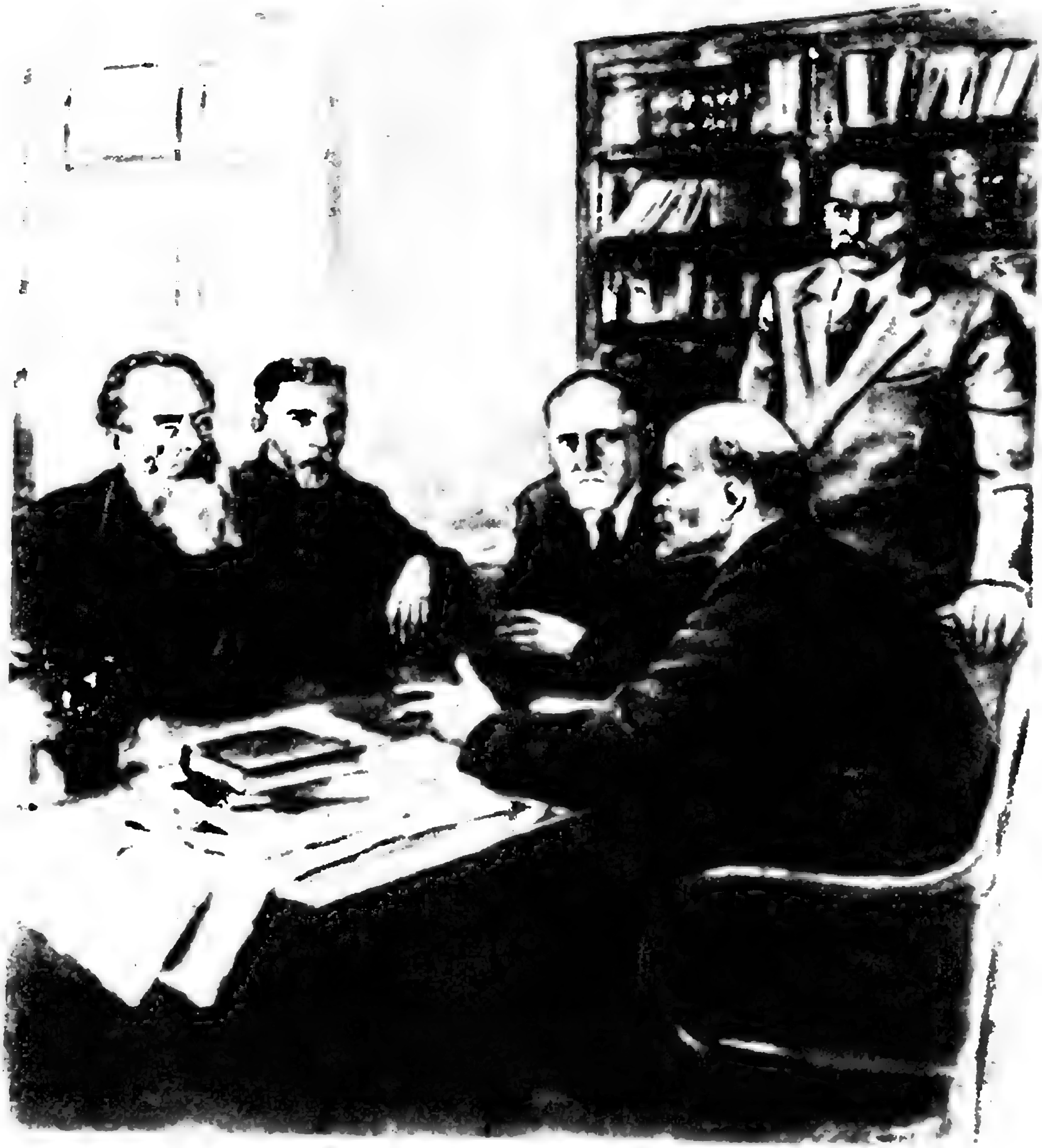
Ю. А. Аленков

«Ключ» — 11



В кружках этой фигуры расставьте числа от 1 до 11 так, чтобы сумма чисел на каждой прямой равнялась 18. Менять место числа 11 не следует, так как оно является «ключом» к решению.

Я. А. Алексеев



Вице-президент Академии наук академик В. А. Стеклов, начальник Военно-медицинской академии В. Н. Тонков, непременный секретарь Академии наук академик С. Ф. Ольденбург и писатель А. М. Горький (слева направо) на приеме у В. И. Ленина 27 января 1921 года. Репродукция с картины В. А. Серова.

Цена 30 коп.
Индекс 70465

К НАШИМ ЧИТАТЕЛЯМ

Продолжается подписка на 1976 год на научно-популярный физико-математический журнал «Квант».

«Квант» адресован всем школьникам 5—10 классов, которые любят математику и физику, любят решать задачи и хотят принимать участие в олимпиадах, горят желанием в будущем серьезно заниматься точными науками.

Наш журнал полезен и тем школьникам, которые еще «не зажглись» физикой или математикой, интерес которых к точным наукам еще дремлет.

Журнал публикует на своих страницах статьи обзорного характера, рассказывающие о достижениях науки и проблемах, которые еще ждут своего решения; рассказы об ученых, о том, как рождаются научные открытия.

В журнале читатель найдет много задач. Среди них задачи, предлагавшиеся на вступительных экзаменах в различные вузы, задачи, предлагавшиеся на олимпиадах, и просто интересные задачи.

Наш журнал полезен также и учителям. Сейчас происходит коренная переработка школьных программ по математике и физике. «Квант» активно участвует в этой работе.

В 1976 году «Квант» будет публиковать серии статей по новой программе и факультативным курсам.

Какие вопросы и задачи могут ожидать абитуриента на вступительных экзаменах? Как эти экзамены происходят? Ответы на эти и многие другие вопросы читатель найдет в разделе «Практикум абитуриента». В 1976 году мы планируем расширить раздел «Квант» для младших школьников». В настоящее время учащиеся 4—7 классов не имеют задачников, соответствующих новой программе. Мы надеемся в своих публикациях восполнить этот пробел.

Журнал постоянно помещает рецензии на книги — уже вышедшие и еще только готовящиеся к изданию.

ЖУРНАЛ РАСПРОСТРАНЯЕТСЯ ТОЛЬКО ПО ПОДПИСКЕ. ПОДПИСКА НА ЖУРНАЛ НЕ ОГРАНИЧЕНА.

При подписке ссылайтесь на наш индекс 70465. Цена номера 30 коп.

НОМЕР
11

Основан в 1970 году

Квант

1975

11

Научно-популярный
физико-математический
журнал
Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической
литературы

Главный редактор
академик И. К. Кикоин
Первый заместитель
главного редактора
академик А. Н. Колмогоров

Редакционная коллегия:
М. И. Башмаков
С. Т. Беляев
В. Г. Болтянский
Н. Б. Васильев
Ю. Н. Ефремов
В. Г. Зубов
П. Л. Капица
В. А. Кириллин
А. И. Климанов
(главный художник)
С. М. Козел
В. А. Лешковцев
(зам. главного редактора)
Л. Г. Макар-Лиманов
А. И. Маркушевич
Н. А. Патрикеева
И. С. Петраков
Н. Х. Розов
А. П. Савин
И. Ш. Слободецкий
М. Л. Смолянский
(зам. главного редактора)
Я. А. Смородинский
В. А. Фабрикант
А. Т. Цветков
М. П. Шаскольская
С. И. Шварцбурд
А. И. Ширшов

Редакция:
В. Н. Березин
А. Н. Виленкин
И. Н. Клумова
Т. М. Макарова
(художественный редактор)
Т. С. Петрова
В. А. Тихомирова
Л. В. Чернова
(зав. редакцией)

В НОМЕРЕ:

2 *Я. М. Гельфер, В. А. Лешковцев* Андре-Мари Ампер
12 *М. Г. Кац* О плоских правильных графах
16 *Е. Г. Николаев* Равноправны ли все цифры?
21 *В. Н. Ланге, Т. И. Ланге* К механике буерного спорта

Лаборатория «Кванта»

22 *М. П. Головей* Отражательные поляризаторы

Математический кружок

26 *Г. А. Тоноян* Одна задача о расположении точек

Задачник «Кванта»

30 Задачи М351—М355, Ф363—Ф367
32 Решения задач М314, М316, М317, Ф322—Ф327, Ф329

Практикум абитуриента

45 *С. В. Романов, И. Ф. Шарыгин.* Алгебраический метод решения геометрических задач
50 *С. М. Козел* Физические аналогии
56 *Л. И. Воронин и др.* Завод-втуз при Московском автомобильном заводе им. И. А. Лихачева

IX Всесоюзная олимпиада школьников

60 *В. Л. Гутенмахер* Олимпиада по математике
62 *Т. С. Петрова, Л. В. Чернова* Олимпиада по физике

Рецензии, библиография

68 *В. А. Рудов* Жизнь науки
70 **Спрашивайте — отвечаем**

Информация

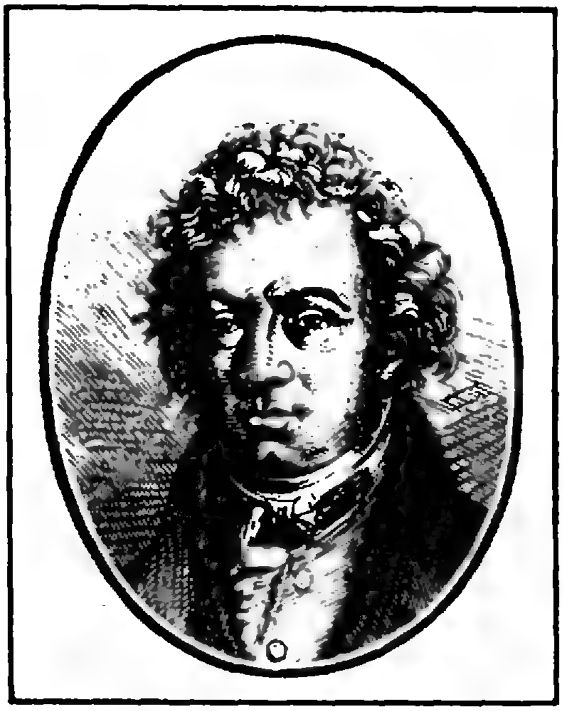
71 *А. В. Чернавский* Олимпиада в МИИТе

«Квант» для младших школьников

72 Задачи
73 *Е. Е. Семенов.* Точка, прямая... — что это такое?
75 **Ответы, указания, решения**
Смесь *(с. 11, 20, 29, 44)*

На первой странице обложки вы видите обыкновенное пластмассовое лекало. Но сфотографировано оно в поляризованном свете. Этим и объясняется его красивая интерференционная окраска. О том, как можно наблюдать поляризацию света, рассказывается в статье «Отражательные поляризаторы» (см. с. 22).

© *Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», «Квант», 1975 год*



Я. М. Гельфер,
В. А. Лешковцев

Андре-Мари Ампер

к 200-летию со дня рождения

> *Ампер — это Ньютон электричества*
> Максвелл

В этом году исполнилось 200 лет со дня рождения великого французского ученого Андре-Мари Ампера. В истории науки он известен главным образом как основоположник электродинамики. Между тем он был универсальным ученым, имеющим заслуги и в области математики, химии, биологии, и даже в лингвистике и философии. Это был блестящий ум, поражавший своими энциклопедическими знаниями всех близко знавших его людей. Но наиболее прочно имя Ампера вошло в историю физики, что нашло свое отражение в таких терминах, как «ампер» — для единицы силы тока, «закон Ампера», «сила Ампера» и т. д.

Сам Ампер был большим мастером изобретать новые научные термины. Именно он ввел в обиход ученых такие слова, как «электростатика», «электродинамика», «соленоид». Интересно также отметить, что, занимаясь важной проблемой науковедения — вопросом классификации наук, Ампер высказал мысль о том, что в будущем, вероятно, возникнет новая наука об общих закономерностях процессов управления. Он предложил именовать ее «кибернетикой». Предвидение Ампера оправдалось. В настоящее время такая наука существует и носит предложенное им название.

Свою родословную Андре-Мари Ампер ведет от лионских ремесленников. Его отец Жан-Жак Ампер вместе со своими братьями торговал лионскими шелками. Он получил хорошее образование, неплохо владел древними языками и старался быть в курсе всего, чему учили великие французские просветители XVIII века. У него была прекрасная библиотека, составленная из сочинений известных философов, писателей и ученых.

В возрасте 38 лет Жан-Жак Ампер вступил в брак с Жанной Сарсе, дочерью одного из крупных лионских торговцев. Андре-Мари Ампер родился 22 января 1775 года. Детство его прошло в небольшом поместье Полемье, купленном Жан-Жаком в окрестностях Лиона.

Исключительные способности Андре проявились еще в раннем возрасте. Чтению и арифметике он выучился очень быстро. Читал он все подряд, что находил в отцовской библиотеке. Биографы Ампера рассказывают, что свое увлечение чтением юный Андре скрывал от отца. Однажды, забравшись в его кабинет, он с любопытством стал рассматривать объемистые тома знаменитой «Энциклопедии», подготовленной Дидро и Даламбером. За этим занятием и застал его отец. «Что ты читаешь, Андре?» — спросил он. «Я читаю статью об аберрации» — ответил мальчик, которому в ту пору было 11 лет. «Но что же ты понимаешь в этом?» — снова спросил отец. И Андре без тени смущения изложил ему сущность этого сложного явления.

Поверив в исключительные способности сына, отец открыл ему свободный доступ в свою библиотеку. Андре жадно читал «Энциклопедию» том за томом, и перед ним раскрывались необъятные горизонты науки. Такое чтение, хотя оно и было лишено определенной системы, не прошло бесследно: именно в этот период у юного Андре появился настоящий интерес к различным областям человеческого знания. Он никогда не ходил в школу и не прошел обязательного классического курса обучения, который систематически знакомит детей с основами наук. В свои детские годы он знал очень многое. Но эти знания были разрозненными, в них были существенные пробелы.

Особый интерес Андре проявлял к физико-математическим наукам. Но как раз в этой области отцовской библиотеки явно не хватало, и Андре начал посещать библиотеку Лионского колледжа, чтобы читать труды великих математиков — Эйлера, Бернулли, Лагранжа. Однако многие из этих трудов были написаны по-латыни, которой он не владел. Несколько месяцев ушло на изучение этого языка, причем он изучил его почти самостоятельно и настолько хорошо, что без труда смог постичь сочинения классиков математики и физики XVII—XVIII веков.

Родители пригласили к Андре учителя математики. Уже при первой встрече он понял, с каким необыкновенным учеником имеет дело. «Знаешь ли ты, как производится извлечение корней?» — спросил он Андре. «Нет,— ответил мальчик, — но зато я умею интегрировать!». Вскоре учитель отказался от уроков, так как его знаний явно не хватало для обучения такого ученика.

История науки знает аналогичные случаи, когда великие ученые не получали систематического школьного образования в силу тех или иных причин. Тем не менее их природный ум, страстное стремление к знаниям, трудолюбие делали свое дело. В качестве примера можно вспомнить таких знаменитых самоучек, как Фарадей и Эдиссон.

Изучение трудов классиков математики и физики было для юного Ампера творческим процессом. Он не только читал, но и критически воспринимал прочитанное. У него возникали свои мысли, свои оригинальные идеи. Именно в этот период, в возрасте 13 лет, он представил в Лионскую академию свои первые работы по математике.

Наступил 1789 год. Началась Великая французская буржуазная революция. 14 июля штурмом была взята Бастилия, символ королевской власти Бурбонов. Эта весть быстро дошла и до Лиона. Андре воспринял ее как известие о наступлении новой эпохи, о которой мечтали просветители XVIII века. Однако революционные события сыграли трагическую роль в жизни Ампера. В 1793 году в Лионе вспыхнул мятеж, который вскоре был подавлен. За сочувствие мятежникам был обезглавлен Жан-Жак Ампер. Смерть отца Андре переживал очень тяжело; он надолго выбился из привычной колеи и был близок к потере рассудка. Лишь год спустя он с трудом обрел душевное равновесие и смог вернуться к своим занятиям.

Казнь отца имела и другие последствия. По приговору суда почти все имущество семьи было конфисковано, и ее материальное положение резко ухудшилось. Андре пришлось думать о средствах к существованию. Он решил переселиться в Лион и давать частные уроки математики до тех пор, пока не удастся устроиться штатным преподавателем в какое-либо учебное заведение.

Этот период жизни Ампера сыграл большую роль в его развитии как ученого. В Лионе он познакомился с любознательными молодыми людьми, такими же поклонниками науки, как и он сам, и споры с ними на научные темы во многом способствовали развитию его интеллекта. Андре много занимался с учениками, много читал. Его рабочий день начинался в четыре часа утра — нужно было успеть выполнить обширную программу.

В 1799 году Ампер женился на Катрин Каррон. В следующем году у них родился сын. Это радостное событие было омрачено болезнью Катрин. Расходы на жизнь неуклонно росли. Несмотря на все старания и экономию, средств, заработанных частными уроками, не хватало. Наконец, в 1802 году Ампера пригласили преподавать физику и химию в Центральную школу старинного провинциального города Бурк-ан-Бреса, в 60 километрах от Лиона. С этого момента началась его регулярная преподавательская деятельность, продолжавшаяся всю его жизнь.

Ампер мечтал перестроить традиционное преподавание курса физики. Вместо изложения разрозненных фактов и гипотез, теорий и экспериментов он хотел развернуть перед слушателями грандиозную картину мироздания, где все взаимосвязано и взаимообусловлено. Но это только мечты. Скучные преподаватели-чиновники, убогая лаборатория и бедный физический кабинет, повседневные будничные заботы — вот реальная действительность, которую он нашел в Бурк-ан-Бресе. Однако он много работал, восполнял пробелы в своих знаниях. Вместе с тем его не покидала надежда возвратиться в Лион к жене и сыну. И вскоре она осуществилась.

Назревали перемены в школьном образовании. В старой королевской Франции большинство учебных заведений находилось под руководством и влиянием духовенства. Французская революция смела эту систему. Была провозглашена идея всеобщего образования, освобождения преподавания от церковного догматизма, и установлена трехстепенная система образования: начальное, среднее и высшее. В каждом департаменте учреждались лицеи, дающие среднее образование с практическим уклоном. 4 апреля 1803 года Ампер был назначен преподавателем математики Лионского лицея. Счастливым он возвратился в Лион, но вскоре тяжелый удар обрушился на Ампера — умерла его жена.

В конце 1804 года Ампер покинул Лион и переехал в Париж, где он получил должность преподавателя знаменитой Политехнической школы. Эта высшая школа была организована в 1794 году и вскоре стала национальной гордостью Франции. Основная задача школы заключалась в подготовке высокообразованных технических специалистов с глубокими знаниями физико-математических наук. Среди ее преподавателей были такие известные ученые, как Лагранж, Монж, Бертолле. Неудивительно, что и среди питомцев Политехнической школы мы встречаем имена прославленных ученых и инженеров, таких как Френель, Гей-Люссак, Клапейрон, Понселе, Араго, Дюлонг.

В Париже Ампер чувствовал себя одиноким. Он находился всецело во власти воспоминаний о своей недолгой счастливой жизни. Это — главная тема его писем к родным и друзьям. Он и ранее слыл чудаковатым и рассеянным человеком. Теперь же эти черты его характера стали еще более заметными. К ним прибавилась чрезмерная неуравновешенность. Все это мешало ему хорошо излагать своим слушателям материал, которым он в действительности владел превосходно.

Несколько важных событий произошло в жизни Ампера в это время: в 1806 году он вступил во второй брак, в 1807 году был назначен профессором Политехнической школы, в 1808 году новое назначение — главным инспектором университетов. Все это улучшило его материальное положение и принесло некоторое успокоение, но ненадолго. Второй брак был очень неудачным, его новая жена Женни Пото оказалась весьма вздорной и ограниченной особой. Ампер прилагал много усилий, чтобы как-то примириться с ней во имя дочери, рожденной от этого брака. Однако эти усилия оказались тщетными. К переживаниям на этой почве прибавились новые — в 1809 году скончалась мать Ампера, безграничную преданность и доброту которой он ощущал все годы. Эти печальные события не могли не сказаться на его научной деятельности. Тем не менее в период между 1809 и 1814 годами Ампер опубликовал несколько ценных работ по теории рядов.

Лишь одно приятное событие этого времени утешило Ампера. В 1813 году во Францию с научной целью приехал знаменитый английский химик Дэви в сопровождении своего ассистента Фарадея. Между Дэви и Ампером состоялась встреча, на которой обсуждались главным образом химические проблемы. Ампер изложил знаменитому ученому некоторые из своих новых идей, которые тот воспринял с интересом и пониманием.

Время расцвета научной деятельности Ампера приходится на 1814—1824 годы и связано главным образом с Академией наук, в число членов которой он был избран 28 ноября 1814 года за свои заслуги в области математики.

Какие же научные проблемы волновали Ампера в это время? Практически до 1820 года его основные интересы сосредоточивались на проблемах математики, механики и химии. Вопросами физики в это время он занимался очень мало: известны лишь две работы этого периода, посвященные оптике и молекулярно-кинетической теории газов. Что же касается математики, то именно в этой области он достиг результатов, которые и дали основание выдвинуть его кандидатуру в Академию по математическому отделению.

Ампер всегда рассматривал математику как мощный аппарат для решения разнообразных прикладных задач физики и техники. Уже его первая опубликованная математическая работа, посвященная теории вероятностей, носила по существу прикладной характер и называлась «Соображения о математической теории игры» (1802 г.). Вопросы теории вероятностей интересовали его и в дальнейшем.

В исследовании многих проблем физики и механики большое значение имеют так называемые дифференциальные уравнения в частных производных. Решение таких уравнений связано со значительными математическими трудностями, над преодолением которых работали крупнейшие математики. Свой вклад в математическую физику, как называют этот раздел науки, внес и Ампер. Только в одном 1814 году он выполнил несколько работ, получивших высокую оценку видных французских математиков, в частности, Лапласа, Лагранжа и Пуассона.

Не оставляет он и занятий химией, которые стимулируются работами Бертолле, Дальтона и других известных ученых. К его достижениям в области химии следует отнести открытие, независимо от Авогадро, закона равенства молярных объемов различных газов, который по праву следует называть законом Авогадро — Ампера, а также первую попытку классификации химических элементов на основе сопоставления их свойств. Но не эти исследования, интересные сами по себе, и не его математические работы сделали имя Ампера знаменитым. Классиком науки, всемирно известным ученым он стал благодаря своим исследованиям в области электромагнетизма.

Электрические и магнитные явления к началу XIX века во многом еще представлялись таинственными, природа их была не ясна. Ученые были знакомы лишь со свойствами статических зарядов и с постоянными магнитами. Все обнаруженные на опыте электрические и магнитные явления объяснялись как результат действия особых электрических и магнитных жидкостей («флюидов»). Так, например, петербургский академик Эпинус в своем труде «Опыт теории электричества и магнетизма», изданном в 1759 году, писал:

«Существует жидкость, производящая все магнитные явления, которую поэтому следует назвать магнитной. Эта жидкость чрезвычайно тонка, может проходить через любые поры в телах; ее частицы, как и частицы электрической жидкости, взаимно отталкивают друг друга. Эта жидкость в большей части других тел, обнаруживаемых в мире, не вызывает никаких реакций; она не притягивается и не отталкивается ими. Однако существует определенный ряд тел, части которых притягивают магнитную материю и ею притягиваются; телом, наделенным таким свойством, является прежде всего железо, а затем все тела, именуемые железными...».

Единственной количественной характеристикой электрических и магнитных явлений был закон Кулона, открытый в конце XVIII века.

Прогресс наметился только после того, как впервые был получен электрический ток. В 1800 году Вольта изобрел первый источник тока, который был назван вольтовым столбом. Весть об этом изобретении вызвала огромный интерес в научном мире. Наполеон пригласил итальянского физика в Париж, чтобы тот повторил свои опыты перед избранной аудиторией. Там же Вольта выступил с докладом, в котором высказал мысль о тождественной природе статического электричества и электрического тока — «движущегося электрического флюида», по терминологии того времени.

Многочисленные опыты показали, что электрический ток способен вызывать различные эффекты — тепловые, химические, световые. Естественно было также предположить, что должна существовать связь между электричеством и магнетизмом, отрицавшаяся учеными на протяжении нескольких столетий. В начале XIX века многие ученые предпринимали попытки обнаружить эту связь. Искал ее и датский профессор физики Ганс-Христиан Эрстед. Еще в 1807 году он объявил о своем намерении исследовать действие электрического тока на магнитную стрелку. Однако в течение многих лет эксперименты, подтверждавшие существование такого действия, ему не удавались. Только в 1820 году, поместив магнитную стрелку параллельно проволоке, соединявшей два конца вольтова столба, он воочию увидел то явление, которого ждал столько лет: под влиянием тока в проводнике стрелка отклонилась от своего обычного направления. Так было открыто фундаментальное явление, положившее начало электродинамике.

В июле 1820 года Эрстед опубликовал свое открытие в небольшой статье под названием «Опыты, относящиеся к действию электрического конфликта на магнитную стрелку». «Электрическим конфликтом» он называл электрический ток.

Месяц спустя опыты Эрстеда повторил в Женеве швейцарский физик Огюст де ла Рив. При демонстрации присутствовали многие ученые и среди них — знаменитый французский физик Араго. По возвращении в Париж Араго на двух заседаниях Академии наук сделал об этом доклад и воспроизвел опыты Эрстеда. Свой доклад он начал следующими словами: «Господа, профессору в Копенгагене Эрстеду удалось сделать прекрасное открытие..., которое чревато такими последствиями, которые сейчас еще не в состоянии предусмотреть пытливый, но ограниченный человеческий ум...». Взволнованно слушал докладчика Ампер, забывший в этот момент свои математические проблемы. Физика — вот чем сейчас следует заняться! Ведь опыты Эрстеда подтверждают то, о чем он думал еще в Бурк-ан-Бресе — единство сил природы, взаимосвязь явлений.

Ампер был, главным образом, теоретиком и редко обращался к экспериментам. Но он понимал, что серьезное исследование электромагнитных явлений невозможно без постановки опытов, которые должны были подтвердить или опровергнуть его идеи. Однако средств на эти опыты Академия наук не отпустила. Амперу пришлось нанять слесаря, который изготовил все необходимое за его счет. Многое было сделано и самим Ампером. Прежде всего он повторил опыты Эрстеда, пытаясь глубже понять природу открытого датским физиком явления. Опытным путем он доказал, что статическое электричество не действует на магнитную стрелку. Только движущееся электричество — электрический ток — в состоянии вызвать такой эффект. «В чем же причина этого явления? — задал себе вопрос Ампер. — Почему проводник с током действует на магнитную стрелку?».

Естественно было бы предположить, что электрический ток, проходя по проводнику, превращает его в магнит. Так и считали многие физики, в частности, известный французский физик Био. Ампер придерживался иной точки зрения. Он высказал гениальную идею: единственной причиной действия проводника с током на магнитную стрелку является движущееся электричество; магнетизм — лишь одно из его многочисленных проявлений. Не проводник, по которому течет ток, становится магнитом, а наоборот, магнит представляет собой совокупность токов. В магните есть множество элементарных круговых токов, текущих в плоскостях, перпендикулярных его оси.

Гипотеза Ампера по тем временам казалась исключительно смелой и неправдоподобной, поэтому она была встречена учеными весьма критически.

Новый взгляд на природу магнитных явлений возник у Ампера в результате целой серии экспериментов. Уже в конце первой недели напряженного труда он сделал открытие не меньшей важности, чем Эрстед — открыл взаимодействие токов. Если два наэлектризованных тела взаимно притягиваются или отталкиваются, то не будут ли аналогично вести себя два проводника, по которым течет ток? Ампер расположил параллельно прямолинейные участки двух проводников, соединяющих концы двух столбов Вольта. Один проводник закрепил, другой сделал подвижным (рис. 1). Пропустив через проводники ток, он наблюдал их взаимодействие: при одинаковых направлениях токов они притягивались, при противоположных — отталкивались. Оказалось также, что силы, действующие между проводниками с током, не являются центральными, то есть радикально отличаются от электростатических сил. Столь резкое отличие проявлений статического электричества и электрического тока Ампер предложил отразить и в соответствующих терминах. Область явлений, связанных с покоящимися электрическими зарядами, он назвал электростатикой, а с движущимися зарядами — электродинамикой.

Прошла еще одна неделя. Ампер произвел новые опыты, развивающие и подтверждающие его идеи. Если магнит представляет собой систему круговых параллельных токов, направленных в одну сторону, то спираль из металлической проволоки, по которой проходит ток, должна вести себя как магнит — иметь два полюса и принимать определенное положение под воздействием магнитного поля Земли (рис. 2—3). Эксперимент подтвердил эти предположения.

О полученных результатах Ампер сразу же сообщил в Академию. В до-

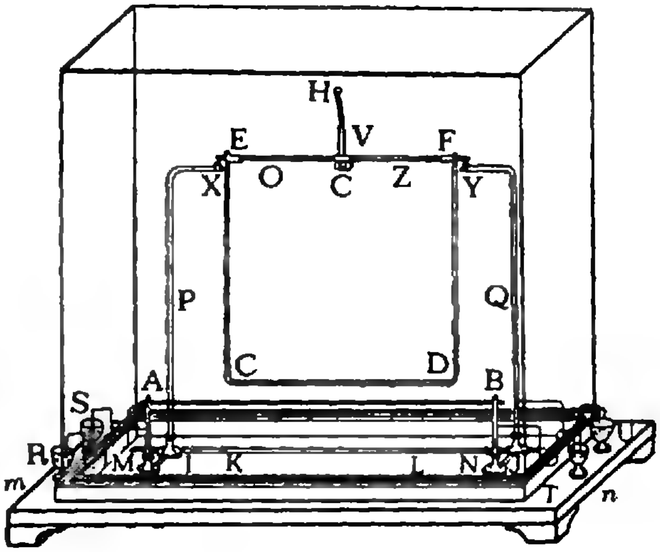


Рис. 1. Прибор для изучения взаимодействия проводников с током. AB — неподвижный проводник, EDF — подвижный проводник, укрепленный на стеклянной оси EF. Для защиты от воздушных колебаний прибор накрыт стеклянным колпаком. (Рисунок Ампера)

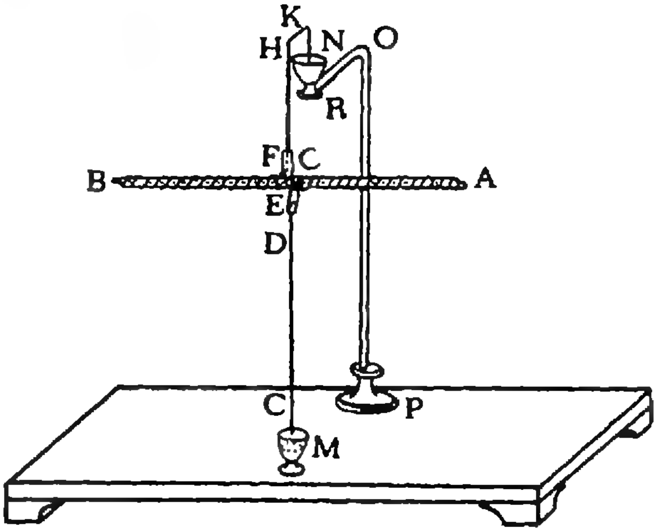


Рис. 2. Первый прибор для исследования влияния магнитного поля Земли на соленоид. AB — соленоид, намотанный на тонкую стеклянную трубку и подвешенный подобно стрелке компаса. Прибор оказался недостаточно подвижным, и ожидаемый эффект зарегистрирован не был. (Рисунок Ампера)

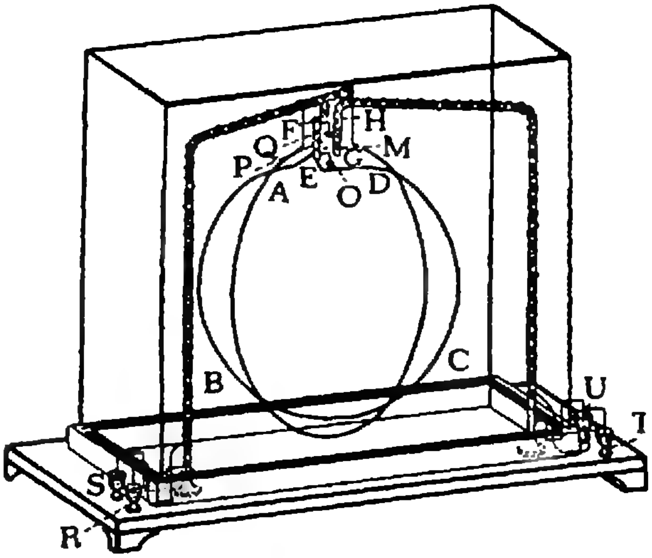


Рис. 3. Прибор для исследования влияния магнитного поля Земли на виток с током. ABCD —подвижный виток с током. Второй (неподвижный) виток большего радиуса фиксировал вертикальную плоскость, перпендикулярную к магнитному меридиану в данной точке. При включении тока виток ABCD поворачивался до совпадения с неподвижным витком. (Рисунок Ампера)

кладе, сделанном 18 сентября 1820 года, он продемонстрировал свои первые опыты и заключил их следующими словами: «В связи с этим я свел все магнитные явления к чисто электрическим эффектам». На заседании 25 сентября он развил эти идеи далее, демонстрируя опыты, в которых спирали, обтекаемые током (соленоиды), взаимодействовали друг с другом как магниты.

Новые идеи Ампера были поняты далеко не всеми учеными. Не согласились с ним и некоторые из его именитых коллег, в том числе и Био. Выступив против существования магнетизма как самостоятельного явления, Ампер перечеркнул тем самым и теорию Био, согласно которой магнит состоит из совокупности элементарных микроскопических магнитиков, каждый из которых по своим свойствам подобен большому магниту. Теория эта по существу ничего не объясняла, она лишь переводила вопрос о природе магнетизма с большого куска намагниченного металла на его крохотные части. Био и его сторонники стремились доказать, что в опытах Ампера нет ничего принципиально нового, что все они по сути дела — лишь варианты опыта Эрстеда.

Современники рассказывали, что после первого доклада Ампера о взаимодействии проводников с током произошел следующий любопытный эпизод. «Что же, собственно, нового в том, что вы нам сообщили? — спросил Ампера один из его противников. — Само собою ясно, что если два тока оказывают действие на магнитную стрелку, то они оказывают действие и друг на друга». Ампер не сразу нашелся, что ответить на это возражение. Но тут на помощь ему пришел Араго. Он вынул из кармана два ключа и сказал: «Вот каждый из них тоже оказывает действие на стрелку, однако же они никак не действуют друг на друга, и потому ваше заключение ошибочно. Ампер открыл по существу новое явление, куда большего значения, чем открытие уважаемого мной профессора Эрстеда».

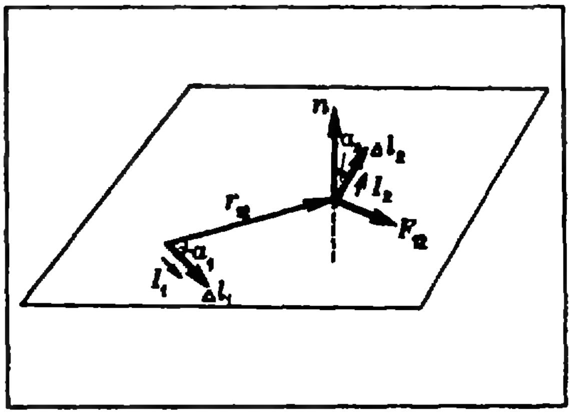


Рис. 4.

Несмотря на нападки своих научных противников, Ампер продолжал свои эксперименты. Он решил найти закон взаимодействия токов в виде строгой математической формулы и нашел этот закон, который носит теперь его имя. В самом общем виде выражение для величины силы, действующей со стороны малого отрезка проводника Δl_1, по которому течет ток с силой I_1 (первого элемента тока), на произвольно расположенный отрезок Δl_2 другого проводника с током I_2 (второй элемент тока), имеет следующий вид:

$$F_{12} = k\frac{I_1 \Delta l_1 \sin\alpha_1 I_2 \Delta l_2 \sin\alpha_2}{r_{12}^2}.$$

Здесь r_{12} — абсолютная величина вектора $\mathbf{r}_{12}$, направленного от первого отрезка ко второму (см. рис. 4). Направления векторов $\Delta\mathbf{l}_1$ и $\Delta\mathbf{l}_2$ совпадают с направлениями текущих по ним токов; α_1 — угол между векторами $\Delta\mathbf{l}_1$ и $\mathbf{r}_{12}$, α_2 — угол между векторами $\Delta\mathbf{l}_2$ и $\mathbf{n}$ — перпендикуляром к плоскости, содержащей $\Delta\mathbf{l}_1$ и $\mathbf{r}_{12}$. Направление $\mathbf{n}$ совпадает с поступательным движением буравчика при вращении его рукоятки от $\Delta\mathbf{l}_1$ к $\mathbf{r}_{12}$. k — коэффициент, зависящий от выбора системы единиц. Сила $\mathbf{F}_{12}$ перпендикулярна вектору $\Delta\mathbf{l}_2$ и лежит в плоскости, содержащей $\Delta\mathbf{l}_1$ и $\mathbf{r}_{12}$. При этом направление силы определяется правилом буравчика: при вращении его рукоятки от $\mathbf{r}_{12}$ к $\mathbf{n}$ поступательное движение буравчика совпадает с направлением силы $\mathbf{F}_{12}$.

Эту же формулу можно переписать в более привычном для школьников виде:

$$F = I\Delta l B \sin\alpha,$$

где B — величина магнитной индукции, создаваемой одним элементом тока в том месте, где находится другой, исследуемый элемент тока.

Так шаг за шагом в работах Ампера вырастала новая наука — электродинамика, основанная на экспериментах и математической теории. Все основные идеи этой науки, по выражению Максвелла, по сути дела «вышли из головы этого Ньютона электричества» за две недели.

С 1820 по 1826 год Ампер публикует ряд теоретических и экспериментальных работ по электродинамике и почти на каждом заседании физического отделения Академии выступает с докладом на эту тему. В 1826 году выходит из печати его итоговый классический труд «Теория электродинамических явлений, выведенная исключительно из опыта». Работа над этой книгой проходила в очень трудных условиях. В одном из писем, написанных в это время, Ампер сообщал: «Я принужден бодрствовать глубокой ночью... Будучи нагружен чтением двух курсов лекций, я тем не менее не хочу полностью забросить мои работы о вольтаических проводниках и магнитах. Я располагаю считанными минутами». Здесь речь идет о лекциях Ампера по высшей математике, которые привлекали многочисленных слушателей. Одним из них в 1822—1824 годах был молодой математик из России Михаил Васильевич Остроградский.

Слава Ампера быстро росла; особенно лестно ученые отзывались о его экспериментальных работах по электромагнетизму. Его посещали знаменитые физики, он получил ряд приглашений из других стран выступить с докладами о своих работах. Но здоровье его было подорвано, неустойчивым было и материальное положение. Его тяготила работа в Политехнической школе и инспекторские обязанности. Он по-прежнему мечтал читать курс физики, а не математики, и читать нетрадиционно, включив в курс новый раздел — электродинамику, творцом которой он сам являлся. Наиболее подходящим местом для этого было одно из старейших учебных заведений Франции — Коллеж де Франс. Основанное еще в 1530 году, это учреждение как бы совмещало в себе функции учебного и научно-исследовательского институтов. Здесь были все условия для плодотворной творческой деятельности. После многих неприятностей и интриг в 1824 году Ампер был избран на должность профессора Коллеж де Франс. Ему предоставили кафедру общей и экспериментальной физики.

Как видно из писем, которые Ампер писал в этот период, он был чрезвычайно рад своему избранию. Правда, эту радость омрачала необходимость время от времени выступать против порядков, царивших в институте. Особенно возмущали Ампера интриги, возникавшие при выборе кандидатов на освобождающиеся вакансии. Он всегда был нетерпим по отношению к фальши и несправедливости. Тем более он не мог оставаться равнодушным, когда личные интересы, погоня за высокими титулами и званиями заслоняли подлинную научную ценность кандидатов.

Закончился наиболее плодотворный период деятельности Ампера. В 1831 году Фарадей открыл явление электромагнитной индукции. В разработку электродинамики включились многие выдающиеся физики середины XIX века — Вебер, Ф. Нейман и К. Нейман, Видеман, Ленц и другие. Полное завершение она получила в классическом труде Максвелла «Трактат об электричестве и магнетизме», вышедшем в свет в 1869 году.

Последние годы жизни Ампера были омрачены многими семейными и служебными неприятностями, тяжело отражавшимися на его и без того слабом здоровье. Внешние признаки успеха не принесли материального благополучия. Он по-прежнему был вынужден уделять много времени чтению лекций в ущерб своим научным занятиям. Но науку он не оставлял. В 1835 году он опубликовал работу, в которой доказал сходство между световым и тепловым излучениями и показал, что все излучения при поглощении превращаются в теплоту. К этому же времени относится увлечение Ампера геологией и биологией. Он принял активное участие в научных спорах между знаменитыми учеными Кювье и Сент-Иллером, предшественниками эволюционной теории Дарвина, и опубликовал две биологические работы, в которых изложил свою точку зрения на процесс эволюции. На одном из диспутов противники идеи эволюции живой природы спросили Ампера, действительно ли он считает, что человек произошел от улитки. На это Ампер ответил: «Я убедился в том, что человек возник по закону, общему для всех животных».

Другим увлечением Ампера была классификация наук. Эта важная в методологическом и общенаучном плане проблема интересовала Ампера давно, еще со времени его работы в Бурк-ан-Бресе. Он разработал свою систему классификации наук, которую намеревался изложить в двухтомном сочинении. В 1834 году вышел первый том «Опыта философии наук или аналитического изложения естественной классификации всех человеческих знаний». Второй том был издан сыном Ампера уже после его смерти.

Ампер умер от воспаления легких 10 июня 1836 года в Марселе, во время инспекционной поездки. Там же он и был похоронен. В 1869 году его прах был перевезен в Париж на Монмартрское кладбище. На его надгробном памятнике высечены следующие слова: «Он был так же добр и так же прост, как и велик».

Задачи наших читателей

1. Докажите, что число

$$1+\underbrace{111\ldots111}_{n}\,\underbrace{222\ldots222}_{n}\times\underbrace{333\ldots333}_{n-1}5\cdot\underbrace{333\ldots333}_{n-1}6$$

является квадратом натурального числа.

А. Гулиев

2. Докажите, что $a^{2^n}-1$ делится на 2^{n+2}, если a — нечетно.

И. Черепинский

3. Докажите, что

$$7^{7^{7^{7^{7}}}}-7^{7^{7^{7}}}$$

делится на 1 000 000.

М. Штеренберг

4. Найдите четыре натуральных числа, образующих геометрическую прогрессию, члены которой являются делителями суммы

$$25^{1975}+79^{1975}.$$

Ю. Крылов

М. Г. Кац

О плоских правильных графах

Начнем с определений. *Графом* назовем конечное множество точек и соединяющих их кривых на плоскости (эти точки будем называть *вершинами*, а кривые — *ребрами*). Будем рассматривать графы, обладающие следующими свойствами:

1) ребра графа не пересекаются (графы, обладающие этим свойством, называются *плоскими*);

2) никакие две вершины не соединены более чем одним ребром;

3) любые две вершины графа соединены звеном ребер (такой граф называется *связным*);

4) каждое ребро соединяет две разные вершины.

Если разрезать плоскость по ребрам графа, то она распадется на несколько частей — *граней* графа. Неограниченную часть будем называть *внешней* гранью. Остальные грани — *внутренние*.

Грань называется *n-реберной*, если число ребер, встречающихся при обходе грани вдоль границы, равно n. Пример. На рисунке 1,а грань всего одна — внешняя шестиреберная, на рисунке 1,б — две грани: внутренняя трехреберная и внешняя трехреберная.

Ребро называется внешним (соответственно внутренним), если при обходе внутренних граней графа оно встречается соответственно один или два раза. Пример. На рисунке 2 ребро a — внешнее, ребро b — внутреннее; на рисунке 1,а нет ни внешних, ни внутренних ребер.

Обозначим через В, Р и Г соответственно число вершин, ребер и всех граней графа, включая внешнюю. Эти три величины связаны известной формулой Эйлера*)

$$В - Р + Г = 2.$$

Обозначим через a_i число i-реберных граней, включая и внешнюю. Тогда справедливо такое соотношение:

$$2Р = 3a_3 + 4a_4 + 5a_5 + \ldots \qquad (1)$$

Докажите это самостоятельно.

Поскольку $Г = a_3 + a_4 + \ldots$, то соотношение (1) можно записать в виде

$$2Р = 3Г + a_4 + 2a_5 + \ldots,$$

или

$$Г = \frac{2}{3}Р - \frac{1}{3}(a_4 + 2a_5 + \ldots).$$

Подставив это значение Г в формулу Эйлера, получим

$$В - Р + \frac{2}{3}Р - \frac{1}{3}(a_4 + 2a_5 + \ldots) = 2,$$

---

*) См. «Квант», 1974, № 8.

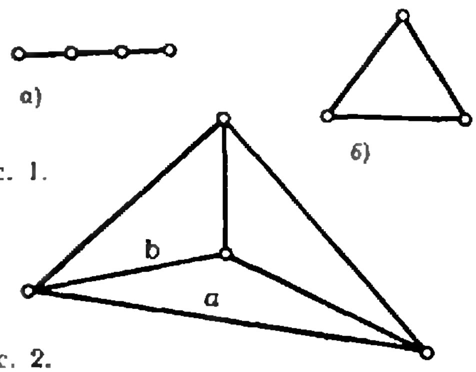


Рис. 1.

Рис. 2.

или

$$3\text{В}-\text{Р}=6+\sum_{i=1} ia_{i+3}. \qquad (2)$$

Назовем *степенью* $\deg V_i$ *вершины* V_i число ребер, выходящих из этой вершины. Так как каждое ребро соединяет две вершины, то $\sum\limits_i \deg V_i=2\text{Р}$.

Введем величину $\overline{\deg V}$, называемую *средней степенью* графа:

$$\overline{\deg V}=\frac{\sum\limits_i \deg V_i}{\text{В}}.$$

Из определения вытекает, что $\sum\limits_i \deg V_i=\text{В}\,\overline{\deg V}$, то есть $2\text{Р}=\text{В}\cdot\overline{\deg V}$, откуда $\text{Р}=\frac{1}{2}\text{В}\cdot\overline{\deg V}$. Подставив это выражение для Р в формулу (2), получим

$$3\text{В}-\frac{1}{2}\text{В}\cdot\overline{\deg V}=6+\sum_i ia_{i+3},$$

или

$$\text{В}\cdot(6-\overline{\deg V})=12+2\sum_i ia_{i+3}. \qquad (3)$$

Таким образом, средняя степень графа всегда меньше 6, но она может быть сколь угодно близка к 6 — докажите это.

Назовем граф *правильным*, если из каждой его вершины выходит одинаковое число ребер. Очевидно, что средняя степень правильного графа равна числу ребер, выходящих из каждой вершины (будем называть ее просто степенью правильного графа).

Из формулы (3) вытекает

Теорема 1. *Степень правильного графа не превосходит 5*.

Наиболее интересный тип правильных графов — это графы степени 5. Посмотрим, сколько вершин может иметь правильный граф степени 5.

Очевидно (см. формулу (3)), что меньше 12 вершин у правильного графа такой степени быть не может. Правильный граф с 12 вершинами действительно существует и представляет собой проекцию икосаэдра на плоскость (рис. 3). Из четности же произведения $\text{В}\cdot\overline{\deg V}(=2\text{Р})$ получаем, что графов степени 5 с нечетным числом вершин не существует.

Сейчас мы опишем способ построения правильных графов с любым четным числом вершин (не меньшим 12), кроме графов с 14, 18 и 22 вершинами. О графах с 14 и 18 вершинами см. замечание в конце статьи; граф с 22 вершинами изображен на рисунке 4.

Возьмем выпуклый n-угольник $\mathbf{A}=(A_1, A_2, \ldots, A_n)$. Внутри него поместим n-угольник $\mathbf{B}=(B_1, B_2, \ldots, B_n)$. Соединив середины соседних сторон n-угольника $\mathbf{B}$, получим n-угольник $\mathbf{C}=(C_1, C_2, \ldots, C_n)$, где C_i — середина B_iB_{i+1}, $i=1, 2, \ldots, n-1$; C_n — середина стороны B_nB_1.

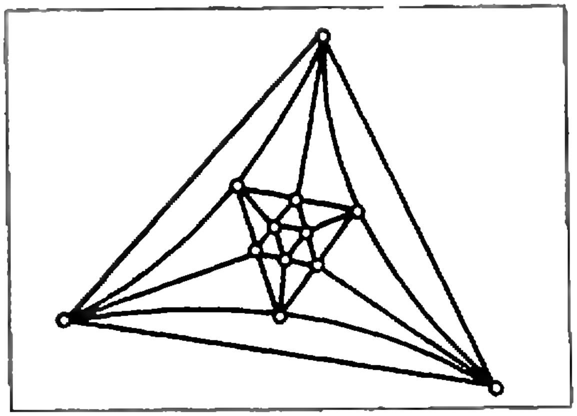


Рис. 3.

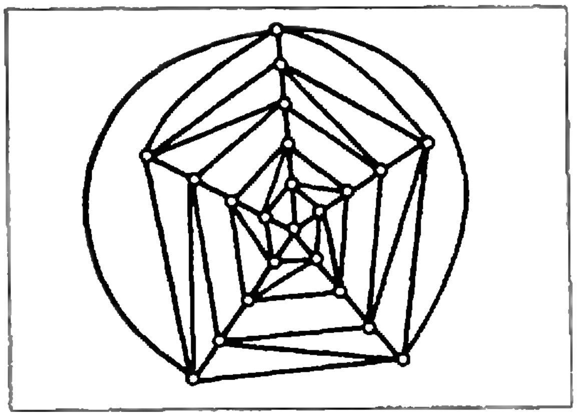


Рис. 4.

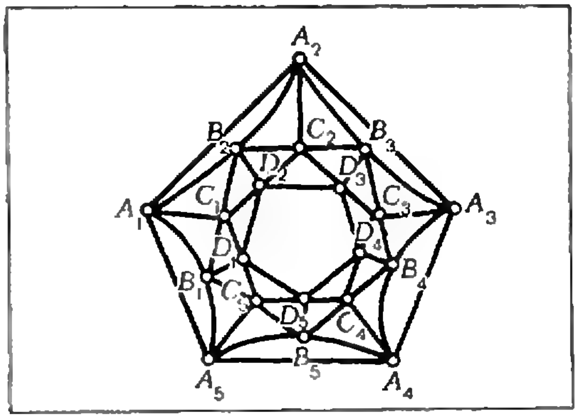


Рис. 5.

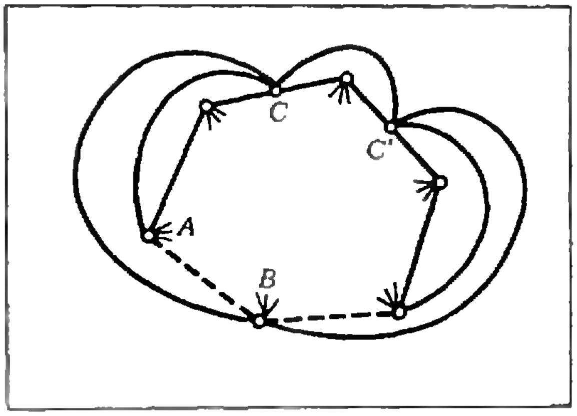


Рис. 6.

Соединив середины соседних сторон n-угольника **C**, получим n-угольник $\mathbf{D} = (D_1, \ldots, D_n)$, где D_i — середина $C_{i-1}C_i$, $i = 2, \ldots, n$; D_1 — середина стороны C_nC_1. Соединив теперь A_i с B_i, B_{i+1} и C_i, а B_i — с D_i, получим граф степени 5 с $4n$ вершинами. Пример построения графа с 20 вершинами (для $n = 5$) изображен на рисунке 5.

Покажем теперь как к уже построенному графу с $4n$ вершинами можно добавить еще 2 вершины.

Уберем одно из внешних ребер графа с $4n$ вершинами. Теперь в графе есть две вершины, из которых выходит по 4 ребра — на рисунке 6 это вершины A и B. Выберем точку на несоседнем ребре—точку C, и соединим ее с вершинами A и B. К вершинам исходного графа добавилась вершина C, из которой выходит 4 ребра. Уберем еще одно внешнее ребро и аналогично построим точку C'. Соединив точку C с точкой C', получим новый граф степени 5, у которого уже на 2 вершины больше, чем у исходного (см. рис. 6).

Заметим, что описанное добавление двух вершин к графу с $4n$ вершинами возможно лишь в том случае, когда у исходного графа не меньше шести внешних ребер (поэтому-то наша конструкция и не дает способа построения для графов с 14, 18 и 22 вершинами).

Итак, доказана

Теорема 2. *Число вершин правильного графа степени* 5 *может быть любым четным числом, не меньшим* 12, *кроме, быть может,* 14 *и* 18.

Перейдем теперь к правильным графам степени 3 и 4.

Теорема 3. *Число вершин правильного графа степени* 3 *может быть любым четным числом, не меньшим* 4; *число вершин правильного графа степени* 4 *может быть любым числом, не меньшим* 6, *кроме* 7.

1°. Графы степени 3. Как мы уже отмечали, у правильного графа нечетной степени число вершин всегда четно — это вытекает из четности произведения $B \cdot \overline{\deg V}$. Из формулы (3) следует, что граф степени 3 не может иметь меньше четырех вершин. Граф степени 3 с четырьмя вершинами изображен на рисунке 2. К любому же графу степени 3 всегда можно добавить две вершины, взяв произвольную его грань и соединив

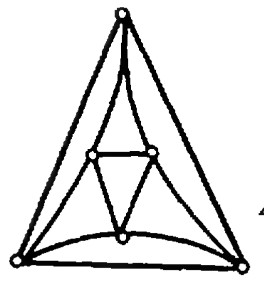


Рис. 7.

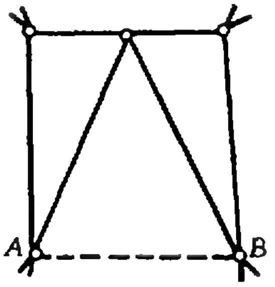


Рис. 8.

две неконцевые точки любых двух несовпадающих ребер этой грани. Тем самым теорема 3 для графов степени 3 доказана.

2°. **Графы степени 4.** Из формулы (3) получаем, что у правильного графа степени 4 не менее шести вершин. Граф с шестью вершинами изображен на рисунке 7. Из формулы (3) также следует, что у графа степени 4 с числом вершин, строго большим 6, всегда имеется нетрехреберная грань. Отбросим (см. рис. 8) ребро AB этой грани и соединим вершины A и B с любой точкой на несоседнем с ребром AB ребре (такое ребро найдется, поскольку выбирается нетрехреберная грань). Тем самым к исходному графу с числом вершин, строго большим 6, добавлена одна вершина (пример построения — на рисунке 8). Базисом индукции может служить граф с 8 вершинами, изображенный на рисунке 9.

Итак, мы доказали, что существуют графы степени 4 с 6 вершинами и с любым числом вершин, не меньшим 8.

Докажем, что не существует графа степени 4 с 7 вершинами. Для этого докажем, что такой граф содержит подграф, изображенный на рисунке 10, который, как известно, без самопересечений на плоскость не укладывается.

Рассмотрим произвольную вершину A исходного графа и вершины A_1, A_2, A_3, A_4, с которыми она соединена. Оставшиеся две вершины нашего графа обозначим через A' и A''. Возможны два случая.

1°. Вершины A' и A'' не соединены между собой.

Тогда, для того чтобы из A' и A'' выходило по четыре ребра, они должны быть соединены со всеми четырьмя вершинами A_1, ..., A_4 (из вершины A уже выходят четыре ребра. В таком случае искомый подграф выбрать легко: в качестве вершин I, II, III (см. рис. 10) можно взять вершины A, A' и A'', а в качестве вершин IV, V, VI — вершины A_1, A_2, A_3.

2°. Вершины A' и A'' соединены между собой.

В этом случае из вершин A' и A'' выходит еще по три ребра к некоторым из вершин A_1, ..., A_4. Поэтому хотя бы две из вершин A_1, ..., A_4 соединены и с A', и с A''. Пусть это вершины A_1 и A_2. Рассмотрим снова два случая.

1) Одна из вершин A_3 и A_4 соединена и с A', и с A''. В таком случае искомый подграф — это подграф с вершинами A, A', A'', A_1, A_2, A_3.

2) A_3 и A_4 соединены ровно с одной из вершин A' и A'' каждая, скажем A_3 с A', а A_4 с A''. Отбросим ребро AA_4 и заменим два ребра A_3A_4 *) и A_4A'' одним ребром A_3A''. Искомый подграф получен — это подграф с вершинами A, A', A'', A_1, A_2, A_3.

Замечание. Из формул (3) и (1) следует, что правильный граф степени 5 с 14 вершинами должен иметь лишь один четырехреберник и 22 трехреберника. Непосредственным перебором можно убедиться, что такого графа не существует.

Для графа степени 5 с 18 вершинами имеются три возможности:

1) 3 четырехреберника, 26 трехреберников;

2) 1 пятиреберник, 1 четырехреберник, 27 трехреберников;

3) 1 шестиреберник, 28 трехреберников.

В этом случае непосредственный перебор затруднителен, и вопрос о существовании правильного графа степени 5 с 18 вершинами пока остается открытым.

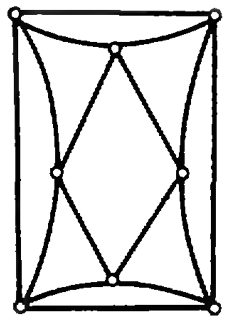


Рис. 9.

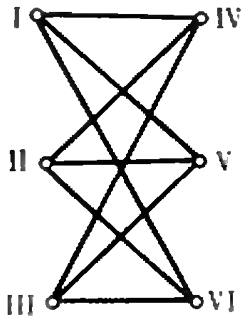


Рис. 10.

---

*) Ребро A_3A_4, очевидно, должно существовать.

Е. Г. Николаев

Равноправны ли все цифры?

Результаты экспериментов

Вопрос заголовка этой статьи выглядит странно: неужели какая-либо цифра достойна особого внимания? Чтобы проверить это, автор статьи повторил эксперимент современного американского математика Хэмминга. Оба эксперимента заключались в следующем. Из нескольких справочников по химии и металлургии случайным образом было выбрано сто именованных констант. В получившийся набор попали высота дымовой трубы одного из типов мартеновских печей, удельный вес каменной соли, теплотворность пропана и даже такой экзотический для неспециалиста параметр, как «константа скорости щелочного омыления» одного сложного эфира. Словом, образовался «винегрет» из самых разнообразных величин.

Чтобы их как-то упорядочить, давайте условимся называть *i-числом* всякое число, в старшем значащем разряде которого стоит цифра i ($i = 1, 2, \ldots, 9$). Так, число 1 будет 1-числом, а 3,7 и 0,0371 будут 3-числами.

На первый взгляд кажется, что наиболее естественно ожидать равномерного распределения констант по девяти группам, где в i-ю группу попадают i-числа. Поскольку выбрано сто констант, у нас должно было бы получиться примерно по одиннадцать i-чисел для каждой цифры i. Конечно, надеяться при этом на точное выпадание числа 11 для всех цифр i нельзя (это и невозможно, поскольку $9 \cdot 11 \neq 100$). Но вот как среди выбранных констант распределились i-числа на самом деле (см. таблицу):

i	Количество i-чисел		
	Хэмминг	Автор	Теоретическое*)
1	34	25	31
2	12	17	17
3	13	16	13
4	15	11	9
5	7	9	8
6	3	8	7
7	4	6	6
8	4	4	5
9	8	4	4
Всего	100	100	100

Как видно из средних колонок этой таблицы, 1-чисел в обоих экспериментах было обнаружено больше, чем, например, 7-чисел. Чем это объяснить? Может быть, при осуществлении экспериментов была бессознательно проявлена «любовь» к цифре 1?

Хэмминг не дал описания способа, которым он пользовался, выбирая свои числа. Автор же выбор чисел производил примерно так. В течение некоторого времени он выписывал первые шесть цифр семизначных номеров своих денежных знаков; в результате образовался некий список

---

*) О «теоретическом» количестве i-чисел речь пойдет ниже.

«случайных чисел». По первой цифре такого случайного числа выбирался справочник (справочники предварительно были пронумерованы), по следующим двум цифрам — страница; остальные три цифры соответствовали номерам строки и столбца, из которых и бралось число. Строго следовать этому правилу, конечно, удавалось не всегда.

Поэтому приходилось применять целый ряд уточнений, но мы на них останавливаться не будем. Во всяком случае ясно, что особое положение 1-чисел основано на чем-то более важном, чем лишь на произволе экспериментаторов.

В чем же дело?

Всякая константа в справочнике получается в результате некоторого измерения. Измерение же есть сравнение с эталоном (килограммом, метром, секундой). Учитываем ли мы где-нибудь использование конкретных эталонов, считая естественным равномерное распределение i-чисел среди выбранных констант? Нет. Поэтому можно ожидать, что вид этого распределения существенно не изменится, если выбрать аналогичные константы из американских таблиц, где используется, например, не метр, а фут. Ведь с «американской» точки зрения равномерное распределение i-чисел столь же естественно.

Как мы сейчас увидим, у нас нет оснований ожидать, что распределение i-чисел получится равномерным как раз потому, что *равномерное распределение не сохраняется при изменении масштаба измерений.*

Проиллюстрируем это следующим примером. Создадим равномерное распределение i-чисел искусственно. Возьмем числовую ось и приложим к ней «гребенку» с n зубцами (черная гребенка, рис. 1).

Пусть нумерация зубцов гребенки начинается с нуля, и гребенка такова, что если ее нулевой зубец расположить против числа 1, то последний ($(n-1)$-й) зубец не «дотянется» до числа 10 на величину одного промежутка между зубцами. Поскольку между зубцами гребенки $(n-1)$ промежутков, то величина одного промежутка равна $9/n$. Следовательно, на числовой оси зубцам гребенки соответствуют числа

$$x_k = 1 + \frac{9}{n}k,\quad k = 0, 1, \ldots, n-1, \qquad (1)$$

образующие арифметическую прогрессию. В этой группе чисел i-числа распределены примерно равномерно: количество i-чисел среди них для любой цифры i приблизительно равняется отношению $n/9$ (возможная ошибка здесь ±1, почему?).

Изменим теперь масштаб, умножив каждое число (1) на некоторое число a, причем

$$2 \leqslant a < 10. \qquad (2)$$

Посмотрим, как это умножение повлияет на количество 1-чисел. Для них (только для них), очевидно, имеем:

$$10 \leqslant a + a\frac{9}{n}k < 20.$$

Следовательно, номера новых 1-чисел заключены в интервале

$$\frac{10-a}{9a}n \leqslant k < \frac{20-a}{9a}n.$$

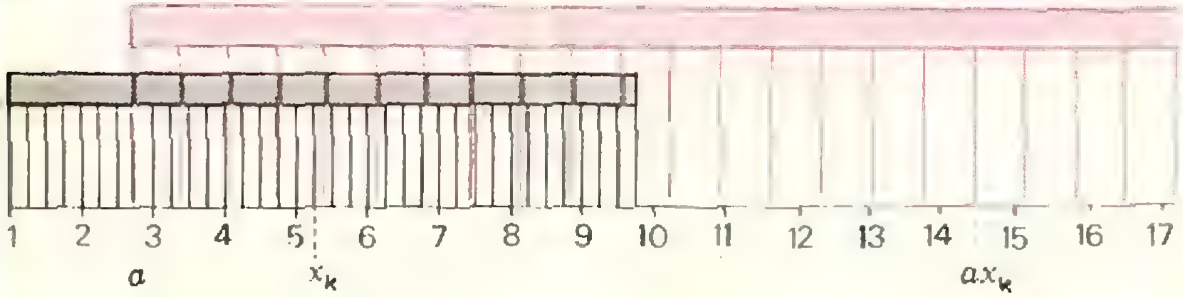


Рис. 1.

и, поскольку k — целое, 1-чисел будет примерно столько, какова длина интервала — около $10n/9a$. Иными словами, количество 1-чисел возрастает примерно в $10/a > 1$ раз (причем эта оценка тем точнее, чем больше число n).

Итак, изменив масштаб в a раз ($2 \leqslant a < 10$), мы увеличим долю 1-чисел среди чисел набора (1), хотя в старом масштабе, по построению, 1-числа ничем не выделялись. Это и свидетельствует о том, что предположение о равномерном распределении i-чисел — неестественно.

«Логарифмический» масштаб

На рисунке 2 изображены две шкалы. Вместе они образуют как бы «таблицу логарифмов»: под всяким числом на верхней шкале (с неравномерными делениями) можно внизу (на шкале с равномерными делениями) прочитать десятичный логарифм этого числа, и наоборот, — по логарифму, отмеченному на нижней шкале, легко найти само это число на верхней шкале (которую поэтому логично было бы назвать *шкалой антилогарифмов*, но мы будем называть ее *логарифмической шкалой*).

Логарифмическая шкала обладает одним чрезвычайно важным свойством: изображенные на ней числа очень легко умножать и делить. Вспомним основное свойство логарифмов:

$$\lg ab = \lg a + \lg b.$$

Поэтому умножение чисел a и b можно произвести так: взять эти числа на логарифмической шкале, найти прямо внизу под ними $\lg a$ и $\lg b$, затем сложить найденные величины (ввиду равномерности нижней шкалы это значит — сдвинуться от точки $\lg b$ на расстояние $\lg a$) и, наконец, прочитать результат на логарифмической шкале (рис. 2). Направление сдвига определяется знаком числа $\lg a$: если $\lg a > 0$, сдвиг происходит вправо, если $\lg a < 0$ — влево. (На этом принципе, кстати, основано устройство *логарифмической линейки*).

Вернемся, однако, к нашей гребенке. Будем считать, что гребенка приложена к нижней шкале, причем промежуток между зубцами равняется $1/n$. Зубцу с номером k на нижней шкале соответствует число k/n, а на логарифмической (верхней) шкале — число

$$y_k = 10^{k/n},\ k = 0, 1, \ldots, n-1. \quad (3)$$

Числа (3) образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $\sqrt[n]{10}$. Количество i-чисел среди них теперь уже зависит от i. Грубо говоря, оно равняется отношению длины промежутка нижней шкалы, соответствующего i-числам логарифмической шкалы, к длине промежутка между зубцами, то есть равно

$$n(\lg(i+1) - \lg i).$$

Умножим теперь все числа (3) на a. Для этого нам нужно просто сдвинуть всю гребенку на расстояние $\lg a$ (в единицах нижней шкалы). Если для a выполнены неравенства (2), то 1-числа, получившиеся после такого сдвига, будут находиться на

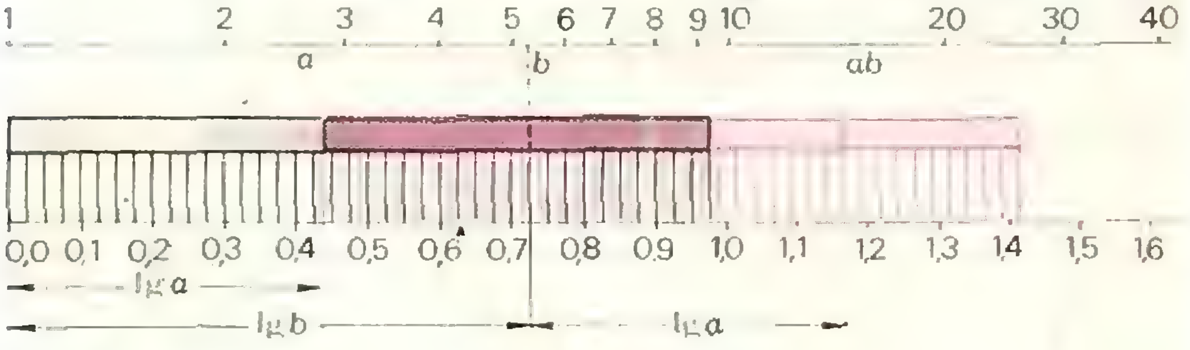


Рис. 2.

логарифмической шкале в интервале от 10 до 20. Но длина этого интервала (в единицах нижней шкалы) равна мантиссе числа lg 20, то есть она совпадает с длиной интервала от единицы до двух (см. рис. 2). Поэтому с точностью до ±1 количество 1-чисел останется прежним. На самом деле при этом сдвиге сохраняется количество i-чисел для любого i, причем условие (2) на величину a можно отбросить. Попробуйте доказать это самостоятельно (см. задачу 2).

Верно даже обратное утверждение (хотя дать его точную формулировку и доказательство не просто): *всякое распределение i-чисел, сохраняющееся при умножении на произвольное число* $a > 0$, *должно быть близким к «логарифмическому» распределению*, задаваемому гребенкой.

Воспользуемся «распределением гребенки», чтобы ответить на главный вопрос статьи. Вспомним нашу таблицу (см. с. 16). В ее последней колонке указаны как раз количества i-чисел среди образующих геометрическую прогрессию чисел (3) при $n = 100$. Мы видим, что 1-числа среди них действительно преобладают и, кроме того, что все данные этого распределения довольно хорошо согласуются с экспериментальными. Это наблюдение позволяет предположить, что *распределение i-чисел среди образующих геометрическую прогрессию чисел* (3) — *наиболее вероятное* (поэтому-то мы и назвали последнюю колонку таблицы «теоретической»).

Удалось ли нам, однако, доказать гипотезу, что в произвольной таблице распределение i-чисел будет соответствовать «логарифмическому» распределению? Конечно, нет. Доказать это в общем виде нельзя. Для этого нужны дополнительные предположения о характере случайности набора рассматриваемых констант. Отметим здесь только, что существуют таблицы именованных констант (например, расписания поездов) с совсем иным распределением i-чисел.

Предпочтительные числа

Перед человеком, планирующим производство, стоит задача: наметить выпуск вариантов одного и того же изделия, отличающихся *типоразмерами*. Например, электрические лампы бывают нужны мощностью от долей ватта (для освещения шкал приборов) до десятков киловатт (для огней маяков). Как составить набор типоразмеров, чтобы удовлетворительно обеспечить любую потребность?

Конечно, хотелось бы, чтобы при этом количество типоразмеров не было чересчур большим. Для этого намечаемые варианты должны хорошо соответствовать неизвестному нам распределению возможных потребностей. Об этом распределении мы почти ничего не знаем, но трудно поверить, что оно может сильно зависеть от применяемых единиц измерения.

Здесь уместно вспомнить гипотезу, высказанную нами в конце предыдущего пункта, касающуюся исключительности «логарифмического» распределения i-чисел среди чисел (3).

Оказывается, в нашей стране варианты типоразмеров зафиксированы специальным законодательным постановлением: *государственным стандартом* (ГОСТ). С 1957 года в СССР действует ГОСТ 8032-56, согласно которому во всех отраслях промышленности при введении нового типоразмера рекомендуется придерживаться некоторых вполне конкретных коэффициентов: *предпочтительных чисел*.

Эти числа представляют собой округленные значения чисел логарифмической шкалы, определяемых «гребенками», т. е. чисел (3), при $n = 5, 10, 20, 40$! Множество предпочтительных чисел, соответствующее одной гребенке, называется *рядом* и обозначается через Rn. Букву R связывают обычно с именем французского инженера Ш. Ренара, применявшего в конце XIX века такие числа для подбора толщин аэростатных тросов. Вот как выглядят ряды $R5$ и $R10$:

1.00	1.00
	1.25
1.60	1.60
	2.00
2.50	2.50
	3.15
4.00	4.00
	5.00
6.30	6.30
	8.00
10.00	10.00

В магазинах бытовых электротоваров продаются лампы следующих мощностей: 15*w*, 25*w*, 40*w*, 60*w*, 100*w*, 150*w* и 200*w*. Читатель видит, что за исключением последней величины это слегка подправленный ряд $R5$.

Если отказаться от слишком высоких требований к точности вычислений, то можно считать, что произведение предпочтительных чисел также является предпочтительным числом (почему?).

Поэтому предпочтительными будут площади (объемы) прямоугольников (параллелепипедов), если только их линейные размеры выражены предпочтительными числами. То же самое справедливо для площади круга и объема цилиндра, поскольку предпочтительное число 3,15 близко к числу π. Это — еще один аргумент за то, чтобы при составлении наборов типоразмеров использовать предпочтительные числа.

Задачи

1. Какая цифра встречается чаще во втором значащем разряде именованного числа?

2. Докажите «закон сохранения» количества i-чисел при «логарифмическом» распределении (с. 18).

3. Докажите, что величина

$$\max_{1\leqslant x\leqslant 10}\left[\min\left(\frac{x_0}{x}+\frac{x}{x_0},\ \frac{x_1}{x}+\frac{x}{x_1},\ \ldots,\ \frac{x_n}{x}+\frac{x}{x_n}\right)\right],$$

где $1=x_0\leqslant x_1\leqslant\ldots\leqslant x_{n-1}\leqslant x_n=10$, принимает наименьшее возможное значение, когда числа x_k образуют геометрическую прогрессию.

Несколько построений двусторонней линейкой

1. Дан квадрат со стороной 1. Покажите, что с помощью двусторонней линейки можно построить

а) отрезки длиной $\sqrt{3}$ и $\sqrt{6}$.

б) равносторонний треугольник с длиной стороны 1.

2. В окружность, центр которой не указан, вписать правильный $3\cdot 2^n$-угольник, при любом натуральном n.

3. Дан равносторонний треугольник с длиной стороны 1. При помощи двусторонней линейки постройте равносторонний треугольник с длиной стороны $\sqrt{13}$.

А. Аляев.

К механике буерного спорта

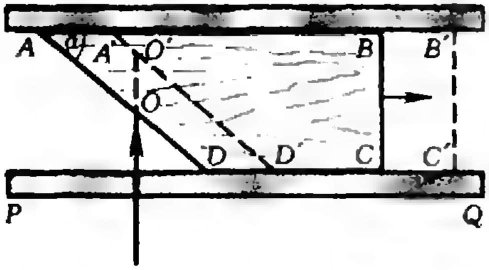
В. Н. Ланге, Т. И. Ланге

Буер — это установленная на коньках платформа, на которой укреплена мачта с парусом.

Первые спортивные гонки на буерах в России состоялись в 1890 году в Петербурге. С начала XX века буерный спорт приобретает большую популярность, особенно в Прибалтике. С 1947 года регулярно проводятся чемпионаты СССР по буерному спорту.

Буерные гонки — очень красивое зрелище. Стремительно скользят на металлических полозьях по гладкой ледяной поверхности легкие белокрылые платформы. Скорость буера при умелом управлении достигает 100 *км/ч*. И вот что поразительно: если в это время измерить скорость ветра, она может оказаться в два, а то и в три раза меньше!

Получается, что не имеющий собственного двигателя буер обгоняет ветер! Каким же образом? Ведь разгон происходит за счет силы давления на парус со стороны воздуха. Казалось бы, наибольшая скорость, которой можно достигнуть, это скорость ветра. Но не надо забывать, что буерным парусом можно управлять. Именно «парусные маневры» и позволяют достигать «сверхветровых» скоростей.



Чтобы разобраться в механизме разгона буера, рассмотрим следующий пример.

Пусть по прямолинейным направляющим MN и PQ (см. рисунок) может скользить брусок $ABCD$, грани которого AB и AD образуют угол α. Трение между бруском и направляющими настолько мало, что уже ничтожное усилие приводит к перемещению бруска. Пусть в точке O в направлении, указанном на рисунке стрелкой, на брусок действует некоторая постоянная сила. Например, на грань AD давит стержень. Вследствие незначительности сил сопротивления брусок придет в движение даже при легком воздействии, и за то время, пока конец стержня пройдет путь OO', брусок переместится по направляющим на расстояние, равное AA', заняв положение $A'B'C'D'$. Нетрудно видеть, что

$$AA' = \frac{OO'}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

Будем для простоты считать движение стержня и бруска равномерным. Поделив обе части равенства на время движения t, получим связь между скоростями бруска и стержня:

$$v_{\text{бр}} = \frac{v_{\text{с}}}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

Отсюда видно, что при $0 < \alpha < 45$ скорость бруска будет превышать скорость стержня, поскольку $\operatorname{tg}\alpha < 1$.

Теперь вернемся к буеру. Если считать, что полозья буера расположены по линиям MN и PQ, его парус установлен в направлении AD, а ветер дует вдоль OO', то, очевидно, для соотношения между скоростями буера и ветра можно получить аналогичное выражение:

$$v_{\text{б}} = \frac{v_{\text{в}}}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

Мы рассмотрели лишь случай, когда ветер дует перпендикулярно курсу буера; анализ остальных читателю предоставляется выполнить самостоятельно.

ЛАБОРАТОРИЯ
«КВАНТА»

Отражательные поляризаторы

М. П. Головей

Наблюдая солнечные зайчики, отраженные от стекла или от поверхности воды, вы, быть может, никогда не задумывались над тем, что же представляет собой отраженный свет. На первый взгляд кажется, что отраженный луч *ничем, кроме направления, не* отличается от луча падающего. На самом же деле это не так. Причина этого в поперечности световых волн.

Еще в 1808 году французский ученый Этьен-Луи Малюс обнаружил, что свет, отраженный от стекла, частично поляризован. Это означает, что интенсивность волн, составляющих отраженный свет, уже не одинакова для колебаний разных направлений, как у естественного света. Появляется избранное направление. В отраженном луче интенсивность волн с этим направлением колебаний максимальна, а интенсивность волн с направлением колебаний, перпендикулярным избранному, минимальна. Частичная поляризация света имеет место при зеркальном отражении от границы двух любых диэлектриков.

Как же свет поляризуется при отражении, и от чего зависит степень поляризации? Чтобы понять это явление, познакомимся с ним подробнее.

Посмотрим через поляризатор на блик света, отраженного от стеклянной пластинки под большим углом. Поворачивая поляризатор вокруг его оси, можно убедиться, что отраженный луч частично поляризован с преимущественным направлением колебаний, перпендикулярным плоскости падения (плоскости, содержащей луч света и нормаль к поверхности). Преломленный луч также частично поляризован, хотя обычно и в меньшей степени; преимущественное направление его колебаний параллель*но плоскости падения*.

Пусть свет падает на поверхность диэлектрика под углом φ (φ — угол между направлением луча и перпендикуляром к поверхности). Если угол падения $\varphi = \varphi_0$ такому, что

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = n$$

(n — показатель преломления среды), то отраженный луч полностью поляризован.

Это условие называется законом Брюстера по имени ученого, открывшего этот закон. Угол φ_0 называют углом Брюстера или углом полной поляризации.

Если угол падения не равен φ_0, свет поляризуется частично, причем

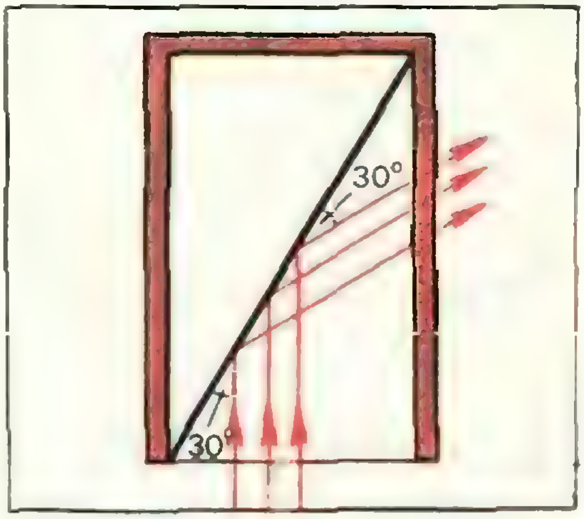


Рис. 1.

тем меньше, чем больше отклонение угла падения от угла Брюстера.

Даже при перпендикулярном падении света на стекло внутрь стекла проходит только 96% падающего света. Плоскопараллельная пластинка имеет две поверхности, следовательно, даже если пренебречь поглощением света в стекле, она пропускает не более 92% падающего на нее света. А ведь современные объективы и оптические приборы могут состоять из десятков оптических деталей. Поэтому ясно, какую важную роль должны играть в технике вопросы, связанные с изучением отражения света от границы двух диэлектриков.

Поляризатор изготовить самим можно довольно просто. Показатель преломления обычного стекла равен примерно 1,5—1,6. Угол Брюстера в этом случае составляет 56°—58°. Значит, любой кусок листового стекла, наклоненный так, чтобы свет падал на него под углом 56° к нормали, будет служить достаточно хорошим поляризатором, и с его помощью можно наблюдать все эффекты, связанные с поляризацией света. Еще более удобными поляризаторами могут служить непрозрачные темные диэлектрики, например, черное стекло или засвеченные и проявленные негативы. В этом случае наблюдению не мешает проходящий сквозь пластинку свет. Одна из возможных конструкций отражательного поляризатора приведена на рисунке 1. Поляризатор состоит из цилиндрического или прямоугольного корпуса, который можно склеить из картона и покрасить изнутри черной краской. Под углом, равным $90° - \varphi_0 \cong 30°$ к оси корпуса, укрепляется стеклянная пластинка или зачерненный негатив. Сбоку в корпусе делается отверстие для наблюдения. Луч света, направленный вдоль оси корпуса, падает на стекло или какой-нибудь другой диэлектрик с гладкой поверхностью под углом Брюстера и наблюдается глазом через отверстие в корпусе. Имея пару таких поляризаторов, можно, например, проводить исследование анизотропии материалов.

Пользуясь законами отражения света, можно изготовить поляризаторы и несколько другой конструкции.

Так как свет, отраженный от границы двух диэлектриков, поляризован с преимущественным направлением колебаний, перпендикулярным плоскости падения, то и преломленный луч должен быть поляризован. При падении под углом Брюстера поляризация преломленных лучей максимальная, но далеко не полная. Свет, проходящий через границу воздух — стекло, заметно поляризован. Если свет проходит внутрь плоскопараллельной пластинки, то на второй поверхности вновь происходит преломление под тем же углом Брюстера, и поляризация прошедшего через пластинку света еще увеличивается. Если сложить последовательно несколько пластинок (несколько сложенных пластинок называются стопой), то поляризация проходящего света будет быстро возрастать при увеличении числа пластинок в стопе. После прохождения 8—10 пластинок и прошедший, и отраженный свет будут практически полностью поляризованы. Интенсивности отраженного и прошедшего пучков в этом случае равны между собой и составляют каждая половину интенсивности падающего света (если, конечно, можно пренебречь поглощением в стекле). Оправу для такого поляризатора можно также склеить из картона, только наблюдение следует вести теперь вдоль оси корпуса, на просвет. Многие изотропные прозрачные материалы, например, стекло, полиэтилен, целлофан, могут приобретать заметную анизотропию под действием внешних механических нагрузок или под действием внутренних напряжений, возникающих при их изготовлении. Если такие материалы поместить между скрещенными поляризаторами и рассматривать в проходящем свете, можно увидеть на

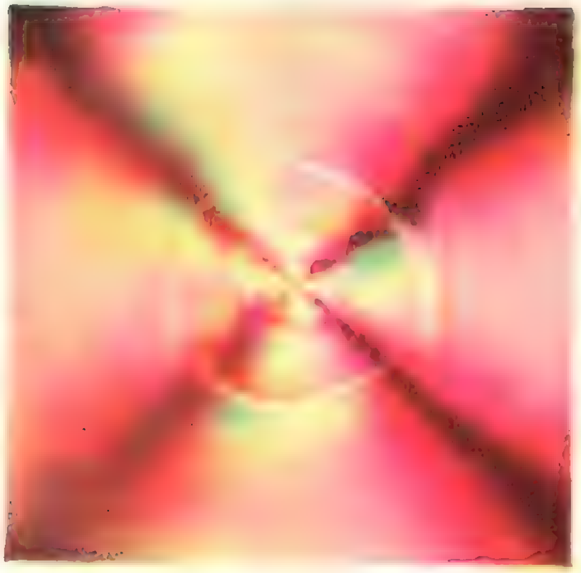


Рис. 2.

участках с неоднородностями цветные полосы или пятна. В качестве отражательного поляризатора удобно использовать стопу, сделанную из стеклянных пластинок.

Появление окраски связано с тем, что поляризованный свет, попадающий на анизотропный образец из первого поляризатора, распадается в образце на два пучка, имеющие разные скорости распространения и взаимно перпендикулярные направления поляризации. На выходе из исследуемого образца эти два пучка складываются. Поскольку скорости этих лучей в образце были разными, лучи приобретают разность фаз, величина которой зависит от величины анизотропии образца и от длины волны падающего света. Поэтому, складываясь, лучи света дают интерференционную окраску.

Рассматривая между поляризаторами разные прозрачные предметы, вы легко обнаружите изделия с оптически анизотропными участками. Посмотрите, как красиво выглядит между поляризаторами донышко стаканчика от кофейной мельницы (рис. 2). Обыкновенный целлофан, полиэтиленовая пленка, слюда приобретают окраску, похожую на окраску мыльных пленок или нефтяных пятен на воде. Из кусочков таких материалов можно изготовить мозаичный орнамент или небольшую картинку, причем нужный цвет можно подбирать вращением отдельных кусочков вокруг оси или накладывая их друг на друга. Таким способом изготовлена из целлофана картинка, показанная на рисунке 3. Целлофан был взят из обычных упаковочных пакетиков, в которых в магазинах продают конфеты. Несколько труднее сделать картинки из полиэтиленовой пленки. Чтобы окраска пленки была достаточно яркой и сочной, пленку необходимо предварительно сильно растянуть.

Можно наблюдать и поляризацию рассеянного света.

Возьмите какой-нибудь сосуд с прозрачными стенками любой формы: цилиндрический стакан, сферическую колбу или кювету с плоскими стенками, пол-литровую или литровую стеклянную банку. Можно взять и бутылку из неокрашенного стекла. Наполните сосуд водой, затем добавьте в него несколько капель чернил или туши и размешайте. Осветите сосуд каким-нибудь источником, создающим направленный пучок света, например, электрическим фонарем, диа- или кинопроектором. Взвешенные в воде мелкие частицы будут заметно рассеивать свет. Сосуд лучше всего

Рис. 3.

ставить как можно ближе к источнику света, чтобы диаметр пучка был минимальным. Чтобы не было мешающих наблюдению бликов света от стенок сосуда, лучше всего на фонарь или проектор наклеить бумажную диафрагму, так, чтобы поперечный размер светового пучка был в несколько раз меньше диаметра сосуда.

Если смотреть перпендикулярно направлению распространения света, то вы увидите след луча в колбе. Это и есть рассеянный частичками свет. Наблюдая его через поляризатор, можно обнаружить, что он плоскополяризован, поскольку при вращении поляризатора след пучка света в колбе погасает два раза за один оборот поляризатора. То же самое обнаруживается, если смотреть на сосуд вертикально сверху или снизу.

Такой же эффект можно наблюдать и при рассеянии солнечного света в атмосфере.

Свойство света поляризоваться при отражении от диэлектрика широко используется в технике, некоторые особенности этого явления вы можете наблюдать и сами. Пользуясь поляризаторами, можно устранить или ослабить свет, отраженный от стекла, эмали, пластмассы, асфальта, жидкостей и других неметаллических поверхностей. Например, при фотографировании можно ослабить или совсем убрать блик от стекол очков, мешающих видеть глаза; отражение неба в оконных стеклах зданий или на воде; блики, затрудняющие рассматривание застекленных картин или вещей в витринах и так далее.

Очень интересные эффекты можно получить при наблюдении и фотографировании поверхностей водоемов. При наклонном падении света на поверхность воды часть его зеркально отражается и слепит глаза, засвечивает фотопленку, мешает наблюдать подводные объекты. Однако, если воспользоваться соответствующим образом ориентированным поляризатором (нужная степень гашения бликов достигается просто вращением поляризатора вокруг его оси), бо́льшая часть зеркально отраженного света будет поглощаться, и соотношение яркостей предметов намного улучшится. Поэтому поляризаторы необходимы летчикам при наблюдении с самолета за подводными лодками.

Листья деревьев и трава частично поляризуют наклонно падающий свет. Интенсивность отраженного листьями излучения солнца и неба имеет наибольшую величину при таком наклоне листьев, при котором зеркально отраженный свет направлен в сторону наблюдателя. Сквозь нейтральные (серые) поляризационные солнечные очки окраска листьев, травы и цветов мягче и насыщеннее, чем без поляризаторов.

Окна из поляроидов применяются в диспетчерских башнях аэропортов для улучшения видимости посадки и взлета самолетов. Поляризаторы используются также на сборочных линиях и при проверке качества изделий для улучшения видимости мелких дефектов. Поляризационные особенности отраженного света используются даже в рыбной промышленности для защиты глаз от блеска рыбной чешуи при сортировке рыбы на промыслах.

На практике мы довольно часто сталкиваемся не с естественным, а с частично поляризованным светом. Изготовив поляризаторы, вы и сами сможете в этом легко убедиться.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
КРУЖОК

Одна задача о расположении точек

Г. А. Тоноян

Пусть на плоскости даны n точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой (только такие множества точек мы и будем рассматривать). Ясно, что если $n \geqslant 3$, то можно найти простейший *выпуклый* *) многоугольник — треугольник — с вершинами в трех из этих точек.

А всегда ли при $n > 3$ можно найти выпуклый четырехугольник с вершинами в этих точках? Если $n = 4$ и точки являются вершинами *невыпуклого* четырехугольника, то сделать это не удастся. Если же $n \geqslant 5$, то при любом расположении точек найти выпуклый четырехугольник можно. Действительно, если *выпуклой оболочкой* нашего множества **) является k-угольник, где $k > 3$, все в порядке — любые четыре вершины этого k-угольника являются вершинами искомого четырехугольника. Пусть $k = 3$, выпуклой оболочкой является треугольник ABC. Тогда найдутся по крайней мере две точки — D и E,— лежащие внутри этого треугольника (см. рис. 1). Прямая DE не проходит через вершины треугольника ABC. Поэтому две из вершин этого треугольника (скажем, A и C) находятся по одну сторону от прямой DE. Следовательно, $ACED$ — выпуклый четырехугольник.

Итак, достаточно, чтобы n было больше четырех.

А каким должно быть n, чтобы можно было выделить выпуклый пятиугольник? Выяснение этого вопроса и является нашей целью.

Заметим, что n должно быть больше 8, как это ясно из рисунка 2. Поэтому, если мы докажем, что множество точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой и никакие пять из которых не являются вершинами выпуклого пятиугольника, содержит не больше восьми точек, то задача будет полностью решена.

Пусть N — такое множество точек.

Обозначим через K его выпуклую оболочку, через L — выпуклую обо-

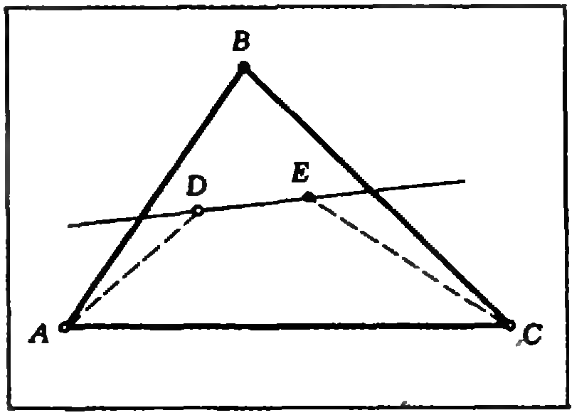


Рис. 1.

---

*) Напомним, что выпуклым называется многоугольник, который вместе с каждыми двумя точками содержит соединяющий их отрезок.

**) Выпуклой оболочкой множества точек на плоскости называется минимальный выпуклый многоугольник, который их содержит. Поскольку пересечение двух выпуклых многоугольников является выпуклым многоугольником, это определение корректно.

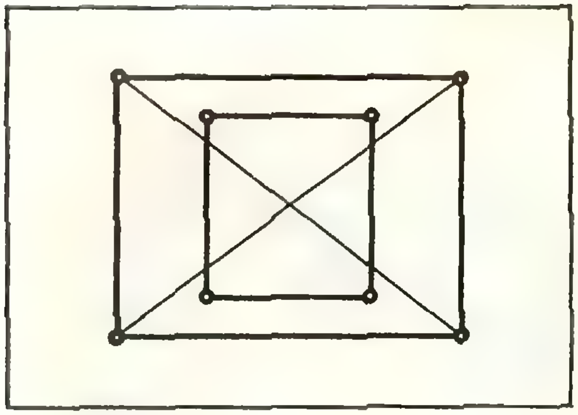


Рис. 2.

лочку множества $N \setminus K$ — множества, получающегося удалением из N его подмножества K, а через M — множество $(N \setminus K) \setminus L$.

Рассмотрим следующие возможности: 1) множество M пусто; 2) множество M состоит из единственной точки; 3) множество M содержит не менее двух точек.

1) Множество M пусто. Тогда N содержит только вершины многоугольников K и L, то есть не больше 8 точек (поскольку каждый из многоугольников K и L является треугольником или четырехугольником).

2) Множество M содержит единственную точку; обозначим ее через P. Если L — четырехугольник, то проведя одну его диагональ, мы разобьем его на два треугольника; точка P лежит внутри одного из них (рис. 3). Обозначим вершины этого треугольника буквами A, B, C. Если же L — треугольник, то обозначим его вершины через A, B, C; точка P лежит внутри этого треугольника.

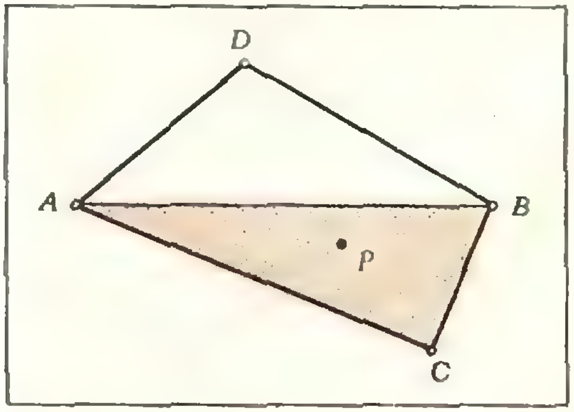


Рис. 3.

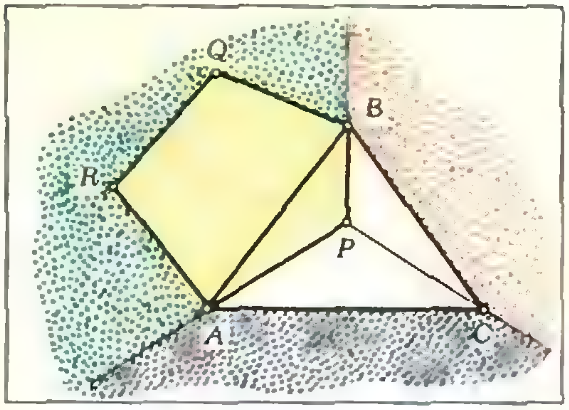


Рис. 4.

В любом случае среди вершин многоугольника L найдутся такие три вершины A, B, C, что P — внутренняя точка треугольника ABC.

Проведем из точки P лучи PA, PB, PC. Они разбивают плоскость на три угла APB, BPC, CPA. Легко видеть, что в каждом из этих углов содержится не более одной вершины многоугольника K. В самом деле, пусть, например, угол APB содержит две вершины многоугольника K, а значит, содержит некоторую сторону RQ многоугольника K. Тогда точки A, P, B, Q, R являются вершинами выпуклого пятиугольника (рис. 4), что невозможно. Поэтому K имеет самое большее три вершины (по одной в каждом из рассмотренных углов). Поскольку L имеет, самое большее, четыре вершины, а M, по предположению, состоит из одной точки P, множество N содержит не более восьми точек.

3) Множество M содержит не менее двух точек. Обозначим через E и F любые две точки множества M.

Предположим сначала, что L — четырехугольник. Прямая EF не проходит через вершины многоугольника L и пересекает две его стороны. Если бы EF пересекала две смежные стороны четырехугольника L (рис. 5), то три другие вершины B, C, D четырехугольника L вместе с E и F были бы вершинами выпуклого пятиугольника. Следовательно, EF пересе-

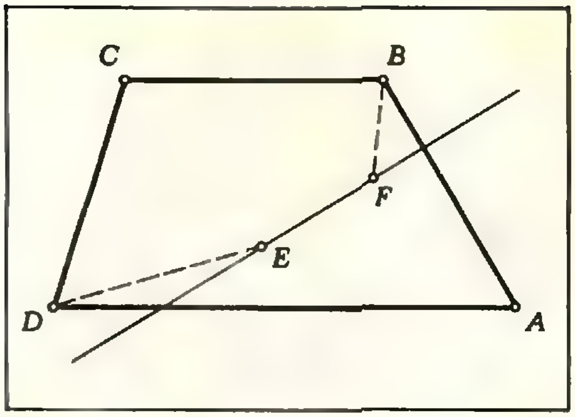


Рис. 5.

кает две противоположные стороны четырехугольника L.

Пусть, например, луч EF пересекает сторону AB, а луч FE пересекает сторону CD (рис. 6). Проведем лучи FA, FB, EC и ED. Вместе с отрезком EF они разбивают плоскость на 4 части. Если бы внутри угла AFB (являющегося одной из этих четырех частей) лежали две вершины многоугольника K, а значит, и некоторая сторона TR многоугольника K, то точки A, F, B, T, R были бы вершинами выпуклого пятиугольника (рис. 7). Следовательно, внутри угла AFB лежит не больше одной вершины многоугольника K. Точно так же, внутри угла CED лежит не больше одной вершины многоугольника K. Что же касается оставшихся двух частей, то в них вообще не могут располагаться вершины многоугольника K (иначе вместе с точками A, F, E, D или B, F, E, C они образовали бы выпуклый пятиугольник, рис. 6). Получается, что K имеет не более двух вершин (по одной внутри углов AFB, CED), что невозможно, так как K — треугольник или четырехугольник.

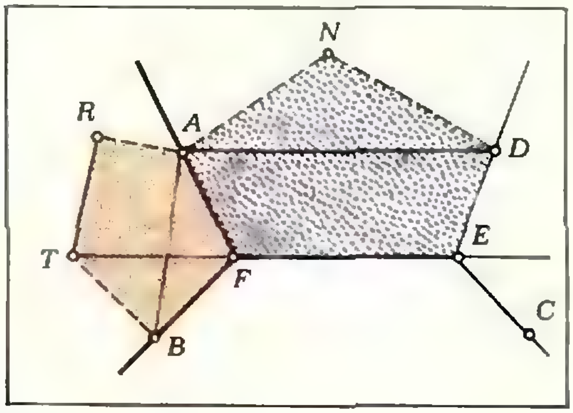


Рис. 6.

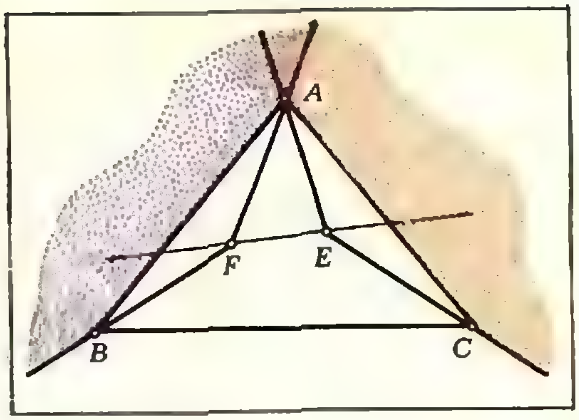


Рис. 7.

Предположим, наконец, что L — треугольник. Прямая EF отделяет одну вершину этого треугольника.

Пусть, например, луч EF пересекает сторону AB, а луч FE — сторону AC (рис. 7). Рассуждая, как и прежде, найдем, что в углах AEC и AFB содержится не больше чем по одной вершине многоугольника K, а часть плоскости, ограниченная лучами EC, FB и отрезком EF, совсем не содержит вершин многоугольника K.

Итак, предположение, что M содержит не менее двух точек, приводит к противоречию. Если же M пусто или содержит одну точку, то N имеет не более восьми точек. Этим и завершается доказательство.

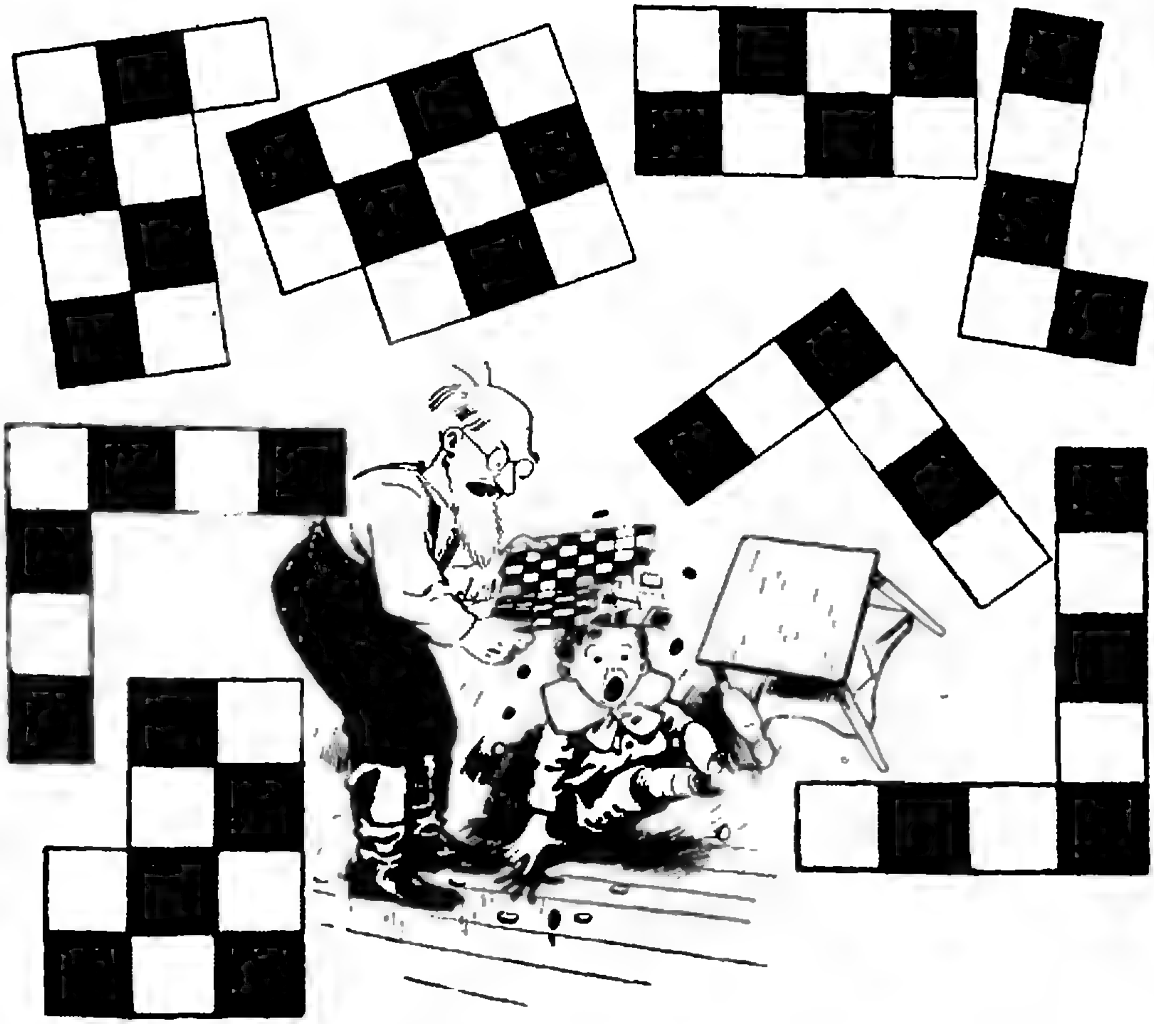
Упражнения

1. Докажите, что если все четырехугольники с вершинами в некоторых n точках — выпуклые, то эти n точек являются вершинами выпуклого n-угольника.

2. На плоскости дано n точек. Докажите, что существует не менее $\frac{C_n^5}{n-4}$ выпуклых четырехугольников с вершинами в этих точках.

3. На плоскости дано бесконечное множество точек. Докажите, что при любом k найдется выпуклый k-угольник с вершинами в этих точках.

(Напоминаем, что рассматриваются только такие множества точек, в которых никакие три точки не лежат на одной прямой.)



Шашечная головоломка Сэма Лойда

Старина Руб Перкинс, в течение сорока лет никому не уступавший звание чемпиона своего округа по шашкам, однажды вышел из себя вундер-кинд-четвероклассник нанес ему решительное поражение. Когда же вундеркинд во второй партии выиграл у Перкинса три шашки за одну, чемпион окончательно потерял голову и, прервав игру так, как это показано на рисунке, поклялся никогда больше не садиться за доску.

Попробуйте-ка вновь склеить шахматную доску из восьми имеющихся ее кусков. Для этого нет необходимости вырезать куски из рисунка. Скопируйте их или перенесите на кальку.

задачник Кванта

Решения задач из этого номера можно посылать не позднее 1 января 1976 г. по адресу: 113035, Москва, Ж-35, Б. Ордынка, 21/16, журнал «Квант». После адреса на конверте напишите, решения каких задач вы посылаете, например: «Задачник «Кванта», М351, М352» или «...Ф363». Решения задач по каждому из предметов (математике и физике), а также новые задачи просьба присылать в отдельных конвертах. Задачи из разных номеров журнала присылайте также в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты ваших решений). Условия оригинальных задач, предлагаемых для публикации, присылайте в двух экземплярах вместе с вашими решениями этих задач (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»). После формулировки задачи мы обычно указываем, кто предложил нам эту задачу. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Наиболее трудные задачи отмечены звездочкой.

Задачи

М351—М355; Ф363—Ф367

М351. Восстановите треугольник, если на плоскости отмечены три точки: O — центр описанной окружности, P — центр тяжести и H — основание одной из высот этого треугольника.

М. М. Имерлишвили
(ученик 9 класса, Тбилиси)

М352*. Пусть n — целое число, для которого

$$n < (45 + \sqrt{1975})^{30} < n + 1.$$

Докажите, что n нечетно.

Д. К. Фаддеев

М353*. Пусть $ABCD$ — произвольный тетраэдр. Докажите, что:

а) сумма двугранных углов тетраэдра, ребрами которых служат AB, BC, CD и DA, меньше 2π;

б) сумма всех двугранных углов тетраэдра больше 2π, но меньше 3π;

в) сумма косинусов всех двугранных углов тетраэдра положительна и не превосходит 2, причем эта сумма равна 2 в том и только в том случае, когда все грани тетраэдра — конгруэнтные треугольники;

г) если $|AB| + |CD| = |BC| + |DA|$, то сумма двугранных углов с ребрами AB и CD равна сумме двугранных углов с ребрами BC и AD.

И. Ф. Шарыгин

М354. Можно ли расставить числа $1, 2, 3, \ldots, 4n + 2$ в вершинах и серединах сторон правильного $(2n + 1)$-угольника так, чтобы сумма трех чисел, стоящих в концах и середине каждой стороны, была для всех сторон одинаковой?

Рассмотрите в качестве примеров случаи $n = 3$, $n = 8$.

С. Т. Берколайко

М355. N ребят перекидываются N мячами. В начале игры каждый из них бросает свой мяч кому-нибудь из своих товарищей и сам ловит брошенный кем-нибудь мяч (он может подбросить и поймать свой собственный мяч) так, что снова у всех оказывается по мячу. Затем ребята опять бросают мячи тем же, кому они бросали их в первый раз, и так далее. Игра останавливается, когда все мячи вернулись к своим владельцам (чтобы мячи не перепутались, будем считать их разноцветными).

Докажите, что

а) к каждому из участников мяч вернется впервые не более чем через N бросаний;

б) игра обязательно закончится;

в)* для 5, 10 и 15 участников она может закончиться самое большее через соответственно 6, 30 и 105 бросаний (а какова максимальная возможная длительность игры для $N = 7$, $N = 8$, $N = 20$?);

г)* длительность игры всегда является делителем числа $N! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot N$;

д)* длительность игры не может превышать $3N/3$.

Э. Г. Белага

Ф363. На цилиндр намотаны нити, как показано на рисунке 1. Правые концы нитей тянут со скоростью v_1, а левые — со скоростью v_2. С какой угловой скоростью вращается при этом цилиндр вокруг своей оси? Радиус цилиндра равен R.

Ф364. Каким должен быть коэффициент трения k резины о внешнюю поверхность конуса с углом при вершине 2α, чтобы мотоциклист мог двигаться по поверхности конуса по горизонтальной окружности радиуса R со скоростью v (рис. 2)?

Ф365. Найти емкость системы конденсаторов, соединенных так, как показано на рисунке 3.

В. Е. Белонучкин

Ф366. Колба-шар емкостью $V = 1$ *л* была откачана и закрыта. На стенках колбы остался мономолекулярный слой воздуха. Оценить давление, которое будет в колбе, нагретой до *300 С*, если *известно, что при* такой температуре стенки колбы полностью обезгаживаются.

А. В. Митрофанов

Ф367. Построить изображение квадрата, даваемое собирающей линзой (см. рис. 4). Середина стороны квадрата, лежащей на главной оптической оси линзы, находится от линзы на расстоянии, равном фокусному.

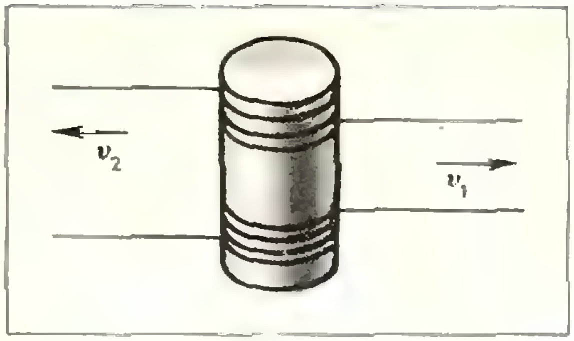


Рис. 1.

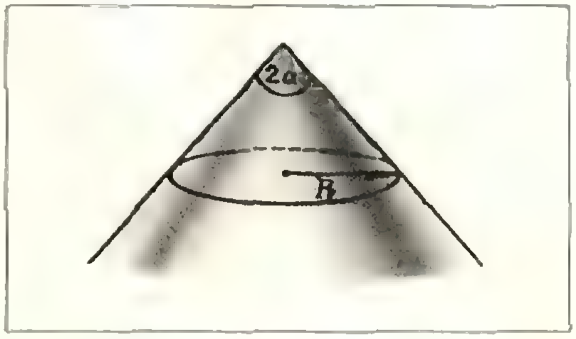


Рис. 2.

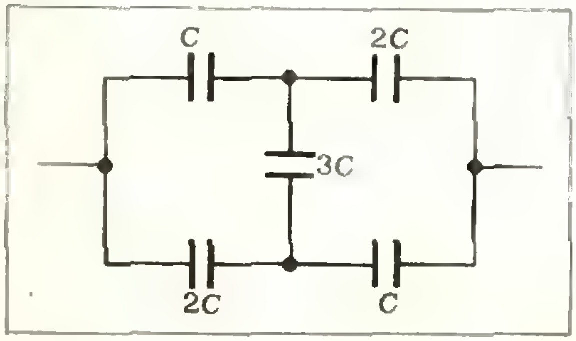


Рис. 3.

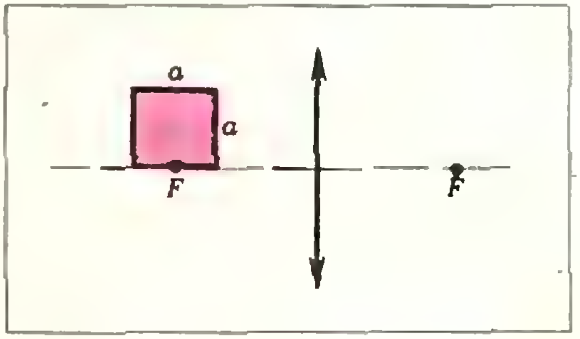


Рис. 4.

Решения задач

М314, М316, М317; Ф322—Ф327, Ф329

М314. *Среди всех 9-значных чисел, в десятичной записи которых нет цифры 0, найти такое, для которого разность между самим числом и произведением его цифр*
а) наименьшая;
б) наибольшая;
Каков будет ответ для n-значных чисел при любом n?

Будем решать задачу сразу для n-значных чисел.

Начнем с задачи а). Пусть искомое число — обозначим его через A — записывается цифрами $a_1, \ldots, a_n$: $A = \overline{a_1, \ldots a_n}$. Тогда.

$$A = a_1\cdot 10^{n-1} + a_2\cdot 10^{n-2} + \ldots + a_{n-1}\cdot 10 + a_n.$$

Обозначим разность между числом A и произведением его цифр через B:

$$B = a_1\cdot 10^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\cdot 10 + a_n - a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n.$$

Покажем, что если B — наименьшая разность, то у числа A не может быть одновременно двух цифр, отличных от единицы или девятки.

В самом деле, пусть есть две такие цифры: a_k и a_l. Тогда, увеличив, а затем уменьшив цифру a_k на единицу, мы можем составить новые два n-значные числа (среди цифр которых не будет нулей):

$$A_1 = a_1\cdot 10^{n-1} + \ldots + (a_k + 1)\cdot 10^{n-k} + \ldots + a_{n-1}\cdot 10 + a_n;$$
$$A_2 = a_1\cdot 10^{n-1} + \ldots + (a_k - 1)\cdot 10^{n-k} + \ldots + a_{n-1}\cdot 10 + a_n.$$

Запишем разности B_1 и B_2 между числами A_1, A_2 и произведением их цифр:

$$\begin{aligned} B_1 &= A_1 - a_1\cdot\ldots\cdot(a_k + 1)\cdot\ldots\cdot a_{n-1}\cdot a_n = \\ &= (A - a_1\cdot\ldots\cdot a_n) + 10^{n-k} - a_1\cdot\ldots\cdot a_{k-1}\cdot a_{k+1}\cdot\ldots\cdot a_n = \\ &= B + (10^{n-k} - a_1\cdot\ldots\cdot a_{k-1}\cdot a_{k+1}\cdot\ldots\cdot a_n); \\ B_2 &= A_2 - a_1\cdot\ldots\cdot(a_k - 1)\cdot\ldots\cdot a_{n-1}\cdot a_n = \\ &= B + (-10^{n-k} + a_1\cdot\ldots\cdot a_{k-1}\cdot a_{k+1}\cdot\ldots\cdot a_n). \end{aligned}$$

По предположению B — наименьшая разность; поэтому одновременно должны выполняться неравенства $B \leqslant B_1$ и $B \leqslant B_2$:

$$\begin{cases} 10^{n-k} - a_1\cdot\ldots\cdot a_{k-1}\cdot a_{k+1}\cdot\ldots\cdot a_n \geqslant 0, \\ -10^{n-k} + a_1\cdot\ldots\cdot a_{k-1}\cdot a_{k+1}\cdot\ldots\cdot a_n \geqslant 0. \end{cases}$$

откуда

$$a_1\cdot\ldots\cdot a_{k-1}\cdot a_{k+1}\cdot\ldots\cdot a_n = 10^{n-k}. \qquad (1)$$

Точно так же получим, что

$$a_1\cdot\ldots\cdot a_{l-1}\cdot a_{l+1}\cdot\ldots\cdot a_n = 10^{n-l}. \qquad (2)$$

Деля (1) на (2), получаем:

$$\frac{a_l}{a_k} = 10^{l-k} \qquad (l \neq k),$$

но этого быть не может, поскольку a_l и a_k — натуральные числа, меньшие 10.

Значит, у искомого числа одновременно двух цифр, отличных от 1 и 9, быть не может.

Предположим, что у искомого числа есть одна цифра, отличная от 1 и 9,— пусть это цифра a_{n-p}. Тогда, как и выше, имеем

$$10^p = a_1\cdot\ldots\cdot a_{n-p-1}\cdot a_{n-p+1}\cdot\ldots\cdot a_n,$$

где цифры $a_1, \ldots, a_{n-p-1}, a_{n-p+1}, \ldots, a_n$ равны либо 1, либо 9. Но при $p \geqslant 1$ такого равенства быть не может: левая часть его делится на 10, а правая — не делится.

Если же $p = 0$, то тогда все цифры $a_1, \ldots, a_{n-1}$ должны быть единицами, а цифра a_n может быть любой. Само число при этом имеет вид $\overline{\underbrace{1\ldots1}_{n-1}a_n}$. Отметим, что разность между числом такого вида и произведением его цифр постоянна и не зависит от последней цифры a_n:

$$\overline{\underbrace{1\ldots1}_{n-1}a_n} - 1\cdot\ldots\cdot1\cdot a_n = \underbrace{1\ldots1}_{n-1}0.$$

Ниже мы покажем, что именно эта разность и является наименьшей (то есть, что числа вида $\overline{\underbrace{1\ldots1}_{n-1}a_n}$ — искомые).

Итак, если у искомого числа есть цифра, отличная от 1 и 9, то оно обязательно вида $\overline{1\ldots1a_n}$.

Предположим теперь, что все цифры искомого числа — единицы или девятки. Пусть это число состоит из k девяток и $n-k$ единиц. Тогда произведение его цифр равно 9^k — постоянному числу, и для того, чтобы разность между самим числом и произведением его цифр была наименьшей, нужно, чтобы само число (составленное из k девяток и $n-k$ единиц) было наименьшим.

Понятно, что таким числом будет число $\underbrace{1\ldots1}_{n-k}\underbrace{9\ldots9}_{k}$, у которого все единицы стоят в старших разрядах.

Составим разность

$$B' = \underbrace{1\ldots1}_{n-k}\underbrace{9\ldots9}_{k} - 9^k.$$

Возьмем теперь число, у которого на одну единицу больше: $\underbrace{1\ldots1}_{n-k+1}\underbrace{9\ldots9}_{k-1}$. Для него соответствующая разность равна

$$B'' = \underbrace{1\ldots1}_{n-k+1}\underbrace{9\ldots9}_{k-1} - 9^{k-1}.$$

Сравним B' и B'':

$$B' - B'' = \underbrace{1\ldots1}_{n-k}\underbrace{9\ldots9}_{k} - 9^k - \underbrace{1\ldots1}_{n-k+1}\underbrace{9\ldots9}_{k-1} + 9^{k-1} =$$

$$= 8\left(10^{k-1} - 9^{k-1}\right) \geqslant 0$$

(равенство достигается при $k = 1$); то есть $B' \geqslant B''$.

Значит, заменяя всякий раз первую слева девятку единицей, мы тем самым уменьшаем разность между получающимся числом и произведением его цифр. Поэтому числом, состоящим из одних только единиц и девяток, для которого указанная разность минимальна, является число $\underbrace{1\ldots1}_{n-1}9$.

В силу сказанного раньше, от того, какая цифра стоит на последнем месте у числа, все остальные цифры которого равны единице, разность не зависит; то есть на последнем месте может быть любая цифра.

Итак, ответ к задаче а) таков: искомые n-значные числа имеют вид $\overline{\underbrace{1\ldots1}_{n-1}a_n}$, где a_n — любая цифра.

Перейдем теперь к задаче б).

Рассуждая, как и прежде, получаем, что если число обладает тем свойством, что разность между ним и произведением его цифр — наибольшая, то все его цифры — либо единицы, либо девятки.

Пусть есть число, состоящее из k девяток и $n-k$ единиц. Произведение цифр такого числа постоянно — равно 9^k, поэтому для того, чтобы разность была наибольшей, нужно, чтобы само число было наибольшим среди всех чисел, составленных из k девяток и $n-k$ единиц.

Понятно, что таким числом является число $\underbrace{9\ldots9}_{k}\,\underbrace{1\ldots1}_{n-k}$. Обозначим разность между ним и произведением его цифр через A':

$$A' = \underbrace{9\ldots9}_{k}\,\underbrace{1\ldots1}_{n-k} - 9^k.$$

Посмотрим теперь, каково должно быть k, чтобы разность A' между числом $\underbrace{9\ldots9}_{k}\,\underbrace{1\ldots1}_{n-k}$ и произведением его цифр была наибольшей.

Увеличим k на единицу: возьмем число $\underbrace{9\ldots9}_{k+1}\,\underbrace{1\ldots1}_{n-k-1}$. Для полученного числа разность равна

$$A'' = \underbrace{9\ldots9}_{k+1}\,\underbrace{1\ldots1}_{n-k-1} - 9^{k+1}.$$

Уменьшим k на единицу; получим

$$A''' = \underbrace{9\ldots9}_{k-1}\,\underbrace{1\ldots1}_{n-k+1} - 9^{k-1}.$$

Имеем:

$$A' - A'' = \underbrace{9\ldots9}_{k}\,\underbrace{1\ldots1}_{n-k} - 9^k - \underbrace{9\ldots9}_{k+1}\,\underbrace{1\ldots1}_{n-k-1} + 9^{k+1} =$$

$$= -8\cdot10^{n-k-1} + 9^k(9-1) = 8\left(-10^{n-k-1} + 9^k\right) \geqslant 0, \tag{3}$$

так как A' по предположению наибольшая разность.

Аналогично

$$A' - A''' = \underbrace{9\ldots9}_{k}\,\underbrace{1\ldots1}_{n-k} - 9^k - \underbrace{9\ldots9}_{k-1}\,\underbrace{1\ldots1}_{n-k+1} + 9^{k-1} =$$

$$= 8\cdot10^{n-k} - 9^{k-1}(9-1) = 8\left(10^{n-k} - 9^{k-1}\right) \geqslant 0. \tag{4}$$

Из (3) и (4) получаем систему неравенств:

$$\begin{cases} 9^k \geqslant 10^{n-k-1}, \\ 10^{n-k} \geqslant 9^{k-1}, \end{cases}$$

из которой

$$\begin{cases} k \geqslant \dfrac{n-1}{\lg 9 + 1}, \\ k \leqslant \dfrac{n+\lg 9}{\lg 9 + 1}, \end{cases}$$

то есть

$$\frac{n-1}{\lg 9 + 1} \leqslant k \leqslant \frac{n-1}{\lg 9 + 1} + 1. \tag{5}$$

Так как k — число целое, то из (5) следует, что

$$k=\left[\frac{n-1}{\lg 9+1}+1\right],$$

где $[x]$ — целая часть числа x.

Итак, в задаче б) искомое число имеет вид

$$\underbrace{9\ldots9}_{k}\,\underbrace{1\ldots1}_{n-k},$$

где $k=\left[\frac{n-1}{\lg 9+1}+1\right]$.

И. Н. Клумова,
А. Г. Лейдерман

◆

M316*). а) *Докажите, что сумма квадратов k последовательных натуральных чисел не может быть квадратом целого числа, если k равно 3, 5, 7 или 9.*

б) *Придумайте 11 последовательных натуральных чисел, сумма квадратов которых есть квадрат целого числа.*

а) Вычислим сумму квадратов $2n+1$ последовательных натуральных чисел. Обозначив меньшее из них через $x-n$, получим:

$$S_{2n+1}=(x-n)^2+(x-n+1)^2+\ldots+x^2+(x+1)^2+\ldots$$
$$\ldots+(x+n)^2=(2n+1)x^2+2(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2)=$$
$$=(2n+1)x^2+\frac{1}{3}n(n+1)(2n+1).$$

В частности, $S_3=3x^2+2$, $S_5=5x^2+10$, $S_7=7x^2+28$, $S_9=9x^2+60$, $S_{11}=11x^2+110$. Сумма квадратов трех последовательных целых чисел не может быть точным квадратом, так как квадрат любого целого числа либо делится на 3, либо при делении на 3 даст остаток 1, а число $S_3=3x^2+2$ при делении на 3 дает остаток 2.

Докажем, что ни одно из чисел S_5, S_7 и S_9 также не является точным квадратом ни при каком целом x. Для этого воспользуемся таким очевидным свойством, вытекающим из единственности разложения на простые множители: если квадрат делится на простое p, то он должен делиться и на p^2. Остается заметить, что x^2+2 никогда не делится на 5, x^2+4 никогда не делится на 7, а $3x^2+20$ никогда не делится на 3.

б) Это — числа 18, 19, ..., 27, 28. В самом деле, число $S_{11}=11(x^2+10)$ должно делиться на 11^2, следовательно, и число $x^2-1=(x^2+10)-11$ должно делиться на 11. Но так как $x^2-1=(x-1)(x+1)$, то либо $x-1=11l$, либо $x+1=11k$. При $l=2$ получим $x=23$, $S_{11}=77^2$, так что

$$x-n=23-5=18$$

и

$$\underbrace{18^2+19^2+20^2+\ldots+28^2}_{11\text{ чисел}}=77^2.$$

Э. Г. Готман

◆

M317. *На некоторой планете каждая страна граничит не более чем с 7 другими. В каждой стране имеется запас золота. Требуется распределить золото так, чтобы каждые две страны, граничащие друг с другом, отличались по количеству золота не более чем в 13 раз. Докажите, что распределение золота можно организовать так, чтобы каж-*

Рассмотрим сначала случай, когда все золото было сосредоточено в одной — «богатой» — стране. Тогда, если после перераспределения в этой стране останется золотой запас M, то в страны, имеющие с ней общую границу, нужно распределить золота не меньше, чем $M/13$, в страны, имеющие с ними общую границу — не меньше, чем $M/169$, и так далее.

Введем понятие *расстояния* $\rho(A, B)$ между двумя странами A, B. Будем считать, что $\rho(A, B)=k$, если из страны A можно проехать в страну B, пересекая границы k раз, и нельзя, пересекая их меньшее число раз. Теперь высказанное

---

*)Решение задачи M315 было опубликовано в предыдущем номере.

дая страна лишилась не более половины имевшегося у нее золота.

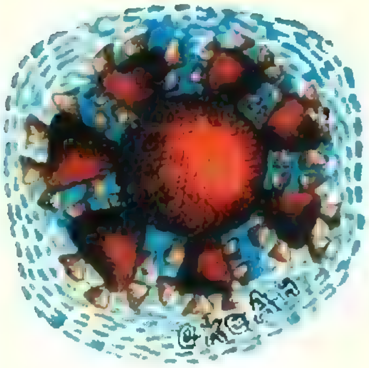


Рис. 1.

ранее утверждение мы можем сформулировать так: страна, находящаяся от «богатой» страны, получившей золотой запас M, на расстоянии k, должна получить золота не меньше, чем $M/(13)^k$.

Страна, находящаяся на расстоянии $k > 0$ от «богатой» страны, должна граничить хотя бы с одной страной, находящейся от «богатой» страны на расстоянии $k-1$, и поэтому не может граничить более чем с шестью странами, отстоящими от «богатой» страны на расстоянии $k+1$. Значит, количество стран, находящихся от «богатой» страны на расстоянии $k+1$, превосходит количество стран, находящихся на расстоянии k, не более, чем в 6 раз. Стран же, отстоящих от «богатой» на расстоянии 1, не больше 7. Из сказанного следует, что количество стран, находящихся от «богатой» страны на расстоянии k, не превосходит числа $7\cdot 6^{k-1}$. Распределив в каждую страну, находящуюся на расстоянии k от «богатой» страны, $M/(13)^k$ золота (напомним, что «богатая» страна после распределения «получила» золотой запас M), мы истратим золота не больше, чем

$$M + 7\cdot\frac{M}{13} + 7\cdot 6\cdot\frac{M}{13^2} + \ldots =$$

$$= M + \frac{7}{6}M\left[\frac{6}{13} + \left(\frac{6}{13}\right)^2 + \ldots\right] = 2M.$$

Значит, первоначально в «богатой» стране было не больше $2M$ золота, и тем самым после описанного перераспределения она лишилась не более половины имевшегося у нее золота. То, что описанное перераспределение — требуемое, следует из того, что две граничащие друг с другом страны B и C лежат либо на одном и том же расстоянии от третьей страны A, либо же эти расстояния отличаются на единицу. Это — частный случай *«неравенства треугольника»*:

$$\rho(A, B) + \rho(B, C) \geqslant \rho(A, C)$$

при $\rho(B, C) = 1$ ($\rho(A, B)$ — расстояние от A до B); докажите это «неравенство треугольника» для нашего расстояния в общем случае.

Заметим еще, что в случае, если на расстоянии k от «богатой» страны находится ровно $7\cdot 6^{k-1}$ стран (см. рис. 1), то золотой запас, который необходимо перераспределить, в точности равен $2M$, а потому M — ровно половина первоначально имевшегося у «богатой» страны золотого запаса, и значит, оценка *«половина»* не улучшаема.

Перейдем теперь к решению задачи в общем случае. Найдем для каждой страны A_i такое M_i, не меньшее половины ее золотого запаса, что если бы во всех остальных странах золота не было, то построив распределение, описанное в первой части решения, мы оставили бы в ней M_i золота. Докажем, что распределив в каждую страну A_i $\sum\limits_k M_k\cdot 13^{-\rho(A_i,\, A_k)}$ золота, мы получим требуемое распределение. В самом деле, во-первых, каждая страна A_i получает не менее M_i золота, и, следовательно, лишается не больше половины имевшегося у нее запаса в силу выбора M_i. Во-вторых, если A_i и A_j граничащие страны, то $\rho(A_i, A_j) = 1$. Страна A_i получает $\sum\limits_k M_k\cdot 13^{-\rho(A_i,\, A_k)}$ золота, страна A_j — $\sum\limits_k M_k\cdot 13^{-\rho(A_j,\, A_k)}$. Подставляя $\rho(A_i, A_j) = 1$ в неравенства треугольника:

$$\rho(A_j, A_k) + \rho(A_i, A_j) \geqslant \rho(A_i, A_k),$$
$$\rho(A_i, A_k) + \rho(A_i, A_j) \geqslant \rho(A_j, A_k),$$

получаем:

$$\rho(A_j, A_k) + 1 \geqslant \rho(A_i, A_k),$$
$$\rho(A_i, A_k) + 1 \geqslant \rho(A_j, A_k),$$

то есть

$$1 - \rho(A_i, A_k) \geqslant -\rho(A_j, A_k),$$
$$-\rho(A_j, A_k) \geqslant -1 - \rho(A_i, A_k),$$

откуда для любого номера k:

$$13 \cdot M_k \cdot 13^{-\rho(A_i, A_k)} \geqslant M_k \cdot 13^{-\rho(A_j, A_k)} \geqslant$$
$$\geqslant \frac{1}{13} \cdot M_k \times 13^{-\rho(A_i, A_k)},$$

то есть

$$13 \underbrace{\sum_k M_k \cdot 13^{-\rho(A_i, A_k)}}_{\text{новый золотой запас страны } A_i} \geqslant \underbrace{\sum_k M_k \cdot 13^{-\rho(A_j, A_k)}}_{\text{новый золотой запас страны } A_j} \geqslant$$
$$\geqslant \frac{1}{13} \underbrace{\sum_k M_k \cdot 13^{-\rho(A_i, A_k)}}_{\text{новый золотой запас страны } A_i},$$

и каждые две граничащие друг с другом страны действительно после перераспределения отличаются по количеству золота не более, чем в 13 раз.

Замечание. Суммы $\sum\limits_k M_k \cdot 13^{-\rho(A_i, A_k)}$ всегда существуют, если число стран конечно (очевидно), или же если можно указать такое число C, что во всех странах не больше C золота (докажите; вам поможет статья М. Л. Гервера «От перемены мест слагаемых. . .», опубликованная в «Кванте» № 9 за 1974 год). Существование такого числа C предполагалось в условии задачи, — иначе утверждение задачи становится неверным. Постройте соответствующий пример.

Г. В. Егоров

◆

Ф322. *Две звезды вращаются вокруг общего центра масс с постоянными по абсолютной величине скоростями v_1 и v_2 с периодом T. Найти массы звезд и расстояние между ними.*

Так как скорости звезд при вращении вокруг центра масс системы по абсолютной величине постоянны, звезды движутся по окружностям, причем эти окружности концентрические и их общий центр находится в центре масс системы. Взаимное расположение звезд и общего центра масс (точки O) показаны на рисунке 2.

Обозначим через m_1 и m_2 массы звезд, а через r_1 и r_2 — радиусы соответствующих окружностей. Центростремительное ускорение (v^2/r) каждой звезде сообщает сила тяготения $F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}$, где $r = r_1 + r_2$ — расстояние между звездами.

Запишем уравнения движения звезд:

$$\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} = m_1 \frac{v_1^2}{r_1} \quad \text{и} \quad \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} = m_2 \frac{v_2^2}{r_2}.$$

Скорости звезд связаны с периодом вращения и радиусами соответствующих окружностей:

$$v_1 = \frac{2\pi r_1}{T} \quad \text{и} \quad v_2 = \frac{2\pi r_2}{T}.$$

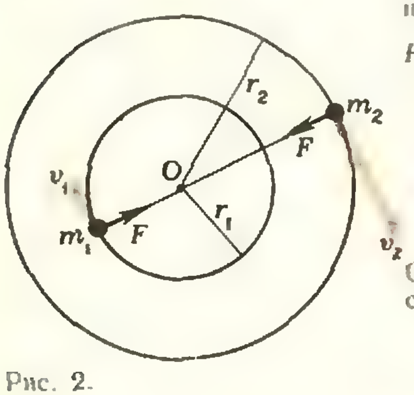


Рис. 2.

Объединим последние четыре уравнения в систему. Решая ее и учитывая, что $r = r_1 + r_2$, найдем

$$r = \frac{T}{2\pi}(v_1 + v_2);$$

$$m_1 = \frac{(v_1 + v_2)^2 v_2 T}{2\pi\gamma};$$

$$m_2 = \frac{(v_1 + v_2)^2 v_1 T}{2\pi\gamma}.$$

◆

Ф323. *П-образная капиллярная трубка с длиной колен $l = 10$ см и диаметрами $d_1 = 0{,}1$ мм и $d_2 = 0{,}2$ мм опускается вертикально открытыми концами в воду и погружается настолько, чтобы уровень воды в более узком колене был вровень с уровнем воды в сосуде. Найти положение уровня воды в широком колене. Объемом горизонтальной трубки пренебречь. Атмосферное давление нормальное. Коэффициент поверхностного натяжения воды $\sigma = 70$ дин/см.*

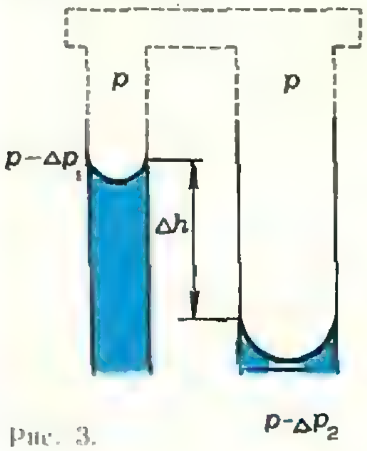


Рис. 3.

Давление под изогнутой сферической поверхностью жидкости отличается от давления газа над ней на величину $\Delta p = \frac{2\sigma}{r}$, где r — радиус сферы.

В случае полного смачивания стенок трубки водой мениски в узком и широком коленах можно принять за полусферы радиусов $r_1 = d_1/2$ и $r_2 = d_2/2$. Следовательно, если мениск не располагается на одном из концов соответствующего капилляра, давление воздуха над жидкостью в узком колене больше давления воды под поверхностью на $\Delta p_1 = 4\sigma/d_1 \approx 28{,}6$ *см вод. ст.*, а в широком колене — на $\Delta p_2 = 4\sigma/d_2 \approx 14{,}3$ *см вод. ст.* Поэтому разность уровней таких менисков (см. рис. 3) может быть равной лишь

$$\Delta h = \frac{\Delta p_1}{\rho g} - \frac{\Delta p_2}{\rho g} \approx 14{,}3 \text{ см}.$$

В нашем случае $l < \Delta h$. Значит, хотя бы один из менисков располагается на конце колена.

При одновременном соприкосновении концов П-образной трубки с поверхностью воды подъем жидкости в узком капилляре приведет к такому повышению давления воздуха в трубке, что он будет выходить (пробулькивать) через конец широкого капилляра.

Таким образом, вода в узком капилляре дойдет до самого верха, где образуется мениск радиуса $R_1 > r_1$. Следовательно, трубку необходимо погрузить в жидкость на всю длину l.

У нижнего конца широкой трубки мениск может иметь радиус $R_2 \geqslant r_2$. При $R_2 = r_2$ давление воздуха в погруженной трубке максимально и равно

$$p_{\max} = p_{\text{атм}} + \rho g l + \frac{2\sigma}{r_2}.$$

Пробулькивание будет продолжаться до тех пор, пока масса воздуха не уменьшится настолько, что его давление станет равным $p_{\max}$ или немного меньше. Мениск радиуса $R_2 \geqslant r_2$ в широком колене будет располагаться у нижнего конца капилляра, то есть на глубине l.

Если концы трубки коснутся поверхности воды не одновременно, то пробулькивания полностью или частично не будет. В этом случае ответ задачи получится другим.

Б. Б. Буховцев

◆

Ф324. *Из собирающей линзы с фокусным расстоянием $F = 50$ см и диаметром $D = 5$ см вырезана полоса шириной $h = 5$ мм, а оставшиеся части сдвинуты вплот-*

Каждая из частей линзы дает свое изображение источника. Эти изображения (S_1 и S_2 на рисунке 4) находятся на некотором расстоянии H от оси системы. Пучки лучей, проходящие через полученные новые линзы и создающие изображения, перекрываются, и в области перекрытия можно наблюдать интерференционную картину. Таким образом, *ную. На расстоянии $l=75$ см от линзы расположен точечный источник света S. На каком максимальном расстоянии от линзы можно наблюдать интерференционную картину?*

Ф325. *Частота малых гармонических колебаний тяжелого шара на легкой закрепленной в стене спице (рис. 5, а) равна ν_1, а частота колебаний этого шара на прикрепленной к потолку пружине (рис. 5, б) равна ν_2. Какой будет частота ν колебаний шара на той же пружине, прикрепленной к спице (рис. 5, в)?*

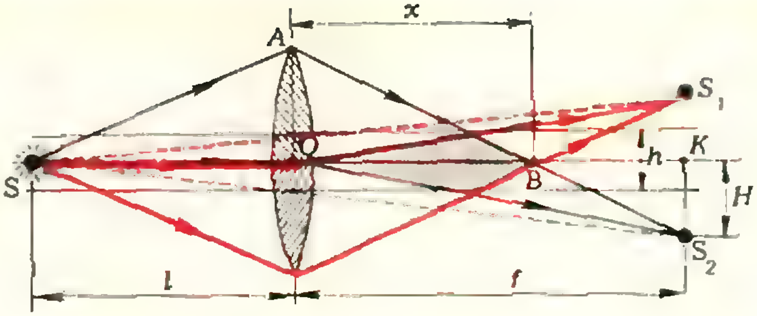


Рис. 4.

нам нужно найти границу области перекрытия пучков — расстояние x на рисунке 4.

Прежде всего определим положения изображений источника — расстояние f от изображения до соответствующей линзы и расстояние H от оси системы. Используя формулу линзы и учитывая, что фокусные расстояния новых линз равны F, найдем f:

$$f=\frac{Fl}{l-F}=3F.$$

Оптические оси новых линз находятся на расстоянии $h/2$ от оси системы и параллельны этой оси. Это означает, что источник находится на расстоянии $h/2$ от оптической оси каждой линзы, а его изображения — на расстоянии $H-h/2$. Запишем формулу линейного увеличения линзы:

$$\frac{H-h/2}{h/2}=\frac{f}{l},$$

откуда

$$H=\frac{h(l+f)}{2l}=\frac{h(l-3F)}{2l}=1{,}5h.$$

Теперь нетрудно найти x. Из подобия треугольников AOB и BS_2K следует, что

$$\frac{AO}{S_2K}=\frac{OB}{BK}, \quad \text{или} \quad \frac{(D-h)/2}{H}=\frac{x}{f-x}.$$

Отсюда

$$x=\frac{f(D-h)}{D-h+2H}=\frac{3F(D-h)}{D+2h}=112{,}5 \text{ см}.$$

◆

Так как колебания шара на спице — гармонические, то абсолютная величина силы упругости, действующей на шар при его смещении из положения равновесия, пропорциональна этому смещению:

$$F_{\text{упр}}\sim x, \quad \text{или} \quad F_{\text{упр}}=k_1x,$$

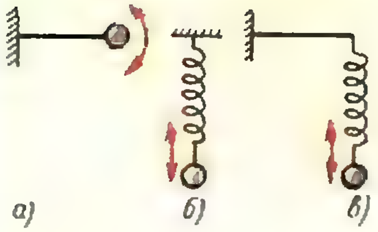
где k_1 — коэффициент пропорциональности. Следовательно, спица эквивалентна обычной пружине с жесткостью k_1. Тогда для частоты колебаний ν_1 можно записать:

$$\nu_1=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1}{m}} \qquad (1)$$

(m — масса шара).

Во втором случае, когда шар прикреплен к пружине (обозначим ее жесткость через k_2), частота колебаний равна

$$\nu_2=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_2}{m}}. \qquad (2)$$



Скрепленные вместе спицу и пружину можно рассматривать как две последовательно соединенные пружины с жесткостями k_1 и k_2. Заменим их одной пружиной и выразим ее жесткость k через величины k_1 и k_2. Так как общая деформация двух последовательно соединенных пружин равна сумме их деформаций, а силы упругости, возникающие в пружинах, по абсолютной величине совпадают, то $x_{\text{общ}} = x_1 + x_2$, или $\frac{F_{\text{упр}}}{k} = \frac{F_{\text{упр}}}{k_1} + \frac{F_{\text{упр}}}{k_2}$. Следовательно,

$$k = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}, \quad \text{и} \quad \nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1 k_2}{(k_1 + k_2)\,m}}.$$

Выразив k_1 и k_2 из равенств (1) и (2) соответственно, получим окончательно

$$\nu = \frac{\nu_1 \nu_2}{\sqrt{\nu_1^2 + \nu_2^2}}.$$

И. Ш. Слободецкий

◆

Ф326. *Закрытый крышкой сосуд доверху наполнен жидкостью, в которой имеются два пузырька. Как изменится давление в жидкости, если пузырьки сольются? Начальное давление в жидкости p_0, коэффициент поверхностного натяжения σ, радиус каждого пузырька r_0. Считать процесс изотермическим.*

Предположим, что рассматриваемая система находится в состоянии невесомости. Это равносильно тому, что гидростатическое давление отсутствует, и поэтому давление в жидкости всюду одно и то же. Запишем условие равновесия для каждого пузырька до слияния:

$$p_0 + \frac{2\sigma}{r_0} = p_{\text{г}}, \tag{1}$$

где $\frac{2\sigma}{r_0}$ — добавочное давление, обусловленное силами поверхностного натяжения жидкости, $p_{\text{г}}$ — давление газа в пузырьке.

После слияния двух пузырьков в один давление газа не изменится, поскольку объем, занимаемый газом, остается постоянным, а добавочное давление изменится, так как радиус пузырька станет другим. Радиус r нового пузырька найдем из условия постоянства объема:

$$2\,\frac{4}{3}\,\pi r_0^3 = \frac{4}{3}\,\pi r^3.$$

Отсюда

$$r = r_0\sqrt[3]{2}. \tag{2}$$

Условие равновесия для этого пузырька можно представить в виде

$$p + \frac{2\sigma}{r} = p_{\text{г}} \tag{3}$$

(p — новое давление в жидкости). Тогда из (1) — (3) изменение давления в жидкости равно

$$\Delta p = p - p_0 = \frac{2\sigma}{r_0}\left(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right).$$

Попробуйте самостоятельно решить эту задачу для случая пузырьков разных радиусов.

Р. Л. Энфиаджян

Ф327. *Определить показания электродинамического амперметра A_1 и магнитоэлектрического амперметра A_2 (рис. 6), пренебрегая их внутренними сопротивлениями, если известно, что на клеммы $A-B$ подается напряжение $u = u_1 + u_2 \sin \omega t$, причем $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.*

Емкостями между клеммами приборов пренебречь; колебания стрелок приборов незаметны.

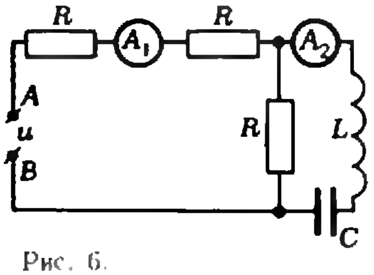


Рис. 6.

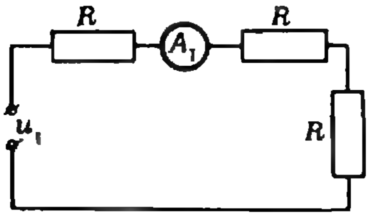


Рис. 7.

Прежде всего напомним, как устроены магнитоэлектрический и электродинамический амперметры. В амперметре магнитоэлектрической системы измеряемый ток пропускается через витки легкой подвижной рамки, жестко скрепленной со стрелкой. Рамка находится между полосами постоянного магнита. Две спиральные пружины соединяют витки рамки с внешней электрической цепью.

Магнитные силы, действующие на рамку с током, пропорциональны величине тока в рамке, и значит, и вращательный момент этих сил тоже пропорционален величине измеряемого тока. При повороте рамки возникает противодействующий момент упругих сил пружинок. Этот момент пропорционален углу поворота рамки. Когда противодействующий момент упругих сил станет равным вращательному моменту магнитных сил, установится равновесие. Таким образом, угол поворота рамки в магнитоэлектрическом амперметре прямо пропорционален измеряемому току.

В электродинамическом амперметре подвижная рамка помещена внутрь неподвижной катушки, витки которой тоже включаются во внешнюю электрическую цепь (последовательно или параллельно виткам подвижной рамки). В этом случае магнитное поле неподвижной катушки не постоянно, а изменяется пропорционально величине тока. Следовательно, магнитные силы, действующие на подвижную рамку, и их вращательный момент изменяются пропорционально квадрату тока. Противодействующий момент упругих сил, как и в первом случае, пропорционален углу поворота рамки. Поэтому угол поворота рамки, а значит, и стрелки прибора электродинамической системы, пропорциональны квадрату измеряемого тока.

Все, что мы говорим, относится по существу к постоянному току. А как будут вести себя приборы при включении их в цепь переменного тока? Очевидно, что вращательные моменты в обоих приборах будут изменяться со временем. Однако, в силу инертности, подвижная рамка не успевает за изменением вращательного момента, и реагирует лишь на его среднее значение, если период изменения тока много меньше периода собственных колебаний рамки (как это и предполагается в условии задачи).

Поэтому угол поворота рамки магнитоэлектрического амперметра будет пропорционален среднему за период значению переменного тока, а электродинамического — среднему за период значению квадрата тока.

Поскольку среднее за период значение гармонически изменяющегося тока равно нулю, стрелка прибора магнитоэлектрической системы не будет реагировать на такой ток. Этим прибором можно пользоваться только для измерений постоянного тока.

Приборы электродинамической системы пригодны и для постоянного, и для переменного токов. Обычно их градуируют по постоянному току. При включении амперметра в цепь переменного тока угол поворота рамки пропорционален среднему за период значению квадрата тока $\overline{I^2(t)}$, следовательно, показание электродинамического амперметра равно $\sqrt{\overline{I^2(t)}}$, т. е. действующему (эффективному) значению переменного тока.

Теперь вернемся к задаче. Подаваемое на клеммы $A-B$ напряжение u имеет две составляющие — постоянную (u_1) и переменную ($u_2 \sin \omega t$). Через амперметр A_1 проходят оба тока (и переменный, и постоянный). Через амперметр A_2 постоянный ток проходить не может (в цепи есть конденсатор), а переменный ток он не измеряет, следовательно, его показания равны нулю.

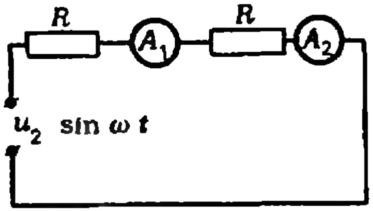


Рис. 8.

А что показывает амперметр A_1? Для постоянной составляющей тока схему можно перерисовать так, как показано на рисунке 7. Полное сопротивление этой цепи равно $3R$.

Частота ω переменной составляющей тока равна $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, т. е. $\omega L = \frac{1}{\omega C}$. Это означает, что полное сопротивление участка цепи, содержащего катушку индуктивности и конденсатор $\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$, равно нулю. Поэтому схему можно заменить такой, какая представлена на рисунке 8. Сопротивление такой цепи равно $2R$.

Итак, через электродинамический амперметр A_1 идет ток

$$I_1(t) = \frac{u_1}{3R} + \frac{u_2}{2R}\sin\omega t\,.$$

Показания амперметра A_1 равны

$$I_1 = \sqrt{\overline{I_1^2(t)}} = \frac{1}{6R}\sqrt{\overline{(2u_1 + 3u_2\sin\omega t)^2}} =$$

$$= \frac{1}{6R}\sqrt{4u_1^2 + 4{,}5u_2^2}\,.$$

В. А. Погожев

◆

Ф329 *). *Многие из вас, повидимому, замечали, что в тот момент, когда вы ступаете на мокрый песок, он светлеет. Это связано с тем, что песок становится суше. Но как только вы убираете ногу, след, оставленный ногой, немедленно заполняется водой. Объясните это явление.*

Чтобы объяснить, что происходит с песком на берегу реки, начнем с... шариков. Одинаковые шарики можно уложить на плоскости так, чтобы каждый из них касался шести других шаров. В лунки между шарами первого слоя можно положить шары второго слоя. Каждый из них будет касаться трех шаров нижнего слоя и шести соседей своего слоя и т. д. Полученное таким образом расположение шаров называется плотной упаковкой шаров. Если нарушить плотную упаковку, выведя шары одного из слоев из лунок между шарами нижнего слоя, промежутки между шарами увеличатся. Возрастет и объем всей системы. Это означает, что если на систему из плотно упакованных шаров действуют силы, приводящие к нарушению плотной упаковки, объем системы увеличивается за счет увеличения промежутков между шарами.

Аналогично ведет себя и любая зернистая среда. Возьмите, например, пшено (или кофе), наполните им стакан, слегка встряхивая стакан, чтобы зерна располагались, образуя наиболее плотную из возможных упаковку. Затем надавите на пшено. Давление приведет к увеличению объема, занимаемого зернами, то есть к нарушению плотной упаковки. Часть зерен высыпется. Если теперь слегка постучать по стакану с тем, чтобы зерна вновь «упаковались» наиболее плотно, стакан окажется не заполненным доверху.

Теперь вернемся к песку на берегу. Он тоже плотно упакован. При давлении на песок плотная упаковка разрушается, и объем песка увеличивается за счет увеличения пространства между песчинками. Вода из верхних слоев песка уходит вглубь, заполняя эти увеличившиеся промежутки. Песок как бы «высыхает». Когда ногу убирают, плотная упаковка восстанавливается, и вытесненная из уменьшившихся вновь промежутков вода заполняет след, оставленный ногой.

И. Ш. Слободецкий

---

*) Решение задачи Ф328 будет опубликовано в следующем номере.

В этом номере мы публикуем фамилии тех, кто прислал правильные решения задач М306—М315 и Ф318—Ф327 (жирные цифры после фамилии — последние цифры номеров решенных задач).

Математика

В большинстве писем содержалось верное решение задачи **М306**. Остальные задачи решили: *Л. Абашидзе* (Тбилиси) 1; *Р. Абрамов* (Мытищи) 1; *В. Авербух* (Кишинёв) 1; *С. Агазарян* (с. Суренаван Араратского р-на) 4; *Д. Азов* (Челябинск) 1—5; *Г. Алексанян* (Степанакерт) 9, 1; *О. Аполонский* (Жуковский) 7, 1, 2, 5; *Е. Асарин* (Москва) 9, 1; *В. Басманов* (Воронеж) 7, 9, 1—4; *А. Беликов* (Москва) 3; *А. Бер* (Ташкент) 5; *З. Беркалиев* (Караганда) 2, 3; *О. Болтенков* (Днепропетровск) 4; *Ю. Буливский* (Новосибирск) 1; *И. Вандакуров* (Ленинград) 7; *А. Варпаховский* (Ленинград) 9, 1, 4; *С. Вербин* (Ленинград) 4; *Ю. Виницкий* (Ташкент) 1, 2; *А. Власов* (Камышин) 1; *А. Ворович* (Москва) 1; *А. Воронков* (Кемерово) 7, 9; *Р. Гагнидзе* (Рустави) 9; *М. Гедалин* (Тбилиси) 1, 3, 4; *А. Гибадуллин* (Бугульма) 9; *В. Гишларкаев* (с. Урус-Мартан ЧИАССР) 4; *Е. Глезин* (Ленинград) 9; *О. Глушко* (Москва) 1; *В. Гроссман* (Одесса) 1; *В. Гусейнов* (Нахичевань) 1, 4, 5; *Ю. Давыдов* (п. Кизнер Удм. АССР) 1; *А. Данилов* (с. Гумбати ГССР) 9; *А. Данилов* (Шумерля) 9; *В. Ерпылев* (Ашхабад) 9; *А. Есилевский* (Тбилиси) 9; *А. Завражнов* (Балабаново) 9; *Д. Зелевинский* (Москва) 7—9; *А. Иванов* (Москва) 1, 4, 5; *Л. Иванов* (Москва) 2; *Р. Измайлов* (Баку) 1; *М. Имерлишвили* (Тбилиси) 2—4; *А. Камалян* (Иджеван) 7, 0, 1, 5; *В. Каменецкий* (Москва) 9; *Б. Каплан* (Киев) 5; *П. Кирсанов* (Москва) 1; *А. Князюк* (Киев) 1, 3; *С. Козявкин* (Киев) 5; *А. Курчишвили* (Тбилиси) 9; *Ш. Кухалейшвили* (Тбилиси) 9, 1—4; *Е. Ландман* (Ленинград) 1; *В. Липкин* (Москва) 1; *Д. Литвиненко* (Севастополь) 7; *А. Малышев* (п. Курашко Красноярского края) 2, 4; *Г. Мац* (Новосибирск) 9; *А. Моисеев* (Москва) 9; *М. Морайне* (ПНР) 7, 9, 1—4; *И. Морозов* (Горький) 9; *Ф. Мурсагулиев* (Сиазань) 4; *К. Мхитарян* (Ереван) 7; *В. Нейман* (Ленинград) 7, 9, 1; *М. Островский* (Харьков) 9; *Б. Очиров* (Новосибирск) 0; *И. Панин* (Апатиты) 9, 1; *В. Паразян* (Черенцаван) 9; *М. Пекарь* (Одесса) 9; *М. Питателев* (Москва) 1, 2; *И. Побылица* (Ленинград) 1; *А. Полубинский* (Нововолынск) 2; *С. Попов* (Москва) 1; *С. Пославский* (Харьков) 7, 1, 2, 4, 5; *Ю. Пошехонов* (Энгельс) 1, 3; *С. Путинцев* (Невинномысск) 9, 1—3, 5; *А. Радулу* (Кишинев) 9; *А. Разборов* (Люберцы) 1, 4; *А. Ричников* (с. Полярные Зори Мурманской обл.) 9; *А. Рейбольд* (с. Соколовка Северо-Казахстанской обл.) 9, 4; *В. Решетов* (Троицк) 1, 2, 4; *В. Романов* (Димитровград) 1—3, 5; *Т. Ростовщикови* (с. Слудка Пермской обл.) 1; *И. Рудаков* (Брянск) 1; *В. Савчак* (с. Рудки Тернопольской обл.) 3; *А. Семёнов* (Москва) 1, 5; *В. Симеонов* (Болгария) 2, 3; *В. Слепой* (Томск) 1, 3, 4; В. Смирнов (Уфа) 3; *Ф. Солодовник* (Калининград) 1; *Б. Соломяк* (Ленинград) 7—0; *Ю. Соркин* (Москва) 9; *М. Сухарь* (Москва) 9; *С. Трегуб* (Ташкент) 9, 1, 2, 4, 5; *К. Трутнев* (Казань) 7; *С. Филатова* (Москва) 1, 3; *Ю. Философов* (Саратов) 7, 9, 1—5; *С. Финашин* (Ленинград) 7—5; *Л. Финцклер* (Андижан) 9; *В. Фисенко* (Киев) 1, 3, 4; *С. Флоря* (с. Сату-Ноу МССР) 1, 3; *Л. Фудали* (ПНР) 7, 1, 2, 5; *В. Харатоник* (ПНР) 7—9, 1—5; *Л. Хухунайшвили* (Тбилиси) 9; *З. Шарифуллин* (с. Рятамак Башк. АССР) 9; *С. Шаташвили* (Тбилиси) 9; *В. Штенин* (Челябинск) 7; *П. Эминов* (с. Джиниси ГССР) 9; *С. Эминов* (Тбилиси) 9, 3; *С. Яковенко* (Москва) 1, 3; *В. Ясинский* (с. Мазуровка Винницкой обл.) 3; *Б. Яцало* (с. Морочно Ровенской обл.) 9, 1—3, 5.

Физика

Почти все читатели, приславшие решения задач **Ф318—Ф327**, справились с задачами **Ф320** и **Ф322**. Остальные задачи правильно решили: *Х. Абдуллин* (Алма-Ата) 9, 5, 6; *Н. Абросимова* (с. Пята Пензенской обл.) 4; *С. Аванесян* (Степанакерт) 5; *М. Агеев* (Тула) 7, 8, 1; *Д. Азов* (Челябинск) 1, 5; *Г. Айзин* (Брест) 1; *А. Александрин* (Валуйки) 1; *А. Альбертинский* (Ленинград) 1; *К. Андроник* (Кишинев) 8, 9, 1; *Л. Антуганов* (Челябинск) 6; *А. Алиев* (Карачаевск) 4; *И. Архипов* (Минск) 8, 9, 1; *А. Атабиев* (Карачаевск) 4; *Р. Ахмедзямов* (Николаев), 6; *И. Бабакулов* (Каттакурган) 1; *А. Баклай* (Пинск) 1; *О. Билабан* (п. Сосновое Ровенской обл.) 6; *С. Балашов* (Москва) 8; *Г. Барванян* (Очамчира) 8; *Т. Бейко* (Киев) 4—6; *В. Беликов* (Тбилиси) 4; *В. Бенхин* (Калинин) 1, 3; *М. Бирман* (Саратов) 1; *Ю. Богомолов* (Казань) 8, 9, 1; *И. Бондарцев* (Люберцы) 6; *И. Борисов* (Одесса) 9; *В. Борю* (Запорожье) 8, 9, 1; *С. Вяткин* (с. Шегарка Томской обл.) 6; *А. Габриелян* (Ереван) 5; *С. Гаврилин* (Бузулук) 1; *В. Гаврилов* (Камень-Каширский Волынской обл.) 5; *И. Галишников* (Волгоград) 9, 1, 3; *М. Гасанов* (с. Кегнехудат АзССР) 6; *М. Гедилин* (Тбилиси) 8, 1, 4—7; *О. Годин* (Симферополь) 8, 6; *А. Голубенцев* (Саратов) 1; *Г. Голубцова* (Москва) 1; *А. Горшков* (Иваново) 8, 9, 1, 4—6; *А. Григорьев* (Волоколамск) 9, 1; *А. Григорьев* (Ессентуки) 9, 4; *А. Гринюк* (Тула) 9; *В. Губени* (Угнев) 1; *М. Гумашян* (Ереван) 9, 4; *С. Данилов* (Дрогичин) 6; *Е. Демихов* (Усмань) 9, 1; *С. Демишев* (Запорожье) 8, 4; *Ю. Докучаев* (Ленинград) 1, 4—6; *И. Дружинин* (Оленегорск) 1; *О. Жарков* (Москва) 1; *Д. Жуховицкий* (Магадан) 3, 4; *А. Заболоцкий* (с. Борисово Белгородской обл.) 9, 1; *Ю. Загородний* (Славянск) 6; *В. Задачев* (Челябинск) 4, 6; *Т. Заяць* (с. Т. Пасека Закарпатской обл.) 5; *В. Кайманович* (Ленинград) 8, 9, 1; *А. Калустов* (Баку) 1, 6; *А. Каменных* (Москва) 6; *В. Картышкин* (Новосибирск) 5; *С. Кирюшин* (Рыбинск) 6; *Ю. Кленов* (Целиноград) 6; *Я. Коган* (Глазов) 9, 4, 5; *А. Колесников* (с. Алнаши УдАССР) 1; *К. Копейкин* (Ленинград) 6; *С. Копыловский* (с. Знобь-Новгородское Сумской обл.) 9, 1, 4—6; *Д. Корин* (Киев) 9, 1; *С. Кройтор* (*Оргеев*) 4—6; *С. Кузьменко* (с. Копылово Томской обл.) 1; *С. Кушнир* (п. Быково Московской обл.) 5; *Б. Лиджиев* (с/з «Балковский» Целиноградской обл.) 1; *В. Лосиков* (Ликино-Дулево) 9, 1; *М. Любин* (Электросталь) 6; *А. Лющенко* (Киев) 6; *И. Ляхович* (Ташкент) 1; *А. Макаров* (Ленинград) 5; *Е. Мартынова* (Нежин) 6; *М. Магид* (Даугавпилс) 5, 6; *Е. Машеров* (Ананьев) 5; *А. Мелкумян* (Физули) 4—6; *С. Мельник* (Харьков) 8, 9, 1; *М. Митрофанов* (Волгоград) 5; *И. Морозов* (Горький) 6; *А. Морозовский* (Киев) 1; *Р. Мусалимов* (Байрам-Али) 9, 1; *Л. Мухамедшин* (Лениногорск) 6; *Л. Мухамедяров* (ст. Шаймурзино ТАССР) 1, 5; *У. Низаматдинова* (Кегейлийский р-н Кар АССР) 7; *И. Никитин* (Ленинград) 1, 4, 5; *А. Осин* (Камышин) 9; *А. Островский* (Алма-Ата) 6; *Б. Очиров* (Новосибирск) 1; *С. Павлов* (ст. Савелово Калининской обл.) 9, 5; *А. Панофн* (Кафан) 5; *В. Пестунов* (Кировоград) 6; *А. Петяцкий* (Барановичи) 6; *О. Печерский* (Орджоникидзе) 4; *В. Пиотух* (Севастополь) 4—7; *А. Подолек* (Пологи) 3, 6; *В. Поздняк* (Барановичи) 6; *А. Привалов* (Свердловск) 1; *А. Прохоров* (Барнаул) 1; *Д. Пунда* (Караганда) 4—7; *С. Пятернев* (Саратов) 5, 6; *А. Ребров* (Саратов) 4, 5; *В. Реммель* (п/о Вайда ЭССР) 6; *А. Рудерман* (Ленинград) 5—7; *Ю. Савостин* (Киреевск) 6; *Т. Саргазаков* (Фрунзе) 3; *И. Сатаев* (Саратов) 4—6; *А. Святченко* (Кишинев) 6; *А. Смоляков* (Кадиевка) 5, 6; *А. Совит* (Москва) 1; *Н. Татаренко* (Саратов) 9; *И. Угненко* (ст. Выселки Краснодарского кр.) 1; *С. Фарян* (Ереван) 9; *Н. Федин* (Омск) 1, 4—6; *С. Федоров* (Москва) 1; *А. Фрумкин* (Курск) 8, 6; *С. Хоружий* (ст. Кущевская Краснодарского кр.) 9; *И. Цацкис* (Кременчуг) 6; *С. Цветков* (Егорьевск) 6; *В. Черепанов* (Верхний Уфалей) 4, 5; *В. Черненко* (Киев) 1; *Ю. Шипилевский* (Баку) 6; *С. Шишин* (Воронеж) 9, 1; *А. Шляхин* (Камень-Каширский Волынской обл.) 4—6; *Н. Шмырин* (Реж) 5, 6.

Несколько признаков делимости

Обоснуйте сделанные ниже утверждения.

1. Сложите все цифры числа, стоящие на четных местах, считая справа. Число десятков полученного числа сложите с удесятеренным числом единиц этого числа и с суммой цифр, стоящих на нечетных местах первоначального числа. Результат будет иметь такие же остатки при делении на 3, 9, 11, 33 и 99, что и первоначальное число.

А. Войткавичус.

2. *Признак делимости на числа* $10k+1$. Зачеркните последнюю цифру данного числа и вычтите из полученного числа эту цифру, умноженную на k. С полученным числом проделайте такую же операцию, и так далее. Если через несколько шагов будет получен ноль, то число делится на $10k+1$. Выпишите вычеркнутые цифры справа налево. Полученное число равно частному. Если ноль не будет получен, число на $10k+1$ не делится.

3. *Признак делимости на числа* $10k+9$. Зачеркните последнюю цифру данного числа и прибавьте к полученному числу эту цифру, умноженную на $k+1$. С полученным числом проделайте такую же операцию, и так далее. Если через несколько шагов будет получено число $10k+9$, то рассматриваемое число делится на $10k+9$. Выпишите все вычеркнутые цифры справа налево и вычтите полученное n-значное число из 10^n. Результат будет равен частному.

Если число $10k+9$ не будет получено, то данное число на $10k+9$ не делится.

В. Шаркади.

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

Алгебраический метод решения геометрических задач

С. В. Романов, И. Ф. Шарыгин

Когда на экзамене вам предлагают задачу по планиметрии, зачастую не стоит тратить время на поиск геометрического решения, рациональнее решить ее алгебраически. Конечно, геометрическое решение, как правило, изящнее, в то время как алгебраическое содержит громоздкие выкладки, но на экзамене, в отличие от олимпиад, изящество решения практически не влияет на оценку. Поэтому основным «оружием» при решении геометрических задач на экзамене является алгебраический метод. О нем и пойдет речь в этой статье.

Сначала приведем два решения одной задачи.

Задача 1. *Доказать, что квадрат биссектрисы, проведенной через вершину произвольного треугольника, равен произведению боковых сторон без произведения отрезков основания.*

Нужно доказать, что $l^2 = ab - mn$ (рис. 1). Положим $\angle ADB = \alpha$. По теореме косинусов для треугольников ABD и BDC имеем:

$$a^2 = l^2 + m^2 - 2ml\cos\alpha, \quad (1)$$

$$b^2 = l^2 + n^2 + 2nl\cos\alpha. \quad (2)$$

Умножим (1) на n, а (2) на m и сложим полученные выражения. Учитывая, что $\frac{m}{n} = \frac{a}{b}$, мы легко преобразуем сумму к виду $l^2 = ab - mn$.

Это и есть алгебраический метод.

Прежде чем прочитать следующее решение, попытайтесь сами решить эту задачу геометрически.

Итак, чисто геометрическое решение. Опишем вокруг треугольника ABC окружность (рис. 2) и продолжим биссектрису до пересечения с этой окружностью в точке E. По известной теореме $mn = l\cdot DE$. Кроме того, из подобия треугольников BCE и ABD следует $\frac{a}{l} = \frac{l + DE}{b}$, откуда $ab = l^2 + l\cdot DE$. Заменяя $l\cdot DE$ на mn, получим требуемый результат.

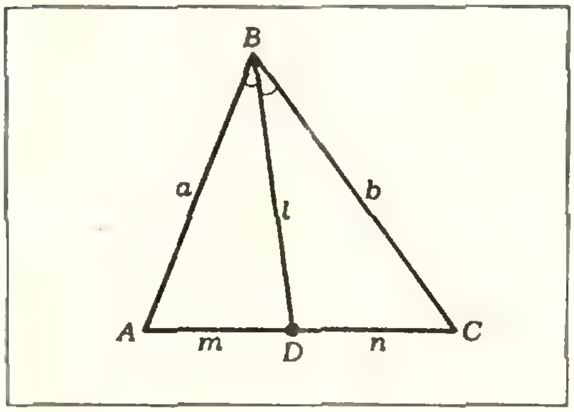


Рис. 1.

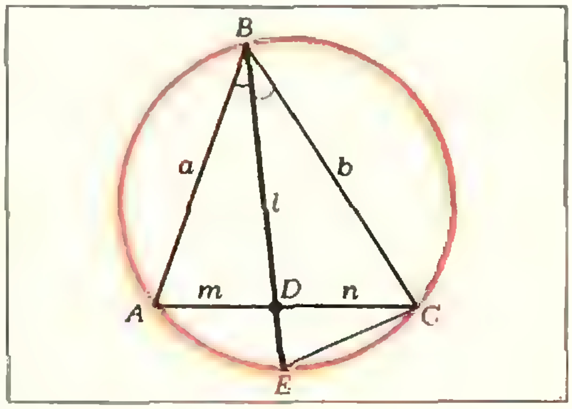


Рис. 2.

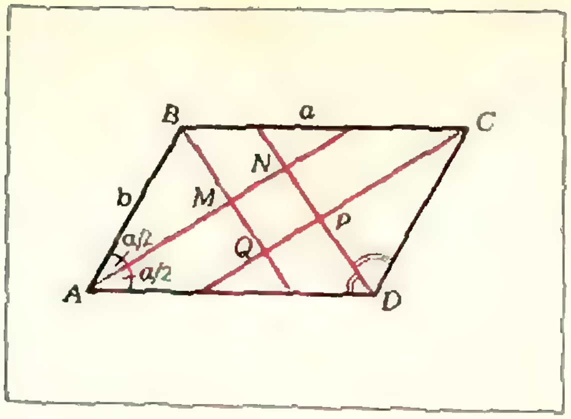


Рис. 3.

Конечно, это решение короче и изящнее предыдущего, но, чтобы до него додуматься, вероятно, нужно довольно много времени.

Алгебраический метод основан на тех или иных стандартных приемах. Можно выделить две разновидности алгебраического метода:

а) «прямой счет»;

б) «составление уравнений».

Сущность «прямого счета» заключается в следующем. Величины, заданные в условии задачи, и те, которые нужно найти, мы связываем цепочкой промежуточных величин, каждая из которых последовательно определяется через предыдущие.

Задача 2 (МГУ, геофак, 1966). *В параллелограмме со сторонами a и b и углом α проведены биссектрисы четырех углов. Найти площадь четырехугольника, ограниченного биссектрисами* (рис. 3).

Полезно прежде всего составить план решения задачи, другими словами, выписать цепочку элементов, которые можно последовательно вычислить, соединяющую то, что дано, и то, что нужно найти.

Прежде всего заметим, что $MNPQ$ — параллелограмм. Найдем последовательно $\angle ABC$, $\angle ABM$, $\angle AMB = \angle QMN$. Затем из ΔBCQ (по теореме синусов) найдем BQ, из ΔBMA — BM и AM, из ΔNAD — AN. После этого легко подсчитать MN и QM и искомую площадь $S = QM \cdot MN \cdot \sin \angle QMN$.

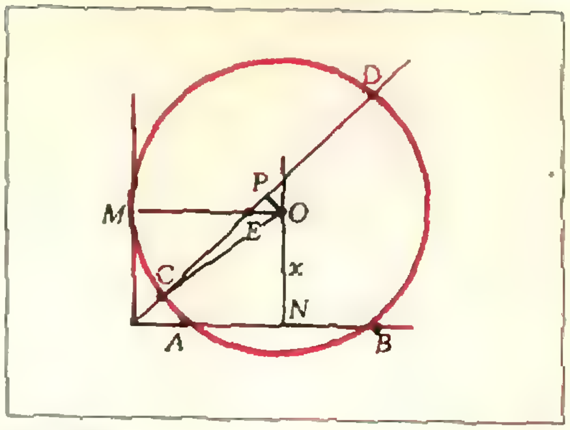


Рис. 4.

Итак, $\angle ABC = 180^\circ - \alpha$, $\angle ABM = \frac{180^\circ - \alpha}{2}$, $\angle AMB = 90^\circ = \angle QMN$, т. е. $MNPQ$ — прямоугольник. $BQ = a \sin\frac{\alpha}{2}$, $BM = b \sin\frac{\alpha}{2}$, $MQ = BQ - BM = (a - b)\sin\frac{\alpha}{2}$ и т. д. Ответ получается следующий:

$$S = \frac{1}{2}(a - b)^2 \sin\alpha.$$

Приведем теперь пример задачи на «составление уравнений».

Задача 3 (МГУ, геофак, отд. геофизики, 1973). *На плоскости дан прямой угол. Окружность с центром внутри угла касается одной стороны угла, пересекает другую сторону в точках A и B и пересекает биссектрису угла в точках C и D; $AB = \sqrt{6}$, $CD = \sqrt{7}$. Найти радиус окружности.*

Пусть O — центр окружности, R — ее радиус, M — точка касания (рис. 4). Расстояние от центра до AB обозначим через x. Сразу можно составить первое уравнение: $R^2 - x^2 = AN^2$.

Проведем $OP \perp CD$, $OP = \frac{OE}{\sqrt{2}} = \frac{R - x}{\sqrt{2}}$. Теперь можно составить и второе уравнение

$$R^2 - \left(\frac{R - x}{\sqrt{2}}\right)^2 = CP^2.$$

Воспользуемся тем, что $AN = \frac{\sqrt{6}}{2}$,

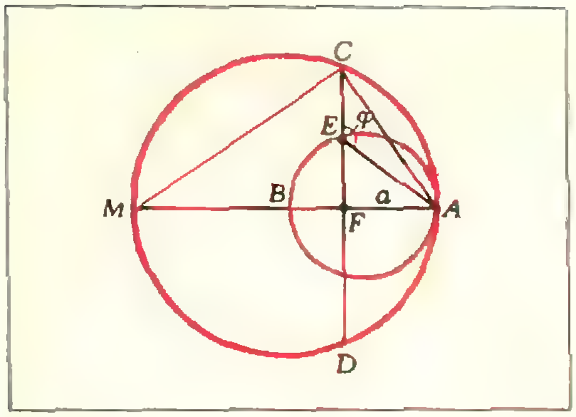


Рис. 5.

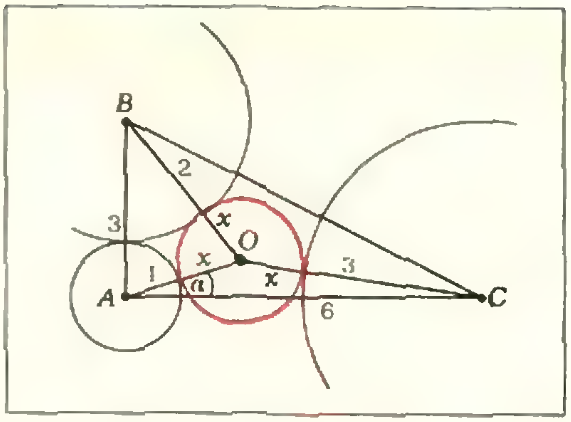


Рис. 6.

$CP = \frac{\sqrt{7}}{2}$, и составим систему

$$\begin{cases} R^2 - x^2 = \frac{6}{4}, \\ R^2 - \left(\frac{R-x}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{7}{4}. \end{cases}$$

Решая ее, находим $R = \sqrt{2}$.

При решении задач на «составление уравнений» часто нет необходимости в том, чтобы число неизвестных и число уравнений совпадали. Важно, чтобы при составлении уравнений были использованы все соотношения, вытекающие из условия. Если это требование соблюдено, то необходимое неизвестное или комбинация неизвестных должны определяться составленной системой.

Подобная ситуация может встречаться и в задачах на «прямой счет».

Задача 4. *Окружности радиусов R и r ($R > r$) касаются внутренним образом в точке A. Хорда CD большей окружности перпендикулярна диаметру AB меньшей окружности, E — точка пересечения CD с окружностью радиуса r, точки E и C лежат по одну сторону от AB. Найти радиус окружности, описанной около треугольника AEC.*

Обозначим $\angle CEA$ через φ и AF через a (рис. 5). Из треугольника CAM получим $AC = \sqrt{2aR}$, аналогично $AE = \sqrt{2ar}$. По теореме синусов из треугольника AEC получаем для искомого радиуса значение $\frac{AC}{2\sin\varphi}$. Значение $\sin\varphi$ легко найти из треугольника FEA. Ответ: $\sqrt{Rr}$.

Нам пришлось ввести параметры a, φ, так как условием задачи геометрическая конфигурация не определена полностью. Но в ответ эти параметры не входят.

Задача 5 (МФТИ, 1967). *В прямоугольном треугольнике ABC катет $AB = 3$, катет $AC = 6$. Центры окружностей радиусов 1, 2 и 3 находятся соответственно в точках A, B и C. Найти радиус окружности, касающейся каждой из трех данных окружностей внешним образом.*

Пусть O — центр искомой окружности, x — ее радиус, $\angle OAC = \alpha$ (рис. 6). Запишем теорему косинусов для треугольников AOC и AOB. Получим систему уравнений

$$\begin{cases} (x+3)^2 = (x+1)^2 + 36 - 12(x+1)\cos\alpha, \\ (x+2)^2 = (x+1)^2 + 9 - 6(x+1)\sin\alpha. \end{cases}$$

Выразив из этих уравнений $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ и используя соотношение $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, мы получим уравнение, содержащее лишь одно неизвестное x; решив это уравнение, получим ответ: $x = \frac{8\sqrt{11} - 19}{7}$.

Заметим, что использование теоремы косинусов для составления уравнений — один из наиболее часто встречающихся приемов. Вообще правильный выбор неизвестных играет весь-

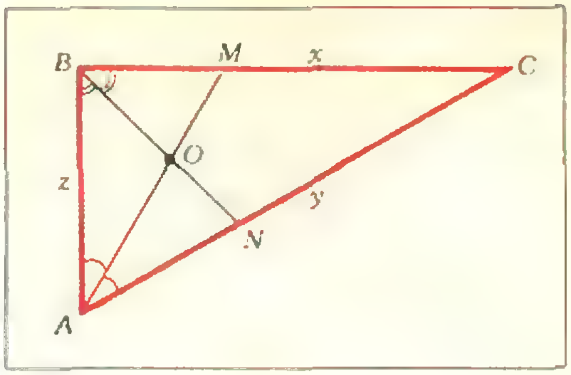


Рис. 7.

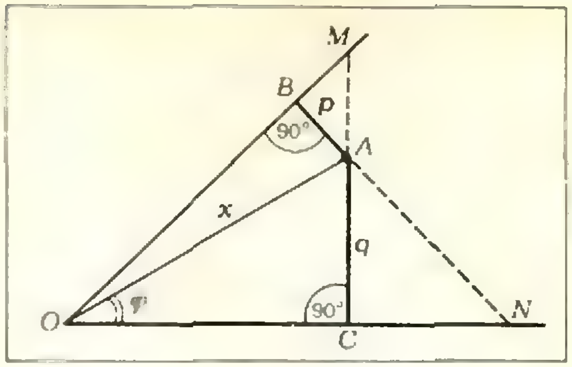


Рис. 8.

ма важную роль при решении геометрических задач. Здесь многое зависит от опыта и интуиции.

Задача 6 (МФТИ, 1966). *Биссектрисы AM и BN треугольника ABC пересекаются в точке O. Известно, что $AO = \sqrt{3}\,MO$, $NO = (\sqrt{3}-1)\,BO$. Найти углы треугольника ABC.*

Введем следующие неизвестные (рис. 7): $BC = x$, $AC = y$, $AB = z$. $\frac{MC}{BM} = \frac{AC}{AB}$, поэтому $MB = \frac{zx}{y+z}$, аналогично $AN = \frac{yz}{x+z}$. Теперь, рассмотрев треугольники BMA и BAN с биссектрисами BO и AO, нетрудно получить следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{z+y} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}, \\ \dfrac{y}{x+z} = \sqrt{3}-1. \end{cases}$$

Далее можно выразить все неизвестные через одно (например, через x) и по теореме косинусов найти углы треугольника — 30°, 60° и 90°. Попытайтесь решить эту задачу, взяв за неизвестные искомые углы, и вы убедитесь, что решение сильно усложняется.

Необходимо отметить тот факт, что большинство задач, решаемых алгебраическим методом, могут иметь два варианта решения — как «прямой счет», так и «составление уравнений», эти способы не взаимоисключают друг друга.

Задача 7. *Внутри острого угла α взята точка A, удаленная от сторон угла на p и q. Найти расстояние от точки A до вершины угла.*

Пусть M — точка пересечения AC и OB (рис. 8), легко заметить, что $\angle BAM = \alpha$. Теперь находим $MC = q - \frac{p}{\cos\alpha}$, $OC = MC\cdot\operatorname{ctg}\alpha = \frac{q\cos\alpha + p}{\sin\alpha}$. Искомое расстояние AO находим из треугольника AOC:

$$AO = \frac{\sqrt{p^2 + 2pq\cos\alpha + q^2}}{\sin\alpha}.$$

Это — «прямой счет». Между тем нетрудно решить задачу и «составлением уравнений», причем решения обоими путями, пожалуй, не уступают друг другу в рациональности. Итак, «составление уравнений».

Введем неизвестные $\angle AOC = \varphi$, $AO = x$. Рассмотрев треугольники AOB и AOC, составляем систему из двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} x\sin\varphi = q, \\ x\sin(\alpha-\varphi) = p. \end{cases}$$

Решите эту систему самостоятельно.

Если еще раз внимательно просмотреть примеры, приведенные в статье, легко заметить, что почти во всех примерах делались некоторые дополнительные построения, использовался ряд геометрических соображений. Итак, решая планиметриче-

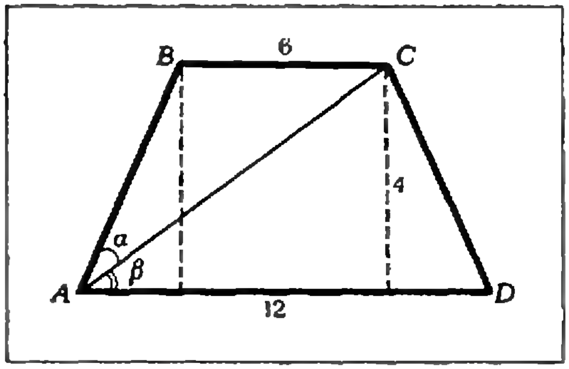


Рис. 9.

скую задачу алгебраическим методом, все же не следует забывать, что это именно планиметрическая задача, а не алгебраическая, то есть нельзя проходить мимо геометрических соображений, так как они обычно упрощают решение. В противном случае вы можете превратить простейшую геометрическую задачу в более громоздкую алгебраическую, как это случилось, например, при решении следующей задачи с авторами одного пособия для поступающих.

Задача 8 (МГУ, геофак, 1969). *В равнобочной трапеции $ABCD$ основания $AD = 12$, $BC = 6$, высота трапеции равна 4. Диагональ AC делит угол BAD трапеции на углы BAC и CAD. Какой из этих углов больше?*

Решение этой задачи, предложенное в упомянутом пособии, заключалось в следующем. Пусть $\angle BAC = \alpha$ (рис. 9), $\angle CAD = \beta$. Сначала можно вычислить $\operatorname{tg} \angle BAD = \operatorname{tg}(\alpha + \beta)$, затем $\operatorname{tg}\beta$ и, наконец, применяя тригонометрические формулы, найти $\operatorname{tg}\alpha$. Сравнивая $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{tg}\beta$, получим ответ на поставленный в задаче вопрос. Между тем значительно проще заметить, что $\angle BCA = \beta$ и $AB = 5$ (по теореме Пифагора). Из треугольника ABC $\alpha > \beta$, так как в треугольнике против большей стороны лежит больший угол.

Упражнения

1 (МГУ, геофак, 1966). В равнобедренной трапеции основания равны a и b, а угол диагонали с основанием равен α. Найти длину отрезка, соединяющего точку пересечения диагоналей с серединой боковой стороны трапеции.

2 (МГУ, физфак, 1963). В окружности радиуса R через точку M диаметра проведена хорда AB под углом φ к диаметру; при этом $BM : AM = p : q$. Через точку B проведена хорда BC, перпендикулярная к данному диаметру, и точка C соединена с точкой A. Найти площадь треугольника ABC.

3 (МГУ, экономический ф-т, 1968). В трапеции $ABCD$ углы при большем основании a равны α и β, а высота трапеции h. Пусть O_1, O_2, O_3, O_4 — центры окружностей, описанных соответственно около треугольников ABC, BCD, CDA, DAB. Найти площадь четырехугольника $O_1O_2O_3O_4$.

4. Окружности радиусов R и r пересекаются. Проведем к ним общую касательную. Пусть точка A пересечения окружностей и точки касания B и C лежат по разные стороны от линии центров. Найти радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

5 (МГУ, мехмат, 1968). В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ биссектриса угла ABC пересекает сторону AD в точке M, а перпендикуляр, опущенный из вершины A на сторону BC, пересекает BC в точке N так, что $BN = NC$ и $AM = 2MD$. Найти стороны и площадь четырехугольника $ABCD$, если его периметр равен $5 + \sqrt{3}$, $\angle BAD = 90°$, $\angle ABC = 60°$.

6 (МФТИ, 1967) Окружности радиусов R и r касаются внутренним образом в точке A. Найти сторону правильного треугольника ABC, вершины B и C которого лежат соответственно на окружностях радиуса R и r.

7. Прямая l пересекает боковые стороны AB и BC равнобедренного треугольника ABC соответственно в точках M и N. Известно, что $\frac{AM}{BM} = m$, $\frac{CN}{BN} = n$. Найти отношение, в котором прямая делит высоту треугольника, опущенную из вершины B.

8 (МГУ, физфак, 1969). В треугольнике ABC $(AB \neq AC)$ медианы, проведенные из вершин B и C к сторонам AC и AB соответственно, обратно пропорциональны этим сторонам. Найти стороны AC и AB треугольника, если $BC = a$, $\angle BAC = \alpha$.

9 (МГУ, мехмат, 1971). В четырехугольник $ABCD$ можно вписать и вокруг него можно описать окружность. Диагонали этого четырехугольника взаимно перпендикулярны. Найти его площадь, если радиус описанной окружности равен R и $AB = 2BC$.

10 (МГУ, физфак, 1974). Два одинаковых правильных треугольника ABC и CDE со стороной 1 расположены на плоскости так, что имеют только одну общую точку C, и $\angle BCD < \pi/3$. Точка K — середина AC, L — середина CE, M — середина BD. Площадь треугольника KLM равна $\sqrt{3}/5$. Найти BD.

С. М. Козел

Физические аналогии

Среди разнообразных явлений различной физической природы нередко можно встретить похожие явления, обнаруживающие одинаковые признаки и закономерности. В таких случаях говорят о физических аналогиях, или аналогичных (то есть похожих) системах. Физические аналогии, существующие между электрическими, механическими, акустическими и другими системами, давно с успехом используются при исследованиях и расчетах. Методы, основанные на применении аналогий, в ряде случаев оказываются весьма плодотворными при решении задач. Они позволяют сводить решения некоторых задач к решениям других (уже известных) задач (зачастую из другого раздела физики).

Например, нельзя пройти мимо аналогии между законом всемирного тяготения и законом Кулона.

Выражения для силы тяготения между двумя материальными точками с массами M и m и для силы электростатического взаимодействия двух точечных зарядов Q и q имеют вид

$$F_{\text{т}} = \gamma \frac{Mm}{r^2}; \qquad F_{\text{эл}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Qq}{r^2}.$$

Здесь γ — гравитационная постоянная, ε_0 — электрическая постоянная, r — расстояние между взаимодействующими телами.

Поскольку силы выражаются похожими формулами (в обоих случаях силы обратно пропорциональны квадрату расстояния), движение материальной точки в гравитационном поле (в поле тяготения) и движение заряженного тела в поле точечного заряда описываются одинаковыми уравнениями. Правда, есть и отличие. Гравитационные силы всегда стремятся сблизить тела (притяжение тел), а электрические силы в зависимости от знаков взаимодействующих зарядов могут дать как притяжение, так и отталкивание.

Понимание аналогии между законом всемирного тяготения и законом Кулона часто помогает при решении задач. Например, мы знаем, что потенциал поля точечного заряда Q (то есть потенциальная энергия единичного положительного электрического заряда в электрическом поле) выражается формулой $\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r}$.

По аналогии можно записать выражение для потенциальной энергии единичной массы в гравитационном поле точечной массы M (то есть для гравитационного потенциала) в виде $\varphi = -\gamma \frac{M}{r}$. Появление знака минус связано с тем, что в случае сил притяжения потенциальная энергия оказывается отрицательной. (Напомним, что потенциальная энергия полагается равной нулю при бесконечно большом r.) Последним выражением (для гравитационного потенциала) удобно пользоваться при решении многих задач из области космической физики (например, задача о вычислении второй космической скорости, задачи о маневрах космических кораблей и т. п.).

Приведем еще один пример физической аналогии между механической и электрической системами. Процессы, происходящие в электрическом колебательном контуре (рис. 1), аналогичны колебаниям грузика на пружине.

Эта аналогия подробно рассматривается в школьном учебнике (см. учебное пособие для 10 класса средней школы). Системы являются аналогичными потому, что явления, происходящие в них, описываются одинаковыми математическими соотношениями. Второй закон Ньютона для груза на пружине и закон Ома для колебательного контура записываются одинаковым образом:

$$m\frac{\Delta v}{\Delta t} = -kx, \qquad L\frac{\Delta i}{\Delta t} = -\frac{1}{C}q,$$

где $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ — скорость груза,

$i = \frac{\Delta q}{\Delta t}$ — ток в контуре.

Отсюда видно, что масса груза m может быть сопоставлена с индуктивностью катушки L, жесткость пружины k — с обратной величиной емкости $\frac{1}{C}$. Аналогия этих двух систем сохраняется и при наличии рассеяния энергии: коэффициент вязкого трения β при небольших скоростях движения тела в жидкости или газе аналогичен электрическому сопротивлению R.

Рассмотрим теперь несколько конкретных задач, решения которых существенно упрощаются, если воспользоваться методом аналогий.

Задача 1. *U-образная трубка частично заполнена жидкостью. Сечение трубки везде одинаково; общая длина заполненной части трубки равна l. Определить период колебаний уровня жидкости в такой системе.*

Попытаемся провести аналогию с известной задачей о колебаниях груза, подвешенного на пружине, и таким образом найти период колебаний данной колебательной системы.

Пусть уровень жидкости в одном из колен понизился на x, а в другом, соответственно, повысился на x (см. рис. 2), тогда разность уровней будет равна $2x$, и на жидкость в левом колене будет действовать нескомпенсированная сила тяжести столба жидкости высотой $2x$:

$$F = -2S\rho gx.$$

Здесь S — площадь сечения трубки, ρ — плотность жидкости. Знак минус в этой формуле означает, что сила F стремится вернуть систему в положение равновесия (как и в случае груза на пружине). Величина $2S\rho g$, постоянная для данной системы, соответствует жесткости пружины k. Таким образом, движение жидкости происходит под действием квазиупругой *) силы. Аналогия с зада-

---

*) Так принято называть силы неупругого происхождения, изменяющиеся по тому же закону, что и упругая сила пружины: $F = -kx$.

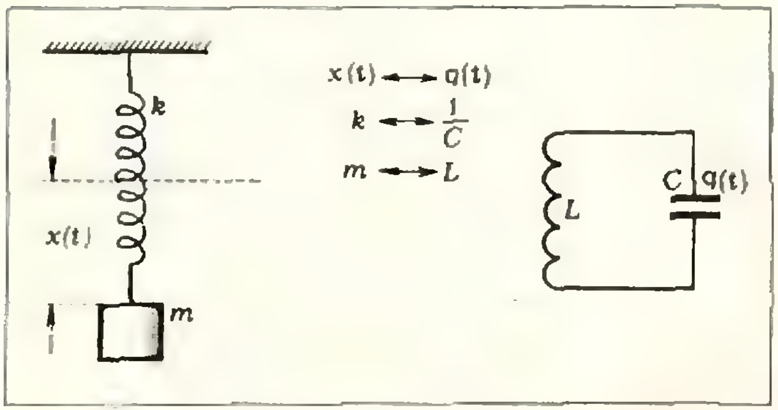


Рис. 1. Эти колебательные системы физически аналогичны.

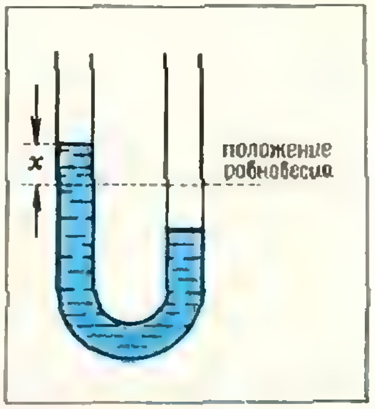


Рис. 2. Еще одна колебательная система.

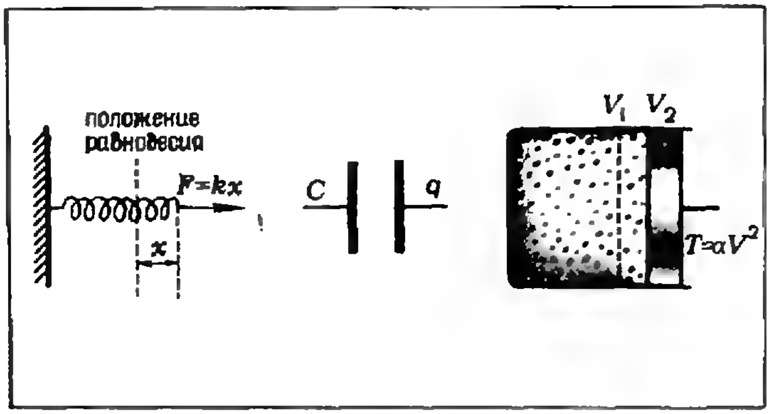


Рис. 3. Механическая, электрическая и тепловая системы, в которых работы сил выражаются аналогичными соотношениями.

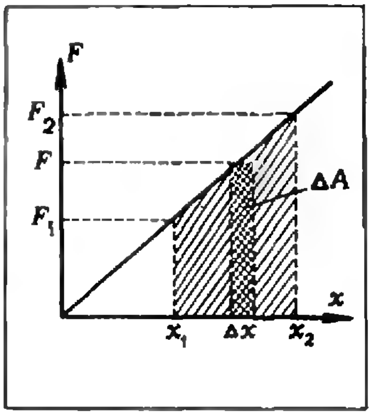


Рис. 4. Графическое определение работы.

чей о колебании груза на пружине становится очевидной. Используя формулу для периода T колебаний груза массы m на пружине, получаем:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{Sl\rho}{2S\rho g}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{2g}}.$$

Теперь мы сформулируем несколько задач из различных разделов физики и попробуем понять аналогию между ними.

Задача 2. *Определить работу, затраченную на деформацию пружины жесткости k, если ее удлинение (считая от положения равновесия нерастянутой пружины) изменилось от x_1 до x_2.*

Задача 3. *Какую работу надо затратить, чтобы изменить заряд конденсатора емкости C от значения q_1 до значения q_2?*

Задача 4. *Один моль идеального газа расширяется при нагревании так, что объем связан с температурой по закону $T = \alpha V^2$, где α — некоторая постоянная величина. Какую работу совершит газ в этом процессе при изменении его температуры от T_1 до T_2?*

Системы, о которых идет речь в этих задачах, изображены на рисунке 3.

Задачи являются аналогичными, поскольку во всех трех случаях мы сталкиваемся с одинаковыми закономерностями. Разберемся в этом более подробно.

В задаче 2 нужно найти работу по деформации пружины. Эту работу можно определить графическим методом. Работа на малом участке пути Δx (т. е. на таком участке, что силу $F = kx$ можно считать постоянной) есть

$$\Delta A = F\Delta x = kx\Delta x.$$

Значит, полная работа A при изменении координаты от x_1 до x_2 равна заштрихованной площади на рисунке 4, т. е.

$$A = \frac{k}{2}\left(x_2^2 - x_1^2\right).$$

Напомним, что величина $\frac{kx^2}{2}$ есть потенциальная энергия $П$ упруго деформированной пружины. Зная выражение для этой энергии, мы могли бы сразу написать формулу для работы ($A = \Delta П$). Но мы хотим здесь убедиться в том, что подобная ситуация возникает и в других физически аналогичных задачах.

При решении задачи 3 процесс зарядки конденсатора можно представить следующим образом. Заряд достаточно малыми порциями Δq (такими, что разность потенциалов u на конденсаторе можно считать постоянной) переносится с одной обкладки на другую. Работа по переносу заряда Δq запишется в виде

$$\Delta A = u\Delta q = \frac{1}{C}q\Delta q.$$

Выражение для ΔA имеет тот же вид, что и в задаче 2. По аналогии, не повторяя хода решения, мы можем сразу написать, что полная работа по изменению заряда на конденсаторе равна

$$A=\frac{1}{2C}(q_2^2-q_1^2).$$

Величина $\frac{q^2}{2C}$ аналогична потенциальной энергии пружины $\frac{kx^2}{2}$ и имеет смысл электрической энергии, запасенной в конденсаторе. (Мы снова встречаемся здесь с аналогией между жесткостью пружины k и обратной величиной емкости $\frac{1}{C}$.)

В задаче 4 требуется определить работу газа при расширении. Если взять достаточно малое изменение объема ΔV (такое, чтобы давление в этом элементарном процессе можно было с хорошим приближением считать постоянным), то работа запишется в виде: $\Delta A=p\Delta V$. Поскольку в нашем случае $T=\alpha V^2$, то из уравнения газового состояния получаем:

$$p=\frac{RT}{V}=R\alpha V.$$

Следовательно,

$$\Delta A=R\alpha V\Delta V.$$

Теперь аналогия с задачами 2 и 3 становится очевидной, и мы можем записать выражение для полной работы A при расширении газа:

$$A=\frac{R\alpha}{2}(V_2^2-V_1^2)=\frac{R}{2}(T_2-T_1).$$

Рассмотрим теперь еще одну, несколько более сложную задачу.

Задача 5. *Какое количество теплоты Q получает один моль газа при изменении температуры от T_1 до T_2 $(T_2>T_1)$, если в процессе нагревания объем газа изменяется обратно пропорционально температуре: $V=\frac{\beta}{T}$, где β — некоторая постоянная величина? Теплоемкость газа при постоянном объеме C_V задана.*

Прямое решение этой задачи довольно громоздко. Мы обратим здесь внимание на неожиданную аналогию этой тепловой задачи с известной задачей о потенциале поля точечного заряда.

На основании первого закона термодинамики можно записать:

$$Q=\Delta U+A.$$

Здесь ΔU — изменение внутренней энергии газа, A — работа, совершенная газом. Внутренняя энергия идеального газа зависит только от температуры ($U\sim T$). Поэтому изменение внутренней энергии в любом процессе, и значит, и в нашем случае, такое же, как и в процессе при постоянном объеме, когда все подведенное тепло идет только на увеличение внутренней энергии:

$$\Delta U=C_V(T_2-T_1).$$

Таким образом, задача свелась к вычислению работы, произведенной газом. Для отыскания этой работы рассмотрим сначала элементарный процесс, в котором объем газа увеличивается на достаточно малую величину ΔV, так что давление остается практически неизменным. Для элементарной работы мы можем написать:

$$\Delta A=p\Delta V=\frac{RT}{V}\Delta V=R\beta\frac{\Delta V}{V^2}. \qquad (*)$$

Нам нужно найти работу газа при изменении его объема от значения $V_1=\frac{\beta}{T_1}$ до значения $V_2=\frac{\beta}{T_2}$. Математически задача свелась к операции интегрирования, выходящей за рамки программы средней школы. Попробуем, однако, вспомнить, не встречались ли мы с подобной постановкой вопроса в других задачах.

В каких случаях элементарная работа оказывается пропорциональной выражению $\frac{\Delta x}{x^2}$? Очевидно, если речь идет о работе силы, изменяющейся обратно пропорционально квадрату расстояния, на малом пере-

[illegible] мы знаем две силы, изменяющиеся пропорционально $\frac{1}{x^2}$: это сила кулоновского взаимодействия точечных зарядов и гравитационна сила. Таким образом, рассматриваемая тепловая задача аналогична задаче о потенциале поля точечного электрического заряда или задаче о вычислении потенциальной энергии тела в гравитационном поле. Методы решения этих задач изучаются в средней школе.

Вот пример электрической задачи, из которой немедленно следует решение задачи 5.

Задача 6. *Найти емкость сферического конденсатора, образованного двумя концентрическими проводящими сферами с радиусами R_1 и R_2.*

Емкость конденсатора C равна отношению заряда конденсатора q к разности потенциалов $\Delta\varphi$ между его обкладками. Разность потенциалов (по определению) равна работе, совершаемой электрическими силами при перемещении единичного положительного заряда с одной обкладки на другую.

Пусть внутренняя сфера конденсатора имеет заряд q, а наружная — заряд $-q$. Тогда электрическое поле в пространстве между сферами совпадает с полем точечного заряда q, расположенного в их общем центре *), и напряженность поля

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}; \quad R_1 \leqslant r \leqslant R_2.$$

Пусть единичный положительный заряд переместился на малое расстояние $\Delta r \ll R_1$ (так что поле можно считать однородным). Работа, совершаемая электрическим полем на этом участке пути, есть

$$\Delta A = E\,\Delta r = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\Delta r}{r^2}. \qquad (**)$$

Полная работа A электрических сил при изменении расстояния от R_1 до R_2 может быть выражена через потенциал поля точечного заряда:

$$A = -(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_1} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}. \qquad (***)$$

Отсюда емкость сферического конденсатора равна

$$C = \frac{q}{\Delta\varphi} = 4\pi\varepsilon_0\,\frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}.$$

Вернемся теперь к задаче 5 и доведем ее решение до конца, воспользовавшись результатами задачи 6. Сравним выражение (*) для элементарной работы при расширении газа и выражение (**) для элементарной работы по перемещению единичного заряда в электростатическом поле. Нетрудно видеть, что эти выражения аналогичны (в задаче 5 переменной величиной является объем газа V, а в задаче 6 — расстояние r). Это позволяет сделать вывод о том, что и полные работы A в обоих случаях выражаются одинаковым образом через переменные V и r соответственно. Поэтому по аналогии с выражением (***) можно записать выражение для работы газа при изменении его объема от V_1 до V_2:

$$A = R\beta\,\frac{V_2 - V_1}{V_1 V_2}.$$

Принимая во внимание, что $V = \frac{\beta}{T}$, получим:

$$A = R\,\frac{\frac{V_2}{\beta} - \frac{V_1}{\beta}}{\frac{V_1}{\beta}\,\frac{V_2}{\beta}} = R\,\frac{\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}}{\frac{1}{T_1}\,\frac{1}{T_2}} = -R(T_2 - T_1).$$

Знак минус в этой формуле определяется тем, что в рассматриваемом процессе происходит сжатие газа ($A < 0$).

Теперь можно записать окончательный результат решения задачи 5.

---

*) См., например, статью Л. П. Баканиной и С. М. Козела «Принцип суперпозиции в электростатике», «Квант», 1973, № 3.

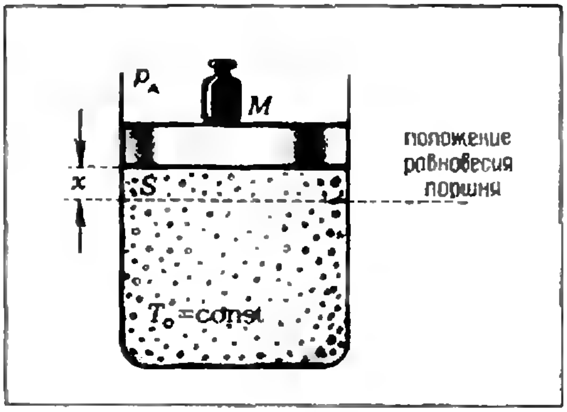


Рис. 5. Каков период колебаний поршня в этой системе?

Количество тепла, которое нужно сообщить одному молю газа, чтобы изменить его температуру от T_1 до T_2, равно

$$Q = (C_V - R)(T_2 - T_1).$$

В этой статье мы хотели проиллюстрировать значение физических аналогий. Следует, однако, иметь в виду, что аналогии бывают разные. На рисунке 1 изображены системы, между которыми имеется глубокая физическая аналогия. Аналогичными оказываются процессы, протекающие в этих двух физически разных системах. Аналогии такого рода называются динамическими. Динамически аналогичные системы описываются одинаковыми уравнениями движения. Роль таких систем в науке особенно значительна. Другим примером динамической аналогии является задача о движении спутников Земли и задача о движении электронов в резерфордовской модели атома водорода.

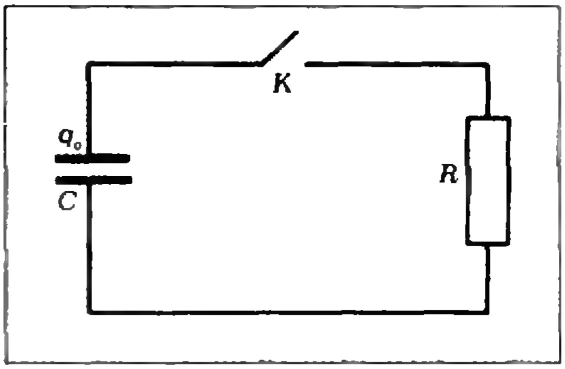


Рис. 6. Надо придумать механическую аналогию этой электрической цепи.

Наряду с такими глубокими физическими аналогиями большой интерес представляют и случаи формальной аналогии. К этой категории можно отнести примеры, разобранные в задачах 5 и 6. В этих задачах мы не изучали динамику систем и не рассматривали процессы, протекающие во времени. Задачи сводились к вычислению определенной физической величины (работы). Мы лишь обратили внимание на то, что в обоих случаях силы, производящие работу, подчиняются одинаковым закономерностям. Это позволило использовать для решения тепловой задачи известное из школьной программы выражение для потенциала поля точечного заряда.

Упражнения

1. В вертикально расположенном цилиндре под тяжелым поршнем массы m и площади S находится один моль идеального газа (рис. 5). Используя аналогию с грузом на пружине, определить период малых колебаний поршня относительно положения равновесия, предполагая температуру газа неизменной и равной T_0. Атмосферное давление равно p_A.

Какой смысл вкладывается здесь в понятие малых колебаний? Какую еще колебательную систему, аналогичную грузу на пружине только при малых колебаниях, вы знаете?

2. Попытайтесь придумать механическую систему, которая была бы динамически аналогична электрической цепи, изображенной на рисунке 6. Цепь состоит из конденсатора емкости C, первоначальный заряд которого равен q_0, и сопротивления R. Ключ K замыкается в некоторый момент времени.

Завод-втуз при Московском автомобильном заводе им. И. А. Лихачева

Завод-втуз, как новая и важная форма работы высшей школы, все глубже проникает в среду производства. При этом подготовка студентов основана на органическом сочетании теоретических знаний студентов с их производственной работой на предприятиях.

Завод-втуз при ЗИЛе был создан пятнадцать лет назад и вместе с другими заводами-втузами прошел большой путь организации и стал в один ряд с крупнейшими вузами страны. Сейчас на автомобильных заводах столицы и многих других городов Советского Союза работает более 2500 его выпускников.

Завод-втуз при ЗИЛе имеет три факультета: автомобильный, механико-технологический и вечерний.

Автомобильный факультет готовит специалистов в областях конструирования, расчета и исследования автомобилей, двигателей и кузовов, а также изготовления деталей автомобиля методами холодной и горячей штамповки.

Механико-технологический факультет готовит специалистов в области технологии машиностроения, металлорежущего оборудования, инструментального производства, технологии литейного производства, металловедения, оборудования и технологии термической обработки, экономики и организации машиностроительной промышленности. Кроме того имеется ряд специализаций: ремонт и модернизация металлорежущего оборудования, электрофизические и электрохимические методы обработки и др.

На вечернем факультете осуществляется подготовка руководящих инженерно-технических работников базовых заводов, имеющих квалификацию инженеров-механиков. Они получают второе высшее экономическое образование по вечерней системе со сроком обучения 3 года.

Завод-втуз принимает работников предприятий ЗИЛ, АЗЛК, ГПЗ-1, Камаз и их филиалов, а также выпускников средних школ, направленных на обучение указанными заводами, и готовит инженеров для этих предприятий. Выпускники завода-втуза успешно работают на базовых заводах, становятся подлинными руководителями производства, активно решающими задачи научно-технического прогресса производства.

В чем же состоит особенность подготовки инженеров по системе «завод-втуз»?

Это прежде всего чередование теоретического обучения с работой на производстве. При общем сроке обучения 5 лет и 10 месяцев в течение 11 семестров студенты учатся попеременно с отрывом и без отрыва от производства с чередованием по неделям.

На первом курсе студенты (в основном выпускники средних школ, они составляют около 90% набора) приобретают рабочую специальность. На втором—четвертом курсах студенты, работая в цехах базовых заводов на рабочих должностях в соответствии с изучаемой специальностью, участвуют в выполнении производственной программы, проходят инженерно-производственную подготовку по программам профилирующих кафедр под руководством заводских инженеров-консультантов и преподавателей завода-втуза. К моменту перехода на инженерно-техническую должность (обычно к концу четвертого курса) студенты имеют рабочую квалификацию не ниже 3 разряда. На пятом и шестом курсах предусматривается обязательная стажировка студентов на инженерно-технических должностях (инженеров, старших техников и техников) в лабораториях, конструкторских бюро и отделах базовых заводов. В этот период студенты осуществляют подготовку к предстоящему дипломному проектированию и выполняют дипломные проекты. Темы проектов, как правило, непосредственно связаны с выполняемой студентами работой на производстве. Это позволяет значительно повысить количество реальных дипломных проектов, подлежащих внедрению на предприятиях.

Студенты и профессорско-преподавательский состав активно участвуют в выполнении «Комплексного плана социально-экономического развития» Московского автомобильного завода имени И. А. Лихачева и других базовых заводов нашего втуза по направлениям «Повышение технического уровня, качества и надежности выпускаемой продукции», «Развитие техники и технологии производства», «Научно-исследовательские и опытно-конструкторские работы».

Профессорско - преподавательский состав и студенты участвуют в хоздоговорных и госбюджетных научно-исследовательских работах по тематике базовых заводов. Для выполнения наиболее важных хоздоговорных работ часть студентов дневного отделения завода-втуза откомандировывается базовым заводом ЗИЛ в распоряжение НИСа завода-втуза.

Подготовка инженеров-механиков для базовых заводов осуществляется в соответствии с квалификационными требованиями, разработанными заводом-втузом и главными специалистами ЗИЛа.

Выполнение этих требований в сочетании с необходимым теоретическим обучением обеспечивает подготовку квалифицированных специалистов широкого профиля для конкретного производства. Трудовая закалка, идейная убежденность, полученные в стенах института знания позволяют выпускникам завода-втуза быстро вливаться в жизнь трудовых коллективов и активно участвовать в решении поставленных перед ними задач. Так, хотя в этом году завод-втуз выпустил только свой десятый выпуск, среди его питомцев есть директора заводов, заместители директоров, главные механики заводов, заместители главных инженеров, начальники отделов и частей. Только на ЗИЛе более 10 цехов возглавляют выпускники завода-втуза.

За все время обучения студенты завода-втуза ежемесячно получают $^1/_2$ месячной зарплаты и $^1/_2$ месячной стипендии, повышенной на 15% по сравнению со стипендиями студентов обычных дневных вузов. Стипендией в заводе-втузе обеспечиваются все успевающие студенты дневного отделения.

Студенты завода-втуза имеют возможность принимать активное участие в спортивной жизни одного из крупнейших спортивных клубов страны «Торпедо» ЗИЛ, спортивных клубах «Москвич» и «Подшипник».

На заводе-втузе ежегодно проводится широкая вузовская Спартакиада, привлекающая к себе практически всех студентов I—V курсов. Студенты соревнуются и на зимней Спартакиаде ЗИЛа, где показывают отличные результаты. Во втузе работают секции волейбола, баскетбола, футбола, гандбола, лыжного спорта, легкой атлетики. Все студенты обучаются плаванию. Студенты, занимающиеся спортом, регулярно соревнуются с командами вузов и производственных коллективов Москвы и других городов. Большая группа студентов входит в состав сборных команд базовых заводов, МГС и ЦС ДСО «Труд». В заводе-втузе обучается ряд студентов, входящих в сборные команды СССР по отдельным видам спорта.

Ниже приводятся образцы вариантов вступительных экзаменов по математике и физике в завод-втуз в 1975 году.

Математика

Вариант 1

1. В правильной треугольной призме угол между диагональю боковой грани и другой боковой гранью равен α. Определить боковую поверхность призмы, зная, что ребро основания равно a.

2. Решить уравнение

$$\log_3(2^x - 1) - \log_3(2^x - 2^{-x}) = -2 + x\log_3 2$$

3. Решить уравнение

$$\operatorname{ctg} x + \operatorname{tg} 2x = 2\cos^2 x$$

Вариант 2

1. В конус вписан куб со стороной a (основание куба лежит на основании конуса). Определить объем конуса, если его образующая наклонена к плоскости основания под углом α.

2. Решить уравнение

$$\lg 2 + \lg(4^{x-2} + 1) = \lg 6 + \lg\left(2^{x-2} + \frac{5}{3}\right).$$

3. Решить уравнение

$$\cos^4\frac{x}{2} - \sin^4\frac{x}{2} + \sin x = \cos 2x.$$

Вариант 3

1. В конус, образующая которого наклонена к плоскости основания под углом α, вписан шар. Объем конуса равен V. Найти поверхность шара.

2. Решить уравнение

$$\log_7[x + \log_2(9 - 2^x) + 4] = 1.$$

3. Решить уравнение

$$\sin^2 x + \sin^2 2x = \sin^2 3x.$$

Физика

Вариант 1

1. Распространение колебаний в упругих средах. Продольные и поперечные волны. Скорость распространения колебаний. Длина волны. Зависимость между длиной волны, скоростью распространения колебаний и частотой.

2. Работа и теплота. Количество теплоты, единицы измерения. Удельная теплоемкость вещества. Формула для подсчета количества теплоты, необходимой для нагревания тела.

3. Ракета, масса которой $M = 5 \cdot 10^3$ *кг*, поднимается на вертикальном участке взлета под действием силы тяги реактивных двигателей, равной $F = 2{,}45 \cdot 10^5$ *н*. Определить ускорение, с которым поднимается ракета, и вес космонавта в космическом корабле на взлете, если масса космонавта равна $m = 70$ *кг*. Ускорение свободного падения на всем участке движения ракеты принять равным 9,8 *м/с²*.

Вариант 2

1. Прямолинейное неравномерное движение материальной точки. Средняя и мгновенная скорости движения. Равнопеременное прямолинейное движение. Ускорение. Уравнения равнопеременного движения.

2. Явление электромагнитной индукции. Условие возникновения э.д.с. индукции. Опытное подтверждение закона электромагнитной индукции. Направление индукционного тока. Закон Ленца.

3. Как надо расположить две линзы, из которых одна рассеивающая с фокусным расстоянием F_1, а другая — собирающая с фокусным расстоянием $F_2 = 2F_1$, чтобы пучок лучей, параллельных главной оптической оси линз, пройдя обе линзы, остался параллельным.

Вариант 3

1. Электростатическое поле точечного заряда. Потенциал поля точечного заряда. Разность потенциалов. Работа перемещения заряда в электростатическом поле (на примере поля точечного заряда). Выражение работы через разность потенциалов.

2. Закон всемирного тяготения. Физический смысл гравитационной постоянной. Сила тяжести и вес тела.

3. В закрытом баке объемом $V = 50$ *л* находится вода массы $m = 100$ *г* при нормальных условиях ($p_0 = 1{,}01 \cdot 10^5$ *н/м²*, $T_0 = 273°$ K). Определить давление p влажного воздуха, если бак нагрели на $\Delta T = 100°$. Водяной пар считать идеальным газом.

Л. И. Воронин, И. М. Горин,
И. Б. Лифшиц, В. А. Ляховский,
О. В. Таратынов

IX Всесоюзная олимпиада школьников

В прошлом году приказом министра просвещения СССР было утверждено новое «Положение о Всесоюзной физико-математической олимпиаде школьников». В основном несколько изменены сроки и порядок проведения олимпиады. Расскажем немного о новом «Положении».

Порядок проведения олимпиады

Олимпиада проводится в течение учебного года в пять этапов. Первый этап — школьные олимпиады. Второй этап — районные (городские) олимпиады. Третий этап — олимпиады автономных республик, краев и областей. Четвертый этап — республиканские олимпиады. Пятый этап — заключительный этап Всесоюзной олимпиады — проводится в апреле.

Участники олимпиады

1. В заключительном этапе Всесоюзной олимпиады принимают участие по одной команде от союзных республик, городов Москвы и Ленинграда, Главного Политуправления Советской Армии и Военно-Морского флота и Министерства путей сообщения СССР.

2. Численный состав команды по каждому предмету определяется в соответствии с числом учащихся в республике. В прошлом году на олимпиаде от РСФСР было 48 человек, от УССР — 12 человек, от БССР, КазССР и УзССР — по 6 человек, от остальных республик, команд Москвы и Ленинграда, а также МПС и Гл. Политуправления Советской Армии и Военно-Морского флота — по 3 человека.

Город, проводящий заключительный этап олимпиады, имеет право принять в нем участие в составе 3 человек.

Каждая команда должна включать одинаковое количество учащихся 8—9—10—(11) классов. Дополнительно в состав команды вводятся победители заключительного этапа предыдущей олимпиады, занявшие I—II места.

Олимпиада по математике

В. Л. Гутенмахер

IX Всесоюзная олимпиада по математике проходила с 17 по 23 апреля в Саратове. Согласно новому «Положению», в этом году участие в олимпиаде принимали только команды республик и призеры прошлогодней Всесоюзной олимпиады (всего 144 человека). Олимпиада, как всегда, проходила в два тура (18 и 20 апреля), отдельно по восьмым, девятым и десятым классам. Из множества задач, предложенных членами жюри и присланных в «Квант», были составлены варианты для каждого класса.

Олимпиадные задачи были присланы из Саратова, Москвы, Ленинграда, Казани, Свердловска, Харькова, Ярославля и Черновцов. Отметим, что некоторые задачи второго дня олимпиады уже близки к серьезной математической науке.

Условия почти всех предлагавшихся на олимпиаде задач (кроме трех) были опубликованы в «Кванте» №№ 7, 8, 9 в разделе «Задачник «Кванта», и поэтому здесь мы их не помещаем. (Полностью варианты опубликованы в журнале «Математика в школе», 1975, № 6.)

В этом году, как и в прошлые годы, очень много задач было связано с таблицами. Школьникам, готовящимся к следующей олимпиаде по математике, можно смело советовать учиться решать такие задачи.

Как ни странно, участники олимпиады плохо решили сравнительно простые задачи по геометрии. Гораздо успешнее они справились с алгебраическими и логическими задачами, причем были найдены разные, порой неизвестные жюри, решения.

Перейдем теперь к краткому разбору тех трех задач, которые не вошли в «Задачник «Кванта».

8 класс, задача № 3.

Какой наименьший периметр может иметь выпуклый 32-угольник, все вершины которого лежат в узлах клетчатой бумаги со стороной клетки 1?

Эта задача эквивалентна следующей. Пусть O — узел клетчатой бумаги со стороной клетки 1. Нужно определить 32 ненулевых вектора с началом в точке O так, чтобы

а) концы векторов лежали в узлах клетчатой бумаги;

б) векторы не совпадали по направлению;

в) сумма длин этих векторов была бы минимальна.

На рисунке 1 изображены 32 вектора, удовлетворяющие условиям а) — в): это четыре вектора длины 1, четыре вектора длины $\sqrt{2}$, восемь векторов длины $\sqrt{5}$, восемь векторов длины $\sqrt{10}$ и восемь векторов длины $\sqrt{13}$. Итак, наименьший периметр равен

$$4(1+\sqrt{2})+8(\sqrt{5}+\sqrt{10}+\sqrt{13}).$$

9 класс, задача № 1.

В выпуклом шестиугольнике $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ *середины диагоналей* A_6A_2, A_1A_3, A_2A_4, A_3A_5, A_4A_6, A_5A_1 *обозначим соответственно через* B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6. *Докажите, что если шестиугольник* $B_1B_2B_3B_4B_5B_6$ *— выпуклый, то его площадь в четыре раза меньше площади* $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$.

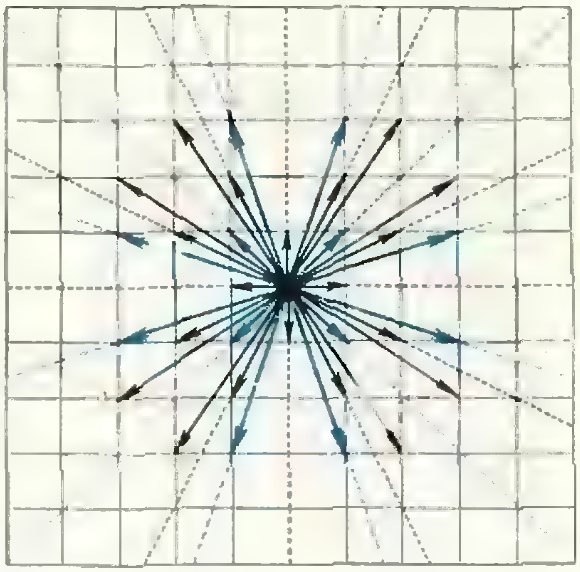


Рис. 1.

Рассмотрим четырехугольники $A_1A_2A_3A_6$ и $B_3B_4B_5B_6$ (см. рис. 2). Диагональ A_1A_3 первого четырехугольника параллельна диагонали B_4B_6 второго и $|A_1A_3| = 2|B_4B_6|$, так как диагональ B_4B_6 — средняя линия в треугольнике $A_1A_3A_5$. Аналогично, диагональ A_2A_3 параллельна диагонали B_3B_5 и $|A_2A_3| = 2|B_3B_5|$, так как диагональ B_3B_5 — средняя линия в треугольнике $A_2A_6A_4$.

Поскольку площадь выпуклого четырехугольника равна половине произведения длин диагоналей на синус угла между ними, получаем, что площадь четырехугольника $B_3B_4B_5B_6$ в четыре раза меньше площади четырехугольника $A_1A_2A_3A_6$. Точно так же, площадь четырехугольника $B_6B_1B_2B_3$ (его нет на рисунке) в четыре раза меньше площади четырехугольника $A_3A_4A_5A_6$. Указанные четырехугольники образуют соответственно первый и второй шестиугольники, и тем самым требуемое соотношение доказано.

10 класс, задача № 2

Докажите, что для положительных a, b, c имеет место неравенство $a^3+b^3+c^3+3abc \geqslant ab(a+b)+bc(b+c)+ac(a+c)$.

Поскольку выражение

$$a^3+b^3+c^3+3abc-$$
$$-ab(a+b)-bc(b+c)-ac(a+c)$$

симметрично относительно a, b, c, мы можем без ограничения общности считать, что $a \geqslant b \geqslant c > 0$. Написанное выражение можно преобразовать в следующее:

$$(a-b)^2(a+b-c)+c(c-a)(c-b).$$

Из предположения $a \geqslant b \geqslant c > 0$, очевидно, следует, что

$$(a-b)^2(a+b-c) \geqslant 0$$
$$\text{и} \quad c(c-a)(c-b) \geqslant 0.$$

Складывая эти два неравенства, получаем нужное неравенство.

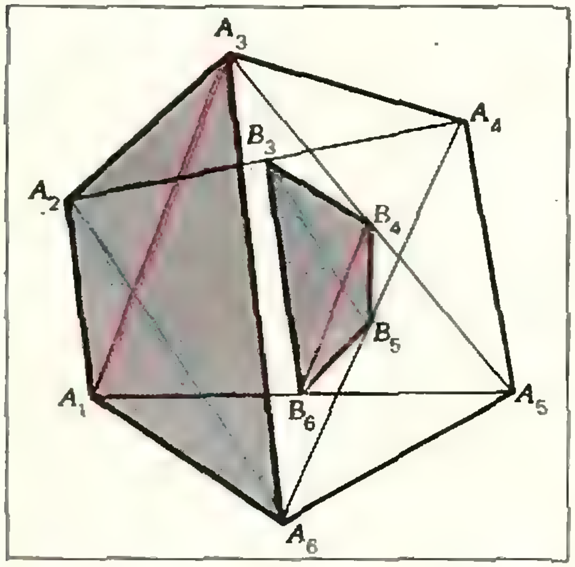


Рис. 2.

На шестой международной математической олимпиаде была предположена такая задача:

Пусть a, b и c — длины сторон некоторого треугольника. Доказать, что

$$a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)$$
$$+c^2(a+b-c) \leqslant 3abc.$$

Нетрудно усмотреть, что это неравенство совпадает с неравенством только что разобранной задачи № 2, однако дополнительные условия упрощают решение.

Мы можем предложить читателям «Кванта» еще одну геометрическую задачу из портфеля жюри; ее предполагалось дать на втором туре в девятом классе. Жюри в последний момент исключило эту задачу в виду перегрузки варианта, а также потому, что она легко может быть решена методом *инверсии**):

В данный круговой сегмент произвольным образом вписываются две окружности, касающиеся друг друга в точке M. Найдите множество точек M.

И наконец, несколько слов о том, что значит «решить задачу» на олимпиаде. Решить задачу — это еще не все: надо суметь правильно записать ее решение. На олимпиаде было предложено много сложных, нестандартных задач, запись решения которых на самом деле требует определенного мастерства. Тут прежде всего сказывается отсутствие общепринятых обозначений, терминологии. Из трудного положения школьники выходили по-разному: одни — более, другие — менее удачно. Они придумывали свои определения, вводили собственные обозначения, — иногда для расшифровки написанного членам жюри приходилось созывать «консилиум». Чаще всего, несмотря на запутанность изложения, решение задачи оказывалось абсолютно верным с математической точки зрения, — в какой-то степени можно было даже логически оправдать запутанность фраз и оборотов. Все сказанное касается, в основном, задач М339 («Квант» № 8) и М332 («Квант» № 7). Обе они позже будут разобраны в «Кванте»: мы советуем всем школьникам, участвовавшим в олимпиаде, даже тем, кто решил эти задачи, познакомиться с записью их решений. Мы же сейчас приведем несколько «цитат» из работ участников олимпиады:

---

*) См. «Квант», 1971, № 8, статья А. П. Савина «Инверсия и задача Аполлония».

> *«Мы можем держать постоянную связь с нашей выбранной прямой, возвращаясь к ней окружными путями, попадая затем на другие, но это крайний случай».*
>
> *«... можно пройти по всем прямым, даже если нет прямого хода; например...».*
>
> *«Пути содержат столько общих точек, сколько горбов они направляют друг к другу».*
>
> *«Если путь невыпуклый, то, продолжив его невыпуклую сторону...».*
>
> *«Замкнутой плоскостью назовем такую плоскость, в которой требование задачи выполняется, не выходя во вторую плоскость».*

В дни, свободные от соревнований, программой олимпиады были предусмотрены интересные экскурсии, встречи, беседы. Члены жюри прочли для школьников несколько лекций по математике. Одна из них — «Ряды Фарея» — уже опубликована в «Кванте» № 8 за 1975 год.

На закрытии олимпиады победителям были вручены дипломы и специальные призы. Больше половины школьников оказались в числе награжденных различными премиями.

Премии «Кванта» были вручены восьмиклассникам. Комплектом журнала за 1974 год с автографами авторов статей награжден *Г. Рыбников* (Москва). Годовой подпиской на «Квант» на 1976 год награждены ученики 8-х классов *Ю. Гиматов* (Москва), *А. Кодряну* (Рыбница), *Д. Самедов* (Красноводск), *С. Хашин* (Иваново), *Л. Арбузов* (Норильск), *А. Аузинь* (Рига), *В. Бальчитис* (Шауляй), *Е. Глезин* (Ленинград), *В. Ослон* (Киев), *П. Хобзей* (Киев). В заключение нужно отметить огромную помощь всех саратовцев, принявших участие в организации и проведении олимпиады.

Олимпиада по физике

Т. С. Петрова, Л. В. Чернова

Заключительный тур IX Всесоюзной олимпиады школьников по физике проходил с 17 по 23 апреля в городе Калуге, где жил и работал К. Э. Циолковский.

Калуга — старинный русский город. Более 600 лет назад появилось первое упоминание об этом городе, тогда небольшой крепости. Сегодняшняя Калуга — большой современный город с огромными жилыми массивами-новостройками, школами, кинотеатрами, вузами.

В этом году в заключительном туре приняли участие 43 ученика 8-го класса *), 47 учеников 9-го и 51 — 10-го классов.

17 апреля в новом здании Калужского государственного педагогического института (КГПИ) им. К. Э. Циолковского состоялось торжественное открытие заключительного тура IX Всесоюзной олимпиады школьников по физике. В этот день в городской газете «Молодой ленинец» были опубликованы приветствия летчика-космонавта Г. В. Сарафанова и председателя Оргкомитета Всесоюзной олимпиады школьников академика И. К. Кикоина. Обращаясь на страницах газеты к «олимпийцам», И. К. Кикоин сказал: «Весьма подозреваю, что вы сами не сознаете, как счастлива ваша жизнь. Если бы это не было фантазией, я так же, как и мои ровесники, был бы счастлив оказаться в вашем положении, занять

---

*) Нумерация классов соответствует прошлому учебному году.

место за партой и участвовать в этой олимпиаде».

На торжественном открытии к участникам со словами самых добрых пожеланий обратились первый секретарь Калужского обкома комсомола, доцент кафедры общей физики КГПИ М. И. Тульчинский, академик И. К. Кикоин, председатель жюри IX Всесоюзной олимпиады по физике Л. Н. Усачев и др.

После торжественного открытия состоялся концерт художественной самодеятельности студентов Педагогического института.

18 апреля в просторных аудиториях КГПИ проводился теоретический тур олимпиады. Каждому участнику олимпиады было предложено 5 задач, на решение которых отводилось 4 часа.

Большая часть задач, предлагавшихся на олимпиаде, была опубликована в «Задачнике «Кванта» (см. «Квант» № 7, 8 за этот год). Мы приводим тексты задач, не вошедших в «Задачник «Кванта».

1. Ракета имеет два двигателя, которые могут сообщать ей постоянные ускорения a_1 и a_2, направленные вертикально вверх. Первый двигатель рассчитан на работу в течение времени t_1, второй — времени t_2, причем $a_1>a_2$ и $t_1<t_2$. Двигатели могут включаться как одновременно, так и последовательно. Какой порядок включения двигателей следует выбрать для того, чтобы к моменту окончания работы двигателей ракета поднялась на максимальную высоту? (8 кл.)

2. Космический корабль движется по круговой орбите вокруг Земли в плоскости орбиты Луны с угловой скоростью, равной угловой скорости вращения Луны вокруг Земли. Во время движения корабль находится на прямой, соединяющей центры Луны и Земли. Расстояние от корабля до Земли таково, что силы притяжения, действующие на корабль со стороны Земли и Луны, равны друг другу. Работают ли двигатели корабля? Каков вес космонавта, находящегося на корабле? Масса космонавта 70 *кг*, период обращения Луны вокруг Земли 27,3 *суток*. Масса Земли в 81 раз больше массы Луны, а расстояние от Земли до Луны примерно равно 60 земным радиусам. Радиус Земли принять равным 6400 *км*. (8 кл.)

3. Две правильные шестигранные призмы из прозрачного материала $ABCDEF$ и $A'B'C'D'E'F'$ (рис. 1) сложены вплотную зачерненными гранями ED и $E'D'$. Остальные грани имеют просветляющее покрытие, то есть на них не происходит отражения света. Грань AB освещается широким параллельным пучком света, причем плоскость падения совпадает с плоскостью основания призмы. При некотором значении угла падения весь световой поток, попадающий на грань AB, выходит через грань $A'B'$ второй призмы. Определить показатель преломления материала призм (10 кл.).

При решении задачи 1 нужно было аккуратно разобраться со значениями начальных скоростей на втором этапе движения ракеты при разных режимах работы двигателей, записать выражения для высоты подъема ракеты за время t_1+t_2 при разных режимах и показать, что оптимальным является режим, при котором сначала включается первый двигатель, а затем второй.

В задаче 2 основной трудностью для тех, кто не справился с этой задачей, было определить направление действия силы тяги двигателей. Силы притяжения, действующие на корабль со стороны Луны и Земли, компенсируют друг друга. Следовательно, только сила тяги двигателей может сообщить кораблю необходимое ускорение. Для этого

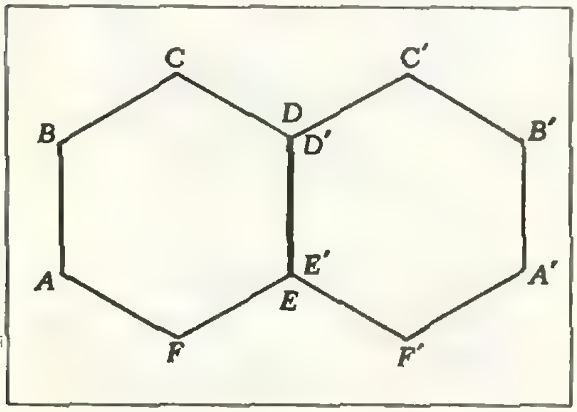


Рис. 1.

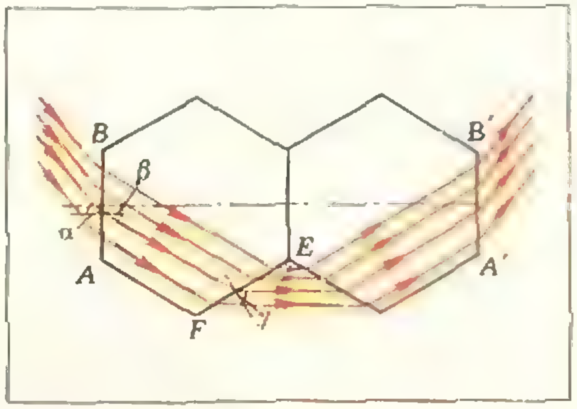


Рис. 2.

Победители IX Всесоюзной олимпиады школьников по физике, получившие Дипломы I степени. Слева направо: А. Моржаков, В. Щукин, В. Булатов, В. Борю, О. Щербаков, К. Третьяченко, Л. Черных, Ю. Македонов, В. Кривцун, Л. Авдеев, Е. Шахнович, С. Демокритов.

сила тяги должна быть направлена по радиусу к центру Земли. Тогда вес космонавта численно равен силе тяги двигателей и направлен по радиусу от центра Земли.

Главным при решении задачи 3 было правильно построить ход лучей через призмы. Непосредственно из условия задачи следует, что ход лучей, при котором весь световой поток, падающий на грань AB, выходит через грань $A'B'$, должен быть таким, как показано на рисунке 2. Тогда угол падения α на грань AB (равный углу преломления γ на грани FE) равен 60°, а угол преломления β равен 30°. Отсюда $n = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \sqrt{3}$.

После того как все работы теоретического тура были сданы, для участников олимпиады была проведена экскурсия по городу, состоялся просмотр показательных выступлений спортсменов областной детской спортивной школы «Юность».

19 апреля днем «олимпийцы» трудились на Коммунистическом субботнике, а вечером в областном Дворце пионеров состоялся вечер отдыха.

Для жюри эти дни были очень напряженными — нужно было проверить все работы теоретического тура.

20 апреля проводился экспериментальный тур, в котором принимали участие все участники олимпиады (в отличие от прошлых лет, когда к эксперименту допускались лишь те, кто наиболее успешно справился с задачами теоретического тура). Основная цель эксперимента — с помощью несложного оборудования провести серию опытов, оценить полученный результат, его достоверность и погрешность измерений. Немалое значение придавалось и оформлению работы. Вот тексты экспериментальных задач.

8 класс

Восьмиклассникам были предложены две задачи.

1. *Определить плотность неизвестной жидкости.*

В распоряжении экспериментатора имеются мензурки, жидкости с известными плотностями (вода, медный купорос), пробирки.

При оценке этой работы учитывалось, сколькими способами проводились измерения, как оценивалась точность измерений различными способами, аккуратность выполнения работы и, конечно, полученный результат.

2. *Определить максимальное ускорение, сообщаемое шайбе катапультой.*

Экспериментатору даются шайба, катапульта, линейка.

При выполнении этой работы надо было определить коэффициент трения между шайбой и поверхностью стола, учесть зависимость силы трения от скорости. Важно было провести достаточное количество измерений, правильно оценить точность полученных результатов.

9 класс

Определить, какие элементы могут находиться в «черном ящике», как они соединены.

В распоряжении экспериментатора имеются реостат, вольтметр, батарейка, соединительные провода. Необходимо точно определить электрическую схему, снять вольтамперную характеристику, обнаружить и объяснить ее нелинейность.

При подведении итогов оценивалось умение обращаться с приборами, выбор метода измерений. Для получения правильного результата необходимо было учесть внутреннее сопротивление вольтметра и, конечно, оценить точность эксперимента.

10 класс

1. *Определить фокусное расстояние рассеивающей линзы всеми возможными способами.*

2. *Определить разрешающую способность вашего глаза (разрешающая способность характеризуется минимальным расстоянием между двумя точками, при котором эти точки воспринимаются глазом каждая отдельно).*

Для эксперимента даются источник света, собирающая и рассеивающая линзы, экран, фольга, линейка, измерительная шкала.

При оценке работы учитывался выбор способа и точность измерений фокусного расстояния собирающей линзы, точность определения фокусного расстояния рассеивающей линзы, правильное построение хода лучей в системе из двух линз.

Призер олимпиады Н. Васильев

Вечером после эксперимента «олимпийцы» посетили мемориальный Дом-музей К. Э. Циолковского и Государственный музей истории космонавтики. Сюда по традиции приезжают советские космонавты после очередного полета в космос.

21 апреля состоялась экскурсия на первую в мире атомную электростанцию, построенную в городе Обнинске в 1954 году.

И вот наступил день, которого с таким нетерпением ждали все: и члены жюри, и конечно, сами «олимпийцы». 22 апреля состоялось закрытие IX Всесоюзной олимпиады школьников по физике, на котором были подведены окончательные итоги.

Победители олимпиады были награждены дипломами и призами. Специальным призом «Кванта» — подшивкой журнала за 1974 год с автографами членов редколлегии — за успешное участие в олимпиаде награжден *Н. Васильев* (Калуга). Подпиской на журнал «Квант» на 1976 год награждены *Г. Абдулаев* (Кировабад), *Е. Пономарев* (п/о Черноголовка Московской обл.), *А. Смирнов* (п. Семибратово Ярославской обл.) и *Р. Шарипов* (Каракуль).

Победители IX Всесоюзной олимпиады школьников

Математика

Дипломы I степени

по 8 классам:
Гиматов Ю. (Москва, ФМШ № 18),
Кодряну А. (Рыбница, с. ш. № 6),
Рыбников Г. (Москва, с. ш. № 42),
Самедов Д. (Красноводск, с. ш. № 6),
Хашин С. (Иваново, с. ш. № 55);

по 9 классам
Гончаров А. (Москва, ФМШ № 18),
Гриневич П. (Москва, с. ш. № 204),
Пасс Ю. (Ленинград, с. ш. № 121),
Финашин С. (Ленинград, ФМШ № 45),
Хованова Т. (Москва, с. ш. № 444);

по 10 классам:
Резников А. (Киев, с. ш. № 145),
Рыбасов К. (Киев, ФМШ),
Шмелев Г. (Ярославль, с. ш. № 20),
Юнус И. (Харьков, с. ш. № 27).

Дипломы II степени

по 8 классам:
Арбузов Я. (Норильск, с. ш. № 25),
Аузиньш А. (Рига, с. ш. № 1),
Бальчикис В. (Шауляй, с. ш. № 5),
Глезин Е. (Ленинград, с. ш. № 533),
Ослон В. (Киев, с. ш. № 173),
Хобзей П. (Киев, ФМШ);

по 9 классам:
Гусейнов В. (Нахичевань, с. ш. № 3),
Ландман Е. (Ленинград, с. ш. № 30),
Литвиненко Д. (Севастополь, с. ш. № 1),
Лукьяненко С. (Москва, ФМШ № 18),
Любашенко В. (Киев, ФМШ),
Мельник А. (Новосибирск, ФМШ № 165),
Миронов С. (Сафонов с. ш. № 6),
Мухамеджанов М. (Ташкент, с. ш. № 110),
Панин И. (Ленинград, ФМШ № 45),
Соломяк Б. (Ленинград, ФМШ № 45),
Федоров В. (Москва, ФМШ № 18),
Хазанов С. (Куйбышев, с. ш. № 41);

по 10 классам:
Карабегов А. (Ереван, с. ш. № 55),
Корнюшкин А. (Москва, ФМШ № 18),
Кулиев Т. (Баку, с. ш. № 27),
Любич М. (Харьков, с. ш. № 27),
Музыкантов А. (Новосибирск, с. ш. № 130),
Неретин Ю. (Москва, с. ш. № 91),
Рабинович Л. (Тула, с. ш. № 36),
Романов В. (Димитровград, с. ш. № 25),
Рыбакина Е. (Ленинград, с. ш. № 30),
Четвериков В. (Москва, ФМШ № 18).

Дипломы III степени

по 8 классам:
Балк А. (Смоленск, с. ш. № 7),
Боровиков П. (Ангарск, с. ш. № 10),
Воронович И. (п. Сопоцкин Гродненской обл., с. ш. № 1),
Гольдвирт К. (Сланцы, с. ш. № 9),
Горбунов М. (Павловск Воронежской обл., с. ш. № 1),
Дымов А. (Томск, с. ш. № 6),
Калика И. (Киев, с. ш. № 145),
Кальян С. (Симферополь, с. ш. № 40),
Кутернин М. (Алма-Ата, РФМШ),
Мациевский С. (Калининград Московской обл., с. ш. № 32),
Машковский В. (Могилев, с. ш № 41);

по 9 классам:
Буров Ю. (Москва, с. ш. № 2),
Варин. В. (Воронеж, с. ш. № 58),
Даян Р. (Ереван, с. ш. № 1),
Заигралин Г. (Москва, ФМШ № 18),
Козадой В. (Новосибирск, с. ш. № 165),
Корнильченко И. (Москва, ФМШ № 18),
Лейдерман А. (Могилев-Подольский, с. ш. № 5),
Лоханов М. (Нурлат, с. ш. № 2),
Философов Ю. (Саратов, с. ш. № 13),
Шергин А. (Ленинград, ФМШ № 45),
Шульман А. (Киев, с. ш. № 171),
Шутенко В. (Саратов, с. ш. № 13);

по 10 классам:
Байсалов Е. (Алма-Ата, РФМШ),
Басманов В. (Воронеж, с. ш. № 58),
Бураков С. (Донецк, школа-интернат № 10),
Гейзель В. (Москва, ФМШ № 18),
Грамацкий В. (Кишинев, с. ш. № 34),
Домбровский А. (Москва, ФМШ № 18),
Ободовский Л. (Ждановск, с. ш. № 1),
Пиккат Т. (Таллин, с. ш. № 7),
Сафуанов Ф. (Уфа, с. ш. № 114),
Ти В. (Кировабад, с. ш. № 39),
Ткачук В. (Москва, ФМШ № 18),
Цалиев В. (Саратов, с. ш. № 13).

Физика

Дипломы I степени

по 8 классам:
А. Моржаков (Новокузнецк, с. ш. № 1),
К. Третьяченко (Киев, ФМШ),
Л. Черных (Лида, с. ш. № 1),
В. Щукин (Ленинград, ФМШ № 105);

по 9 классам:
В. Булатов (Ленинград, ФМШ № 45),
С. Демокритов (Москва, ФМШ № 18),
В. Кривцун (Харьков, с. ш. № 37);

по 10 классам:
Л. Авдеев (Новосибирск, ФМШ № 165),
В. Борю (Запорожье, с. ш. № 28),
Ю. Македонов (Калинин, с. ш. № 27),
Е. Шахнович (Калинин, с. ш. № 6),
О. Щербаков (Лида, с. ш. № 1).

Дипломы II степени

по 8 классам:
В. Борун (Саратов, с. ш. № 13),
В. Брызгалов (Москва, ФМШ № 18),
П. Мидодашвили (Тбилиси, ФМШ им. Комарова),
Ю. Мухарский (Киев, ФМШ № 145),
С. Секацкий (Токмак, с. ш. № 3),
Р. Шарипов (Каракуль, с. ш. № 18);

по 9 классам:
С. Бутько (Витебск, с. ш. № 9),
А. Голубенцев (Саратов, с. ш. № 13),
В. Тарасов (Ленинград, ФМШ № 45),
Ю. Тетерин (Ленинград, с. ш. № 239),
И. Хамитов (Ленинград, ФМШ № 45),
М. Цыбулевский (Винница, с. ш. № 17);

по 10 классам:
А. Авдеев (Москва, ФМШ № 18),
А. Говяда (Киев, с. ш. № 38),
В. Каплуновский (Ленинград, ФМШ № 45),
О. Каткявичус '(Клайпеда, с. ш. № 14),
И. Коновалова (Смоленск, с. ш. № 25),
С. Корщунов (п. Монино Московской обл., с. ш. № 1),
А. Поблагуев (Винница, с. ш. № 17),
В. Тимофеев (Москва, с. ш. № 444),
А. Туровский (Ленинград, ФМШ № 45),
С. Шумский (Челябинск, с. ш. № 127)

Дипломы III степени

по 8 классам:
В. Бородин (Чебоксары, ФМШ № 2),
Н. Васильев (Калуга, с. ш. № 2),
С. Дворенос (Клайпеда, с. ш. № 14),
В. Костин (Алма-Ата, РФМШ),
А. Коф (Житомир, с. ш. № 27),
В. Подколзин (Новосибирск, ФМШ № 165),
Е. Пономарев (п. Черноголовка Московской обл., с. ш. № 82),
О. Самвелян (Ереван, с. ш. № 1),
А. Смирнов (с. Семибратово Ярославской обл., с. ш.),
И. Толох (Жидачев, с. ш. № 1);

по 9 классам:
Х. Абдуллин (Алма-Ата, РФМШ),
Г. Айзин (Брест, с. ш. № 1),
С. Виноградов (Москва, с. ш. № 179),
В. Кажукаускас (Вильнюс, с. ш. № 31),
Ю. Нечипуренко (Новосибирск, с. ш. № 130),
М. Серебряков (Тбилиси, с. ш. № 23),
С. Старченко (Караганда, с. ш. № 41),
Ю. Хабаров (Павловский Посад, с. ш. № 1),
Ю. Холоденко (Киев, ФМШ № 145),
А. Шведов (Запорожье, с. ш. № 28);

по 10 классам:
Н. Агладзе (Тбилиси, ФМШ им. Комарова),
Г. Беспалова (Горький, с. ш. № 40),
А. Железняк (Житомир, с. ш. № 24),
М. Захаренко, (Ленинград, ФМШ № 45),
С. Ляпин (Петриков, с. ш. № 1),
С. Мельник (Харьков, с. ш. № 27),
Ю. Панферов (Москва, с. ш. № 21),
Е. Прохоренко (Ереван, с. ш. № 55),
Б. Рева (Таллин, с. ш. № 15),
М. Розман (Псков, с. ш. № 8),
Я. Сеглиньш (Рига, с. ш. № 1),
М. Тимохин (Калуга, с. ш. № 9),
Б. Элькин (Ленинград, с. ш. № 38).

**РЕЦЕНЗИИ,
БИБЛИОГРАФИЯ**

Жизнь науки

Так называется необычная во многих отношениях книга, выпущенная в свет издательством «Наука» в конце 1973 года *). В ней собраны вступительные статьи и предисловия к наиболее известным в истории науки трудам крупнейших ученых, изданным за последние пятьсот лет. Книга открывается предисловием Николая Коперника к его знаменитому труду «О вращении небесных сфер» и заканчивается предисловием Вольфганга Паули к его книге о теории относительности.

Галилей, Кеплер, Гук, Ньютон, Ломоносов, Френель, Ампер, Фарадей, Максвелл, Больцман, Герц, Лоренц, Склодовская-Кюри, Резерфорд, Планк, Бор, Эйнштейн, Мандельштам, Ландау, Ферми — вот имена некоторых авторов этой книги в той ее части, где речь идет о проблемах физики. Математика представлена статьями Эйлера, Д'Аламбера, Лагранжа, Лапласа, Гаусса, Лобачевского, Коши, Пуанкаре, Гильберта, Неймана и других выдающихся ученых. А в разделе наук о Земле и Вселенной встречаются имена Канта и Циолковского, Вернадского и Хаббла. В книгу включены также предисловия к классическим трудам по химии (Лавуазье, Дальтон, Менделеев, Либих, Вант-Гофф и др.) и по биологии и физиологии (Линней, Ламарк, Кювье, Дарвин, Мендель, Кольцов, Вирхов, Сеченов, Пастер, Мечников, Павлов и др.).

Казалось бы, что интересного и поучительного можно извлечь из предисловий? Ведь в наши дни многие читатели в них даже не заглядывают. Но оказалось, что это была удивительно удачная мысль — объединить в одной книге предисловия классиков естествознания к наиболее важным трудам. Ведь в предисловии, обращаясь к своим читателям, автор обычно рассказывает о причинах, побудивших его написать данную книгу, об особенностях своего подхода к изучаемым явлениям, о том, что принципиально нового внесли его труды. Предисловия отражают личность автора и характер эпохи. Поэтому, объединенные друг с другом, они действительно характеризуют жизнь науки, рассказывают с необычайной искренностью о трудностях преодоления прежних ошибок и заблуждений, о мужестве тех, кто осмеливается посягнуть на авторитеты прошлого. Ведь не каждому великому ученому приходилось создавать новую область науки, так сказать, на пустом месте. Чаще новый крупный шаг в науке был связан с мучительной переоценкой старых взглядов, борьбой с вековыми авторитетами. Коперник — против Птолемея и церковных догм, утверждавших, что Земля неподвижна; Галилей и Ньютон против тысячелетнего авторитета Аристотеля, считавшего, что движение по инерции невозможно; Планк против всего прежнего опыта физики, не допускавшего наличия взаимоисключающих свойств у одного и того же физического объекта (свет — волна и свет — поток квантов!); Эйнштейн, вступивший в глубокий конфликт с механикой Ньютона и электродинамикой Максвелла. Нелегко быть гением в науке!

История науки — это драматическая картина борьбы старого и нового, отмирающего и нарождающегося, картина борьбы научных идей великолепно демонстрирующая диалектический характер развития науки. И эта диалектика отчетливо видна со страниц рецензируемой книги.

В предисловии к своему знаменитому труду «Трактат об электричестве и магнетизме» Джемс Клерк Максвелл писал: «Для изучающего любой предмет чтение оригинальных трудов представляет собой большое преимущество, так как наука всегда наиболее полно усваивается в состоянии рождения...» Именно эту возможность и открывает перед читателем рецензируемая книга.

Каждому предисловию предпослана краткая биографическая справка об авторе. Непростое это дело — на одной страничке рассказать о выдающемся ученом и его научных заслугах. Но биографии ученых, приведенные в этой книге, на редкость свежи и оригинальны.

В книге помещены также портреты всех ученых, чьи предисловия составляют ее содержание. Там, где это было возможно, отобраны портреты, которые по времени ближе всего к моменту написания использованных в этой книге сочинений.

Составитель книги и автор биографических очерков профессор Московского физико-технического института С. П. Капица проделал огромную работу по отбору и обработке обширного литературного наследства. В подготовке этой книги участвовали академики П. Л. Капица, В. А. Энгельгардт, П. К. Анохин и Б. М. Кедров, член-корреспондент АН СССР Л. А. Вайнштейн и ряд других ученых. Некоторые из опубликованных в ней предисловий впервые вышли в свет на русском языке.

---

*) Жизнь науки (антология вступлений к классике естествознания), М., «Наука», 1973.

Как и большинство толстых книг, «Жизнь науки» не избавлена от мелких ошибок и неточностей. В частности, в ней встречаются отдельные ошибки в датах. Например, в краткой биографии Ампера неверно указан год опубликования его основного труда «Теория электродинамических явлений, выведенная исключительно из опыта» (1823 год вместо 1826). Однако эти мелочи не сказываются на характере книги — безусловно оригинальной и необычайно интересной.

Конечно, школьнику даже в десятом классе не удается овладеть всем, что написано в этой книге. Но многое из представленного в ней доступно школьникам; они найдут там богатую пищу для размышлений. Что же касается студентов педагогических институтов и университетов, а также и учителей, то для них знакомство с этой книгой, безусловно, будет весьма плодотворным.

В заключение приведем в качестве примера краткую биографию Исаака Ньютона, которая предваряет предисловия к его основным работам «Математические начала натуральной философии» и «Оптика».

Нам хотелось бы, чтобы будущие читатели этой книги сами убедились в несомненных достоинствах представленного в ней биографического материала.

«Исаак Ньютон родился в деревне Вулстроп, в Линкольншире, в 200 км к северу от Лондона. Мать Ньютона происходила из простой фермерской семьи; знавшие характеризовали ее как женщину «исключительных достоинств и доброты». Отец Ньютона был «диким, чудным и слабым человеком»; он умер до появления на свет сына, который родился преждевременно и слабым. Тем не менее Ньютон отличался хорошим здоровьем: он прожил до 84 лет.

Воспитывался Ньютон в доме своей прабабки Эйскоу. В школе он учился в Гретхеме, недалеко от Вулстропа. Когда ему исполнилось 18 лет, по совету своего дяди, священника Эйскоу, он поступил в Тринити-колледж Кембриджского университета. В 1665 году он стал бакалавром; годом раньше попытка получить эту первую ученую степень была неудачной из-за неудовлетворительного экзамена по геометрии!

Исключительными для Ньютона, а по существу и для науки, оказались 1665—1667 годы, проведенные Ньютоном в тиши родной деревни, куда он уехал, спасаясь от свирепствовавшей тогда чумы. Именно за эти два года уединения и сосредоточения были совершены его исследования по оптике: он разложил белый свет в спектр, нашел кольца, названные кольцами Ньютона, предложил отражательный телескоп. Тогда же им были получены важнейшие результаты в области механики, открыто разложение бинома и изобретен математический анализ. В эти же годы он наметил программу исследований по физике, осуществлению которой посвятил свою жизнь

Возвратившись в Кембридж, Ньютон в 1668 году стал магистром и членом Тринити-колледж. В следующем году он занял Люкасовскую кафедру, оставленную его учителем и другом Барроу. Свою первую работу по оптике Ньютон представил в Королевское общество в 1672 году и вскоре стал членом этого общества. Ньютон занимался также химией, изобретая сплавы для зеркального телескопа, и алхимией, пытаясь получить золото. Правда, в этой области он не опубликовал ни строчки.

Привлеченный письмами Гука к проблеме объяснения движения Луны и планет с помощью силы тяготения, меняющейся обратно пропорционально квадрату расстояния, Ньютон обратился к небесной механике, и в 1679 году дал вывод законов Кеплера. Результаты его исследований, приведших к созданию классической механики, были изложены в «Математических началах натуральной философии», опубликованных в 1686 году. По-видимому, усилия, связанные с созданием этой великой книги, написанной за полтора года, отразились на состоянии Ньютона, и некоторое время он страдал нервным расстройством. В последующие годы он все меньше занимался наукой, исследуя, главным образом, движение Луны с использованием очень точных наблюдений первого королевского астронома Флемстида.

В последние годы жизни Ньютон занялся богословием. Однако подход Ньютона к священному писанию привел его точный ум к противоречию с догматами церкви, что в то время было далеко небезопасно. По-видимому, только благодаря вмешательству влиятельных друзей его удалось отвлечь от этих занятий. В 1696 году Ньютон переехал в Лондон, где был назначен сначала хранителем, а потом директором Монетного двора.

В 1701 году Ньютон был выбран членом парламента от Кембриджского университета и, наконец, в 1703 году он стал президентом Королевского общества, которым оставался до своей смерти. Похоронен Ньютон в Вестминстерском аббатстве.

Ньютон не был женат, у него было мало друзей. Он никогда не покидал пределов Англии. Жизнь его прошла замкнуто и однообразно. К концу жизни он стал нетерпимым к критике, много сил и чувств потратил на споры о приоритете с Гуком, Флемстидом, Лейбницем; тем не менее он нехотя и медленно публиковал свои результаты. Так, его «Оптика» вышла только в 1704 году, после смерти Гука».

В. А. Рудов

Спрашивайте — отвечаем

В редакцию журнала пришло письмо от нашего читателя А. Венедиктова из г. Серпухова Московской области. Он спрашивает, как можно в домашних условиях вырастить кристаллы соли или сахара. Поскольку в редакцию приходит много писем с подобными вопросами, мы попросили ответить на этом письмо консультанта отдела физики журнала «Квант» А. Володина.

Ионные кристаллы (к их числу принадлежат кристаллы поваренной соли $NaCl$) обычно выращивают из соответствующих растворов, достигая их перенасыщения изменением температуры раствора или медленным испарением растворителя. Выращивание высококачественных кристаллов — задача, как правило, непростая. Требуется выполнение ряда условий, таких, как постоянство концентрации и температуры раствора, постоянство состава и давления газов над раствором, наличие высококачественных затравочных кристаллов. Исходные вещества должны быть достаточно чистыми. Поэтому естественно, что в домашних условиях не всегда удается вырастить хороший кристалл (качество кристалла, например, могут характеризовать его прозрачность, форма и размеры).

Для опытов по выращиванию кристаллов соли дома можно рекомендовать следующий упрощенный вариант известного метода упаривания раствора.

Для приготовления насыщенного раствора нужны:

а) чистая вода, желательно дистиллированная (можно использовать чистую дождевую, в крайнем случае, кипяченую воду);

б) поваренная соль, также по возможности чистая, например, сорта «Экстра».

Соль растворяют в подогретой воде до тех пор, пока процесс растворения не прекратится (на дне сосуда останется нерастворившаяся соль). Затем теплый раствор осторожно переливают в другой сосуд. (При этом необходимо следить, чтобы нерастворившаяся соль не попала во второй сосуд; раствор лучше переливать, фильтруя его.) При медленном остывании раствора на дно стакана выпадут правильные кристаллы соли. Они будут затравочными кристаллами, т. е. при испарении воды из раствора на них будет идти кристаллизация соли.

Стакан с раствором и затравочными кристаллами прикройте бумажным фильтром (промокательной бумагой) и поставьте в такое место, где температура более или менее постоянна. По мере испарения воды кристаллы будут увеличиваться в размерах. Осторожно перелив раствор, можно извлечь выращенные кристаллы. Чтобы вырастить кристалл большего размера, поместите в новый насыщенный раствор один из полученных кристаллов и продолжайте упаривание раствора.

Кристаллы сахара подобным образом в домашних условиях вырастить невозможно. Дело в том, что сахар — органическое вещество и при растворении в воде образует так называемые сольваты (соединения молекул сахара с молекулами воды). При упаривании раствора сахара образуется густая вязкая масса. Именно большая вязкость и препятствует росту кристаллов, поскольку для их выращивания из раствора необходима достаточная подвижность молекул или ионов растворенного вещества.

Более подробно о выращивании кристаллов можно прочитать в статье М. О. Клия «Как вырастить кристалл» («Квант», 1970, № 5).

ИНФОРМАЦИЯ

Олимпиада в МИИТе

6 апреля 1975 года в Московском институте инженеров железнодорожного транспорта состоялась традиционная математическая олимпиада.

Традиции олимпиады МИИТа близки к традициям городской математической олимпиады, в которой, кстати, МИИТ принимал в этом году непосредственное участие. Однако, одна - две задачи для каждого класса соответствуют уровню вступительных вузовских экзаменов.

Одна из задач, предложенных школьникам всех классов (№ 2 для 8 класса), имеющая простое, но весьма нетривиальное решение, так и не была решена школьниками.

В олимпиаде участвовали 370 учеников 8—10 классов школ Москвы и Московской области, а также городов Курска, Калуги, Саратова. Присуждено 4 первых, 4 вторых и 16 третьих премий, а также 22 похвальных отзыва. Особенно успешно выступили школьники московской школы № 7.

Приводим список задач:

8 класс

1. В окружность вписан треугольник ABC; центр лежит внутри треугольника. Существует ли треугольник, вписанный в ту же окружность, стороны которого больше соответственных сторон треугольника ABC? (Нам неизвестно элементарное решение аналогичной задачи для трехмерной пирамиды.)

2. Двое играют в «крестики-нолики» на бесконечном листе бумаги. Выигрывает тот, кто первым поставит 5 крестиков (ноликов) по горизонтали или по вертикали подряд. Доказать, что оба игрока при правильной игре не проигрывают.

3. На плоскости дан правильный треугольник и точка вне его. Всегда ли можно последовательностью зеркальных отражений относительно сторон треугольника или их продолжений перевести точку внутрь треугольника?

4. Из 1975^3 одинаковых полых кубиков со стороной 1 *мм* сложен куб со стороной 1975 *мм*. Зверь Сухофедка находится в угловом кубике. Он может прогрызть кубик в любой грани, но не в вершине и не в ребре, и пройти в соседний куб. Может ли Сухофедка обойти все кубики по одному разу и кончить свой путь в центральном кубике?

5. Каждая из сторон треугольника разбита на l равных частей. Через точки деления проведены прямые, параллельные двум другим сторонам треугольника. В каждом из образовавшихся треугольников, лежащих внутри данного, записаны числа 1 или —1 таким образом, что число, записанное в треугольнике, равно произведению чисел, находящихся в треугольниках, имеющих с данным общую сторону. Доказать, что в треугольниках, имеющих общую вершину с исходным треугольником, записаны равные числа.

9 класс

№№ 1, 2 и 3 — те же задачи, что и №№ 2, 4, 5 для 8 класса.

4. Дан алфавит из букв a, b, c, a^{-1}, b^{-1}, c^{-1}. В слове, составленном из букв этого алфавита, рядом стоящие буквы xx^{-1} или $x^{-1}x$ можно сократить (т. е. выкинуть). Можно ли написать слово из букв этого алфавита, в котором нельзя сократить ни одной пары букв, но, зачеркнув все вхождения любой буквы x и ее «обратной» x^{-1}, можно сократить все слово полностью?

5. Есть число, состоящее из нуля и 1975 десятичных знаков после запятой. Производится последовательное округление, начиная с младшего разряда (до ближайшего четного). В результате получилась единица. Какое самое маленькое число могло быть дано сначала?

10 класс

1. Дан квадратный трехчлен $(p-1)x^2-(pk-2)x-1$, $0<k<1$; $p>0$. Доказать, что существует единственный корень многочлена, лежащий между k и 1.

2. Дан параллелограмм $ABCD$. $\widehat{CAB}+\widehat{DBC}=90^\circ$. Доказать, что $ABCD$ — либо ромб, либо прямоугольник.

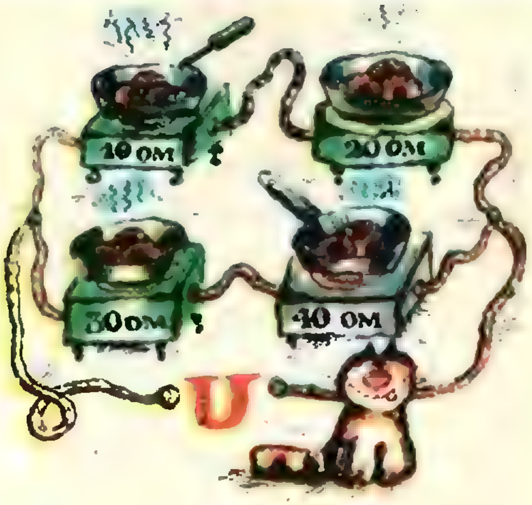
3. Такая же задача, как № 4 для 9 класса, но для произвольного числа букв.

4. Та же задача, что и № 2 для 8 класса.

5. Дана последовательность a_0, a_1, a_2, …, a_k, a_{k+1}, … Пусть $a_0=0$, $a_1=1$, $a_{k+1}=a_k a_{k-1}+1$. Существует ли положительный член последовательности, делящийся на: а) 4; б) 154?

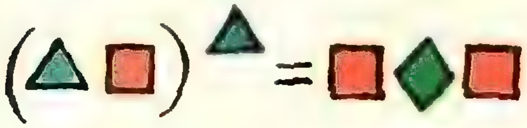
А. В. Чернавский

«Квант» для младших школьников



Задачи

1. В примере (см. рисунок) цифры зашифрованы геометрическими фигурами. Расшифруйте пример.

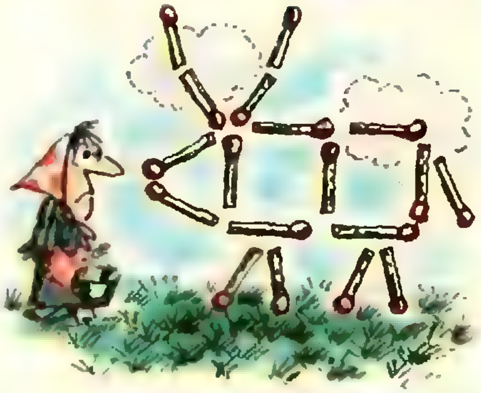


2. На четырех плитках, соединенных так, как показано на рисунке, начинают жарить котлеты. Сопротивления спиралей указаны на рисунке. На какой плитке котлеты поджарятся скорее?

3. В системе равенств

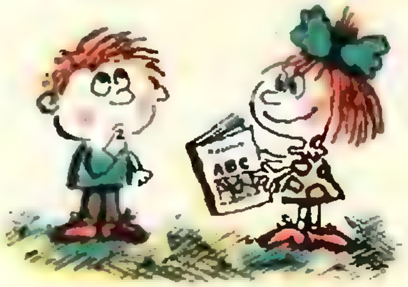
ПРУТ − КАМА = КУРА
ТУР − РАК = КОМ
ТИП − РОК = АУТ

цифры зашифрованы буквами. Попробуйте восстановить первоначальный вид системы.



4. Известно, что температура таяния льда 0°C. Однако зимой снег на улицах лежит и тогда, когда термометр показывает выше нуля. Как это объяснить?

5. На рисунке вы видите корову, у которой есть все, что полагается: голова, туловище, рога, ноги, хвост. Корова на рисунке смотрит влево. Переложите ровно две спички так, чтобы она смотрела вправо.



6. Для нумерации страниц книги потребовалось всего 1392 цифры. Сколько страниц в этой книге?

Рисунки Э. Назарова

Е. Е. СЕМЕНОВ
ТОЧКА, ПРЯМАЯ...
—ЧТО ЭТО ТАКОЕ
?

Задумывались ли вы когда-нибудь над тем, что такое точка и прямая? На первый взгляд все здесь ясно: точка — это точка, прямая — это прямая, что тут может быть непонятного? Ну, а все-таки, как это растолковать кому-нибудь, кто совсем этого не знает и, кроме того, понимает все очень буквально? Так ли уж это просто? Оказывается, вовсе нет! Вот какая фантастическая история произошла в одной школе.

1. Марсианин изучает «земную» геометрию

В одну из московских школ прилетел марсианин — мальчик Инко. Попав на урок геометрии, он ничего не понял. Ребята решили помочь ему, объяснить, что к чему. Взялся за это Вася. И начать ему пришлось... с точки. Слегка прикоснувшись к доске мелом, Вася произносит:

— Это точка. И это точка, и это тоже точка,— продолжает он, оставляя крошечные следы мела на доске.— Тебе понятно? Дальше...

— Погоди, погоди,— произносит марсианин.— Мне надо получше разглядеть эти точки.— И он достает микроскоп.— Значит, точка — это кучки белого вещества. Интересно! У нас это называется иначе... А если это вещество будет зеленым — будут это точки? И каких размеров могут быть эти кучки?

— У точки нет размеров,— говорит Вася.

— Как же нет? Ты же сам сказал, что кучки белого вещества — это точки! — отвечает Инко.

Другие ученики подают марсианину листы бумаги со следами прикосновения карандаша, с булавочными проколами.

— Это россыпи графита! Это рваное отверстие в бумаге! — отвечает Инко, глядя в микроскоп.

Вася в растерянности. Остальные тоже. «Ясное» и «понятное» стало неясным не только для пришельца с другой планеты.

Затем Вася берет линейку и изображает с ее помощью линию.

— Это прямая! — произносит он.— Она состоит из точек.

Внимательно рассмотрев «прямую», марсианин произносит:

— Прямая — это хребет из россыпей мела или графита.— Класс расстроен. Что делать?

— Может, этот Инко — двоечник? — думает кое-кто из вас. Не спешите с выводами! Положение спасает марсианин.— Когда у нас на Марсе хотят рассказать про что-то новое, *называют его свойства*. Какими свойствами обладают ваши прямые, точки?

— У нас в учебнике эти свойства указаны! — ответит на это шестиклассник.— И называют их аксиомами!

— В конце учебника 8-го класса все эти аксиомы перечислены! — дополнит восьмиклассник.— Давайте воспользуемся ими!

Что остается делать? Надо соглашаться. Начнем читать аксиомы.

2. Аксиомы принадлежности

Аксиома I_1. *Каждая прямая есть множество точек.*

Аксиома I_2. *Для любых двух отличных друг от друга точек существует одна и только одна содержащая их прямая.*

Аксиома I_3. *Существует хотя бы одна прямая, и каждой прямой принадлежит хотя бы одна точка.*

3. Точки и прямые, о которых рассказывают аксиомы принадлежности

Прочитав аксиому I_1, Инко оживился.

— Стойте,— сказал он.— Что мы могли бы подразумевать под точкой и прямой, если бы других свойств не было? Что такое точка, в этой аксиоме не сказано. Значит, под точками можно подразумевать что угодно! Например, цифры 1, 2, 3. Какие же прямые мы будем тогда иметь? Давайте найдем их вместе.

Общими усилиями нашли прямые $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$, $\{1, 2, 3\}$.

— Тогда имеется еще одна прямая! — восклицает один из вас. Это пустое множество—$\varnothing$! Ведь в аксиоме I_1 не сказано, что множество точек, являющееся прямой, не может быть пустым.

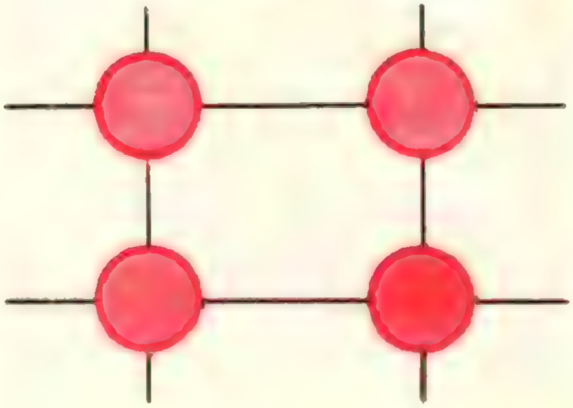
В классе шум. Что это за прямые? На прямой же точек бесконечно много, а тут — по одной, по две, *по три и даже ни одной!*

Невозмутимый марсианин прислушивается к спору. Потом говорит:

— Вас смущает, что я назвал цифры 1, 2, 3 точками, а перечисленные множества, в том числе пустое, прямыми? А меня это нисколько не удивляет. По-видимому, дело в том, что вы знаете еще и другие свойства точек и прямых, а я их не знаю. Поэтому те «точки» и «прямые», которые описываются одной-единственной аксиомой I_1, я буду именовать так: «точка один-один», «прямая один-один» и записывать: точка (I_1), прямая (I_1). Выполняются ли для точки (I_1), прямой (I_1) другие аксиомы, меня не интересует. Давайте придумаем еще примеры точек (I_1) и прямых (I_1),— предлагает Инко. Наступила тишина. Вот какие примеры придумали.

Миша. Точки (I_1): 1, ★, ●, ?. Прямые (I_1): {1}, {★}, {●}, {?}, {1, ★}, {1, ●}, {1,★, ●,?}.

Таня. Точки (I_1): Δ, ○.



Лена. Считает, что точек (I_1) вообще у нее нет.

Саша. Заявил, что прямыми (I_1) он считает слова предложения *«Вике очень понравился город Киев»* (множества букв, входящих в эти слова), а точками (I_1) — буквы, входящие в эти слова.

Коля. Точки (I_1): буквы *а*, *б*, *в*. Прямые (I_1): {*а*, *б*}, {*б*, *а*}, {*а*, *в*}, {*в*, *а*}, {*б*, *в*}, {*в*, *б*}, {*а*, *б*, *в*}, {*б*, *в*, *а*}, {*в*, *б*, *а*}, $\varnothing$.

Задача 1. а) Все ли прямые (I_1) указал Миша? Перечислите прямые, не указанные Мишей.

б) Какие прямые (I_1) может указать Таня? Лена?

в) Сколько различных прямых указал Саша? Какие Сашины прямые совпадают? Почему вы считаете одни Сашины прямые совпавшими, другие — различными? Имеются ли у Саши прямые, не имеющие общих точек? Укажите их. Сколько различных точек у Саши?

г) Сколько различных прямых указал Коля?

Точки (I_1) и прямые (I_1), для которых выполняются обе аксиомы I_1 и I_2, будем называть «точка один-один-два», «прямая один-один-два» и записывать: точка $(I_{1,2})$, прямая $(I_{1,2})$.

Задача 2. Все ли ранее приведенные прямые (I_1) есть прямые $(I_{1,2})$?

Задача 3. Даны множества $M_1 = \{1, 2, 3, 4\}$ и $M_2 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \varnothing, \{1, 2, 3\}\}$. Никаких элементов, кроме входящих в M_1 и M_2, нет. Можно ли все элементы из M_1 считать точками $(I_{1,2})$, а все элементы из множества M_2 — прямыми $(I_{1,2})$?

Найдите такие два подмножества M_1' и M_2' множеств M_1 и M_2, что все элементы из M_1' можно считать точками $(I_{1,2})$, а все элементы из M_2' считать прямыми $(I_{1,2})$.

Задача 4. На рисунке 1 изображены 4 шара, проткнутые четырьмя спицами. Каждый шар будем считать точкой, а пару шаров, проткнутых одной и той же спицей,— прямой. Выполняются ли при этом условии аксиомы I_1, I_2? Что нужно сделать, чтобы аксиома I_2 выполнялась?

Задача 5. Какие прямые $(I_{1,2})$, присутствовавшие в ранее рассмотренных задачах, будут исключены после введения аксиомы I_3? Годится ли теперь пример Лены?

Задача 6. Витя объявил точками буквы русского алфавита, а прямыми — слова предложения «Однажды на снежное поле явилась ватага мальцов». Выполняются ли здесь аксиомы I_{1-3}?

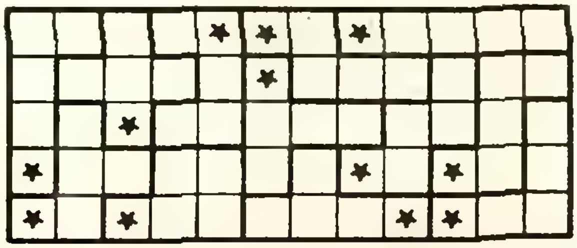
ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

К головоломкам

(*см. «Квант» № 10, 3-я с. обл.*)

«Пентамино-пасьянс». См. рис. 1.

«Разрежьте прямоугольник». См. рис. 2.



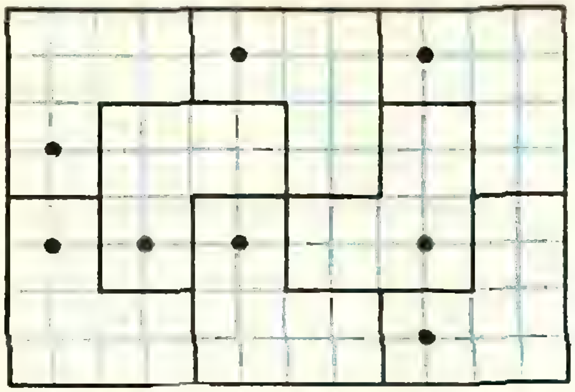


Рис. 2

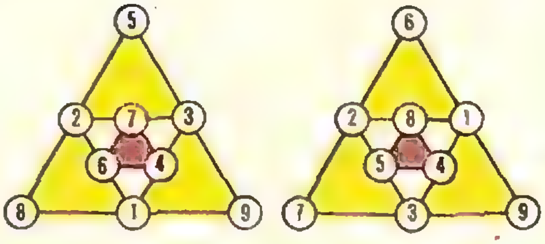


Рис. 3

«Сумма—17». См. рис. 3. Для решения заметьте, что в серединах сторон большого треугольника должны стоять цифры 1, 2, 3 (их сумма равна 6); легко также найти положение цифры 9.

«Ключ—11». См. рис. 4. Указание. Сразу определяется положение числа 7. Под ним стоят 10 и 8, легко проверить, что стоять в обратном порядке они не могут.

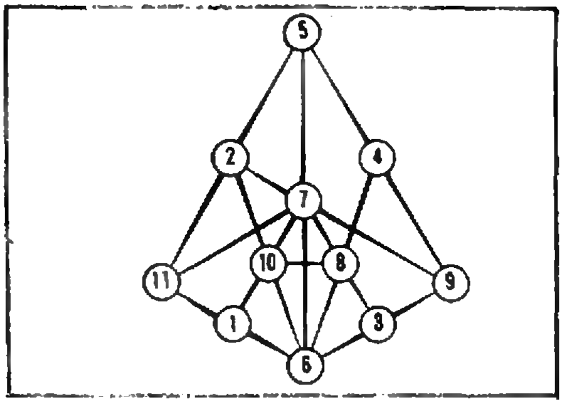


Рис. 4

К статье «Алгебраический метод решения геометрических задач»

1. $\frac{1}{4}\sqrt{(a-b)^2\cdot \mathrm{tg}^2\,\alpha+(a+b)^2}$.

2. $\frac{2p\,(p+q)\,R^2\sin 2\varphi\cdot\cos^2\varphi}{p^2+q^2+2pq\cos 2\varphi}$.

3. $\frac{1}{4}h\sin^2(\beta-\alpha)\,\mathrm{cosec}^2\,\alpha\,\mathrm{cosec}^2\,\beta\;\times$

$\times\left[a-\frac{1}{2}h\sin(\alpha+\beta)\,\mathrm{cosec}\,\alpha\cdot\mathrm{cosec}\,\beta\right]$.

4. $\sqrt{Rr}$.

5. $AB=BC=2,\ CD=1,\ AD=\sqrt{3}$,

$S_{ABCD}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

6. $\frac{Rr\sqrt{3}}{\sqrt{R^2-Rr+r^2}}$.

7. $\frac{1}{2}(m+n)$.

8. $a\cdot\sqrt{1+\sqrt{1-\frac{1}{4}\sec^2\alpha}}$,

$a\cdot\sqrt{1-\sqrt{1-\frac{1}{4}\sec^2\alpha}}$.

9. $\frac{8}{5}R^2$. 10. $\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$.

К статье «Физические аналогии»

1. Давление газа в положении равновесия есть $p_0=p_A+\frac{mg}{S}$.

Рассмотрим малое смещение поршня от положения равновесия. Пусть ΔV — изменение объема газа в этом процессе. Найдем новое давление p:

$$p=\frac{RT_0}{V}=\frac{RT_0}{V_0+\Delta V}=\frac{RT_0\,(V_0-\Delta V)}{V_0^2-(\Delta V)^2}=$$

$$=\frac{RT_0}{V_0}\,\frac{1-\frac{\Delta V}{V_0}}{1-\left(\frac{\Delta V}{V_0}\right)^2}.$$

Заметим, что в числитель отношение $\frac{\Delta V}{V_0}$ входит в первой степени, а в знаменатель — во второй. Если $\left(\frac{\Delta V}{V_0}\right)^2\ll 1$, то в знаменателе с хорошим приближением можно пренебречь величиной $\left(\frac{\Delta V}{V_0}\right)^2$ по сравнению с единицей. Тогда

$$p=\frac{RT_0}{V_0}\left(1-\frac{\Delta V}{V_0}\right)=p_0\left(1-\frac{\Delta V}{V_0}\right),$$

где $p_0=\frac{RT_0}{V_0}$.

Следовательно, изменение давления Δp равно

$$\Delta p=p-p_0=-\frac{RT_0}{V_0^2}\,\Delta V=-\frac{p_0^2}{RT_0}\,Sx.$$

Здесь через x обозначено малое смещение поршня от положения равновесия. Сила, действующая на поршень из-за разности давлений Δp, есть

$$F=\Delta pS=-\frac{p_0^2S^2}{RT_0}\,x.$$

Эта сила является квазиупругой силой. По аналогии с грузом на пружине теперь можем записать для периода колебаний T:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}=2\pi\sqrt{\frac{mRT_0}{p_0^2S^2}}=$$

$$=2\pi\,\frac{\sqrt{mRT_0}}{p_AS+mg}.$$

Как следует из решения, условие малости колебаний сводится к неравенству $\left(\frac{\Delta V}{V}\right)^2\ll 1$. Если это условие не выполнено, сила, действующая на поршень, уже не является квазиупругой, и аналогия с грузом на пружине теряется. Таким же свойством обладает, например, математический (и физический) маятник.

2. Электрическая цепь, состоящая из конденсатора и сопротивления, представляет собой предельный случай электрического ко-

лебательного контура, в котором индуктивность пренебрежимо мала. Аналогичная механическая система — тело пренебрежимо малой массы, прикрепленное к пружине с упругостью k и находящееся под действием сил вязкого трения с коэффициентом β.

Уравнения движения таких систем одинаковы.

Закон Ома для электрической цепи: $R\frac{\Delta q}{\Delta t}+\frac{q}{C}=0$, где $\frac{\Delta q}{\Delta t}=i$ — ток в цепи.

Второй закон Ньютона для механической системы:
$\beta\frac{\Delta x}{\Delta t}+kx=0$, где $\frac{\Delta x}{\Delta t}=v$ — скорость тела.

Системы являются динамически аналогичными: $q\leftrightarrow x$; $\frac{1}{RC}\leftrightarrow\frac{k}{\beta}$.

Интересно отметить, что можно придумать и другие аналогии. Рассмотрим, например, горизонтальное движение шарика массы m, обладающего некоторой начальной скоростью, в вязкой жидкости с коэффициентом вязкости β. Второй закон Ньютона для шарика запишется в виде:

$$ma=-\beta v,\ \text{или}\ m\frac{\Delta v}{\Delta t}+\beta v=0.$$

Мы пришли к уравнению того же вида, что и предыдущие. Эта система также динамически аналогична электрической цепи, состоящей из R и C, только теперь $q\leftrightarrow v$;

$$\frac{1}{RC}\leftrightarrow\frac{\beta}{m}.$$

К статье «Завод-втуз при Московском автомобильном заводе им. И. А. Лихачева»

Математика

Вариант 1

1. $S_{\text{бок}}=\frac{3a^2}{2}\sqrt{3\,\mathrm{ctg}^2\alpha-1}$. Указание. Опустить перпендикуляр из конца диагонали боковой грани призмы на другую боковую грань; образуется прямоугольный треугольник, в котором известен угол (α) и катет (высота правильного треугольника со стороной a). Отсюда находится длина диагонали и высота призмы.

2. Потенцируя, находим:

$$\frac{2^x-1}{2^x-\frac{1}{2^x}}=\frac{2^x}{9}.$$

Отсюда $9(2^x-1)=(2^x+1)(2^x-1)$, $(2^x-1)\times(2^x-8)=0$.
Случай $2^x=1$, $x=0$ не удовлетворяет ОДЗ, а $2^x=8$ дает ответ: $x=3$.

3. Уравнение приводится к виду

$$\cos^2 x\left(\frac{4}{\sin 4x}-2\right)=0.$$

Отсюда $\cos x=0$, $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ (k — целое), что удовлетворяет ОДЗ, или $\sin 4x=2$, что решений не имеет.

Вариант 2

1. $V=\frac{\pi a^3}{3}\,\mathrm{tg}\alpha\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\mathrm{ctg}\alpha\right)^3$. Указание. Рассмотреть осевое сечение конуса, проходящее через диагональ основания куба.

2. $x=4$. Указание. Обозначить 2^x через y и привести уравнение к виду $y^2-12y-64=0$.

3. $x_1=-\frac{\pi}{4}+k\pi$, $x_2=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$,

$x_3=2k\pi$ (k — целое).

Указание. Уравнение приводится к виду $(\sin x+\cos x)(\sin x-\cos x+1)=0$.

Вариант 3

1. $S=4\,\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}\sqrt[3]{9\pi V^2\,\mathrm{ctg}^2\alpha}$.

Указание. Обозначить радиус шара через r и рассмотреть осевое сечение конуса.

2. $x_1=0$, $x_2=3$. Указание. Обозначить 2^x через y и привести уравнение к виду $y^2-9y+8=0$.

3. $x_1=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3}$, $x_2=\frac{k\pi}{2}$ (k — целое). Указание. С помощью формулы $2\sin^2\alpha=1-\cos 2\alpha$ привести уравнение к виду $\cos 3x(\cos x-\cos 3x)=0$.

Физика

Вариант 1

3. $a=\frac{F}{M}-g=39{,}2$ м/с²;
$P=m(a+g)=3430$ н.

Вариант 2

3. Расстояние между линзами равно фокусному расстоянию рассеивающей линзы.

Вариант 3

3. $p=p_0\frac{T}{T_0}+p_{\text{н.п.}}\approx 1{,}4\cdot 10^5$ н/м².

К заметке «Кто победил?»

(см. «Квант» № 10, с. 16)

Ход игры по турам:

	A	B	C	D	E	F
1	1	2	5	4	3	0
2	0	1	2	5	4	3
3	5	4	3	0	1	2
4	5	4	3	0	1	2
5	4	3	0	1	2	5
Σ	15	14	13	10	11	12

К задачам

(см. «Квант» № 10, с. 8)

1. $a^2+1=p^2\left(\frac{a}{p}\right)^2+1\geqslant(p^2+1)\times$ $\times\sqrt[p^2+1]{\left(\frac{a}{p}\right)^{2p^2}}$ согласно неравенству между средним арифметическим и средним геометрическим p^2+1 чисел.

2. Порядковый номер первого числа серии одинаковых чисел, равных k, будет $n_k=(1+2+\ldots+(k-1))+1=$ $=\frac{(k-1)\,k}{2}+1=\frac{k^2-k+2}{2}$.

Порядковый номер первого числа следующей серии будет $n_{k+1}=\frac{k^2+k+2}{2}$

Отсюда следует, что для номера n_k любого члена последовательности, равного k, справедливо соотношение: $\frac{k^2-k+2}{2}\leqslant n_k<$ $<\frac{k^2+k+2}{2}$, откуда $\frac{-1+\sqrt{8n_k-7}}{2}<$ $<k\leqslant\frac{1+\sqrt{8n_k-7}}{2}$. Формула общего члена данной последовательности выглядит так:

$$a_n=\left[\frac{1+\sqrt{8n-7}}{2}\right].$$

3. Из формулы $\sqrt{10a+b}=a\pm\sqrt{b}$ следует, что $b=\left(\frac{10-a}{2}\right)^2$.

(см. «Квант» № 10, с. 23)

1. Автор приводит один ответ: $469+$ $+964=1433$.

3. $m=6$.

4. Воспользовавшись неравенством $\frac{1}{2}(a^2+b^2)\geqslant ab$, получим:

$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)>\frac{2}{2\cdot3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$, а также

$$\frac{1}{2^2}<\frac{1}{1,5}-\frac{1}{2,5}\text{ и т. п.}$$

К «Головоломкам Дьюдени»

(см. «Квант» № 10, с. 57)

1. Наименьшее общее кратное чисел 2, 3, 4, 5, 6 и 7 равно 420. Вычитая из него 1, получаем 419 — возможное число ступенек. Кроме того, условиям задачи будут удовлетворять числа, полученные последовательным прибавлением чисел, кратных 420, к 419. Следовательно, число ступенек в эскалаторе может быть равно 419, 839, 1259, 1679 и т. д. Поскольку интересующий нас эскалатор содержит меньше 1000 ступенек и на линии есть еще один эскалатор с меньшим числом ступенек, обладающий теми же свойствами, что и первый, то эскалатор на «Керли-стрит» содержит 839 ступенек.

2. Важно отметить, что отец, ребенок и собака вместе весили 180 фунтов, как это показано в статье на рисунке 2. Далее, разность между 180 и 162 равна 18, что совпадает с удвоенным весом собаки. Значит, собака весит 9, а ребенок 30 фунтов, так как, если из 30 фунтов вычесть 70% этого веса, получится ровно 9.

3. Всего голосовавших было 207. Сперва 115 избирателей проголосовало «за» и 92 «против», причем большинство составило 23 голоса, что как раз и равно одной четверти от 92. Но когда 12 человек, для которых не нашлось стульев, присоединились к оппозиции, оказалось, что «за» подано 103, а «против» — 104 голоса. Так что победили противники забастовки большинством в один голос.

4. Пэт сказал: «Какое число ни назови, все едино, а раз тут десять человек да еще я сам, то назову-ка я одиннадцать и начну счет с себя». Разумеется, первым отправился на порку он сам. Следовательно, если начинать с номера 1, то наименьшим числом, роковым для англичан, будет 11. На самом деле Пэту следовало назвать 29 и начинать с номера 9. Тогда экзекуции подверглись бы все носильщики. Эти два числа минимальны.

5. Ясно, что 999 919 не может быть простым числом и что, поскольку нужно найти

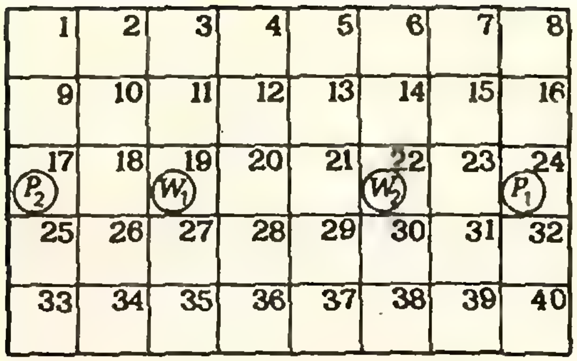


Рис. 5.

единственное решение, оно должно разлагаться в произведение двух простых сомножителей. Этими сомножителями будут 991 и 1009. Нам известно, что каждая кошка поймала больше мышек, чем было кошек. Значит, всего было 991 кошка, и каждая из них поймала по 1009 мышек.

6. Охранник W_1 не может схватить узника P_2, а охранник W_2 — узника P_1 (см. рис. 5). В примере, который мы привели, погоня действительно может продолжаться бесконечно долго, поскольку на самом деле каждый охранник должен охотиться не за «своим», а за «чужим» узником. В этом случае, как говорят о шахматах, можно «реализовать преимущество». Между W_1 и P_2 расположен всего один (нечетное число) квадрат, в то время как между W_1 и P_1 (а также между W_2 и P_2) имеются четыре (четное число) квадрата. Во втором случае у охранников имеется преимущество, и они могут выиграть. Приведем образец игры. Ходы охранников записываются в «числителе», а узников — в «знаменателе»:

$$\frac{19-20\quad 22-14}{17-18\quad 24-23},\qquad \frac{20-21\quad 14-13}{18-26\quad 23-31},$$

$$\frac{21-22\quad 13-12}{26-27\quad 31-32},\qquad \frac{22-23\quad 12-20}{27-26\quad 32-40},$$

$$\frac{23-31\quad 20-19}{40-32\quad 26-34},$$

$$\frac{31-32\ \text{схватил.}\quad 19-27\quad 27-26}{34-33\quad 33-25},$$

26—25. Узник пойман.

Узникам невозможно уйти от преследования, если каждый охранник преследует того из них, кого нужно.

7. На рисунке 6 показан путь, удовлетворяющий всем заданным условиям.

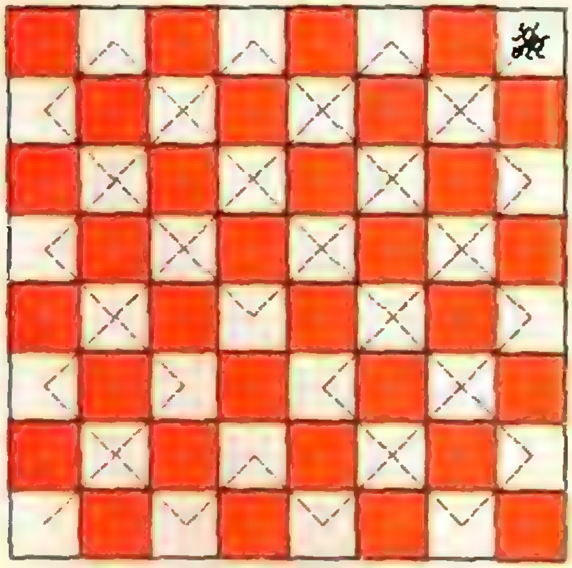


Рис. 6.

К задачам «Квант» для младших школьников»

(*см. «Квант» № 10*)

1. Груздев — муж Анны, Васильев — Марии, Борисов — Софьи, Андреев — Дарьи. Указание. Уменьшим число стаканов, выпитых каждой женой, на 2, оставив прежние условия на мужей. Тогда мужья выпьют на 20 стаканов меньше, то есть 10 стаканов, а жены — 6 стаканов. Дальше нарисуйте таблицу 1 и исследуйте ее (надо выбрать 4 элемента в разных строках и столбцах так, чтобы их сумма равнялась 10; полезно использовать четность и нечетность некоторых чисел).

	А	М	С	Д
А	0	1	2	3
Б	0	2	4	6
В	0	3	6	9
Г	0	4	8	12

Таблица 1

Сумма	4	6	8	10	12	14	16
Остаток	4	6	8	1	3	5	7
1	3	5	7	9	—	—	—
3	1	—	5	7	9	—	—
5	—	1	3	—	7	9	—
7	—	—	1	3	5	—	9
9	—	—	—	1	3	5	7
Число пар	2	2	4	4	4	2	2

Таблица 2

Остаток от деления на девять суммы нечетных чисел	1	2	3	4	5	6	7	8
Число пар нечетных чисел	4	—	4	2	2	2	2	4
Остаток от деления на девять суммы четных чисел	8	7	6	5	4	3	2	1
Число пар четных чисел	4	—	4	2	2	2	2	4
Произведение	16	—	16	4	4	4	4	16

Таблица 3

2. Составим для нечетных цифр таблицу 2, в которой: первая строка — возможная сумма двух нечетных цифр, вторая строка — остаток от деления этой суммы на девять, следующие пять строк — цифры, которые в сумме с первой цифрой строки (цифрой тысяч) дают указанную выше сумму, и последняя строка — число возможных пар цифр, дающих эту сумму. Аналогичная таблица составляется и для четных цифр.

Затем, объединяя и упорядочивая итоги этих таблиц, комплектуем сводную таблицу 3.

При составлении этой таблицы остатки от деления на 9 сумм четных цифр проставлены в таких графах, чтобы в сумме с остатками от сумм нечетных цифр они давали девять.

Последняя строка таблицы — произведение числа пар данного столбца, так как любой паре нечетных цифр можно сопоставить любую пару четных цифр.

Сумма произведений дает искомый ответ: 64 — число различных наборов цифр четырехзначного числа НЧНЧ, сумма которых делится на девять.

Делимость на три разберите самостоятельно.

3. У Пети обязательно были монеты по 10 копеек и еще либо по 2 и 3, либо по 5 копеек. Первый случай приводит к противоречию, во втором получается 8 монет по 10 копеек и 4 монеты по 5 копеек.

4. 15 625:25=625. Указание. Из О×ИО=ТИО следует, что О=5 или 6; из И×ИО=ОН следует, что И=2 или 3. Проверяя эти возможности, находим, что И=2, О=5, Н=0 и т. д.

5. Когда мы вынимаем термометр из расплавленного олова, температура стекла резко понижается, стекло сжимается, столбик ртути слегка поднимается. (Сравните коэффициенты объемного расширения для стекла и ртути.)

Корректор *М. Л. Медведская*

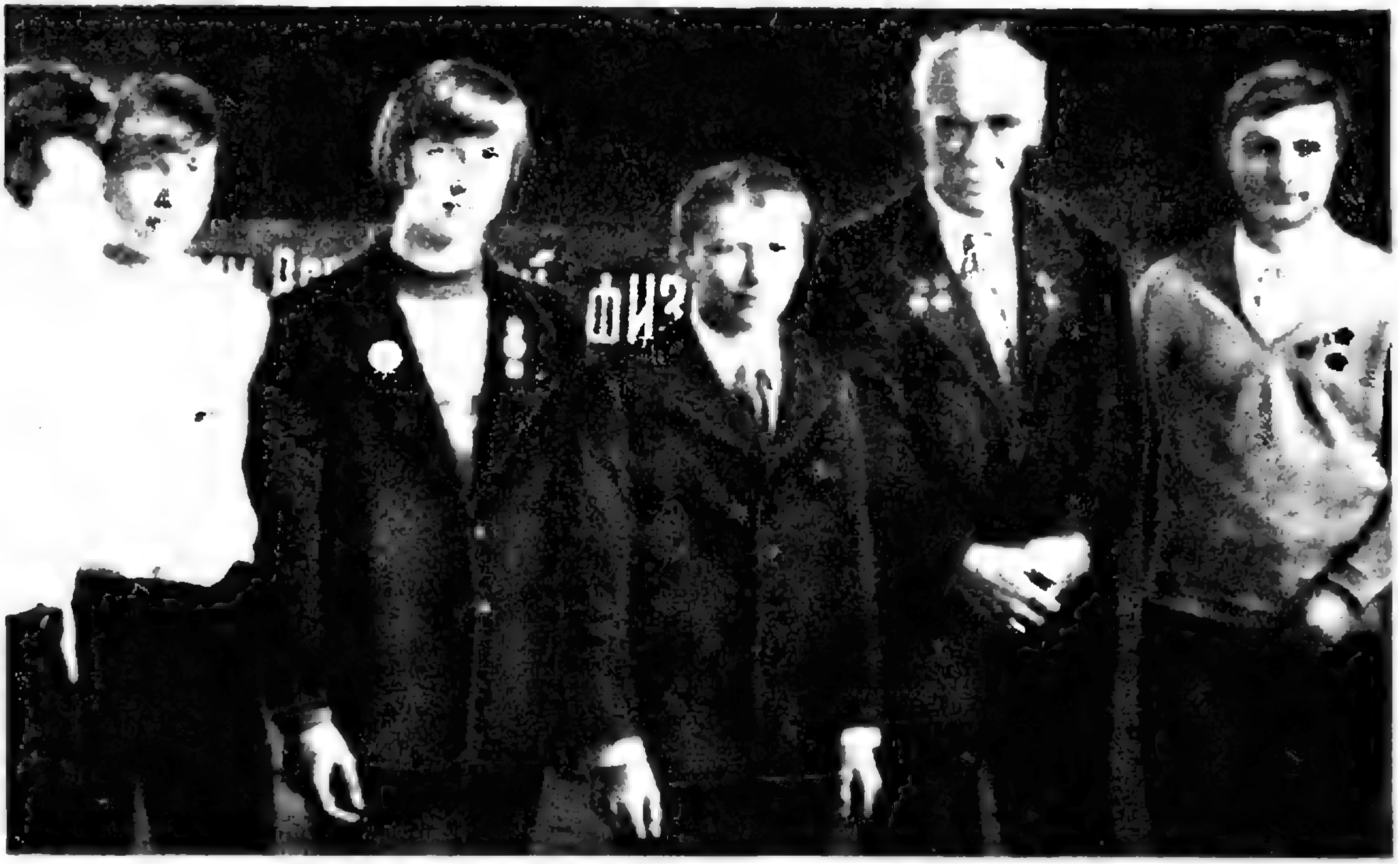
113035, Москва, Ж-35, Б. Ордынка, 21/16,
тел. 231-83-62.

Сдано в набор 19-VIII 1975 г.
Подписано в печать 1/X 1975 г
Бумага 70×100¹/₁₆ Физ. печ. л. 5
Усл. печ. л. 6,5 Уч.-изд. л. 7,38 Т-17314
Цена 30 коп. Заказ 1805 Тираж 348 400 экз

Чеховский полиграфический комбинат
Союзполиграфпрома
при Государственном комитете Совета Министров
СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли, г. Чехов Московской области

Рукописи не возвращаются

Всесоюзная олимпиада школьников по физике



Председатель Оргкомитета олимпиады академик И. К. Кикоин со школьниками

Участники олимпиады на экспериментальном туре

Всесоюзная олимпиада школьников по математике

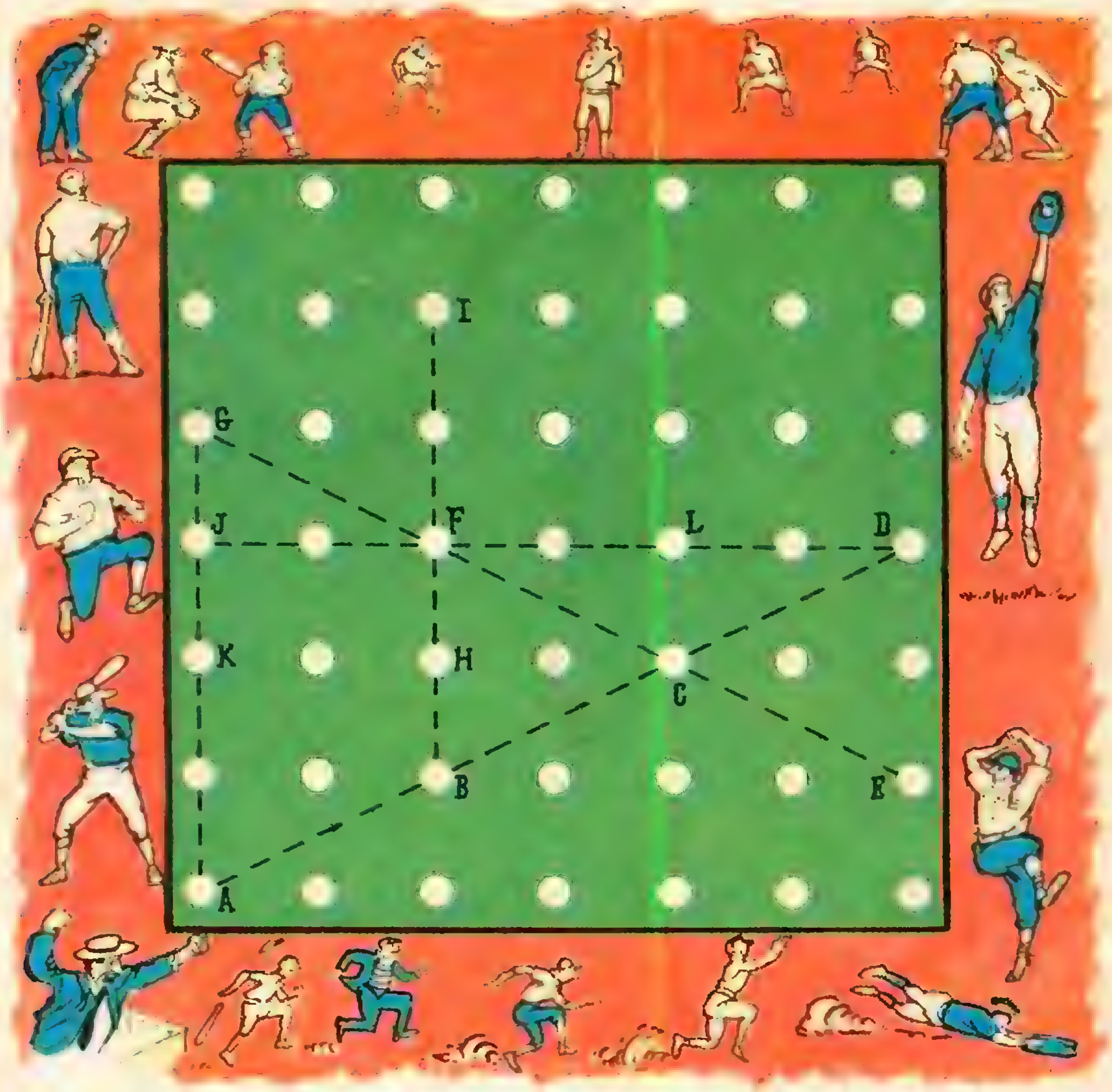
Выступает член жюри Ю. П. Лысов

Участники олимпиады Ю. Неретин и Т. Хованова (Москва)

Цена 30 коп.
Индекс 70465

11

Головоломка Сэма Лойда



Игра в «Бэйсбол»

Для того, чтобы играть в этот бэйсбол, нет необходимости знать правила игры в настоящий бэйсбол (эта игра напоминает скорее лапту). На рисунке изображена игральная доска, состоящая из 49 полей, каждое из которых может быть накрыто фишкой.

Играют обычно двое (игроков может быть и больше). Игроки запасаются фишками «своего» цвета и выставляют их по очереди на свободные поля. Как только все поля покрыты фишками, игроки подсчитывают число четверок своих фишек, стоящих на одной прямой.

Пример. Если ваши фишки поставлены на поля А, В, С, Д, Е, F, G, H, I, J, K, L, то вы набрали 5 очков. Победителем считают того из партнеров, который набрал наибольшее число очков.

Задача. Фишки закрывают 20 мячей. Какое наибольшее число рядов из четверок фишек может при этом быть?

НОМЕР
12

Основан в 1970 году

Квант

1975

12

Научно-популярный
физико-математический
журнал
Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической
литературы

В НОМЕРЕ:

2 *С. Г. Гиндикин.* Феликс Клейн

10 *Н. Я. Виленкин, А. Г. Мордкович.* Что такое производная

19 *В. Г. Болтянский.* Оптические свойства эллипса, гиперболы и параболы

24 *М. И. Файнгольд.* Этот удивительный параболоид

29 *С. Г. Веров.* Брахистохрона, или еще одна тайна циклоиды

Задачник «Кванта»

36 Задачи М356—М360; Ф368—Ф372

38 Решения задач М318—М320; Ф328, Ф330—Ф332, Ф334

Практикум абитуриента

46 *Э. Г. Готман.* Медианы и средние линии

51 *Г. Я. Мякишев.* Расчет участка цепи, содержащего э. д. с.

Международные олимпиады школьников

57 *З. И. Моисеева, В. Л. Скворцов.* XVII Олимпиада по математике

59 *В. Г. Разумовский, Г. С. Тарасюк.* VIII Олимпиада по физике

Рецензии, библиография

61 *Б. М. Яворский.* Школьникам о физике твердого тела

Информация

66 *И. Г. Венецкий, Ю. И. Соркин, Н. Б. Шкундина.* VI Математическая олимпиада МЭСИ

«Квант» для младших школьников

67 Задачи

68 *Е. Е. Семенов.* Точка, прямая... — что это такое?

71 **Ответы, указания, решения**

78 **Напечатано в 1975 году**

Смесь *(с. 18, 35, 50, 56)*

Главный редактор
академик И. К. Кикоин
Первый заместитель
главного редактора
академик А. Н. Колмогоров

Редакционная коллегия:
М. И. Башмаков
С. Т. Беляев
В. Г. Болтянский
Н. Б. Васильев
Ю. Н. Ефремов
В. Г. Зубов
П. Л. Капица
В. А. Кириллин
А. И. Климанов
(главный художник)
С. М. Козел
В. А. Лешковцев
(зам. главного редактора)
Л. Г. Макар-Лиманов
А. И. Маркушевич
Н. А. Патрикеева
И. С. Петраков
Н. Х. Розов
А. П. Савин
И. Ш. Слободецкий
М. Л. Смолянский
(зам. главного редактора)
Я. А. Смородинский
В. А. Фабрикант
А. Т. Цветков
М. П. Шаскольская
С. И. Шварцбурд
А. И. Ширшов

Редакция:
В. Н. Березин
А. Н. Виленкин
И. Н. Клумова
Т. М. Макарова
(художественный редактор)
Т. С. Петрова
В. А. Тихомирова
Л. В. Чернова
(зав. редакцией)

На первой странице обложки — иллюстрация к статье В. Г. Болтянского «Оптические свойства эллипса, гиперболы и параболы». Перед рефлектором электрокамина помещена свеча. Лучи света, отражаясь от поверхности рефлектора, попадают в объектив фотоаппарата — на фотографии светится весь рефлектор. А если вместо спирали электрокамина вкрутить 40-ваттную лампочку, то получится неплохой прожектор. Попробуйте!

© Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», «Квант», 1975 год

Феликс Клейн

1849—1925

С. Г. Гиндикин

Феликс Клейн скончался 22 июня 1925 года. Славу великого математика принесли ему работы, выполненные на протяжении одного десятилетия. Клейн прекратил активные занятия математикой в 33 года, но до конца дней оставался в центре научно-организационной жизни, полностью посвятив себя педагогической и литературной деятельности.

1. «Рыцарские шпоры»

Ф. Клейн родился в 1849 году в Дюссельдорфе. Здесь он окончил гимназию; в 1865 году поступил в Боннский университет. Уже на следующий год профессор Юлиус Плюкер (1801—1868) привлек семнадцатилетнего студента в качестве ассистента по физике. Плюкер начинал свою научную деятельность как геометр, но постепенно переключился на занятия экспериментальной физикой. Однако в последние годы жизни, после двадцатилетнего перерыва, Плюкер возвратился к геометрии. «Этот поворот сыграл решающую роль в моем собственном развитии»— писал Клейн. Посмертное издание последнего мемуара Плюкера (1869 г.) было подготовлено Клейном. Возможно, это и послужило причиной тому, что его диссертация (1868 г.), которой, по словам самого Клейна, он «заслужил рыцарские шпоры», и его первая публикация (1869 г.) были геометрическими.

Лишившись учителя, Клейн становится «странствующим рыцарем». Он посещает основные математические центры Германии (Геттинген, Берлин), устанавливает личные контакты с Клебшем, Вебером, Вейерштрассом. На подающего надежды молодого ученого, который хочет и умеет учиться, сразу обращают внимание. Не менее важны контакты Клейна со сверстниками. Особенно счастливой была дружба Клейна с великим норвежцем Софусом Ли (1842—1899): они познакомились в 1870 году в Берлине. С. Ли был на семь лет старше Клейна, но в 1870 году делал лишь первые шаги в геометрии.

Вскоре Клейн и Ли отправляются в Париж. Здесь они знакомятся с приемами французских геометров, которые умели с удивительной легкостью, «по воздуху» (С. Ли), получать важные геометрические результаты. Особое значение для дальнейшей научной судьбы Клейна и Ли имели встречи с Камиллом Жорданом (1838—1922). Как раз в 1870 году Жордан выпустил обширный труд по теории *конечных групп*, привлекший широкое внимание к работам Галуа (1811—1832). Возможно, «пропуском» к Жордану послужила для друзей первая работа Клейна, посвященная геометрическому исследованию так называемой *поверхности Куммера*, алгебраическое исследование которой перед этим предпринял Жордан.

Покинуть Францию Клейна заставила франко-прусская война. В самом начале войны Клейн заболел тифом; оправившись от болезни, он поселяется в Геттингене. Для Клейна наступает время великих свершений. Н. Бурбаки пишет, что Клейн завершил «золотой век» геометрии. Но прежде чем рассказывать о блестящем завершении этого века, вспомним о его начале.

2. «Золотой век» геометрии

Еще в XVII веке Дезаргу (1593—1662) и Паскалю (1623—1662) удалось при помощи центрального проектирования получить замечательные геометрические результаты. Об этих результатах забыли почти на полтора века. На большие возможности метода проектирования вновь обратил внимание Гаспар Монж (1746—1818); он рассказывал об этом в курсе начертательной геометрии, который читал в Политехнической школе. От «Описательной геометрии» Монжа (1795) и отсчитывает Н. Бурбаки «золотой век» геометрии.

Среди слушателей Монжа был Виктор Понселе (1788—1867). «Черта, которая возвышает его над всеми предшественниками,— это новый вид геометрической интуиции,— «проективное мышление» (Клейн). Проективную геометрию Понселе создал в течение двух лет, проведенных им в плену в Саратове после войны 1812 года. Свои результаты Понселе рассказывал товарищам по плену, также слушавшим Монжа в Политехнической школе. Опубликованы эти результаты были в 1822 году в «Трактате о проективных свойствах фигур».

Как и его предшественники, Понселе каждую прямую пополняет *бесконечно удаленной* точкой, считая, что все параллельные друг другу прямые имеют общую бесконечно удаленную точку («пересекаются» в ней). Все бесконечно удаленные точки образуют бесконечно удаленную прямую. На пополненной плоскости параллельность становится частным случаем пересечения и не требует специального рассмотрения (например, утверждение, что через точку вне прямой проходит единственная прямая, ей параллельная, превращается в утверждение, что через две различные точки, одна из которых обычная, а другая — бесконечно удаленная, проходит единственная прямая). При центральном проектировании конечная точка может не иметь образа («уйти на бесконечность»), но на пополненной бесконечно удаленными точками плоскости это отображение уже взаимно однозначно.

Центральное проектирование переводит одну плоскость в другую; выполнив же несколько проектирований подряд, мы можем вернуться на исходную плоскость, получив преобразование этой плоскости. К таким преобразованиям (их стали называть *проективными*) относятся перемещения, гомотетии, растяжения. *Проективные преобразования взаимно однозначны (на пополненной плоскости) и переводят прямые в прямые* (позднее выяснилось, что всякое преобразование с этими свойствами проективно). Проективные преобразования, переводящие в себя бесконечно удаленную прямую, называются *аффинными*; аффинные преобразования взаимно однозначны на обычной плоскости. Понселе исследовал геометрические объекты, сохраняющиеся при проективных преобразованиях. Оказывается, при проективных преобразованиях коническое сечение также переходит в коническое сечение (но, например, гипербола может перейти в параболу, а всякое коническое сечение проективным преобразованием можно перевести в окружность). Чрезвычайно плодотворным оказалось следующее наблюдение. Пусть A, B, C, D —точки, лежащие на одной прямой, $\{A, B, C, D\} = \frac{|AC|\cdot|BD|}{|AD|\cdot|BC|}$ — *двойное* или *ангармоническое отношение четырех точек*. Пусть при некотором проективном преобразовании точки

A, B, C, D перешли в точки A', B', C', D' (они обязательно будут лежать на одной прямой). Тогда $\{A, B, C, D\}=\{A', B', C', D'\}$, то есть *при проективных преобразованиях двойное отношение четырех точек сохраняется*. Если одна из точек, например, D — бесконечно удаленная точка, то $\{A, B, C, D\}$ полагается равным $\frac{|AC|}{|BC|}$, и мы получаем, что при аффинных преобразованиях сохраняются отношения длин отрезков, лежащих на одной прямой (почему?).

Далее Понселе пытается устранить исключительные случаи взаимного расположения конических сечений. Почему, например, два эллипса могут пересекаться в четырех точках, а пара окружностей — не более чем в двух? На этот вопрос дается удивительный ответ. Кроме пары вещественных точек пересечения, у окружностей имеется универсальная (одна и та же для всех окружностей на плоскости!) пара общих точек, не замеченных из-за того, что они являются...мнимыми и бесконечно удаленными одновременно. Эти точки называются *циклическими*.

Теперь — несколько слов о четырех немецких математиках: Фердинанде Мебиусе (1790—1868), Якобе Штейнере (1796—1863), Христиане фон Штаудте (1798—1867) и уже упоминавшемся Плюкере. С их именами связана ожесточеннейшая борьба между аналитическим и синтетическим направлениями в геометрии.

Здесь слова «анализ» и «синтез» употребляются в нестандартном смысле: аналитическая геометрия использует метод координат, в результате чего делается возможным применение алгебры и анализа в геометрии; синтетическая геометрия оперирует с непосредственными пространственными конструкциями.

Наиболее ожесточенным был поединок между аналитиком Плюкером и синтетиком Штейнером; Мебиус (аналитик) и Штаудт (синтетик) держались в стороне от борьбы. Клейну было очень легко оказаться вовлеченным в борьбу на стороне аналитиков, но он сумел остаться над схваткой, возможно, руководствуясь правилом его знакомого физиолога Людвига: «Нужно удалиться на 600 километров от места споров и оттуда пересмотреть отношения».

Деятельность аналитиков прежде всего требовала усовершенствовать метод координат. В плане синтетическом важно было дать безкоординатные определения объектов проективной геометрии, например, кривых второго порядка. Это сделал Штейнер — очень колоритная фигура в истории математики. Швейцарский крестьянин, «до 19 лет ходивший за плугом», он начал заниматься математикой в зрелом возрасте. Штейнер был решительно настроен против мнимых величин в геометрии, называя их «призраками» или «царством теней». Впрочем, фон Штаудт показал, что с мнимыми объектами, возникающими в проективной геометрии, можно связать эквивалентные им чисто вещественные конструкции. Другое важное достижение Штаудта состояло в том, что он сумел определить двойное отношение четырех точек непосредственно, без использования расстояний (которые не сохраняются при проективных преобразованиях).

И наконец, еще одно имя — английского математика Артура Кели (1821—1895), долгое время занимавшегося математикой без отрыва от адвокатской практики. Мы остановимся на одном сочинении Кели — знаменитом «Шестом мемуаре о формах» (1859 г.). Кели заметил, что евклидовы перемещения выделяются из всех проективных преобразований тем, что *сохраняют циклические точки*. В результате, с использованием циклических точек, все объекты евклидовой геометрии (расстояния, величины углов и т. д.) можно определить через проективные понятия (сохраняющиеся при проективных преобразованиях). Кели называет проективную геометрию *дескриптивной*, а евклидову — *метрической* и пишет: «Метрическая геометрия есть, таким образом, часть дескриптивной, а дескриптивная геометрия — вся геометрия». Следует иметь в виду, что раньше положение казалось прямо противоположным, а именно, что проективная геометрия — сравнительно бедная часть евклидовой. Далее Кели замечает, что исходя из проективной геометрии можно ввести расстояния, отличные от евклидова (*метрики* или *мероопределения Кели*): каждое такое расстояние на плоскости связывается с некоторой кривой второго порядка (вещественной или мнимой), так что это расстояние не меняется при всех проективных преобразованиях, сохраняющих рассматриваемую кривую.

3. Модель Кели — Клейна

В 1869 году Клейн познакомился с теорией Кели, а в конце того же года — довольно поверхностно — с геометрией Лобачевского. Тотчас же у него возникла мысль, что одна из метрик Кели приводит к геометрии Лобачевского. Это была догадка, почти лишенная аргументации. Теория Кели и теория Лобачевского радикально отличались внешне (вычисления с двойным отношением у Кели и аксиоматическое изложение у Лобачевского), а геометрии Кели были еще недостаточно разработаны для того, чтобы можно было проверять аксиомы геометрии Лобачевского. В феврале 1870 года Клейн, делая доклад по теории Кели на семинаре Вейерштрасса, решился обнародовать свою гипотезу. На этом семинаре было не принято обсуждать фантастические проекты: «зарвавшемуся» молодому человеку объяснили, что «это две далеко отстоящие друг от друга системы»; Клейн же был столь мало подготовлен к защите своей гипотезы, что «позволил переубедить себя». Позднее он жаловался на Вейерштрасса, что у того «не было склонности распознавать с отдаления очертания еще не достигнутых высот». Но Клейн не перестал верить в свою гипотезу. Летом 1871 года он с помощью своего друга Штольца уже основательно изучил неевклидову геометрию и убедился в справедливости своей догадки. Даже обладая доказательством, Клейну было нелегко убедить окружающих в своей правоте. Вероятно, наиболее досадно было Клейну то, что среди не согласных с его утверждением до конца своей жизни оставался Кели. «Состарившийся дух не в состоянии сделать выводы из созданных им самим положений»,— писал Клейн.

Несколько слов о самой модели Кели—Клейна. «Точками» в этой модели являются внутренние точки круга (круг можно заменить областью, ограниченной любой кривой второго порядка), а «прямыми» — хорды этого круга (без концов). Точки пересечения «прямых» определяются естественным образом; ясно, что через «точку» вне «прямой» проходит бесконечное число «прямых», не пересекающих исходную, то есть налицо отрицание аксиомы параллельных из евклидовой геометрии. Надо еще убедиться в том, что все остальные евклидовы аксиомы для описанной модели выполняются: это и будет означать, что модель Клейна — это модель геометрии Лобачевского. Сравнительно просто проверяются аксиомы, касающиеся взаимного положения точек и прямых. Но когда дело доходит до проверки аксиом равенства, то прежде всего надо договориться, какие отрезки считать конгруэнтными; унаследовать соответствующие понятия евклидовой геометрии нельзя. Клейн, следуя Кели, полагает длину отрезка AB равной: $|AB|=|\ln\{A, B, \alpha, \beta\}|$, где α и β — точки пересечения «прямой» AB с границей рассматриваемого круга (эту окружность называют *абсолютом*). Проективные преобразования, сохраняющие абсолют, сохраняют так определенное «расстояние», т. е. являются перемещениями в модели Кели—Клейна геометрии Лобачевского.

Итальянский математик Эудженио Бельтрами (1835—1900) наметил другой путь к обоснованию геометрии Лобачевского еще в 1868 году. Он обнаружил поверхность — *псевдосферу* — кратчайшие линии на которой (*геодезические*) ведут себя так, как прямые в геометрии Лобачевского. Затем Бельтрами отобразил некоторым образом псевдосферу в круг и получил те же формулы, что позже и Клейн в своей теории.

Клейн исследовал другие неевклидовы геометрии, к которым приводят метрики Кели, обнаружив, в частности, модель геометрии Римана (в геометрии Римана сумма углов треугольника больше π, в геометрии Лобачевского она всегда меньше π).

Обсудим теперь, что же дает модель Кели—Клейна для геометрии Лобачевского. Прежде всего — это отличный от аксиоматического способ изложения, более наглядный. Клейн предваряет свою публикацию (1871 г.) словами, что его цель — «дать новое наглядное изложение математических результатов работ, относящихся к теории параллельных, и сделать их доступными ясному пониманию» (примерно так же формулирует свою цель и Бельтрами). Однако построение модели решает далеко не только методическую проблему. Ныне модель Кели—Клейна рассматривается прежде всего как средство доказательства непротиворечивости геометрии Лобачевского. В модели Кели—Клейна объекты геометрии Лобачевского формируются на языке евклидовой геометрии, так что после перевода на этот язык теоремы геометрии Лобачевского превращаются в теоремы евклидовой геометрии, и, таким образом, геометрия Лобачевского непротиворечива, если непротиворечива евклидова геометрия.

Клейн видел основное значение построенной им модели в другом. Он ставил во главу угла проективную геометрию, равноправными и независимыми частями которой являются геометрии Евклида и Лобачевского. В этом плане подчеркивалась независимость построенной модели геометрии Лобачевского от евклидовой геометрии, для чего, в свою очередь, была важна возможность строить проективную геометрию, не пользуясь евклидовой (по Штаудту, см. п. 2). Именно этот момент вызывал у Кели подозрения в существовании порочного круга. Клейн писал: «Вместо того чтобы внутри нашей метрической геометрии строить образы неевклидовой геометрии, мы обосновываем свободную от всяких метрических представлений проективную геометрию, которая содержит в себе как частные случаи, поддающиеся отчетливой классификации, все известные геометрические системы».

4. Эрлангенская программа

Веками слово «геометрия» употреблялось только в единственном числе. Но вот появилась геометрия Лобачевского, затем геометрия Римана, и наконец, математики поняли, что существует много различных геометрий. Возник естественный вопрос: что же такое геометрия? В 1872 году Клейн высказал свою точку зрения в лекции, прочитанной им в связи со вступлением в профессорскую должность в Эрлангене. Так появилась «Эрлангенская программа», по-видимому, самое известное сочинение Клейна. По существу в нем нет новых результатов, все внимание сконцентрировано на поисках принципа, позволяющего систематизировать очень аморфное образование, в которое превратилась к тому времени геометрия.

По Клейну, *основным атрибутом всякой геометрии является некоторый набор G взаимно однозначных преобразований некоторого множества M*. Преобразований должно быть достаточно много для того, чтобы каждую точку множества M можно было перевести в другую некоторым преобразованием из G (в этом случае говорят, что G действует на M *транзитивно*). Такая точка зрения была навеяна, конечно, проективной геометрией, в которой с самого начала первичными были некоторые преобразования (центральные проектирования), в то время как в евклидовой геометрии (в традиционном изложении) первичны другие объекты: прямые, отрезки, конгруэнтные фигуры и т. д.

Следующее положение состоит в том, что набор преобразований G должен быть *группой*. Это означает, что любые два преобразования из G, выполненные подряд, можно заменить одним преобразованием, также из G; кроме того, вместе с каждым преобразованием $g \in G$ в G входит и *обратное к нему*: g^{-1} (если g переводит x в y, то g^{-1} переводит y в x).

Итак, с каждой *группой преобразований G* связывается некоторая геометрия. Что же составляет содержание такой геометрии? Прежде всего — нахождение *инвариантов группы G* — свойств, которые сохраняются при действии преобразований из G (точнее, если какой-то объект нашей геометрии обладает инвариантным свойством, то каким бы преобразованием из G мы на него не действовали, получится объект, также обладающий этим свойством). Для группы перемещений евклидовой геометрии инвариантами являются все известные геометрические свойства, так как мы не различаем положения фигур на плоскости. Однако и в традиционном курсе геометрии имеются нетривиальные утверждения об инвариантах преобразований, не являющихся перемещениями. При гомотетиях сохраняются конгруэнтность углов, свойство кривой быть окружностью, отношение длин отрезков, отношение площадей. Имея некоторый запас инвариантных свойств, можно конструировать новые. Относительно гомотетий инвариантными будут свойство прямой быть биссектрисой угла, свойство кривой быть полуокружностью. Относительно осевых растяжений свойство кривой быть окружностью уже не будет инвариантом, но будет инвариантом свойство кривой быть эллипсом (а также гиперболой или параболой); сохраняется отношение длин отрезков, лежащих на одной прямой (но не на разных), отношение площадей. Следствием является инвариантность свойства точки делить отрезок в данном отношении, свойства прямой быть медианой треугольника. Можно показать, что всякое аффинное преобразование можно представить в виде композиции перемещений и осевых растяжений, а потому все указанные свойства инвариантны относительно аффинных преобразований (примеры проективных инвариантов приведены на с. 3).

Выделение инвариантов — только первый слой геометрии. Ее основное содержание составляют *теоремы о соотношениях между инвариантными свойствами* (их называют *сизигиями*). Например, медианы треугольника являются его аффинными инвариантами; существование общей точки, делящей медианы в отношении 2 : 1,— нетривиальное соотношение между этими тремя прямыми. В теоремах о пересечении биссектрис и высот выводится зависимость между инвариантами гомотетий.

На возможность использования геометрических преобразований для получения новых теорем обратил внимание в 1837 году Шаль: «Теперь каждый в состоянии взять какую-нибудь известную истину и применить к ней различные общие принципы преобразований; так он получит другие истины... Гений больше не является необходимым для того, чтобы вносить свою лепту в построение величественного храма науки». Однако если понимать рецепт Шаля буквально: взять любую теорему и применить к ней произвольное преобразование,— то получится верное утверждение, но с такой корявой формулировкой, что у него будет мало шансов остаться в «храме науки». Подумайте, например, во что превратится теорема о пересечении биссектрис, если сделать осевое растяжение? Как объяснить, в какую прямую перейдет биссектриса? Клейн объясняет, что важно, напротив, понять, какие из преобразований утверждения не меняют, подобрать преобразования, максимально упрощающие картину, и доказать утверждение в полученной (более простой) форме. Вот традиционный пример. Аффинным преобразованием любой треугольник можно превратить в равносторонний, и поскольку в теореме о точке пересечения медиан речь идет о соотношении между аффинными инвариантами, то эту теорему достаточно проверить для равностороннего треугольника (что уже очень просто).

Эти соображения позволяют уточнить рецепт Шаля. Пусть подмечено некоторое соотношение между аффинными инвариантами в равностороннем треугольнике единичной площади: например, пусть λ — площадь шестиугольника, образованного «*тридианами*»— прямыми, соединяющими вершины треугольника с точками, делящими противоположную сторону на три равные части (число λ однозначно определено). Тогда в любом треугольнике отношение площади шестиугольника, образованного тридианами, к площади всего треугольника равно λ. Теперь вы легко можете придумать другие теоремы такого рода.

Один из важнейших моментов в рассуждениях Клейна — это выяснение взаимоотношения между геометриями, связанными с группами G_1 и G_2, если $G_1 \subset G_2$. (Говорят, что G_1 — *подгруппа* группы G_2.) У большей группы G_2 меньше инвариантов, чем у G_1, и все теоремы, связанные с группой G_2, верны и для геометрии, связанной с меньшей группой G_1.

Поэтому в каждой конкретной геометрии важно найти такие утверждения, которые останутся справедливыми и для геометрий с более широкими группами преобразований. Иногда возможность «перенесения» утверждения в геометрию с более широкой группой преобразований становится ясной лишь после переработки формулировки утверждения.

Идеология Кели на языке эрлангенской программы состоит в том, что можно двигаться обратным путем, рассматривая группу преобразований, сохраняющих некоторый фиксированный объект. При этом часто инварианты для подгруппы можно конструировать при помощи инвариантов для группы (расстояния в евклидовой и неевклидовых геометриях — при помощи двойного отношения).

Инварианты для большей группы и соотношения между ними обычно описывать проще. В частности, для проективной группы задачу нахождения инвариантов можно сделать полностью алгебраической и решить.

«Эрлангенская программа» завершила «золотой век» классической геометрии. Число новых геометрий возрастает; постепенно геометрический язык пронизывает значительную часть математики. «Классическая геометрия переросла себя, и из живой самостоятельной науки превратилась в универсальный язык современной математики, обладающий исключительной гибкостью и удобством» (Н. Бурбаки).

5. Экстерн в школе Римана

После «Эрлангенской программы» Клейн обращается к теории алгебраических функций — области, в которой работали Гаусс, Лежандр, Абель, Якоби, Вейерштрасс, Риман. Наиболее близкими Клейну оказались идеи Римана (1826 — 1866), с которым он не был лично знаком. По словам Клейна, он был «экстерном в школе Римана, ... а экстерны, как известно, если берутся за какое-нибудь дело, то работают с особенным рвением, ибо к работе их побуждает только глубокий интерес». Позднее Клейн писал, что видел свою задачу в сочетании Римана с Галуа,— то есть в проникновении теории групп в геометрическую теорию функций комплексного переменного. По собственному мнению Клейна это была главная область его научной деятельности.

К сожалению, об этой деятельности Клейна рассказать мы не сумеем, поскольку здесь уже нужно требовать от читателя специальных знаний, далеко выходящих за рамки школьной программы. Но все же об одном обстоятельстве мы упомянем.

Клейн занимался так называемой *проблемой униформизации*. Рассматривая важные случаи, он надеялся со временем разобраться и с общей задачей. Но в 1881 году Клейн обнаружил серию статей никому не известного французского математика Анри Пуанкаре (1854—1912), который по существу проблему униформизации решил *). Это драматическое событие Клейн встретил достойно. Он начал переписку с Пуанкаре; они обменялись 26 письмами. Клейн, уже известный математик (хотя только на 5 лет старший Пуанкаре), выступает в роли очень тактичного учителя. Он знакомит Пуанкаре с теорией Римана, о которой тот не имел представления, но мгновенно усвоил. Клейн решается на соревнование с Пуанкаре: улучшает доказательство основного результата и намечает его обобщение. Эта история окончилась для Клейна печально: «Цена, которую мне пришлось заплатить за мои работы, была во всяком случае очень велика, так как мое здоровье оказалось совершенно расшатанным ... Только к осени 1884 года положение несколько улучшилось, но прежней степени творческой активности я уже не достиг никогда .... Моя собственная творческая деятельность в области теоретической математики закончилась в 1882 году».

---

*) Общая проблема униформизации ещё фигурировала в числе проблем Гильберта (1900 г.) и была полностью решена в 1907 году независимо Пуанкаре и Кебе.

6. Последние 40 лет

Начиная с 1886 года Клейн работает в Геттингене. Благодаря Клейну этот город превратился в подлинную столицу математики. По его инициативе в Геттинген приглашаются талантливые молодые математики (среди них — Гильберт). Клейн никогда не переставал интересоваться новыми идеями. Его лекционные курсы, частично записанные и изданные, посвящены самым разным областям математики, механики, физики. Многогранна организационная и общественная деятельность Клейна. 50 лет руководил он изданием одного из основных математических журналов «Mathematische Annalen». Своеобразной лебединой песней Клейна были его «Лекции о развитии математики в XIX столетии», читанные в 1914—1919 годах и изданные посмертно его учениками Курантом и Нейбауэром. Приведем выдержку из их предисловия: «Эти лекции являются зрелым плодом богатой жизни, проведенной в центре научных событий, выражением проникновенной мудрости и глубокого исторического понимания, высокой человеческой культуры и мастерского дара изложения».

Значительную часть времени и сил тратил Клейн на разработку проблем школьного преподавания математики и подготовку учителей, чем, вероятно, до него не занимался ни один математик такого масштаба. «Вряд ли есть предмет,— писал Клейн,— в преподавании которого царила бы такая рутина, как в преподавании математики. Курс элементарной математики вылился в определенные рамки и точно замер раз навсегда в установившихся пределах. Время от времени по тому или иному поводу одни задачи заменяются другими, исключаются одни параграфы и вводятся другие; но по существу на всем материале школьной математики это почти не отражается. Новые учебники алгебры носят отпечаток алгебры Эйлера, как новые учебники геометрии отпечаток геометрии Лежандра. Можно подумать, что математика — мертвая наука, что в ней ничто не меняется, что в этой области знания нет новых идей, по крайней мере таких, которые могли бы сделаться достоянием неспециалистов, предметом общего образования».

Клейн стремится учесть в преподавании состояние современной науки, связь математики и физики. Он рекомендует систематически пользоваться преобразованиями в геометрии, отказаться от традиционного разбиения школьной математики на предметы. Школьный курс должен быть пронизан понятием функции; тщательно продумываются пути воспитания у учеников «функционального мышления». Изложение геометрии, по мнению Клейна, должно начинаться в неаксиоматическом варианте, а аксиоматический метод должен появляться уже тогда, когда ученики в состоянии его осознать.

С большим тактом поддерживал Клейн контакты с людьми, занимающимися школьной математикой, четко ограничив круг своей компетенции, никогда не вмешиваясь в вопросы, требовавшие опыта непосредственной работы в школе. Клейн читал лекции для учителей, которые частично изданы. Наиболее известна его «Элементарная математика с точки зрения высшей». Это не лекции по методике математики и не расширенный курс школьной математики. «Я хочу, чтобы настоящая книга оказалась полезной тем, что побудит иного учителя нашей средней школы к самостоятельному размышлению о новом, более целесообразном изложении того учебного материала, который он преподает. Исключительно с такой точки зрения надо смотреть на мою книгу, а не считать ее готовым учебным планом; разработку последнего я всецело предоставляю тем, кто работает в школе. Если кто-нибудь предполагает, что я иначе понимал свою деятельность, то это недоразумение» (Клейн).

Что такое производная

Н. Я. Виленкин,
А. Г. Мордкович

> *«Многие современные математические теории возникли из проблем механики и лишь впоследствии приняли тот аксиоматически-абстрактный вид, который так затрудняет их изучение.»*
> *В. И. Арнольд.* Математические методы классической механики

1. Тайны планетных орбит

Древнегреческие ученые умели решать лишь немногие задачи кинематики — они могли рассчитать либо равномерное прямолинейное движение, либо равномерное вращение вокруг оси. Но описать движение планет столь простыми способами не удавалось.

Планеты двигались по самым замысловатым кривым, иногда быстро продвигаясь вперед, а иногда замедляя свое движение и даже возвращаясь назад. Чтобы свести эти движения к круговым, александрийский астроном Птолемей, живший в III в. до н. э., придумал сложнейшую систему окружностей; центры малых окружностей равномерно вращались по большим, а планеты равномерно вращались по малым окружностям. Но и система Птолемея не согласовывалась с наблюдениями, и ее приходилось все время усложнять. Лишь в XVII веке немецкому ученому Иоганну Кеплеру удалось на основе созданной великим польским астрономом Николаем Коперником гелиоцентрической системы мира сформулировать законы движения планет.

Оказалось, что планеты движутся не по окружностям, а по эллипсам, и притом неравномерно. Объяснить, почему это так, Кеплер не смог — в то время не были известны ни общие законы механики, ни математические методы, позволявшие изучать криволинейное и неравномерное движение.

Лишь в конце XVII века Исаак Ньютон открыл законы динамики, сформулировал закон всемирного тяготения и развил математические методы, позволявшие сводить неравномерное к равномерному, неоднородное к однородному, криволинейное к прямолинейному. В основе лежала простая идея — движение любого тела за малый промежуток времени можно приближенно рассматривать как прямолинейное и равномерное.

Методы, развитые Ньютоном, дали возможность по заданному закону движения тела находить его скорость и ускорение в любой момент времени, а также решать обратную задачу — по заданному ускорению сначала находить скорость, а потом закон движения тела. А если вспомнить, что по второму закону Ньютона ускорение тела постоянной массы пропорционально действующей на него силе, то станет ясно, что новые методы устанавливали связь между движением тела и действующими на него силами, то есть решали основную задачу механики.

Одновременно с Ньютоном немецкий философ и математик Готтфрид Вильгельм Лейбниц изучал, как проводить касательные к произвольным кривым. Он также развил новое исчисление, которое оказалось по сути дела тождественным построенному Ньютоном. Обозначения, введенные Лейбницем, оказались настолько удачными, что сохранились и по сей день.

Новая математика Ньютона и Лейбница состояла из двух больших частей — дифференциального и интегрального исчислений. В первом из них говорилось, как, изучая малую часть явления, сводить неравномерное к равномерному, а во втором — как из малых равномерных частей конструировать сложное неравномерное явление.

Дифференциальному и интегральному исчислениям и их дальнейшему развитию (вариационному исчислению, дифференциальным уравнениям, теории функций комплексного переменного и т. д.) посвящены многотомные монографии. В этой статье мы расскажем лишь об основных понятиях дифференциального исчисления — о производной и дифференциале.

2. Свойство «линейности в малом»

Три линии на рисунке 1 являются частями одной и той же параболы $y=x^2$, изображенной в разных масштабах. Рисунок *а* сделан в мелком масштабе, рисунок *б* — в масштабе покрупнее, рисунок *в* — еще крупнее. На всех рисунках взята одна и та же точка M (1; 1) параболы, чтобы можно было изучить поведение кривой в окрестности этой точки.

На рисунке 1, *а* ясно видно, что парабола искривлена. На рисунке 1, *б* это искривление уже менее заметно, а на рисунке 1, *в* его практически нет — график функции $y=x^2$, сделанный в крупном масштабе, на глаз почти неотличим от прямой линии. Чем крупнее мы выберем масштаб, тем меньше график функции $y=x^2$ будет отличаться от некоторой прямой линии, проходящей через точку M (1; 1). То же самое было бы, если бы мы стали строить во все увеличивающемся масштабе график функции $y=x^2$ в окрестности любой другой точки.

Не только парабола «напоминает» вблизи любой своей точки прямую — этим свойством обладают окружность, гипербола, синусоида и т. д. Его можно назвать свойством *«линейности в малом»* (термин объясняется тем, что прямая — это график линейной функции $y=kx+b$). Но геометрический язык, на котором мы выразили это свойство, расплывчат. Поэтому попробуем сформулировать его на суховатом, но зато точном языке формул.

3. Приращение функции

На рисунке 2 изображен квадрат со стороной длины a; площадь y такого

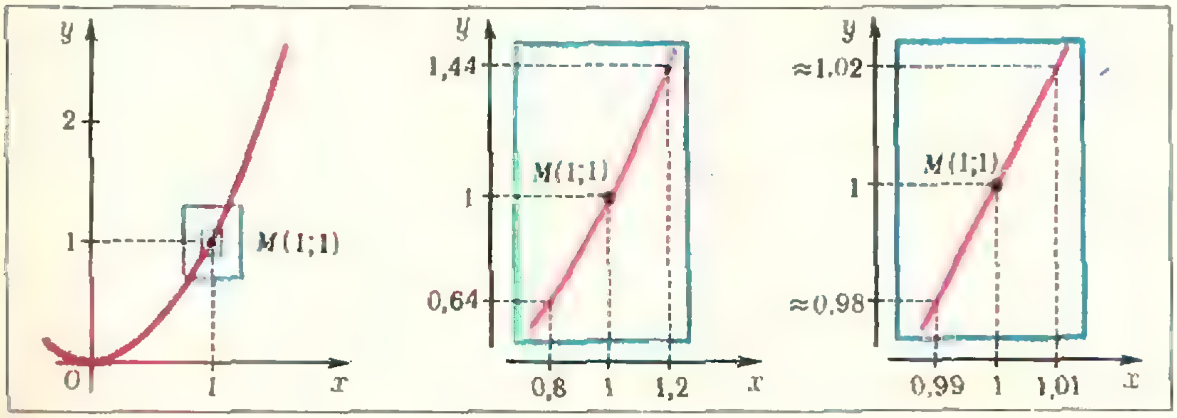


Рис. 1. *а*) *б*) *в*)

квадрата равна a^2. Если длину стороны квадрата увеличить на p, то и площадь увеличится — на величину площади фигуры, закрашенной на рисунке 2. Эту площадь называют *приращением площади квадрата*. Она равна $(a+p)^2-a^2$, то есть $2ap+p^2$.

Положим $p=\Delta x$ (читается «*дельта икс*»), а приращение площади квадрата обозначим через Δy. Получим

$$\Delta y=2a\cdot\Delta x+(\Delta x)^2. \qquad (1)$$

Точно так же можно определить понятие приращения для любой функции $y=f(x)$: чтобы вычислить приращение функции при переходе от точки a к точке $a+\Delta x$, нужно:

а) найти значение $f(a)$ функции в точке a;

б) найти значение $f(a+\Delta x)$ функции в точке $a+\Delta x$;

в) из второго значения вычесть первое.

Иными словами, приращение функции при переходе от точки a к точке $a+\Delta x$ равно $\Delta y=f(a+\Delta x)-f(a)$.

Например, приращение функции $y=x^3$ при переходе от точки a к точке $a+\Delta x$ будет

$$\Delta y=(a+\Delta x)^3-a^3=3a^2\cdot\Delta x+3a\cdot(\Delta x)^2+(\Delta x)^3. \qquad (2)$$

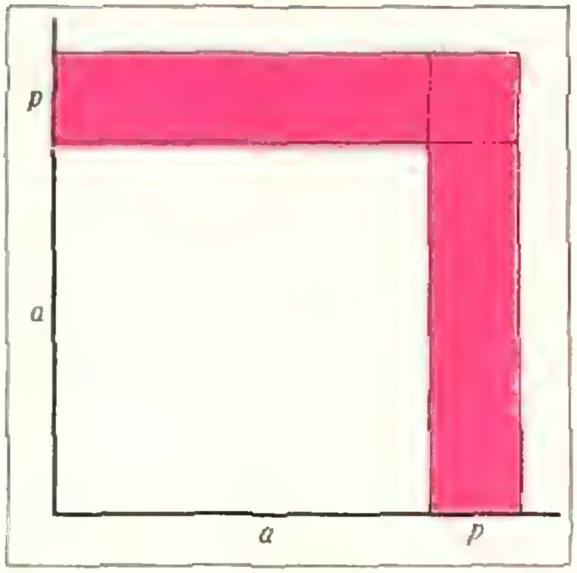


Рис. 2.

Слова «приращение аргумента», «приращение функции» обманчивы: может создаться впечатление, что и аргумент, и функция увеличиваются. На самом деле и Δx, и Δy могут быть отрицательными числами. Быть может, было бы лучше вместо «приращение» говорить «изменение», но мы будем придерживаться традиционной терминологии.

4. Дифференцируемые функции

Теперь уже можно точнее объяснить, почему график функции $y=x^2$ «выпрямляется», когда мы увеличиваем масштаб. Поскольку все рисунки 1, а — в одного и того же размера, то с увеличением масштаба на них умещаются все меньшие и меньшие части кривой. Это означает, что мы рассматриваем нашу функцию при все меньших и меньших значениях Δx. Таким образом, «выпрямление» графика функции связано с особым поведением приращения этой функции при уменьшении приращения аргумента.

Чтобы разобраться в этом, выразим приращение функции $y=x^2$ в точке $M(1;1)$ через приращение аргумента. Мы получим:

$$\Delta y=(1+\Delta x)^2-1=2\cdot\Delta x+(\Delta x)^2.$$

Мы видим, что приращение функции состоит из двух слагаемых: $2\cdot\Delta x$ и $(\Delta x)^2$. Первое из них пропорционально Δx, а второе обладает следующей особенностью: если $\Delta x\to 0$, то оно стремится к нулю гораздо быстрее, чем Δx. Например, если $\Delta x=0{,}1$, то $(\Delta x)^2=0{,}01$; если $\Delta x=0{,}001$, то $(\Delta x)^2=0{,}000001$ и т. д. Таким образом, Δy при малых Δx почти равно $2\cdot\Delta x$. Так как $\Delta y=y-1$, $\Delta x=x-1$, то $y-1\approx 2(x-1)$, то есть $y\approx 2x-1$. Но $y=2x-1$ — это уравнение прямой с угловым коэффициентом, равным 2. Значит, чем меньшую окрестность точки $M(1;1)$ мы берем, тем теснее в этой окрестности парабола примыкает к прямой $y=2x-1$. Говорят, что парабола $y=x^2$ в точке $M(1;1)$ *касается* прямой $y=2x-1$.

Итак, «выпрямление» графика функции $y=x^2$ при увеличении масштаба оказалось связанным с возможностью разложения приращения функции на два слагаемых, из которых одно пропорционально приращению аргумента, а второе при малых значениях Δx *пренебрежимо мало* по сравнению с Δx. Но слова «пренебрежимо мало» еще нуждаются в уточнении.

Будем говорить, что величина β *пренебрежимо мала по сравнению с* Δx *при стремлении* Δx *к нулю, если ее отношение к* Δx *стремится к нулю:* $\beta = \alpha \cdot \Delta x$, *где* $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha = 0$.

Теперь мы уже можем сформулировать основное определение.

Определение 1. Функция $y = f(x)$ называется *дифференцируемой в точке a*, если ее приращение в этой точке можно представить в виде суммы двух слагаемых, первое из которых пропорционально приращению Δx аргумента, а второе пренебрежимо мало по сравнению с Δx. Иными словами,

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x, \tag{3}$$

где A — число, а α стремится к нулю, когда Δx стремится к нулю.

Рассмотрим приращение функции $y = x^3$ в точке $x = a$. Из равенства (2) получаем $\Delta y = 3a^2 \cdot \Delta x + [3a\Delta x + (\Delta x)^2] \Delta x$. Слагаемое $3a^2 \cdot \Delta x$ пропорционально Δx, а второе слагаемое $[3a \cdot \Delta x + (\Delta x)^2] \Delta x$ является произведением Δx и множителя $3a \cdot \Delta x + (\Delta x)^2$, который стремится к нулю, когда Δx стремится к нулю. Значит, функция $y = x^3$ дифференцируема, причем для нее $A = 3a^2$.

Коэффициент A в равенстве (3) зависит от того, в какой точке мы его вычисляем. Например, для функции $y = x^3$ в точке $a = 1$ имеем $A = 3$, а в точке $a = 2$ имеем $A = 12$. Если считать значение аргумента, для которого вычисляется коэффициент A, переменным, то удобно обозначить его буквой x. При изменении x коэффициент A является функцией от x. Эта функция называется *производной от функции* $y = f(x)$ и обозначается $f'(x)$, или y' (читается *«эф штрих от икс»*, *«игрек штрих»*).

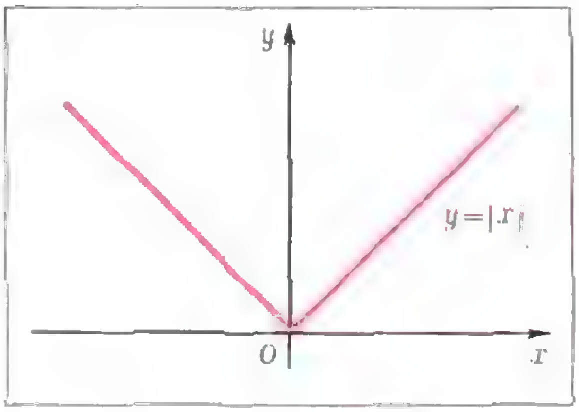


Рис. 3.

Слагаемое $A \cdot \Delta x$, то есть $f'(x) \cdot \Delta x$ называют *дифференциалом функции* $y = f(x)$ и обозначают dy. Таким образом, $dy = f'(x)\,\Delta x$. Обычно Δx обозначают dx и пишут $dy = f'(x)\,dx$.

Из определения 1 следует, что при значениях Δx, близких к нулю, приращение дифференцируемой функции Δy *почти пропорционально* приращению аргумента. Точнее, для такой функции $\Delta y = (A + \alpha)\,\Delta x$, где слагаемое α, характеризующее отклонение от «точной» пропорциональности, стремится к нулю, когда Δx стремится к нулю. Эта «почти пропорциональность» приращения функции приращению аргумента и лежит в основе «выпрямления» графика при увеличении масштаба изображения.

Не следует думать, что все функции дифференцируемы в любой точке. Дифференцируемость, говоря наглядно, означает возможность заменить график функции в окрестности точки прямой линией. Если же график функции имеет в некоторой точке излом, а тем более — разрыв, то функция не будет дифференцируемой в такой точке. Например, функция $y = |x|$ не является дифференцируемой в точке O (0; 0) (рис. 3).

Интуиция подсказывает, что точки, в которых данная функция $y = f(x)$ не является дифференцируемой, не могут лежать слишком густо — не может же кривая иметь излом в каждой своей точке! Во многих учебниках математики XIX века это утверждение так и было сформулировано. Каково же было изумление ученых, когда во второй половине XIX века немецкий математик Карл Вейерштрасс опубликовал пример функции, непрерывной во всех точках, но нигде не дифференцируемой! График этой функции имел излом в каждой своей точке. Позже выяснилось, что за несколько лет до Вейерштрасса функцию с таким же свойством построил чешский математик Бернард Больцано; эта работа Больцано была опубликована лишь через много лет после его смерти.

5. Производная

Вернемся к рассмотрению дифференцируемых функций — «хорошие» функции, которые изучаются в средней школе, и те, которые чаще всего встречаются в приложениях математики, как правило, дифференцируемы. Для этих функций из основного равенства (3) получаем, что $\frac{\Delta y}{\Delta x}=A+\alpha$. Если теперь устремить Δx к нулю, то в равенстве (3) $\alpha\to 0$, откуда

$$A\equiv f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Для обозначения производной иногда используется запись $\frac{dy}{dx}$. В этом обозначении сохраняется воспоминание об отношении приращений $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, из которого путем предельного перехода получилась производная.

Операция отыскания производной данной функции называется *дифференцированием*.

В учебном пособии «Алгебра и начала анализа» для 9-го класса, вышедшем под редакцией академика А. Н. Колмогорова в 1975 году, читатель найдет вывод формул и правил дифференцирования, позволяющих продифференцировать любую *дробно-рациональную* функцию. Ниже мы покажем, как выводятся формулы для дифференцирования *показательной* и *тригонометрических* функций. Для этого остановимся сначала на геометрическом смысле производной.

6. Геометрический смысл производной

Мы видели, что в малой окрестности точки, в которой функция дифференцируема, ее график почти неотличим от некоторой прямой. Эту прямую называют *касательной* к графику функции в данной точке. Для точек этой прямой равенство $\Delta y=A\cdot\Delta x$ является уже не приближенным, а точным. Так как $\Delta y=y-b$, $\Delta x=x-a$, то для всех точек касательной выполняется равенство $y-b=A(x-a)$. Значит, угловой коэффициент касательной равен A. Но $A=f'(a)$, следовательно, *значение производной в заданной точке равно угловому коэффициенту касательной к графику функции в этой точке*. Это и есть геометрический смысл производной.

Вернемся к уравнению касательной: $y-b=A(x-a)$. Так как $A=f'(a)$, а $b=f(a)$, то уравнение касательной к графику функции, дифференцируемой в точке (a, b), можно записать в таком виде:

$$y-f(a)=f'(a)(x-a).$$

Например, уравнение касательной к параболе $y=x^2$ в точке, в которой $x=3$, будет $y=6x-9$ (проверьте это).

7. Производная показательной функции

При записи законов физики, связанных с показательной функцией, удобно пользоваться особым числом — числом e. Это число можно определить следующим образом.

Начертим в декартовой прямоугольной системе координат графики функций $y=2^x$, $y=3^x$, $y=5^x$ (рис. 4). Мы видим, что чем больше основание, тем меньший угол с осью Oy в точке M (0:1) образует график функции (под углом между кривой $y=f(x)$ и осью Oy понимается угол между касательной к кривой $y=f(x)$ в точке $M(0; f(0))$ и осью Oy). Угол между осью Oy и графиком функции $y=2^x$ равен примерно 55°, а угол между осью Oy и графиком функции $y=3^x$ равен примерно 42°. Оказывается, между числами 2 и 3 имеется такое число, что график показательной функции, в основании которой находится это число, пересекает ось Oy под углом 45°. Это число и обозначается буквой e. Оно иррационально, подсчеты показывают, что $e=2{,}7182818284590\ldots$

По определению, касательная к графику функции $f(x)=e^x$ в точке $M(0; 1)$ образует с осью Oy, а значит, и с осью Ox угол 45°. Поэтому для функции $f(x)=e^x$ имеем $f'(0)=\operatorname{tg} 45°=1$. Рассмотрим теперь функцию $g(x)=e^{x-a}$. График этой функции получается из графика функции e^x сдвигом на $|a|$ вправо, если $a>0$, и влево, если $a<0$ (рис. 5). При сдвиге касательная, проведенная к графику функции $y=e^x$ в точке $M(0; 1)$, перейдет в касательную, проведенную к сдвинутой кривой в точке, абсцисса которой равна a. Следовательно, для функции $g(x)=e^{x-a}$ имеем: $g'(a)=\operatorname{tg} 45°=1$. Так как $f(x)=e^x=e^a\cdot e^{x-a}=e^a\cdot g(x)$, то $(e^x)'=(e^a\cdot g(x))'=e^a\cdot g'(x)$, откуда $f'(a)=e^a\cdot g'(a)=e^a$.

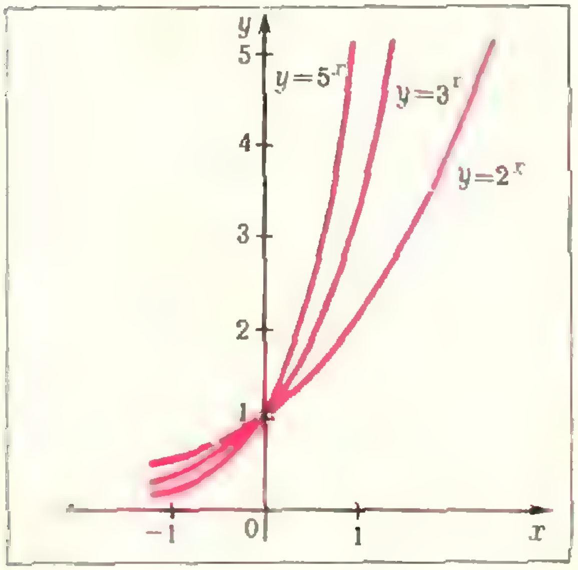


Рис. 4

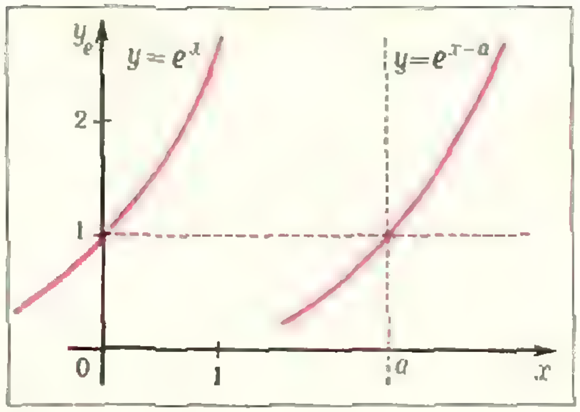


Рис. 5.

Итак, производная от функции e^x в точке $x=a$ равна e^a. Поскольку a — произвольная точка, то, написав x вместо a, получим:

$$(e^x)'=e^x.$$

Таким образом, *производная функции $y=e^x$ в любой точке равна значению функции в этой точке.*

8. Производная — это скорость!

Во второй половине XIX века курс математической физики в Кембриджском университете читал знаменитый ученый Вильям Томсон, позднее получивший за научные заслуги звание лорда Кельвина (в его честь, в частности, названа шкала Кельвина), а курс «чистой математики» — профессор Толгентер. Однажды, войдя в аудиторию, Томсон внезапно обратился к студентам с вопросом: что такое $\frac{dx}{dt}$? В ответ он получил все мыслимые строго логические определения. Все они были отвергнуты: «Ах, бросьте вы этого Толгентера, $\frac{dx}{dt}$ — это скорость!»

Здесь читатель может удивиться — только что производная выступала как угловой коэффициент касательной к графику функции, а теперь она объявляется скоростью. Тем не менее оба ответа на вопрос: *«что такое производная?»* — верны, только в первый раз объяснялся геометрический смысл производной, а во второй — ее физический смысл. Чтобы стало яснее, какое отношение имеет производная к скорости движения, рассмотрим точку, движущуюся по прямой.

Выберем на этой прямой начало отсчета, единицу измерения и направление. Тогда положение точки на прямой будет определяться ее координатой $x=f(t)$ (закон движения точки). Средней скоростью движения за промежуток времени в физике обычно называют величину, равную отношению перемещения точки к промежутку времени, в течение которого перемещение произошло. Перемещение — это не пройденный путь, а изменение (приращение) координаты движущейся точки. Если, скажем, точка за промежуток времени от t_1 до t_2 прошла путь от A до B и вернулась обратно в A, то перемещение равно нулю, и средняя скорость $v_{\text{ср}}=0$. В общем случае имеем $v_{\text{ср}}=\frac{x_2-x_1}{t_2-t_1}$, или

$$v_{\text{ср}}=\frac{f(t_2)-f(t_1)}{t_2-t_1}.$$

Если положить $t_1=t$, $t_2=t+\Delta t$, то средняя скорость за промежуток $[t, t+\Delta t]$ окажется равной

$$v_{\text{ср}}=\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}=\frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

Мгновенной скоростью в момент времени t называют предел средней скорости движения за промежуток времени $[t, t+\Delta t]$, когда $\Delta t\to 0$. Значит,

$$v_{\text{мгн}}=\lim_{\Delta t\to 0} v_{\text{ср}}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

Но $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}$ — это производная координаты x по времени t. Значит, численное значение мгновенной скорости прямолинейно движущейся точки действительно оказалось равным производной перемещения по времени.

9. Скорость криволинейного движения

Для того, чтобы изучать движение пушечных ядер и планет, частей механизмов и машин, изложенного выше метода недостаточно — ведь все эти тела движутся по кривым линиям, а мы умеем справляться лишь с прямолинейным движением. Но, проектируя положение движущейся точки на оси координат, можно свести криволинейное движение к двум прямолинейным. При этом, если траектория движения плоская, то закон движения задается двумя функциями, дающими значения координат точки в момент времени $t: x=x(t)$, $y=y(t)$. Впрочем, можно взять и одну функцию, только принимающую не числовые, а векторные значения. Для этого проведем направленный отрезок от начала координат O к движущейся точке M и обозначим $\overrightarrow{OM}$ через $\vec{r}(t)$. Из рисунка 6 видно, что разложение вектора $\vec{r}(t)$ по единичным векторам $\vec{i}$ и $\vec{j}$ имеет вид

$$\vec{r}(t)=x(t)\,\vec{i}+y(t)\,\vec{j}.$$

Мгновенная скорость точки M определяется точно так же, как и в случае прямолинейного движения: берут

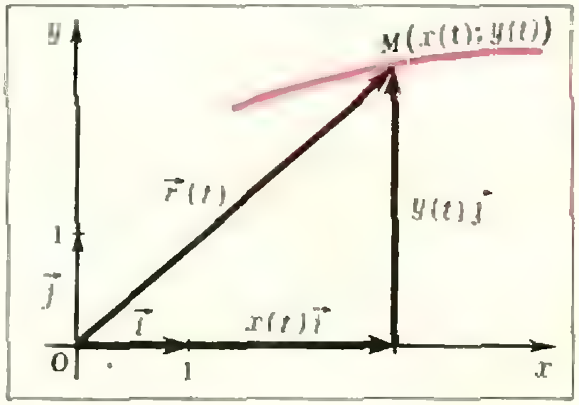


Рис. 6

промежуток времени $[t, t+\Delta t]$, рассматривают перемещение точки M за этот промежуток времени, делят его на Δt и устремляют Δt к нулю. Разница состоит лишь в том, что перемещение точки M выражается не числом Δx, а вектором, идущим из положения точки M в момент времени t в ее положение в момент времени $t+\Delta t$ (рис. 7). Этот вектор обозначают $\Delta\vec{r}$, и он равен $\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)$, то есть $\Delta x\vec{i} + \Delta y\vec{j}$. При делении на Δt получаем вектор, параллельный вектору $\Delta\vec{r}$, но имеющий иную длину. Он показывает среднюю скорость движения точки за промежуток времени $[t, t+\Delta t]$, $\vec{v}_{ср} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$.

Если устремить Δt к нулю, то полученный вектор $\vec{v}_{ср.}$ будет поворачиваться вокруг точки M, и в пределе окажется направленным по касательной в сторону движения точки. Вектор $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\vec{v}_{ср.}$ обозначают $\vec{v}_{мгн.}$ и называют *вектором мгновенной скорости* в момент времени t. Таким образом,

$$\vec{v}_{мгн.} = \lim_{\Delta t\to 0}\vec{v}_{ср.} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

Иными словами, *вектор мгновенной скорости является производной вектор-функции $\vec{r}(t)$*. По другому его можно записать так:

$$\vec{v}_{мгн.} = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j}.$$

Поскольку вектор $\vec{v}_{мгн.}$ направлен по касательной к траектории движущейся точки, отношение $\frac{y'(t)}{x'(t)}$ равно угловому коэффициенту этой касательной: $k_{кас.} = \frac{y'(t)}{x'(t)}$.

Наглядный смысл имеет длина вектора $\vec{v}_{мгн.}$. Она выражает *линейную скорость* движения точки в момент времени t. Иными словами, если обозначить длину дуги траектории, пробегаемую за промежуток времени $[t, t+\Delta t]$, через Δl, то $|\vec{v}_{мгн.}| = \lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta l}{\Delta t} = \frac{dl}{dt}$. Но, по теореме Пифагора, длина вектора $x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j}$ равна $\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(x))^2}$. Значит,

$$\frac{dl}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}, \qquad (4)$$

то есть

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Формула (4) лежит в основе вычисления длин многих кривых. Например, с ее помощью можно найти длину циклоиды (кривой, получаемой при качении окружности по прямой), эвольвенты круга (кривой, получаемой при разматывании нити, намотанной на окружность), и т. д.

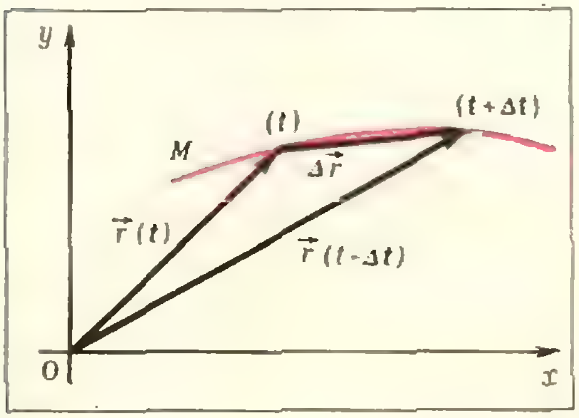


Рис. 7.

10. Производные тригонометрических функций

Покажем, как с помощью физических соображений можно найти производные тригонометрических функций. Пусть по окружности единичного радиуса с единичной угловой скоростью движется точка, и пусть в начальный момент времени она находилась в

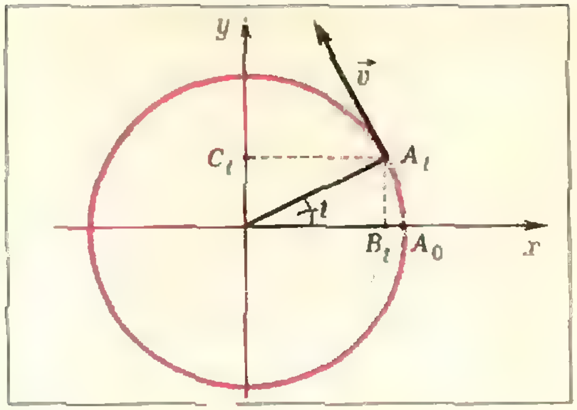


Рис. 8.

положении A_0, а в момент времени t — в положении A_t (рис. 8). Дуга A_0A_t имеет длину t, то есть центральный угол A_0OA_t содержит t радиан. По определениям синуса и косинуса ордината точки A_t равна $\sin t$, абсцисса точки A_t равна $\cos t$. Значит, проекция B_t точки A_t на ось абсцисс движется по закону $x = \cos t$, а проекция C_t точки A_t на ось ординат — по закону $y = \sin t$. Найдем скорости этих движений.

Заметим, что линейная скорость точки A_t, как и угловая скорость, равна 1. Разложим линейную скорость на две составляющие — горизонтальную и вертикальную. Вектор $\vec{v}$ скорости точки A_t (имеющий длину 1) направлен по касательной к окружности, проведенной в точке A_t, и потому образует с осью Ox угол $t+\frac{\pi}{2}$, а с осью Oy — угол t. Следовательно, проекция вектора $\vec{v}$ на ось Ox (то есть скорость движения точки B_t) равна $v_x = \cos\left(t+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin t$, а его проекция на ось Oy (то есть скорость движения точки C_t) равна $v_y = \cos t$.

Так как скорость есть производная от пути по времени, то, учитывая, что закон движения точки $B_t : x = \cos t$, а скорость $v_x = -\sin t$, получаем, что $(\cos t)' = -\sin t$.

Для точки $C_t : y = \sin t$, $v_y = \cos t$, откуда $(\sin t)' = \cos t$.

Год 1975

Число 1975 можно получить из одинаковых цифр, используя математические знаки «+», «−», «:», «×», «√», «!» (факториал) следующим образом:

$$1975=(1+1)^{11}-(11+1)\cdot(1+1+1)!-1;$$

$$1975=\sqrt{2^{22}}-[(2^2!:2)^2+2]:2;$$

$$1975=(3!+3!)^3+[(3!)!+3]:3+3!;$$

$$1975=\left(\sqrt{\sqrt{\sqrt{(4!-4)^{4!}}}}-4\right):4-4!;$$

$$1975=(55\cdot5+5!)\cdot5;$$

$$1975=6!+6!+6!-(6!-6):6-66;$$

$$1975=(7\cdot7-7-7)\cdot77-7!:7;$$

$$1975=\left[\left(\sqrt{\sqrt{8+8}}\right)^8-8\right]\times8-8-8:8;$$

$$1975=[9\cdot9-(\sqrt{9})!]\times[9\sqrt{9}-(\sqrt{9})!:9].$$

Можно также записать число 1975, используя несколько раз его же цифры:

$$1975=197\cdot5+1\cdot975+(1+9-7)\cdot5;$$

$$1975=1\cdot975+1\cdot975-1-9+7\cdot5;$$

$$1975=(-1-9+7\cdot5)\times(1+\sqrt{9}+75);$$

$$1975=(19+75)\times(19+7-5)+1\cdot\sqrt{9}-7+5.$$

Н. И. Нестеренко

Оптические свойства эллипса, гиперболы и параболы

В. Г. Болтянский

Хорошо известна задача о нахождении на прямой l такой точки M, для которой сумма расстояний от двух заданных точек A, B, лежащих по одну сторону прямой l,— наименьшая. Искомой будет точка пересечения отрезка A_1B с прямой l, где A_1 — точка, симметричная A относительно прямой l (рис. 1). В самом деле,

$$|AM| + |MB| = |A_1M| + |MB| = |A_1B|,$$

тогда как для любой другой точки M' прямой l имеем

$$|AM'| + |M'B| = |A_1M'| + |M'B| > |A_1B|.$$

Иначе говоря,

$$|AM'| + |M'B| > |AM| + |MB|. \quad (1)$$

Все это хорошо, может возразить нетерпеливый читатель, но задача эта проста и хорошо известна. И какое отношение все это имеет к эллипсу или параболе? Минуточку терпения! Взглянем еще раз на чертеж: $\angle 1 \cong \angle 3$, а так как, кроме того, $\angle 2 \cong \angle 3$, то $\angle 1 \cong \angle 2$. Поэтому из решения рассмотренной задачи вытекает следующее утверждение:

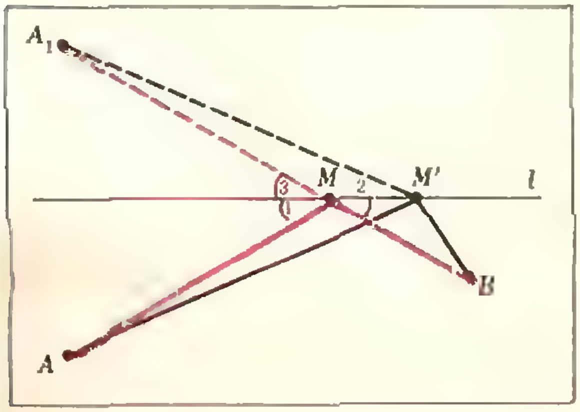


Рис. 1.

Пусть A и B — две точки, лежащие по одну сторону прямой l, и M — такая точка прямой l, что отрезки AM и MB образуют с прямой l равные углы. Тогда для любой точки M' прямой l, отличной от M, справедливо неравенство (1).

Вот теперь мы достаточно «вооружены» для рассмотрения *оптического свойства эллипса*. Возьмем на эллипсе, имеющем фокусы A и B, произвольную точку M (рис. 2). Для любой точки N, принадлежащей эллипсу, справедливо равенство

$$|AN| + |BN| = |AM| + |BM|,\ ^{*)}$$

а для точки N, лежащей внутри эллипса, сумма $|AN| + |BN|$ будет меньше, чем $|AM| + |BM|$. Построим прямую l, проходящую через M и образующую равные углы с отрезками AM и BM. Если теперь M' — произвольная точка прямой l, отличная от M, то как мы видели, сумма $|AM'| + |BM'|$ будет больше $|AM| + |BM|$, и потому точка M' лежит вне эллипса.

Итак, прямая l имеет только одну общую точку с эллипсом, а именно, точку M; все же остальные точки

---

*) Это свойство можно считать определением эллипса (см. статью Н. Н. Бронштейна «Эллипс», «Квант» № 1, 1975).

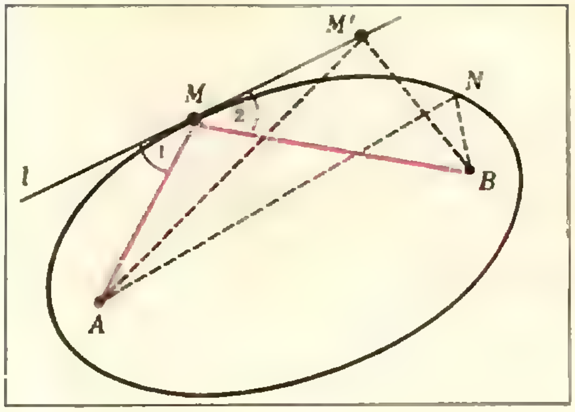


Рис. 2.

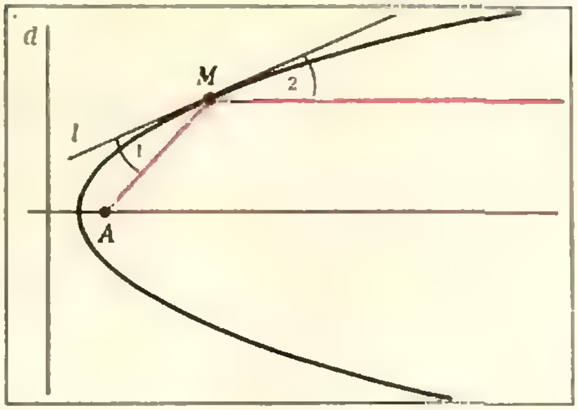


Рис. 4.

прямой l расположены вне эллипса. Такую прямую называют *касательной* к эллипсу. Таким образом, *касательная к эллипсу, проведенная в точке* M, *образует конгруэнтные углы с радиусами-векторами* $\overrightarrow{AM}$ *и* $\overrightarrow{BM}$. Это и есть оптическое свойство эллипса.

О том, почему это свойство называется «оптическим», мы поговорим ниже, а сейчас обратимся к гиперболе и параболе. Оптические свойства этих линий ясны из рисунков 3 и 4. На рисунке 3 точки A и B являются фокусами гиперболы, а на рисунке 4 точка A — фокус, а прямая d — директриса параболы. В обоих случаях оптическое свойство выражается условием $\angle 1 \cong \angle 2$.

Для гиперболы доказательство оптического свойства аналогично доказательству, проведенному для эллипса, только надо воспользоваться задачей о нахождении на прямой l такой точки, для которой разность расстояний от двух заданных точек A, B наибольшая. Предоставляем читателю самостоятельно провести это доказательство.

Рассматривая параболу, надо воспользоваться тем, что для точки N, лежащей на самой параболе, справедливо равенство $|AN| = |NH|$ (рис. 5), а для точки N', лежащей во внутренней области параболы, $|AN'| < |N'H'|$. Если теперь провести биссектрису l угла AMK (рис. 5), то для любой отличной от M точки M' прямой l найдем:

$$|AM'| = |M'K| > |M'K'|,$$

то есть точка M' лежит во внешней области параболы. Итак, вся прямая l, кроме точки M, лежит во внешней области, то есть внутрен-

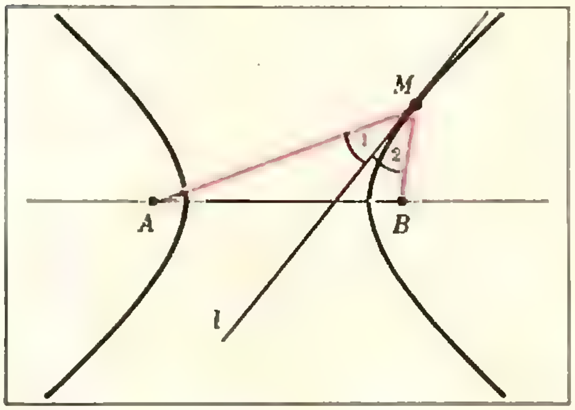


Рис. 3.

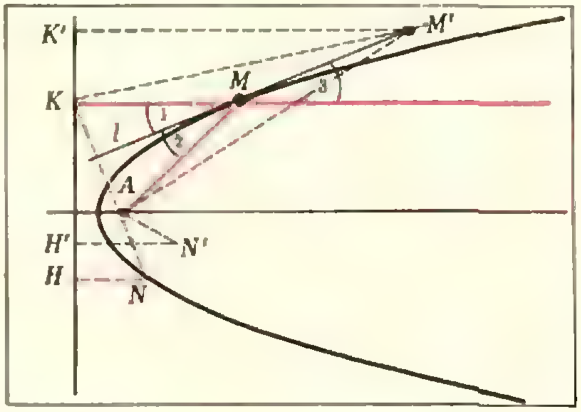


Рис. 5.

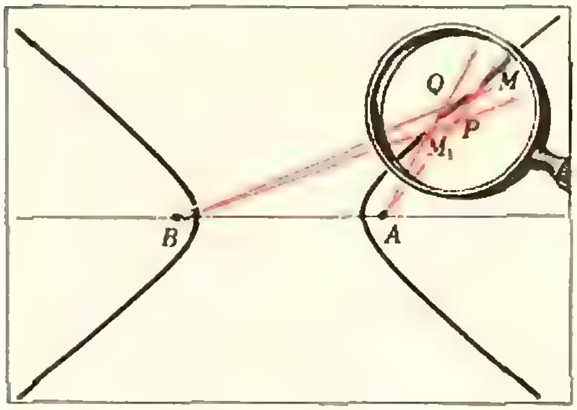


Рис. 6.

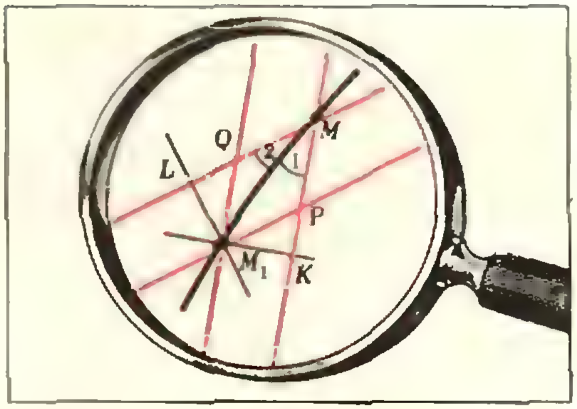


Рис. 7.

няя область параболы лежит по одну сторону от l, а это означает, что l — *касательная* к параболе. Это и дает доказательство оптического свойства параболы: $\angle 1 \cong \angle 2$, так как l — биссектриса угла AMK *).

Можно указать еще один способ доказательства оптического свойства; рассмотрим его на примере гиперболы. Возьмем на гиперболе две очень близкие точки M и M_1 (рис. 6), и пусть P — точка пересечения прямых AM и BM_1, а Q — точка пересечения прямых AM_1 и BM. Посмотрим теперь «через лупу» на четырехугольник M_1PMQ (рис. 7). Мы можем считать (приблизительно), что $[PM_1] \parallel [MQ]$ и $[PM] \parallel [M_1Q]$, так как точки A и B находятся очень далеко — сравнительно с размерами четырехугольника M_1PMQ. Итак, будем считать (приближенно), что M_1PMQ параллелограмм. Проведем теперь окружности с центрами A и B, проходящие через точку M_1. Вблизи рассматриваемого параллелограмма (см. рис. 7) дуги этих окружностей будут представляться прямыми M_1K и M_1L, перпендикулярными сторонам параллелограмма. Мы имеем:

$$|AM|-|BM|=(|AK|-|KM|)-(|BL|+|LM|)=(|AM_1|+|KM|)-(|BM_1|+|LM|)=(|AM_1|-|BM_1|)+(|KM|-|LM|).$$

Но так как обе точки M, M_1 лежат на гиперболе, то $|AM|-|BM|=|AM_1|-|BM_1|$, и потому $|KM|=|LM|$. Полученное равенство означает, что прямоугольные треугольники KMM_1 и LMM_1 конгруэнтны (по гипотенузе и катету), и, следовательно, $\angle 1 \cong \angle 2$. Это и дает доказательство оптического свойства (для того чтобы это «приближенное» рассуждение сделать точным, нужно еще перейти к пределу при $M_1 \to M$).

Теперь рассмотрим некоторые оптические и механические интерпретации доказанного свойства. Предположим, что эллипс представляет собой «зеркальную» кривую, от которой луч света отражается по закону «угол падения равен углу отражения». Если в одном фокусе такого зеркального эллипса помещен точечный источник света, то после отражения от стенок эллипса все лучи пройдут через второй фокус,— это является непосредственным следствием оптического свойства. Описанное явление можно наблюдать реально, в трехмерном пространстве. Для этого нужно взять поверхность, получающуюся вращением эллипса вокруг прямой, проходящей через его фоку-

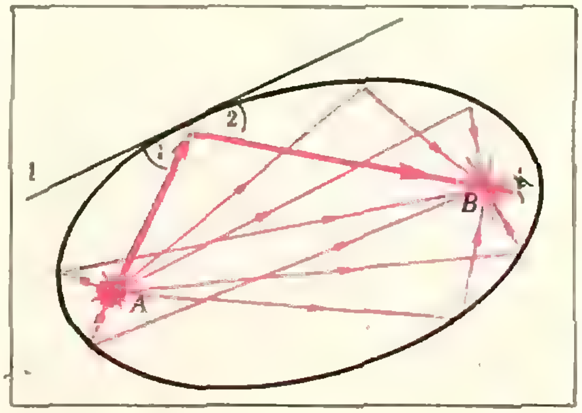


Рис. 8.

---

*) Другие доказательства оптических свойств эллипса, гиперболы и параболы см. в статье И. Н. Бронштейна «Общие свойства конических сечений», «Квант», 1975, № 5.

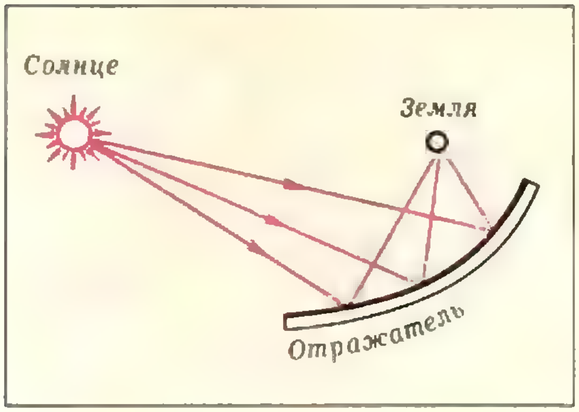


Рис. 9.

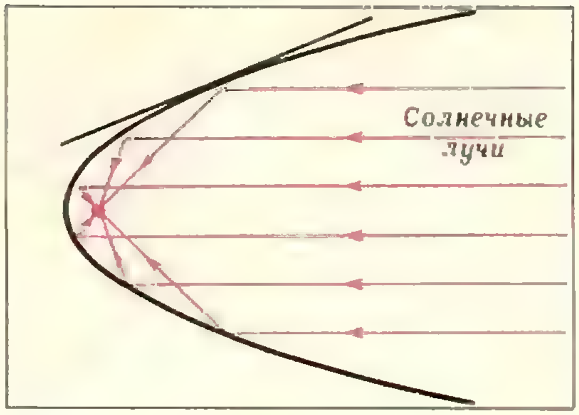


Рис. 10.

сы. Если такую поверхность, называемую *эллипсоидом вращения*, покрыть изнутри зеркальным слоем, и в одном из фокусов поместить точечный источник света («солнце»), то наблюдатель, находящийся внутри эллипсоида, увидит два «солнца». В самом деле, обратив взгляд к первому фокусу, наблюдатель непосредственно увидит размещенное там «солнце». Но и, посмотрев в направлении второго фокуса (где в действительности ничего нет), он также увидит «солнце» (рис. 8). И как бы ни перемещался наблюдатель внутри зеркального эллипсоида, на него почти везде будут светить два «солнца». Аналогичную картину можно наблюдать внутри зеркального *гиперболоида вращения* или *параболоида вращения*.

Но вот наблюдатель, находящийся внутри зеркального эллипсоида, решил принять меры, которые избавят его от «мнимого солнца», и поместил во втором фокусе небольшое непрозрачное тело («экран»), преграждающее путь отраженным лучам. Результат оказывается несколько неожиданным: теперь все лучи, исходящие от «солнца» *A*, после отражения от зеркального эллипсоида собираются («фокусируются») на «экране» *B*, и это может вызвать интенсивный его разогрев. И заметьте, для такой фокусировки не обязательно иметь целый зеркальный эллипсоид, а можно использовать лишь часть его поверхности.

А что увидит «несгораемый» наблюдатель, оказавшийся во втором фокусе *B* зеркального эллипсоида, если в первый его фокус *A* поместить источник света? Все лучи, выходящие из точки *A* и отражающиеся от эллипсоида, попадают в точку *B*. Таким образом, для наблюдателя весь эллипсоид будет светиться.

Иллюстрацию этого явления вы видите на первой странице обложки — в качестве источника света использована свеча, а роль зеркального эллипсоида играет рефлектор электрокамина (хотя нельзя ручаться, что он имеет в точности форму эллипсоида, но и свеча — не точка, и ее размеры компенсируют неправильность формы рефлектора).

Если, например, изготовить зеркальный эллиптический отражатель, в одном фокусе которого находится Солнце (настоящее!), а в другом — котел с водой, то можно добиться кипения воды в котле за счет сфокусированного отражателем излучения Солнца.

Удивительного в этом ничего нет: ведь отражатель имеет большую площадь, и со всей его поверхности солнечная энергия направляется на обогрев котла. Такие солнечные установки уже сейчас имеют некоторое применение. А в будущем (кто знает?), может быть, удастся, построив огромный зеркальный отражатель (рис. 9), использовать энергию тех лучей, которые проходят мимо Земли?

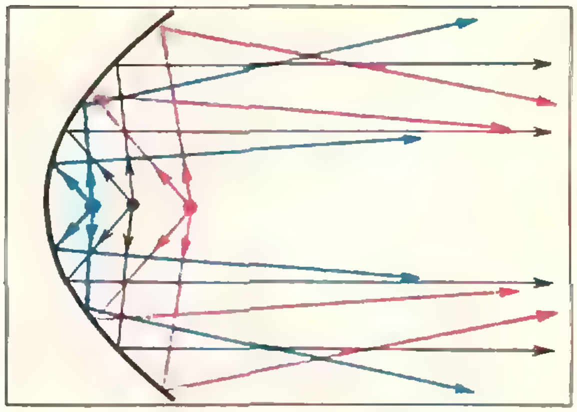


Рис. 11.

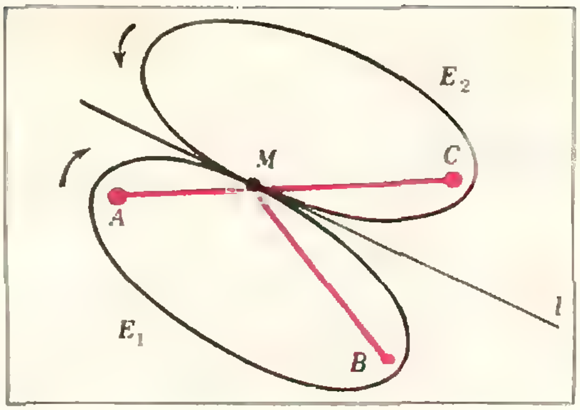


Рис. 12.

Если считать солнечные лучи приблизительно параллельными, то для их фокусировки можно использовать оптическое свойство параболы (рис. 10). Впрочем, сравнительно небольшая дуга очень вытянутого эллипса практически не отличается от дуги параболы.

Применяются параболические рефлекторы (отражатели) и в современных телескопах. Конечно, в этом случае свет далекой звезды фокусируют не с целью разогрева, а для того, чтобы звезду можно было увидеть (например, чтобы собранного рефлектором света было достаточно для воздействия на фотопленку).

Если в солнечных установках и телескопах свет, идущий от далекого источника (практически «из бесконечности»), собирается в фокусе, то в прожекторе — наоборот: свет от мощной лампы, помещенной в фокусе, после отражения от параболического рефлектора уходит параллельным пучком лучей (черные линии на рисунке 11)*). Если же лампу чуть удалить от зеркала, то рефлектор действует наподобие эллиптического — получается «почти» сходящийся пучок лучей (красные линии). Приближение же лампы к зеркалу даст примерно такую же картину лучей, что и в гиперболическом отражателе: лучи расходятся (синие линии). Такие рефлекторы используются не только в прожекторах или автомобильных фарах, но и в проекционных аппаратах, обогревательных приборах, медицинских установках (лампы синего света, кварцевые лампы и др.).

Наконец, укажем еще одно — на этот раз механическое — применение оптического свойства. На рисунке 12 изображен эллипс E_1 и симметричный ему относительно касательной l эллипс E_2. Из чертежа видно, что точки A, M и C лежат на одной прямой, причем

$$|AC| = |AM| + |MC| = |AM| + |MB|,$$

то есть расстояние между точками A и C равно *большой оси* эллипса. Закрепим теперь эллипсы в точках A и C так, чтобы они могли вращаться вокруг этих точек. Если вращать эллипс E_1 вокруг точки A, то для каждого его положения существует точка M, в которой эллипс пересекает отрезок AC; проведя в точке M касательную, найдем единственное соответствующее положение эллипса E_2. Иными словами, эллипс E_2 будет также вращаться (вокруг точки C), увлекаемый эллипсом E_1. На этом основано устройство *эллиптической зубчатой передачи*: она преобразует равномерное вращение эллипса E_1 вокруг точки A в неравномерное вращение эллипса E_2 вокруг точки C.

---

*) О «физических» особенностях этого явления рассказывается в статье М. И. Файнгольда «Этот удивительный параболоид» (с. 24).

Этот удивительный параболоид

В статье В. Г. Болтянского (см. с. 19) рассказано об оптических свойствах конических сечений, в частности — параболы. «Физическое» определение оптического свойства параболы можно сформулировать так: луч света, падающий на параболу параллельно ее оси симметрии, после отражения проходит через фокус параболы. Из свойства обратимости световых лучей следует, что луч, идущий из фокуса параболы, после отражения от нее становится параллельным ее оси симметрии.

В настоящей статье мы расскажем о некоторых чисто «физических» особенностях отражения света от параболоида — поверхности, образованной вращением параболы вокруг оси симметрии.

Параболическое зеркало — это параболоид, внутренняя поверхность которого зеркально отражает падающий на нее свет. Если свет падает на такое зеркало параллельно оси симметрии параболоида, то после отражения все лучи проходят через его фокус, как бы собираются в нем. И наоборот, лучи от точечного источника, расположенного в фокусе, отразившись от поверхности параболоида, выходят параллельным пучком.

Важно отметить, что каждый из упомянутых эффектов является результатом только одного отражения лучей от поверхности параболоида. Но если сделать параболическое зеркало достаточно глубоким, то большинство входящих в него лучей испытает два отражения (рис. 1). После первого отражения каждый луч, пройдя через фокус, снова отражается от «противоположной» стороны зеркала. Иначе говоря, фокус становится как бы самостоятельным точечным источником света *). Но лучи от такого источника выходят из зеркала параллельным пучком. Таким образом, мы приходим к следующему выводу: параболоид преобразует входящий в него пучок лучей, параллельных оси симметрии, в выходящий пучок, также параллельный оси симметрии.

Но в «энергетическом» отношении падающий и отраженный пучки оказываются различными. Для того чтобы понять, о чем идет речь, посмотри-

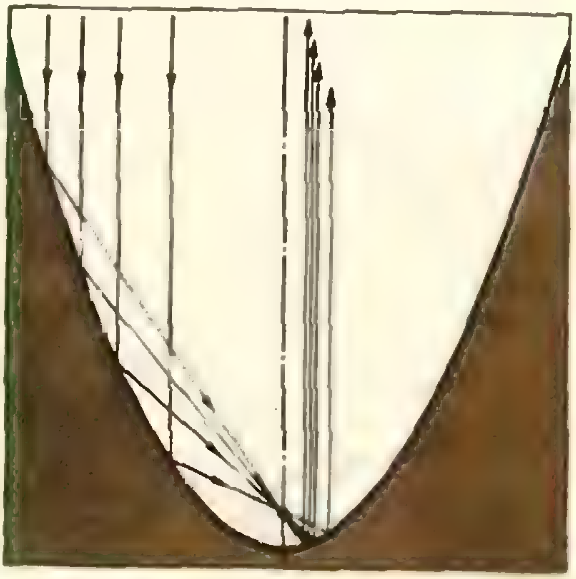


Рис. 1.

---

*) В действительности определение «точечный» для такого источника подходит лишь частично — в смысле малости размеров. О том, чем отличается этот источник от точечного, мы расскажем дальше.

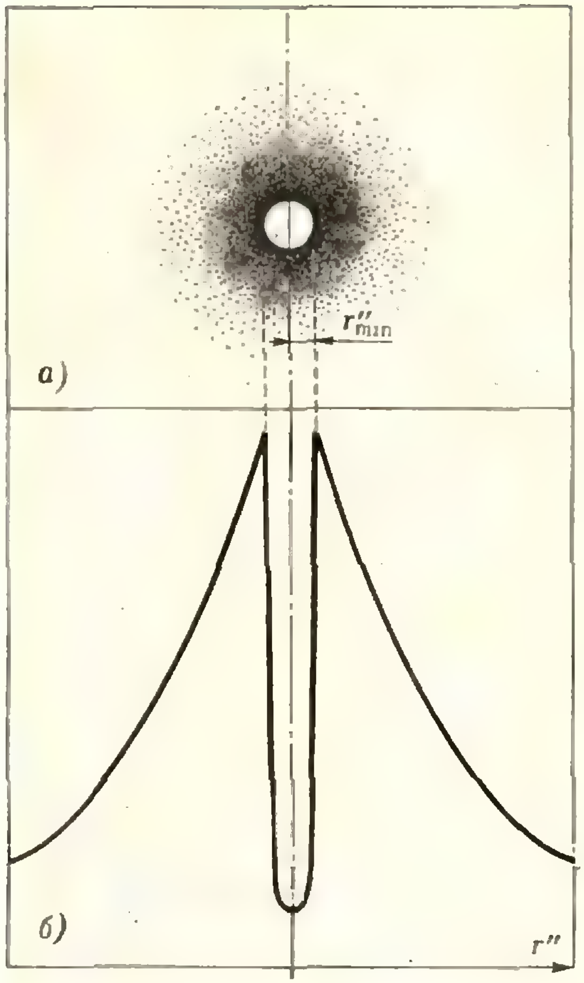


Рис. 2. а) Картина распределения интенсивности в поперечном сечении выходящего пучка. б) График изменения интенсивности в зависимости от расстояния до оси пучка.

те на рисунок 2. Он иллюстрирует результаты следующего несложного опыта. На оси симметрии зеркала перпендикулярно ей установлена фотопластинка. Светочувствительная поверхность ее обращена «внутрь» параболоида. Зеркало освещается пучком света, параллельным оси симметрии, причем, распределение энергии в поперечном сечении падающего пучка однородно, то есть через единичную площадку, перпендикулярную распространяющемуся пучку, в любом месте проходит за одно и то же время одно и то же количество энергии. Это означает, что падающий свет засвечивал бы фотопластинку равномерно. Но на светочувствительную поверхность пластинки попадают отраженные лучи. И пластинка оказывается засвеченной так, как показано на рисунке 2.

Сначала объясним этот факт с помощью наглядных соображений. Пусть OZ — ось симметрии, r', r'' — расстояния от оси до падающего и соответствующего ему выходящего луча (рис. 3). Чем дальше от оси OZ падает луч, тем ближе к ней он выходит, то есть чем больше r', тем меньше r''. Поэтому энергия «периферийных» областей входящего пучка «перебрасывается» к оси выходящего. Если падающий пучок достаточно широкий (большой радиус зеркала), то это приведет к существенной концентрации энергии вдоль оси. В результате наружу энергия выходит практически в виде узкого «светового шнура», причем, чем шире входящий пучок, тем уже выходящий шнур.

Итак, мы приходим к выводу: параболоид может концентрировать энергию не только в фокусе, но и вдоль оси симметрии.

Нетрудно произвести количественный расчет этого эффекта. Рассмотрим параболу, вращением которой относительно оси OZ создается поверхность параболоида. Если начало координат находится в фокусе, то уравне-

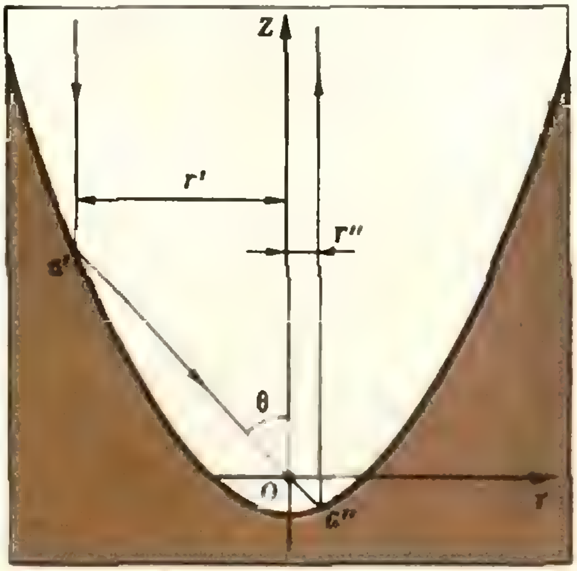


Рис. 3.

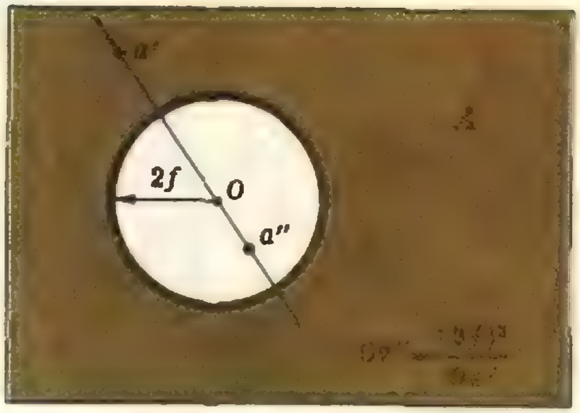


Рис. 4.

ние параболы имеет вид

$$z=\frac{r^2}{4f}-f, \qquad (1)$$

где f — фокусное расстояние, а r и z — «абсцисса» и «ордината» произвольной точки параболы. Входящий луч, «встретивший» параболу в точке a' на расстоянии r' от оси симметрии, отразится, пройдет через фокус и снова встретит параболу в точке a'' на расстоянии r'' от оси OZ (см. рис. 3). Обозначим через θ угол между OZ и «промежуточным» отрезком $a'a''$ нашего луча. Уравнение прямой $a'a''$ запишется в виде

$$z=-r\operatorname{ctg}\theta. \qquad (2)$$

Точки a' и a'' принадлежат одновременно и параболе (1), и прямой (2). Поэтому для них мы можем приравнять правые части (1) и (2):

$$r^2+4fr\operatorname{ctg}\theta-4f^2=0. \qquad (3)$$

Решая это уравнение, находим:

$$r_1=-2f\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}, \quad r_2=2f\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}. \qquad (4)$$

Корни r_1 и r_2 — это значения координаты r для точек a' и a''. Таким образом, $r'=|r_1|$, $r''=r_2$. Из (4) следует

$$r'r''=4f^2. \qquad (5)$$

Формулу (5) можно получить с помощью теоремы Виета, не решая уравнения (3). Этот результат подтверждает вывод, полученный выше из качественных соображений: расстояния падающего и выходящего лучей от оси OZ обратно пропорциональны друг другу.

Формулу (5) можно «прочитать» следующим образом. Представим себе плоскость A, перпендикулярную оси OZ. Пусть каждый луч, входящий в параболоид или выходящий из него параллельно оси OZ, пересекает эту плоскость и оставляет на ней след в виде точки (см. рис. 4). Согласно формуле (5) *двукратное отражение от параболоида* соответствует преобразованию точек плоскости A, переводящему всякий отрезок $Oa'=|r_1|$ в отрезок $Oa''=\left|\frac{4f^2}{r_1}\right|$. О таком преобразовании подробно рассказано в журнале «Квант» № 8 за 1971 г. Оно носит название *инверсии относительно окружности радиуса* $2f$ с центром в точке O *). Там же описаны устройства, практически осуществляющие такое преобразование,— инверсор Поселье и инверсор Гарта.

В формулах (4) и (5) содержится вся информация о рассматриваемом явлении перераспределения энергии падающего пучка света. Попробуем ее извлечь.

Выделим в падающем на зеркало пучке в плоскости A, нормальной к оси параболоида, узкую кольцевую площадку шириной $\Delta r'$ с внутренним радиусом r' $(\Delta r' \ll r')$. Через эту площадку проходят лучи света, расстояние до которых от оси симметрии лежит в интервале $[r', r'+\Delta r']$ (см. рис. 5). После двойного отражения от зеркала эти лучи пересекают плоскость A в точках, лежащих вну-

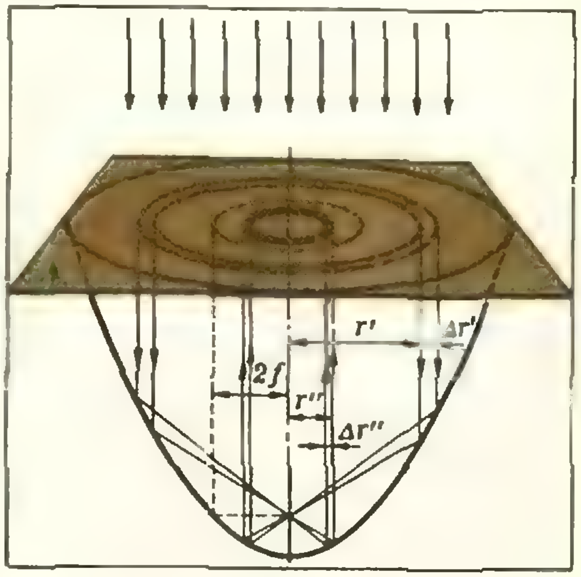


Рис. 5.

---

*) На самом деле в данном случае мы имеем не «чистую» инверсию, а композицию двух преобразований: инверсии и симметрии *относительно точки O*.

три кольца шириной $\Delta r''$ с внешним радиусом r''. То есть внешнему радиусу $r' + \Delta r'$ «падающего» кольца соответствует внутренний радиус $r'' - \Delta r''$ «отраженного» кольца. Согласно (5) произведение этих радиусов равно $4f^2$ *), то есть

$$(r' + \Delta r')(r'' - \Delta r'') =$$
$$= r'r'' + r''\Delta r' - r'\Delta r'' - \Delta r'\Delta r'' = 4f^2.$$

Учитывая, что $r'r'' = 4f^2$, получим:

$$r''\Delta r' - r'\Delta r'' - \Delta r'\Delta r'' = 0.$$

Так как $\Delta r' \ll r'$ и $\Delta r'' \ll r''$, последним членом в этом выражении можно пренебречь и записать

$$r''\Delta r' - r'\Delta r'' = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\Delta r''}{\Delta r'} = \frac{r''}{r'} = \frac{4f^2}{r'^2},$$

или

$$\frac{\Delta r''}{\Delta r'} = \frac{4f^2}{r'^2}, \quad \Delta r'' = \Delta r' \frac{4f^2}{r'^2}. \qquad (6)$$

Таким образом, энергия, которая в падающем пучке проходила через кольцевую площадку шириной $\Delta r'$, после двойного отражения лучей от зеркала проходит через кольцевую площадку $\Delta r'' < \Delta r'$. Это означает, что количество энергии, проходящей за единицу времени через единицу площади (эту характеристику называют интенсивностью), в «отраженном» кольце больше, чем в «падающем». Мы рассматривали случай, когда $r' > 2f$. Если $r' < 2f$, то «отраженное» кольцо шире «падающего», и значит, интенсивность отраженного света меньше, чем интенсивность падающего.

Итак, в результате отражения света от параболического зеркала происходит перераспределение интенсивности света. Найдем, как изменяется интенсивность в зависимости от расстояния до оси симметрии параболоида. Пусть интенсивность падающего света равна J_0. Тогда количество энергии, проходящей за единицу времени через кольцевую площадку шириной $\Delta r'$ (то есть световой поток через кольцо), равно произведению J_0 на площадь кольца, то есть

$$\Delta\Phi = J_0 2\pi r'\Delta r',$$

где r' — внутренний радиус кольца *). После двойного отражения света от зеркала весь этот поток выйдет через площадку $2\pi r''\Delta r''$. Поэтому в выходящем пучке интенсивность равна

$$J = \frac{\Delta\Phi}{2\pi r''\,\Delta r''} =$$
$$= J_0 \frac{r'\,\Delta r'}{r''\,\Delta r''} = \frac{16f^4}{(r'')^4} J_0. \qquad (7)$$

Формула (7) описывает резкое возрастание интенсивности по мере уменьшения r'', то есть по мере приближения к оси симметрии параболоида.

Однако, это не означает, что на самой оси интенсивность становится бесконечно большой. Ведь ближе всего к оси выходят те лучи, которые находились на периферии падающего пучка. Очевидно, что максимальное расстояние $r'_{\max}$ от падающего луча до оси симметрии равно радиусу зеркала. Ему соответствует минимальное расстояние $r''_{\min}$ в выходящем пучке. При уменьшении r'' до $r''_{\min}$ интенсивность в выходящем пучке возрастает по закону (7), и при $r'' < r''_{\min}$ интенсивность становится практически равной нулю *). Именно поэтому на рисунке 2 образуется «провал» интенсивности вблизи оси пучка. Однако максимальное значение интенсивности, наблюдаемое вблизи «края провала», может во много раз

---

*) Не будем загромождать запись знаками модулей и будем под r подразумевать численное значение расстояния.

*) Площадь кольца, ограниченного окружностями радиусов r и $r+\Delta r$, равна $S = \pi(r+\Delta r)^2 - \pi r^2 = 2\pi r\Delta r + \pi(\Delta r)^2$. Если $\Delta r \ll r$, то членом с $(\Delta r)^2$ можно пренебречь и считать $S = 2\pi r\Delta r$.

**) Фактически интенсивность в выходящем пучке меняется несколько сложнее из-за дифракции на краях зеркала.

превышать интенсивность J_0 падающего пучка.

Вот сколько информации мы извлекли из простой формулы (5)!

Обратимся теперь к соотношениям (4). Они описывают ход лучей «внутри» параболоида между двумя отражениями. Именно эти лучи, сходясь в фокусе и расходясь из него, как бы образуют здесь фиктивный точечный источник света. Однако, этот источник отличается от реального точечного. Он излучает неизотропно, то есть сила света, испускаемого им в разных направлениях, различна.

Есть что-то мистически красивое во всех этих свойствах параболоида!

Однако, сделанные нами выводы справедливы лишь в рамках идеализированных представлений, которые не точно соответствуют действительности. Мы говорили о параболоиде как о математически идеальной поверхности. Реальное зеркало лишь приближенно соответствует этому «идеалу». Его поверхность не строго симметрична, имеет шероховатости и т. п.

Далее, мы оперировали понятиями луча и параллельного пучка лучей. На самом деле всякий реальный пучок лучей распространяется внутри некоторого телесного угла, не равного нулю. Мы можем говорить лишь о практически параллельном пучке, то есть о пучке, который хотя и расходится, но настолько незначительно, что этой расходимостью внутри определенной области пространства можно пренебречь. Например, пучок лучей, упавший на параболоид от какой-либо звезды, можно считать практически параллельным. Но даже в этом случае выходящий пучок подвергнется так называемой дифракционной расходимости, обусловленной волновой природой света*). Причем чем у́же этот пучок (то есть чем больше диаметр зеркала), тем больше расходятся лучи. Количественно дифракционная расходимость характеризуется углом отклонения луча от направления распространения света. Угол этот по порядку величины равен

$$\alpha \approx \frac{\lambda}{r''_{\min}},$$

где λ — длина волны падающего света. Таким образом, чем тоньше и концентрированнее «световой шнур», тем больше он расходится. Оценим расстояние z, на котором увеличение радиуса шнура из-за расходимости равно самому радиусу $r''_{\min}$ «в начале пути» (вплоть до этого расстояния выходящий шнур можно считать практически параллельным). Очевидно,

$$z \approx \frac{r''_{\min}}{\operatorname{tg}\alpha} \approx \frac{r''_{\min}}{\alpha} \approx \frac{(r''_{\min})^2}{\lambda}.$$

Согласно этой формуле, чем тоньше и интенсивнее пучок, тем меньше, при прочих равных условиях, его «длина параллельности». Следовательно, создание очень глубокого параболоида не только невозможно практически, но бессмысленно и с теоретической точки зрения. Волновая природа света не позволяет получить сколь угодно сильный и параллельный пучок лучей, подобный описанному в романе А. Толстого «Гиперболоид инженера Гарина».

Таким образом, красивые и неожиданные эффекты, связанные с двукратным отражением света от параболоида вращения, возможны лишь в тех пределах, в которых допустимо игнорировать волновой характер света, а именно, когда даже наименьший из всех размеров системы — радиус $r''_{\min}$ — во много раз больше длины волны. Это условие накладывает ограничение на степень «усиления» света.

---

*) Более подробно об этом можно прочитать, например, в «Кванте» № 4 за 1972 г. в статье В. Е. Белонучкина и С. М. Козела «Оптический телескоп».

С. Г. Веров

Брахистохрона, или еще одна тайна циклоиды

Эта статья заканчивает цикл, посвященный одной из самых популярных в математике XVII века кривых — циклоиде: «Касательные к рулеттам», «Тайны циклоиды». Во всех статьях рассказывается о том, как величайшие математики XVII века Галилей, Гюйгенс, Ньютон, Лейбниц, братья Иоганн и Якоб Бернулли решали математические задачи, пользуясь физическими соображениями.

Ошибка Галилея

В самом начале XVII века юный Галилей пытался экспериментально проверить свою догадку о том, что свободное падение — равноускоренное движение. Когда он перенес наблюдения с Пизанской башни в лабораторию, ему стало очень мешать то, что тела падают «слишком быстро». Чтобы замедлить это движение, Галилей решил заменить свободное падение тел их движением по наклонной плоскости, предположив, что и оно будет равноускоренным. Проводя эти опыты, Галилей обратил внимание на то, что в конечной точке величина скорости тела, скатившегося по наклонной плоскости, не зависит от угла наклона плоскости, а определяется только высотой H и совпадает с конечной скоростью тела, свободно упавшего с той же высоты (как вы хорошо знаете, в обоих случаях $|\vec{v}| = \sqrt{2gH}$). Изучив движения по наклонным плоскостям*), Галилей перешел к рассмотрению движения материальной точки под действием силы тяжести по ломаным линиям. Сравнивая времена движения по различным ломаным, соединяющим фиксированную пару точек A и B, Галилей заметил, что если через эти две точки A, B провести четверть окружности (это всегда можно сделать; подумайте — как?) и вписать в нее две ломаные M и L, такие, что ломаная L «вписана» в ломаную M (см. рис. 1), то материальная точка из A в B быстрее попадает по ломаной M, чем по ломаной L (попытайтесь доказать это). Увеличивая у ломаной число звеньев и переходя к пределу, Галилей получил, что по четверти окружности, соединяющей две заданные точки, материальная точка спустится быстрее, чем по любой вписанной в эту четверть окружности ломаной. Из этого Галилей сделал ничем не аргумен-

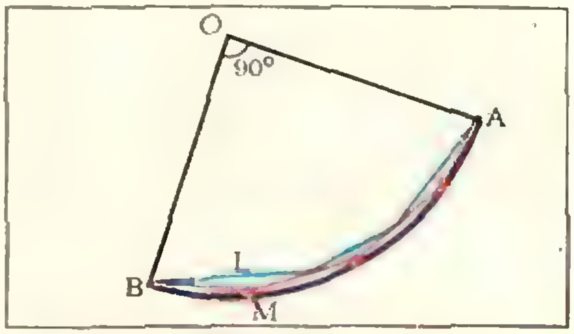


Рис. 1.

---

*) О некоторых наблюдениях Галилея, связанных с движением тел по наклонным отрезкам, см. в статье С. Г. Верова «Тайны циклоиды» (*Задачи Галилея*), «Квант», 1975, № 8.

тированный вывод, что четверть окружности, соединяющая пару заданных точек A, B (не лежащих на одной вертикали), и будет для материальной точки, движущейся под действием силы тяжести, *линией наискорейшего спуска* (позже линию наискорейшего спуска стали называть *брахистохроной*). Впоследствии выяснилось, что это утверждение Галилея было не только необоснованным, но и ошибочным.

Швейцария. Конец XVII века

«*Прогуливаясь по улицам Базеля и обсуждая всевозможные математические вопросы, Иоганн и Якоб Бернулли наткнулись на следующий вопрос: какую форму могла бы принять свободно висящая цепь, укрепленная в двух своих концах? Они скоро и легко сошлись на том взгляде, что цепь примет ту форму равновесия, при которой ее центр тяжести будет лежать возможно ниже... Физическая часть задачи этим исчерпана. Определение кривой с наиболее низким центром тяжести при данной длине между двумя точками A и B есть уже задача только математическая.*» (Мах).

Исследовав *цепную линию* (так называется линия, форму которой принимает гибкая тяжелая нерастяжимая нить, подвешенная в двух точках), братья Бернулли заинтересовались другими задачами, в которых разыскиваются кривые, отвечающие наименьшему значению той или иной величины. В 1696 году Иоганн Бернулли опубликовал заметку «*Новая задача, к разрешению которой приглашаются математики*». Впрочем, эта «новая» задача уже рассматривалась Галилеем. *Речь шла о нахождении брахистохроны — линии, соединяющей фиксированную пару точек, по которой материальная точка спустится под действием силы тяжести быстрее всего.* Задача о брахистохроне, недоступная в начале века даже великому Галилею, оказалась очень своевременной в конце века. Она была очень быстро решена и самим Иоганном Бернулли и его братом Якобом, и их учителем Лейбницем, а также Ньютоном и Лопиталем. Мы расскажем о решении Иоганна Бернулли: оно совершенно неожиданным образом использует соображения из геометрической оптики!

> «Без всякого еще метода, при помощи одной своей геометрической фантазии Иоганн Бернулли одним взглядом решает задачу умело, пользуясь при этом тем, что случайно уже известно,— картина поистине замечательная и удивительно красивая. Мы должны признать в Иоганне Бернулли истинно художественную натуру, действующую в области естествознания. Брат его, Якоб Бернулли, был научным характером совсем другого рода. Ему было уделено больше критики, но гораздо меньше творческой фантазии. И он решил ту же задачу, но гораздо более тяжеловесным образом. Зато он не упустил случая развить с большей основательностью общий метод для решения задач этого рода. Таким образом, мы находим в обоих братьях разделенными те две стороны научного таланта, которые в величайших исследователях природы, каким был, например, Ньютон, бывают соединены с необычайной силой.» (Мах).

Принцип Ферма

Еще в 140 году до н. э. Клавдий Птолемей составил подробную таблицу зависимости угла преломления светового луча при переходе из воздуха в воду от угла падения; но лишь в 1621 году Снеллиус угадал *аналитическую* закономерность, связывающую эти углы:

$$\frac{\sin \alpha_{\text{падения}}}{\sin \alpha_{\text{преломления}}} = k,$$

где k — *коэффициент преломления*, константа для фиксированной пары сред.

В 1650 году Ферма дал замечательную интерпретацию этого закона. Он отправлялся от известного еще Герону Александрийскому факта, что равенство углов падения и отражения можно вывести из предположения, что при отражении свет выбирает наикратчайший путь (рис. 2).

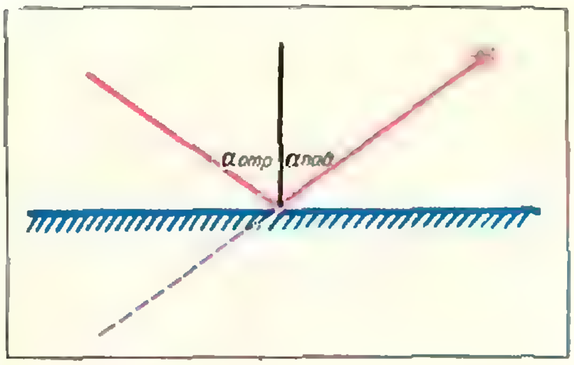


Рис. 2.

Ферма предположил, что *путь распространения света между двумя точками есть такой путь, для прохождения которого свету требуется наименьшее время по сравнению с любым другим путем между этими точками*,— теперь это утверждение носит название *«принципа Ферма»*. Из принципа Ферма, в частности, следует, что поскольку в однородной среде скорость света постоянна, то наименьшее время приходится на путь наименьшей длины. Отсюда следует, что путь света в однородной среде, не имеющей препятствий, прямолинеен, а также —закон отражения. Если же среда имеет переменную плотность, и скорость света в различных ее участках различна, то путь распространения света, на прохождение которого уходит наименьшее время, уже не должен быть прямолинейным. Посмотрим, что происходит в случае преломления.
(Все наши дальнейшие рассмотрения относятся к плоскому случаю).

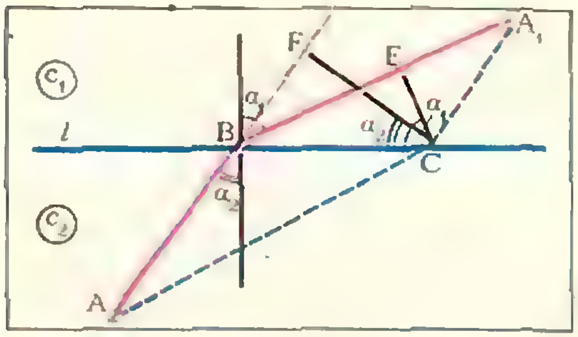


Рис. 3.

Пусть прямая l разделяет две среды (на плоскости), в первой из которых скорость света равна c_1, а во второй — c_2; A_1 и A_2 — точки, лежащие по разные стороны l. Найдем на l такую точку B, что $\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}=\frac{c_1}{c_2}$, где α_1 — угол падения, α_2 — угол преломления (см. рис. 3). Существование и единственность такой точки B легко доказывается. Пусть C — любая другая точка прямой l. Опустим из нее перпендикуляры CE и CF на A_1B и A_2B соответственно. Тогда $\widehat{ECB}=\alpha_1$, $\widehat{FCB}=\alpha_2$, и прохождение отрезка BE со скоростью c_1 займет столько времени, сколько прохождение отрезка BF со скоростью c_2. Значит, свету на прохождение пути A_1BA_2 нужно столько же времени, сколько на прохождение двух отрезков: A_1E со скоростью c_1 и FA_2 со скоростью c_2. Так как длины отрезков A_1C и A_2C больше длин отрезков A_1E и FA_2 соответственно, то свету на прохождение пути A_1CA_2 нужно больше времени, чем на прохождение пути A_1BA_2, и, значит, точка C не годится.

Таким образом, из принципа Ферма следует закон преломления Снеллиуса, причем коэффициент преломления светового луча из одной среды в другую оказывается равным отношению скоростей света в этой паре сред *).

Из принципа Ферма также следует, что в сложной слоистой оптической среде, состоящей из горизонтальных «полос», в каждой из которых скорость света постоянна: $c_1, c_2, \ldots$ (рис. 4),— свет будет распространяться по плоской ломаной с вершинами на разделяющих эти полосы прямых, причем если α_j — угол, который звено ломаной, лежащее в области со скоростью света c_j,

---

*) Принцип Ферма получил обоснование в волновой теории света, построенной Гюйгенсом в 1672—1673 годах.

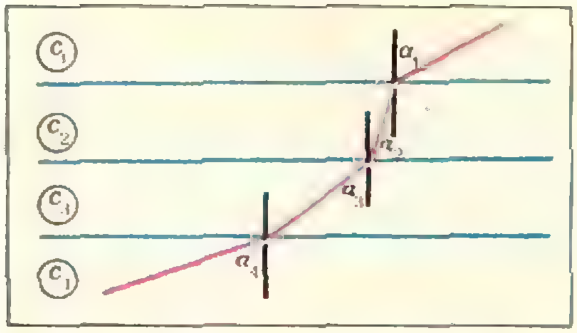


Рис. 4.

образует с вертикалью, то $\frac{\sin\alpha_j}{c_j} = \text{const}$ для всей ломаной. Действительно, если $\frac{\sin\alpha_j}{c_j} \neq \frac{\sin\alpha_{j+1}}{c_{j+1}}$ для некоторого j, то по принципу Ферма по такой ломаной свет распространяться не может: вершину ломаной на границе соответствующих сред можно передвинуть так (не меняя остальных вершин), что общее время, затраченное светом, уменьшится.

Если же в некоторой неоднородной оптической среде скорость света меняется непрерывно, но так, что в точках горизонталей (т. е. в точках с одинаковыми ординатами) она одна и та же: $c(y)$ (значение $y = 0$ соответствует начальному положению точки, из которой выходит луч), то предельным переходом получаем, что в этой среде путь распространения света между двумя точками есть такая кривая L, что

$$\frac{\sin\alpha(y)}{c(y)} = \text{const}, \qquad (1)$$

где через $\alpha(y)$ обозначен угол, который касательная, проведенная к кривой L в точке с ординатой y, образует с вертикалью.

Чтобы перейти к задаче о брахистохроне, заметим теперь, что соотношение (1) мы получили из принципа Ферма, пользуясь лишь тем, что в фиксированной точке нашей неоднородной среды величина скорости света фиксирована и не зависит от направления распространения света (в наших примерах она была постоянна на горизонталях). Но, как мы уже отмечали выше, для тела, движущегося только под действием силы тяжести, $|v(y)| = \sqrt{2gy}$, где y — пройденный по вертикали путь, «потеря» высоты,— и мы получаем, что и в этой задаче величина скорости в каждой фиксированной точке плоскости фиксирована и не зависит от того, по какому пути происходит движение. Поэтому все выводы из принципа Ферма могут быть перенесены и сюда. Следовательно, чтобы попасть из одной заданной точки в другую за минимально возможное время, материальная точка должна двигаться по такому пути L, соединяющему эти две точки (мы предполагаем, что точки не лежат на одной вертикали),

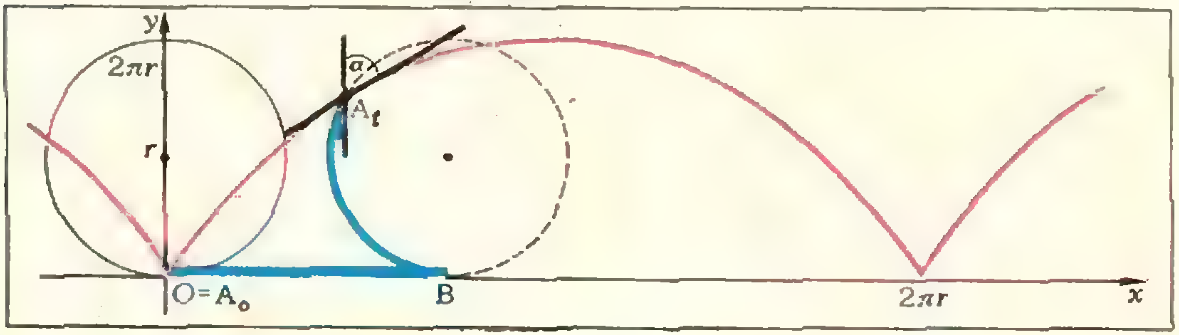


Рис. 5. Циклоида — кривая, которую описывает точка, лежащая на границе круга радиуса r, катящегося без скольжения по направляющей прямой (совпадающей с осью Ox); r называется *радиусом циклоиды*. По определению, длина дуги A_tB равна длине отрезка A_0B, по которому эта дуга прокатилась.

для которого

$$\frac{\sin\alpha(y)}{\sqrt{y}} = \text{const}, \qquad (2)$$

где $\alpha(y)$ — угол между вертикалью и касательной к кривой L, проведенными в точке с ординатой y.

Нам остается лишь отыскать кривую, удовлетворяющую условию (2).

Опять циклоида!

Циклоида (см. рис. 5) была популярнейшей кривой у математиков XVII—XVIII веков. Одно из самых замечательных свойств циклоиды было обнаружено Гюйгенсом и состояло в том, что циклоида — *таутохрона*. Это означает, что если изготовить желоб по форме перевернутой циклоиды и пускать по такому желобу шарик, то с любой высоты в нижнюю точку (совпадающую с вершиной перевернутой циклоиды!) он придет за одно и то же время *).

Математики XVII века «привыкли» к тому, что циклоида — это «палочка-выручалочка» во многих вопросах. И вот ей снова было суждено подтвердить свою «репутацию» — *брахистохрона также оказалась циклоидой*!

В самом деле, если через $\alpha(y)$ обозначить угол, который касательная, проведенная к циклоиде *радиуса r* (получающейся при качении без скольжения по прямой $\{y = 0\}$ круга радиуса r) в точке с ординатой *y составляет с вертикалью*, то

$$\sin\alpha(y) = \sqrt{\frac{y}{2r}} \qquad (3)$$

(см. «Квант» № 8, с. 21, соотношение (1)).

Можно показать, что циклоида является единственной кривой, удовлетворяющей соотношению (3). Таким образом, *брахистохроной, соединяющей две данные точки A и B* (не лежащие на одной вертикали), *служит часть арки* (*или арка*) *перевернутой циклоиды* (см. рис. 6), причем в «верхней» точке A находится *острие* этой циклоиды. Поскольку мы рассматриваем только одну (первую) арку циклоиды, то ее радиус r по точке B определяется однозначно.

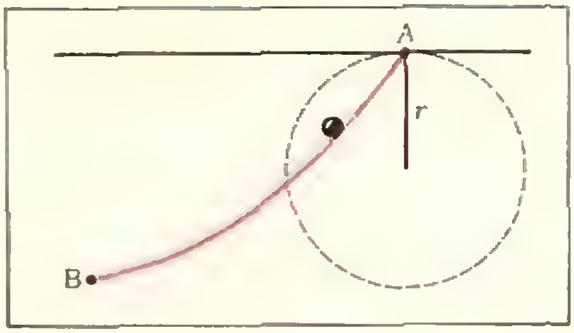


Рис. 6.

Дуга циклоиды, являющаяся брахистохроной, может быть больше полуарки циклоиды. В этом случае материальная точка, двигаясь под действием силы тяжести по брахистохроне, сначала спустится вниз (дойдя до *вершины* перевернутой циклоиды), а затем начнет снова подниматься вверх. И тем не менее, такое движение оказывается более экономным по времени, чем если бы материальная точка отправилась из A в B по прямой!

Для сравнения отметим, что хотя перевернутая циклоида является и таутохроной, и брахистохроной, в первом случае нужно брать дугу с концом в вершине циклоиды, а во втором — с началом в острие.

Несколько задач

Вернемся к оптике. Теперь мы знаем, что если в плоской неоднородной среде величина скорости света меняется по закону $c(x, y) = k\sqrt{H - y}$ (т. е. аналогично изменению величины скорости материальной точки, движущейся под действием силы тяжести), то в такой среде свет между двумя точками будет распространяться по дугам перевернутых циклоид с остриями на прямой $\{y = H\}$.

---

*) О таутохроне и о свойствах циклоиды см. в уже упоминавшихся статьях «Касательные к рулеттам» и «Тайны циклоиды» «Квант», 1975, № 5 и № 8. В этих статьях приводятся доказательства всех утверждений, которыми мы ниже пользуемся.

Попробуйте сейчас решить несколько задач на отыскание в оптически неоднородной среде пути распространения света между двумя точками, если в этой среде задан закон изменения величины скорости света.

Задача 1. Величина скорости света меняется по закону $c(x, y) = k \cdot (y - a)$. Докажите, что свет между двумя точками будет распространяться по дугам полуокружностей с диаметрами на прямой $\{y = a\}$ (причем «начальная» точка находится на этой прямой).

Задача 2. Величина скорости света меняется по закону $c(x, y) = \dfrac{k}{\sqrt{a - y}}$. Докажите, что в этом случае свет между двумя точками будет распространяться по дугам парабол.

Пока во всех задачах величина скорости света зависела только от y. Если же оптическая среда такова, что эта зависимость более сложная, например, величина скорости света постоянна не на горизонталях, а на каких-то кривых — *линиях постоянства* скорости света,— то свет между двумя точками будет распространяться по такой кривой L, для которой

$$\frac{\sin \alpha\,(c\,(x_0, y_0))}{c\,(x_0, y_0)} = \text{const},$$

где $\alpha\,(c\,(x_0, y_0))$ — угол между касательной к кривой L и нормалью к линии постоянства скорости света $c\,(x, y) = c\,(x_0, y_0)$.

Задача 3. Величина скорости света меняется по закону $c(x, y) = k\sqrt{1 - r^2}$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$—расстояние от начала координат. Докажите, что в такой среде свет между двумя точками будет распространяться по дугам окружностей, перпендикулярных к окружности радиуса 1 с центром в начале координат.

Задача 4. Величина скорости света меняется по закону $c(x, y) = kr$. Докажите, что в этом случае свет между двумя точками будет распространяться по дугам *гипоциклоид* (см. *упражнения Ньютона* в конце статьи «Тайны циклоиды», «Квант», 1975, № 8, с. 27).

Если в задачах 1—4 $c\,(x, y)$ интерпретировать как величину скорости некоторого механического движения, то полученные при решении этих задач траектории распространения света будут брахистохронами для соответствующих механических систем.

Аналогия между механикой и оптикой

> *Основная задача механики заключается в том, чтобы определить положение движущегося тела в любой момент времени.*
>
> И. К. Кикоин, А. К. Кикоин, Учебное пособие по физике для 8-го класса средней школы.

Итак, в механике обычно ищется *траектория* материальной точки, если известны действующие на точку силы и заданы начальные положение и вектор скорости (*начальные условия*). Однако можно интересоваться не индивидуальными траекториями, а описанием *всей совокупности* траекторий при заданном законе изменения действующих сил (дополнительное задание начальных условий будет тогда выделять из этой совокупности траекторий конкретную траекторию). Так, классический результат Галилея о движении брошенного тела (горизонтально или под углом к горизонту) заключается в том, что в случае силы тяжести множество траекторий состоит из дуг парабол.

Использование оптики в чисто механических задачах навело на мысль попытаться выделить возможное множество траекторий для конкретной механической системы каким-нибудь *условием минимальности*, аналогичным принципу Ферма. Об этом думал Лейбниц, но первая формулировка принадлежит Мопертюи. Однако его построения касались всего мироздания в целом и не содержали точных утверждений. Первая точная формулировка принадлежит Эйлеру (учившемуся математике у Иоганна Бернулли). Она относится к следующей специальной ситуации.

Пусть материальная точка движется по плоскости под действием такой силы, что потенциальная энергия зависит только от положения точки: $U = U\,(x, y)$. В силу закона сохранения энергии величина скорости точки $|\vec{v}|$ тогда также зависит только от (x, y):

$$|\vec{v}(x,y)| = \sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x,y))}\,.$$

Рассмотрим плоскую неоднородную оптическую среду, в которой величина скорости света меняется по закону $c(x,y) = \frac{k}{|\vec{v}(x,y)|}$. Принцип Эйлера состоит в том, что *траектории света, распространяющегося в такой среде, будут совпадать с возможными траекториями исходной механической системы* (материальной точки массы m с потенциальной энергией $U(x, y)$). Разумеется, принцип Эйлера можно сформулировать так, что в нем не будет идти речь о распространении света.

В частности, из задачи 2 и принципа Эйлера следует приведенное выше утверждение Галилея о траекториях материальной точки, движущейся под действием силы тяжести.

Поясним теперь принцип Эйлера. Для простоты ограничимся случаем, когда $U(x, y)$, а значит, и $|\vec{v}|$, зависит только от y. Поскольку на горизонталях потенциальная энергия постоянна, сила будет направлена вертикально, горизонтальная компонента вектора ускорения равна нулю, а горизонтальная компонента вектора скорости постоянна, то есть

$$|\vec{v}(y)|\cdot\sin\alpha(y) = \text{const}, \qquad (4)$$

где $\alpha(y)$ — угол между вектором скорости и вертикалью в точке траектории с ординатой y. Соотношение (4) вместе с (1) и дает принцип Эйлера для данного частного случая. (В общем же случае следует учесть, что силы действуют перпендикулярно к линиям постоянства потенциальной энергии и что, следовательно, компоненты вектора скорости, касательные к этим линиям постоянства, не меняются.)

В современной механике принципы, обобщающие принцип Эйлера (принцип Гамильтона и др.), играют исключительно важную роль.

Задачи

1. Доказать, что если a и b — корни уравнения $x^4 + x^3 = 1$, то ab является корнем уравнения $x^6 + x^4 + x^3 - x^2 - 1 = 0$.

2. Доказать, что если $x \neq y$, $y \neq z$, $x \neq z$ и

$$\frac{k(1+yz)-y-z}{y-z} = \frac{k(1+zx)-z-x}{z-x} = \frac{k(1+xy)-x-y}{x-y} = u,$$

то $3u^2 - k^2 + 1 = 0$.

3. Доказать что если $xy(x+y) = c$, $yz(y+z) = a$, $zx(z+x) = b$, $xyz = d$,

то $a + b + c + 2d = \frac{abc}{d^2}$.

4. Докажите, что если A, B, C — величины углов треугольника, то для любого натурального n справедливы неравенства

$$(-1)^{n+1}(\cos nA + \cos nB + \cos nC) \leqslant 3/2,$$

и

$$-1 \leqslant (-1)^{n+1} \times \cos nA \cos nB \cos nC \leqslant 1/8.$$

5. Докажите, что если x, y, z — любые действительные числа и a, b, c — стороны треугольника площади Δ, то справедливо неравенство

$$\frac{xy}{ab} + \frac{yz}{bc} + \frac{zx}{ca} \leqslant \left(\frac{ax+by+cz}{4\Delta}\right)^{\frac{1}{2}},$$

причем равенство имеет место в том и только в том случае, когда

$$\frac{x}{a(b^2+c^2-a^2)} = \frac{y}{b(c^2+a^2-b^2)} = \frac{z}{c(a^2+b^2-c^2)}.$$

Н. В.

задачник Кванта

Решения задач из этого номера можно присылать не позднее 1 февраля 1976 г. по адресу: 113035, Москва, Ж-35, ул. Б. Ордынка, 21/16, редакция журнала «Квант». После адреса на конверте напишите, решения каких задач вы посылаете, например: «Задачник «Кванта» М370, М371» или «Ф370». Решения задач по каждому из предметов (математике и физике), а также новые задачи просьба присылать в отдельных конвертах. Задачи из разных номеров журнала присылайте также в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки ваших решений). Условия оригинальных задач, предлагаемых для публикации, присылайте в двух экземплярах вместе с вашими решениями этих задач (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»). После формулировки задачи мы обычно указываем, кто предложил нам эту задачу. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Наиболее трудные задачи отмечены звездочкой.

Задачи

М356—М360; Ф368—Ф372

М356. Из точки M, взятой внутри треугольника $A_1B_1C_1$, опущены перпендикуляры MA_2, MB_2, MC_2 на прямые B_1C_1, A_1C_1 и A_1B_1 соответственно. Затем из той же точки M опущены перпендикуляры MA_3, MB_3, MC_3 на прямые B_2C_2, A_2C_2, A_2B_2 (рис. 1), и так далее. Докажите, что в полученной последовательности треугольников $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$, ... треугольник $A_{3n+1}B_{3n+1}C_{3n+1}$ подобен треугольнику $A_1B_1C_1$.

Я. Н. Суконник

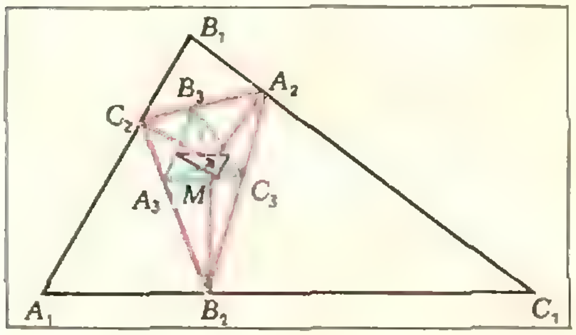


Рис. 1.

М357. Докажите, что если $x+\frac{1}{y}=y+\frac{1}{z}=z+\frac{1}{x}$, то $x=y=z$ или $x^2y^2z^2=1$.

М358. Докажите, что у любого n-угольника ($n \geqslant 4$) есть хотя бы одна диагональ, целиком лежащая внутри n-угольника, и выясните, какое наименьшее число таких диагоналей может иметь n-угольник (при каждом n).

А. Хомодов

М359*. Маленький шарик движется внутри биллиарда, имеющего форму эллипса с фокусами A и B, упруго отражаясь от его бортов, по ломаной $P_1P_2P_3P_4\ldots$ (P_1, P_2, ... — точки эллипса). Докажите, что если звено

P_1P_2 не пересекает отрезок AB, то а) все следующие звенья P_2P_3, P_3P_4,... не пересекают отрезок AB; б) все эти звенья касаются одного и того же эллипса. (Подумайте, как построить этот эллипс.)

А. Н. Земляков

М360*. Про последовательность a_1, a_2, a_3, ... известно, что $|a_1| = 1$ и $|a_{k+1}| = |a_k + 1|$ при каждом $k = 1, 2, \ldots$ Найдите наименьшее возможное значение суммы $|a_1 + a_2 + \ldots + a_n|$, если:

а) $n = 1975$;
б) $n = 1976$.

В. П. Голубятников

Ф368. Ракета массы m стартует под углом α к горизонту. Двигатели ракеты работают t секунд, создавая тягу F и обеспечивая прямолинейное движение ракеты. Пренебрегая изменением массы ракеты и сопротивлением воздуха, определить высоту h, на которой прекращается работа двигателей.

В. А. Погожев

Ф369. Три одинаковых заряженных шарика скреплены непроводящими нитями, образующими прямоугольный треугольник BAC (рис. 2). Угол ABC равен α, $BC = l$. С каким ускорением начнут двигаться заряды, если перерезать нить BC? Заряды шариков равны q, массы — m.

Ф370. Трубка, диаметр которой много меньше ее длины, свернута в кольцо радиуса R. Кольцо поставлено вертикально и заполнено жидкостью, кроме небольшого участка около точки A (рис. 3), в котором находится пузырек воздуха. Пузырек начинает всплывать. Найти его скорость в тот момент, когда он будет проходить точку B. Длина пузырька l. Трением воды о стенки трубки пренебречь.

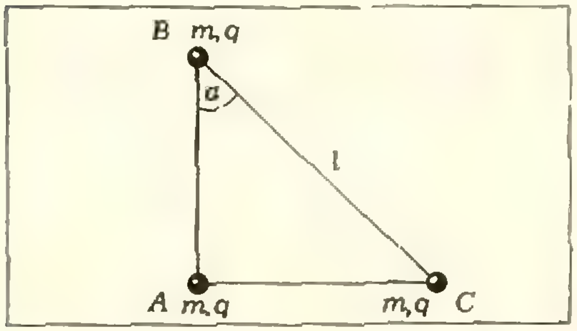


Рис. 2.

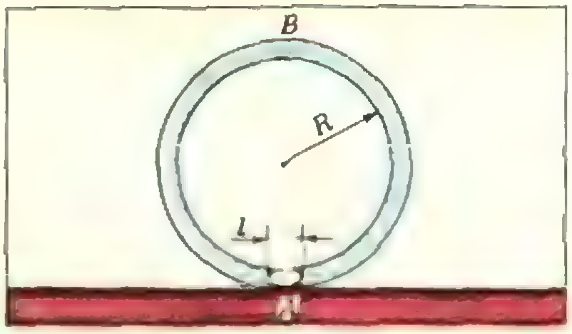


Рис. 3.

Ф371. Пушка массы $M = 200$ *кг* стреляет ядром массы $m = 20$ *кг* под углом $\alpha = 30°$ к горизонту. Заряд пороха $r = 5$ *кг*, его теплота сгорания $q = 1000$ *ккал/кг*. В момент вылета ядра из пушки на него садится Барон Мюнхаузен. Его масса $\mu = 70$ *кг*. На сколько ближе упадет ядро с Мюнхаузеном при том же заряде пороха? На сколько нужно увеличить заряд пороха для того, чтобы Мюнхаузен попал туда же, куда падали ядра до этого?

К. п. д. выстрела принять равным $\eta = 10\%$. Считать, что пушка находится на гладкой поверхности, по которой может скользить без трения.

А. Л. Стасенко

Ф372. Две тонкие положительные линзы с фокусными расстояниями F_1 и F_2 расположены на одной оси. С помощью этой системы линз получено изображение предмета, причем оказалось, что размер изображения не зависит от расстояния от предмета до системы линз. Найти расстояние l между линзами.

Е. П. Кузнецов

Решения задач

М318—М320; Ф328, Ф330—Ф332, Ф334

М318. *В треугольнике ABC проведены биссектрисы AD и CE. Докажите, что $|CE|\cdot|AB|=|AD|\cdot|BC|$ тогда и только тогда, когда выполняется хотя бы одно из двух условий:* 1) $|AB|=|BC|$; 2) $\widehat{ABC}=60^\circ$.

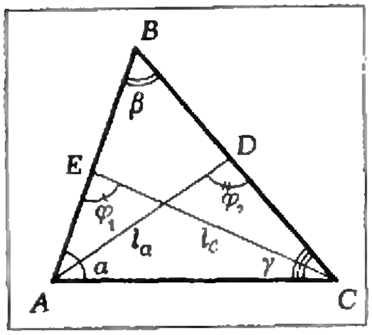


Рис. 1.

Введем стандартные обозначения: a — длина стороны BC, c — длина стороны AB, l_a — длина биссектрисы угла A, l_c — длина биссектрисы угла C. Величины углов при вершинах соответственно обозначим через α, β и γ. Кроме того, обозначим величину угла AEC через φ_1, а угла ADC — через φ_2 (рис. 1). Из рассмотрения треугольников AEC и ADC следует, что

$$\alpha+\frac{\gamma}{2}+\varphi_1=\pi,$$
$$\frac{\alpha}{2}+\gamma+\varphi_2=\pi. \qquad (1)$$

Кроме того, мы можем выразить площадь треугольника ABC двумя способами: $S=\frac{1}{2}al_a\sin\varphi_2$ и $S=\frac{1}{2}cl_c\sin\varphi_1$, поскольку $h_a=l_a\sin\varphi_2$, а $h_c=l_c\sin\varphi_1$. Отсюда

$$al_a\sin\varphi_2=cl_c\sin\varphi_1. \qquad (2)$$

Покажем теперь, что из соотношения

$$al_a=cl_c \qquad (3)$$

следует хотя бы одно из условий, данных в задаче. Из (2) и (3) следует, что

$$\sin\varphi_2=\sin\varphi_1. \qquad (4)$$

Равенство синусов может быть в двух случаях (так как $0<\varphi_i<\pi$):

$$\varphi_1=\varphi_2, \qquad (5)$$
$$\varphi_1=\pi-\varphi_2. \qquad (6)$$

Если выполнено (5), то из (1) получаем:

$$\alpha+\frac{\gamma}{2}+\varphi_1=\pi,$$
$$\frac{\alpha}{2}+\gamma+\varphi_1=\pi.$$

Вычитая одно соотношение из другого, получаем, что $\alpha=\gamma$, то есть треугольник ABC — равнобедренный, $a=c$.

Пусть выполнено соотношение (6), тогда из (1) следует, что

$$\alpha+\frac{\gamma}{2}+\varphi_1=\pi,$$
$$\frac{\alpha}{2}+\gamma+\pi-\varphi_1=\pi.$$

Складывая эти соотношения, получаем

$$\frac{3}{2}\alpha+\frac{3}{2}\gamma=\pi, \qquad (7)$$

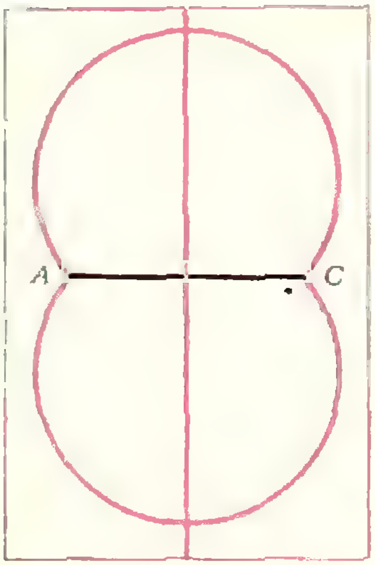


Рис. 2.

М319. *На плоскости заданы окружность γ и точка P внутри нее. Рассмотрим множество тетраэдров $ABCD$, у которых все четыре грани конгруэнтны, причем треугольник ABC вписан в окружность γ так, что его медианы пересекаются в точке P.*

а) При каком положении точки P внутри γ такие тетраэдры существуют?

б) Докажите, что вершины D таких тетраэдров расположены в одной из двух фиксированных точек пространства (симметричных относительно данной плоскости).

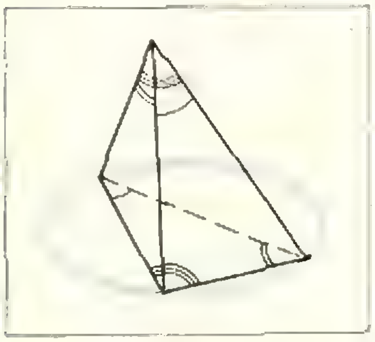


Рис. 3.

или $\alpha+\gamma=\frac{2\pi}{3}$, откуда величина угла B равна

$$\beta=\pi-(\alpha+\gamma)=\frac{\pi}{3}.$$

Необходимость доказана. Докажем достаточность.

В равнобедренном треугольнике ABC ($a=c$) соотношение (3) следует из равенства длин биссектрис $l_a=l_c$.

Если же угол $\beta=\frac{\pi}{3}$, то тогда верно соотношение (7). Складывая соотношения (1) и подставляя туда условие (7), получим условие (6), из которого следует соотношение (4), а из (4) и (2) вытекает требуемое соотношение (3).

Заметим, что утверждение задачи можно было сформулировать следующим образом:

«Пусть задан отрезок AC. Геометрическим местом вершин B треугольников ABC, таких, что $al_a=cl_c$ (см. введенные обозначения), является совокупность двух дуг окружностей (см. рис. 2) и серединного перпендикуляра к заданному отрезку, причем центры окружностей равноудалены друг от друга и концов заданного отрезка».

А. П. Савин

◆

Будем называть тетраэдры, у которых все грани конгруэнтны, K-тетраэдрами. Установим несколько свойств таких тетраэдров.

1°. *Сумма трех плоских углов при каждой вершине K-тетраэдра равна 180°.*

Действительно, эти три угла конгруэнтны углам одного и того же треугольника ABC, противолежащим трем разным его сторонам AB, BC, CA (это рассуждение годится и для треугольников ABC, у которых какие-то две стороны равны по длине), а сумма углов треугольника — 180° (рис. 3).

2°. *Грани K-тетраэдра — остроугольные треугольники.*

В самом деле, в любом трехгранном угле каждый плоский угол меньше суммы двух других. Для углов треугольника это условие выполняется в том и только в том случае, если он остроугольный.

3°. *Развертка K-тетраэдра имеет вид остроугольного треугольника, в котором проведены средние линии.*

Это сразу следует из 1° и 2° (рис. 4). Разумеется, верно и обратное: *любой остроугольный треугольник $A_1B_1C_1$ с проведенными в нем средними линиями AB, BC, CA можно рассматривать как развертку K-тетраэдра.* (Подумайте, почему нельзя сложить тетраэдр из тупоугольного $\triangle A_1B_1C_1$.)

Заметим, что когда мы будем складывать из развертки тетраэдр, закрепив грань ABC и вращая три другие грани относительно ребер AB, BC, CA, то точки A_1, B_1, C_1 будут двигаться по окружностям (лежащим в плоскостях, перпендикулярных ABC), а их проекции на плоскость ABC будут двигаться по высотам треугольника $A_1B_1C_1$ вплоть до точки их пересечения H. Итак, мы получили еще такое свойство:

4°. *Проекция H вершины D K-тетраэдра $ABCD$ на плоскость ABC лежит в точке пересечения высот треугольника $A_1B_1C_1$.*

Заметим, что в любом тетраэдре его «медианы» — отрезки, соединяющие вершины с центрами тяжести (точками пересечения медиан) противоположных граней, — пересекаются в одной точке M — «центре тяжести» тетраэдра — и делятся этой точкой в отношении 3 : 1, считая от вершины (рис. 5; через ту же точку M проходят и отрезки, соединяющие середины противоположных ребер).

5°. *В K-тетраэдре центр тяжести совпадает с центром описанного шара.*

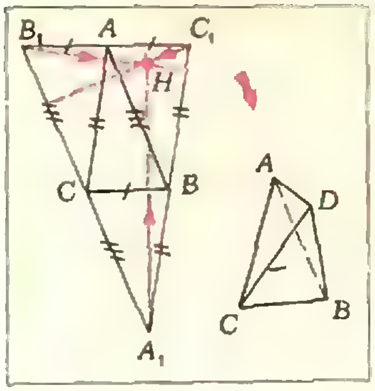


Рис. 4.

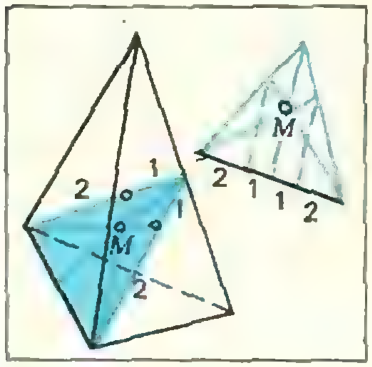


Рис. 5.

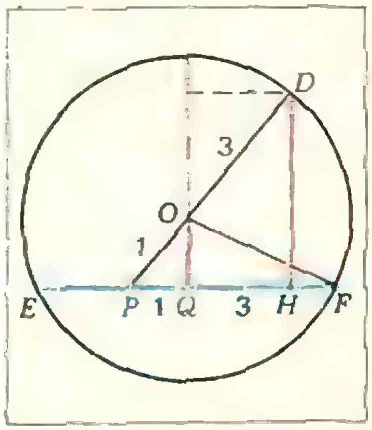


Рис. 6.

Существует перемещение пространства, при котором тетраэдр $ABCD$ совмещается сам с собой так, что грань DCB переходит в ABC (то есть $A-D$, $B-C$, $C-B$, $D-A$). При этом перемещении только две точки поверхности тетраэдра остаются неподвижными: это — середины ребер AD и BC. Ясно, что при таком перемещении центр описанного шара O и точка пересечения медиан M неподвижны (поскольку сам тетраэдр совмещается с собой). Если точки M и O различны, то неподвижными должны быть и все точки прямой MO. Значит, эта прямая проходит через середины ребер AD и BC. Точно так же (рассматривая другие самосовмещения тетраэдра) мы докажем, что прямая MO проходит и через середины других ребер. Но это невозможно. Значит, точки M и O совпадают.

Обозначим центр тяжести треугольника ABC через P, центр его описанной окружности (проекцию точки $O=M$ на плоскость $\triangle ABC$) через Q, проекцию вершины D на плоскость $\triangle ABC$ — через H. На рисунке 6 изображены все эти точки, лежащие в плоскости, перпендикулярной граня ABC и проходящей через центр шара O и вершину D; E и F — точки пересечения этой плоскости с описанной окружностью треугольника ABC, радиус которой обозначим через ρ. Поскольку $|DP| = 4|OP|$, $|OF|^2 = |OQ|^2 + \rho^2 = |OD|^2 = 9|OQ|^2 + |QH|^2$, получим

$$|QH|^2 + 8|OQ|^2 = \rho^2.$$

Сформулируем нужное нам свойство:

6°. *В любом K-тетраэдре* $|QH| = 3|PQ|$ *и* $|QH|^2 + |DH|^2/2 = \rho^2$ (так как $|DH| = 4|OQ|$).

Теперь легко решить оба пункта задачи М319.

а) Множество центров тяжести остроугольных треугольников, вписанных в данную окружность γ с центром Q и радиусом ρ, будет внутренностью концентрического круга радиуса $\rho/3$. (Докажите это, пользуясь рисунком 7 и тем, что для прямоугольного треугольника центр тяжести находится ровно на расстоянии $\rho/3$ от центра гипотенузы Q.) Согласно 2° и 3°, именно такое множество положений может занимать точка P.

б) Согласно 6°, при заданной окружности γ и заданном положении точки P однозначно определяется положение проекции H вершины D на плоскость $\triangle ABC$ и ее расстояние $|DH|$ от этой плоскости.

В заключение сделаем несколько замечаний.

1. Для тех, кто захочет детально разобраться, как устроена «группа симметрий» K-тетраэдра (встретившихся в доказательстве 5°), дадим совет рассмотреть параллелепипед, несмежными вершинами которого являются вершины тетраэдра (рис. 8). *Для K-тетраэдра этот параллелепипед — прямоугольный.* Отсюда можно получить ряд других характеристических свойств K-тетраэдров (см. решение задачи М9 в «Кванте» № 9, 1970 г.).

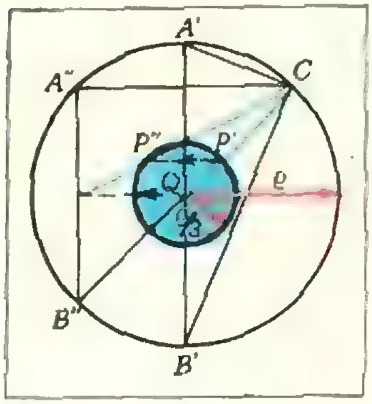


Рис. 7.

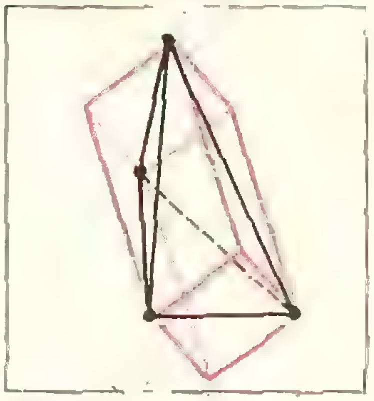


Рис. 8.

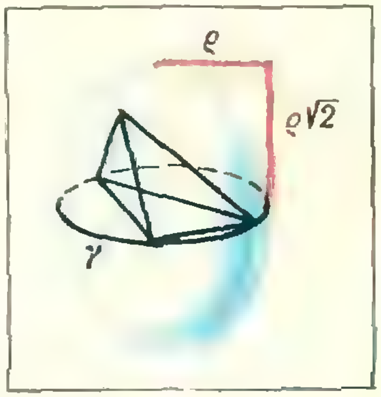


Рис. 9.

II. *Множество всех вершин D K-тетраэдров $ABCD$, грань ABC которых вписана в данную окружность γ, представляет собой поверхность эллипсоида вращения*), проходящего через* γ (рис. 9). Это сразу следует из формулы $|QH|^2 + |DH|^2/2 = \rho^2$ и того факта, что точка H пробегает весь круг, ограниченный окружностью γ.

III. Основное равенство $|HP| = 4|QP|$ можно доказать, не опираясь на свойство 5°, если воспользоваться такими планиметрическими соображениями: точка H — центр описанного круга $\triangle A_2B_2C_2$, в котором $\triangle A_1B_1C_1$ — треугольник из средних линий, а точка Q — центр описанного круга $\triangle ABC$, составленного средними линиями треугольника $A_1B_1C_1$. Ясно, что все три треугольника имеют общий центр подобия P — точку пересечения медиан, причем коэффициент подобия $\triangle A_2B_2C_2$ и $\triangle ABC$ равен 4.

Н. Б. Васильев

◆

М320. *Какие выпуклые n-угольники можно разбить на треугольники так, чтобы никакие два из треугольников разбиения не имели общих (полностью совпадающих) сторон? (На рисунке 10 показано, что треугольник так разбить можно).*

Докажем, что при $n>3$ n-угольник нельзя разбить на треугольники требуемым образом.

Предположим противное, — что мы все же разбили n-угольник ($n>3$) на треугольники.

Отобразим множество сторон треугольников разбиения во множество их вершин. Будем при этом различать два случая.

1. Сторона треугольника разбиения не лежит на стороне n-угольника.

Тогда:

а) если строго внутри этой стороны треугольника есть вершины других треугольников разбиения, то отобразим ее в одну из таких вершин;

б) если же внутри этой стороны нет других вершин, то по определению разбиения один из концов этой стороны должен лежать строго внутри некоторой другой стороны (другого треугольника разбиения), — отобразим тогда нашу сторону именно в такой ее конец (если же оба конца стороны лежат строго внутри какой-то другой стороны, то отобразим ее в любой из ее концов).

2. Сторона треугольника разбиения лежит на стороне n-угольника.

Отобразим такую сторону в тот ее конец, который встречается первым при обходе сторон n-угольника по часовой стрелке.

Рассмотрим теперь множество всех вершин треугольников разбиения. Все вершины делятся на три типа.

I тип. Вершины n-угольника и те вершины треугольников разбиения, которые лежат на сторонах n-угольника.

Пусть вершин I типа l. Тогда сторон, которые отобразились в эти вершины, тоже l, так как очевидно, что в такие вершины отобразятся только стороны, лежащие на сторонах n-угольника, причем это отображение взаимно-однозначно.

II тип. Вершины, не лежащие на сторонах n-угольника и не лежащие строго внутри сторон каких-либо треугольников разбиения (например, как на рисунке 11).

Пусть вершин II типа m. По построению в такие вершины не отобразится ни одной стороны.

III тип. Вершины, не лежащие на сторонах n-угольника, но лежащие строго внутри каких-то сторон треугольников разбиения (например, как на рисунке 12).

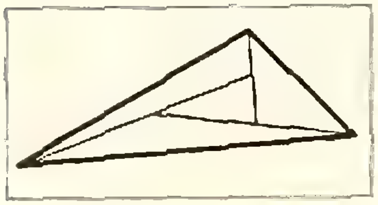


Рис. 10.

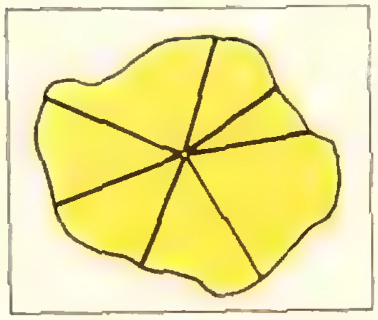


Рис. 11.

---

*) См. статью И. Н. Бронштейна «Эллипс», «Квант», 1975, № 1.

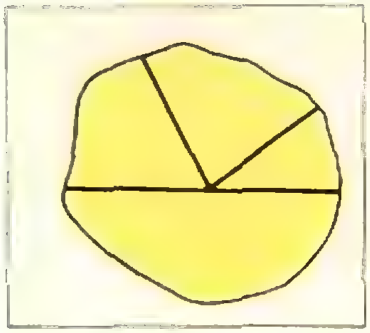


Рис. 12.

Пусть вершин III типа k. В вершину III типа может отразиться не более трех сторон (сторона, внутри которой эта вершина лежит, и две стороны, для которых эта вершина служит концом — для одной левым, для другой — правым). Поэтому в k вершин III типа может отобразиться не более $3k$ сторон треугольников.

Пусть в разбиении x треугольников. Выразим число $3x$ сторон треугольников через l, k и m. Для этого запишем сумму углов этих треугольников.

С одной стороны, сумма углов x треугольников равна πx. Но, с другой стороны, эта сумма равна

$$\pi(l-2)+2\pi m+\pi k,$$

где $\pi(l-2)=\pi(l-n)+\pi(n-2)$ — сумма углов при вершинах I типа, $2\pi m$ — сумма углов при вершинах II типа, πk — сумма углов при вершинах III типа.

Следовательно,

$$\pi x=\pi(l-2)+2\pi m+\pi k,$$

и общее число сторон равно

$$3x=6m+3l+3k-6.$$

Поскольку каждая из сторон треугольников разбиения отображается в какую-либо вершину I или III типов, то из сказанного выше следует, что всего сторон может быть не более чем $l+3k$. Значит,

$$6m+3l+3k-6\leqslant l+3k,$$

откуда $l+3m\leqslant 3$.

Но $l>0$ и $m>0$; кроме того, $l\geqslant n>3$, и мы получаем противоречие.

Иными словами, мы получили, что на сторонах n-угольника может быть не более трех вершин, а следовательно, и сторон разбиения; значит, и n-угольник имеет не более трех сторон (так как на каждой стороне n-угольника должна лежать хотя бы одна сторона разбиения).

Кроме того, из последнего неравенства следует, что при разбиении треугольника вершин II типа получиться не может ($l=3$, следовательно, $m=0$).

А. Печковский

◆

Ф328. *Жесткие стержни длины l_1 и l_2 соединены шарнирно в точке A. Их свободные концы удаляются друг от друга равномерно со скоростями соответственно v_1 и v_2, направленными вдоль одной прямой (рис. 13). Найти ускорение точки A в тот момент, когда стержни составляют друг с другом угол 90°. Движение стержней происходит в одной плоскости.*

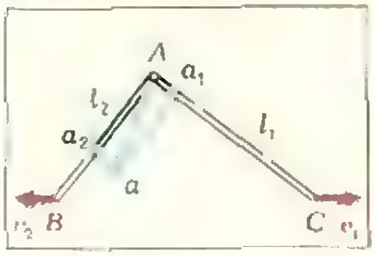


Рис. 13.

Представим вектор **a** полного ускорения точки A в момент, когда стержни составляют друг с другом угол 90°, как сумму двух ускорений $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$, направленных вдоль соответствующих стержней (см. рис. 13). Для вычисления $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ воспользуемся тем, что вектор ускорения остается постоянным при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой.

Перейдем в систему отсчета, движущуюся со скоростью v_2 влево. В этой системе отсчета конец левого стержня (точка B) покоится; конец правого стержня (точка C) движется вправо со скоростью v_1+v_2, и точка A описывает окружность радиуса l_2 (рис. 14). Следовательно, ускорение **a** можно разложить на центростремительное (нормальное) ускорение и касательное (тангенциальное) ускорение. Это и есть ускорения $\mathbf{a}_2$ и $\mathbf{a}_1$ соответственно.

Модуль центростремительного ускорения $a_2=v^2/l_2$, где v — линейная скорость движения точки A по окружности. В момент, когда стержни составляют друг с другом угол 90°, вектор скорости **v** направлен вдоль правого стержня. Другой конец стержня AC имеет в этот момент скорость v_1+v_2, направленную вправо. Так как стержень жесткий, проекции скоростей его концов на прямую, вдоль которой он расположен, должны быть одинаковыми (иначе изменялась бы длина стержня). Следовательно (см. рис. 14).

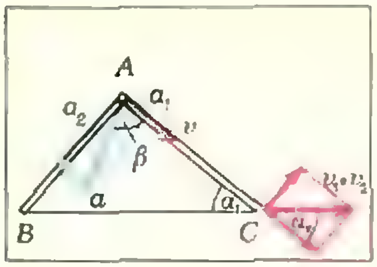


Рис. 14.

$$v=(v_1+v_2)\cos\alpha_1=\frac{(v_1+v_2)\,l_1}{\sqrt{l_1^2+l_2^2}}.$$

Тогда

$$a_2=\frac{v^2}{l_2}=\frac{(v_1+v_2)^2\,l_1^2}{\left(l_1^2+l_2^2\right)l_2}.$$

Аналогично, перейдя в систему отсчета, движущуюся вправо со скоростью v_1, получим

$$a_1=\frac{(v_1+v_2)^2\,l_2^2}{\left(l_1^2+l_2^2\right)l_1}.$$

Модуль полного ускорения

$$a=\sqrt{a_1^2+a_2^2}=\frac{(v_1+v_2)^2}{\left(l_1^2+l_2^2\right)l_1l_2}\sqrt{l_1^6+l_2^6}.$$

Вектор **a** составляет со стержнем AC угол β такой, что

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{a_2}{a_1}=\left(\frac{l_1}{l_2}\right)^3.$$

Б. Б. Буховцев

◆

Ф330. *В цилиндре под невесомым поршнем площади S находится воздух при атмосферном давлении p_0 и температуре T_0. Внутренний объем цилиндра разделен на две равные части неподвижной горизонтальной перегородкой с маленьким отверстием. На поршень кладут груз массы M, под действием которого поршень доходит до перегородки. Найти температуру T_1 воздуха в цилиндре, если стенки цилиндра и поршень не проводят тепло.*

Так как сосуд теплоизолирован, то изменение внутренней энергии газа равно работе внешних сил, действующих на поршень,— силы тяжести Mg и силы атмосферного давления p_0S:

$$\Delta U=(Mg+p_0S)\,h$$

(h — ход поршня).

Поскольку внутренняя энергия газа зависит только от температуры, то в любом процессе изменение внутренней энергии такое же, как в процессе, происходящем при постоянном объеме, то есть

$$\Delta U=C_Vz\,(T_1-T_0).$$

Здесь C_V — теплоемкость одного моля газа при постоянном объеме, z — число молей газа. Поэтому в нашем случае

$$(Mg+p_0S)\,h=C_Vz\,(T_1-T_0).$$

Отсюда

$$T_1=T_0+\frac{(Mg+p_0S)h}{C_V z}. \qquad (*)$$

Число молей воздуха в цилиндре можно найти из уравнения состояния газа до сжатия:

$$p_0V=zRT_0,$$

откуда

$$z=\frac{p_0V}{RT_0}.$$

Воздух состоит в основном из двухатомных газов — азота и кислорода. Поэтому можно считать $C_V=\frac{5}{2}R$. Подставляя значения z, C_V и $h=V/2S$ в (*), окончательно находим:

$$T_1=T_0\left(1+\frac{Mg+p_0S}{5p_0S}\right).$$

Ф331. *Плоская спираль с очень большим числом витков n и наружным радиусом R (рис. 15) находится в однородном магнитном поле, перпендикулярном плоскости спирали и изменяющемся по закону $B = B_0\cos\omega t$. Найти э. д. с. индукции, наводимую в спирали. Расстояние между витками спирали постоянно.*

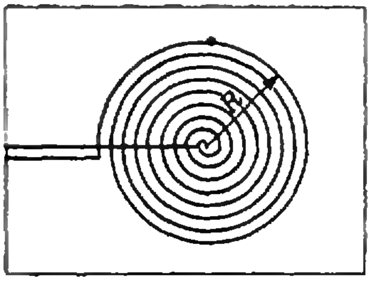


Рис. 15.

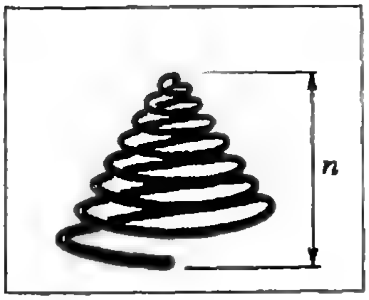


Рис. 16.

Величина э. д. с. индукции, возбуждаемой в витке радиуса r_i, равна

$$\mathscr{E}_i = -\frac{\Delta\Phi_i}{\Delta t},$$

где $\Delta\Phi_i$ — изменение магнитного потока через площадку, ограниченную витком, за малый промежуток времени Δt:

$$\Delta\Phi_i = S\Delta B = \pi r_i^2 B_0\{\cos[\omega(t+\Delta t)] - \cos\omega t\} =$$
$$= -2\pi r_i^2 B_0\left[\sin\omega\left(t+\frac{\Delta t}{2}\right)\sin\omega\frac{\Delta t}{2}\right] \approx$$
$$\approx -\pi r_i^2 B_0\omega\,\Delta t\sin\omega t$$

$\left(\text{так как } \Delta t \text{ мало, то } \sin\omega\left(t+\frac{\Delta t}{2}\right) \approx \sin\omega t,\ \sin\omega\frac{\Delta t}{2} \approx \omega\frac{\Delta t}{2}\right)$. Э. д. с., наводимая во всей спирали, равна сумме э. д. с., наводимых в витках, то есть

$$\mathscr{E} = \sum\mathscr{E}_i = \sum -\frac{\Delta\Phi_i}{\Delta t} = B_0\omega\sin\omega t\sum\pi r_i^2.$$

Величину πr_i^2 можно считать объемом цилиндра, высота которого равна единице, а площадь основания πr_i^2. Тогда $\sum\pi r_i^2$ — сумма объемов таких цилиндров. Так как разность между радиусами оснований «соседних» цилиндров мала (число витков n велико), то объем всех таких цилиндров близок к объему конуса с высотой n и площадью основания πR^2 (рис. 16):

$$\sum\pi r_i^2 = V = \frac{1}{3}\pi R^2 n.$$

Таким образом, э. д. с., наводимая в спирали, равна

$$\mathscr{E} = \frac{1}{3}\pi R^2 n B_0\omega\sin\omega t.$$

◆

Ф332. *Найти расстояние между источником света S и его изображением в оптической системе, приведенной на рисунке 17. Фокусные расстояния линз A и B одинаковы и равны F.*

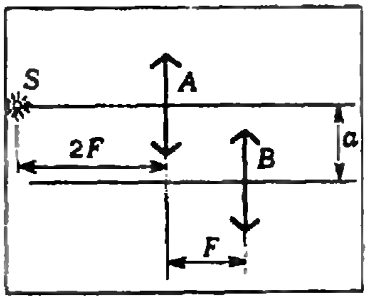


Рис. 17.

Изображение S_1 источника S, даваемое линзой A, получается справа от линзы на двойном фокусном расстоянии от нее (рис. 18). Действительно, из формулы линзы следует, что

$$\frac{1}{2F} + \frac{1}{f_1} = \frac{1}{F},$$

откуда $f_1 = 2F$. Это означает, что на линзу B попадает сходящийся пучок лучей. Этот пучок лучей собирается в точке S_2 — изображении источника.

Для линзы B точка S_1 — мнимый источник. Следовательно (см. рис. 18),

$$-\frac{1}{d_2} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{F},$$

где $d_2 = F$.

Отсюда

$$f_2 = \frac{F}{2}.$$

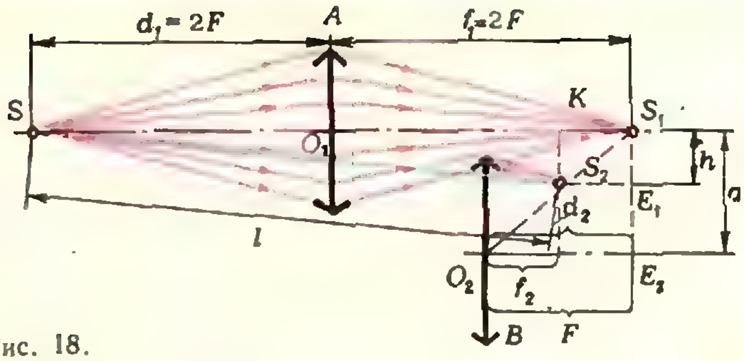


Рис. 18.

Расстояние $l = SS_2$ между источником S и его изображением S_2 в оптической системе равно $l = \sqrt{SK^2+h^2}$, где $SK = 3{,}5F$. Расстояние h найдем из подобия треугольников $O_2S_1E_2$ и $S_2S_1E_1$:

$$\frac{h}{a} = \frac{F-f_2}{F}, \quad h = 0{,}5a.$$

Окончательно имеем:

$$l = SS_2 = \sqrt{12{,}25F^2+0{,}25a^2}.$$

◆

Ф334.[*] *Бусинка соскальзывает без трения по вертикально расположенной проволоке длины l, которая изогнута в гармошку длины l/2. Во сколько раз время соскальзывания бусинки больше времени ее падения с высоты l? Амплитуда перегибов проволоки много меньше ее длины. Размеры бусинки пренебрежимо малы по сравнению с длиной «колена» гармошки.*

При переходе бусинки с одного прямолинейного участка проволоки на другой абсолютная величина ее скорости не меняется. Меняется только направление скорости бусинки: она становится параллельной новому участку проволоки. Это означает, что время движения бусинки по проволоке такое же, как при движении бусинки по наклонной плоскости — развертке проволоки. Это время равно

$$t = \sqrt{\frac{2l}{g\sin\alpha}} = \sqrt{\frac{2l}{gh/l}} = 2\sqrt{\frac{l}{g}}$$

(l — длина наклонной плоскости, α — угол наклона плоскости к горизонту), т. е. оно в $\sqrt{2}$ раз больше времени $t' = \sqrt{\frac{2l}{g}}$ падения бусинки с высоты l.

И. Ш. Слободецкий

---

[*] Решение задачи Ф333 будет опубликовано в следующем номере журнала.

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

Медианы и средние линии

Э. Г. Готман

> *...Много задач вместе иногда решить легче, чем всего лишь одну из них, если это большое число задач хорошо согласовано, а одна задача сама по себе изолирована.*
>
> Д. Пойа. «Математика и правдоподобные рассуждения»

В этой статье собраны задачи о свойствах медиан треугольника и средних линий четырехугольника. Задачи доступны ученикам 7—8 классов. Для их решения нужно придумать вспомогательное построение, применить параллельный перенос или центральную симметрию. При доказательстве используется небольшое число теорем, чаще других — теорема о средней линии треугольника. Задачи расположены в такой последовательности, что достаточно подобрать ключ к решению первых из них, чтобы суметь решить и последующие.

Некоторые из задач даны с решениями или краткими указаниями (в конце журнала). Прежде чем читать решение той или иной задачи, попытайтесь решить ее самостоятельно. В случае затруднений посмотрите на рисунок. Выясните, какую роль играют вспомогательные линии, для чего они нужны. Прочтите указание к решению. Сравните различные возможные способы решения одной и той же задачи. Приступая к решению последующих задач, найдите их сходство с решенными задачами и постарайтесь его использовать.

Медианы треугольника

Задача 1. *В треугольнике ABC проведена медиана CM. Доказать, что*

а) если $|CM| > \frac{1}{2}|AB|$, то $\hat{C} < 90^\circ$;

б) если $|CM| = \frac{1}{2}|AB|$, то $\hat{C} = 90^\circ$;

в) если $|CM| < \frac{1}{2}|AB|$, то $\hat{C} > 90^\circ$.

Обозначим $\widehat{ACM} = \alpha$, $\widehat{BCM} = \beta$ (рис. 1).

а) $|CM| > |AM|$ и $|CM| > |BM|$. Рассмотрим треугольники ACM и BCM. Так как в треугольнике против большей стороны лежит и больший угол, то $\hat{A} > \alpha$, $\hat{B} > \beta$. Сложив эти равенства почленно, получим $\hat{A} + \hat{B} > \hat{C}$. Отсюда следует, что $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} > \hat{C} + \hat{C} = 2\hat{C}$ и, поскольку $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$, $\hat{C} < 90^\circ$.

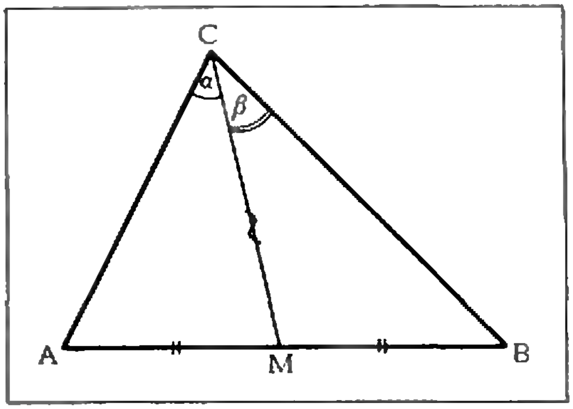


Рис. 1.

Для случаев *б*) и *в*) доказательство аналогично.

Итак, мы видим, что для решения задачи не потребовалось никаких дополнительных построений.

Хорошо известно, что медиана, проведенная к основанию равнобедренного треугольника, является биссектрисой угла при вершине. Рассмотрим свойство медианы разностороннего треугольника.

Задача 2. *Медиана CM треугольника ABC образует со сторонами AC и BC соответственно углы α и β. Какой из этих углов больше, если $|AC| < |BC|$?*

Обозначим $|BC| = a$, $|AC| = b$, тогда по условию $a > b$.

Остановимся на двух способах решения этой задачи.

Первый способ. Построим точку D, симметричную точке C относительно середины M стороны AB, и соединим точку D с вершиной A (рис. 2). Построенный треугольник ADM симметричен треугольнику BCM относительно точки M, следовательно, $|AD| = |BC| = a$ и $\widehat{ADM} = \widehat{BCM} = \beta$. Мы получили треугольник ACD, который содержит интересующие нас углы α и β, причем противолежащие им стороны AD и AC равны соответственно a и b. Согласно условию $a > b$, поэтому $\alpha > \beta$.

Второй способ. Соединим середину E стороны AC с точкой M (рисунок сделайте самостоятельно), образуется треугольник CEM со сторонами $|EM| = a/2$ и $|CE| = b/2$. Углы треугольника CEM, противолежащие этим сторонам, равны соответственно α и β. Это легко доказать, используя свойство средней линии треугольника.

Задача 3. Доказать, что длина медианы CM треугольника ABC меньше полусуммы длин сторон AC и BC.

Средние линии четырехугольника

Известно, что средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме. Рассмотрим произвольный четырехугольник.

Задача 4. *Доказать, что длина отрезка, соединяющего середины двух противоположных сторон четырехугольника* *), *не больше полусуммы длин двух других сторон.*

Эту задачу можно решить различными способами.

Первый способ. Пусть M и N — середины сторон AB и CD четырехугольника $ABCD$, стороны AD и BC которого не параллельны (рис. 3). Путем параллельного переноса отрезков AD и BC образуйте треугольник A_1NB_1: $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{DN}$ и $\overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{CN}$. Далее докажите, что точки A_1 и B_1 симметричны относитель-

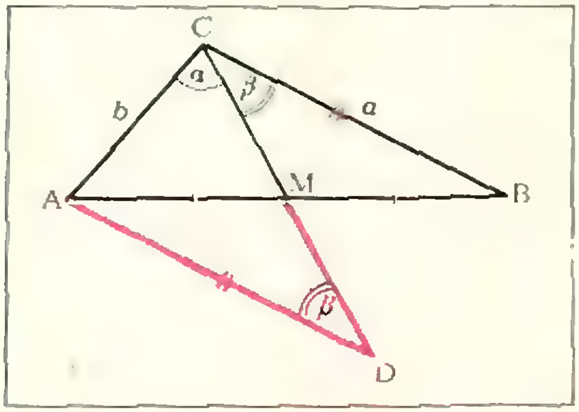


Рис. 2.

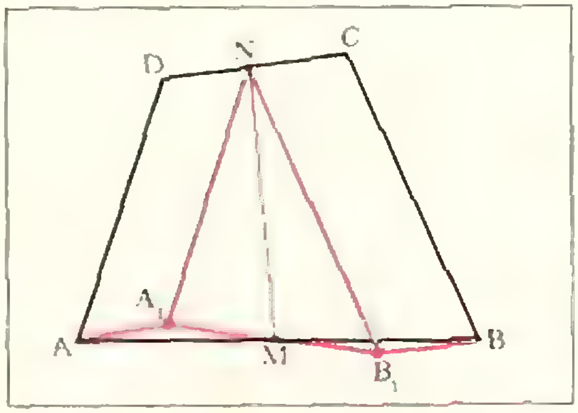


Рис. 3.

---

*) Такой отрезок называют *средней линией четырехугольника*.

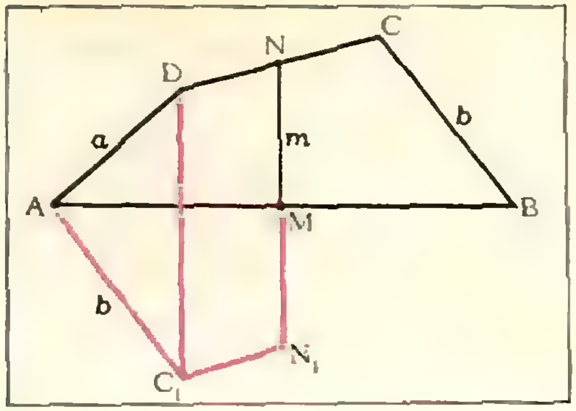


Рис. 4.

но M, и воспользуйтесь результатом задачи 3.

Второй способ. При решении задачи 2 первым способом мы построили треугольник ADM, симметричный треугольнику BCM относительно середины M стороны AB. Для решения задачи 4 можно использовать тот же прием. Постройте четырехугольник AMN_1C_1, симметричный четырехугольнику $BMNC$ относительно точки M (рис. 4). Пусть $|AD| = a$, $|BC| = b$, $|MN| = m$, тогда $|AC_1| = b$, $|DC_1| = |NN_1| = 2m$. Если $(AD) \nparallel (BC)$, то $a + b > 2m$; если же $(AD) \parallel (BC)$, то $a + b = 2m$.

Третий способ. Соедините середину E одной из диагоналей четырехугольника с точками M и N (рис. 5). Тогда, как и при решении задачи 2 вторым способом, получится треугольник EMN со сторонами, равными $a/2$, $b/2$ и m. Следовательно, $m < (a + b)/2$. В частном случае, когда $(AD) \parallel (BC)$, треугольник EMN вырождается, точка E будет принадлежать отрезку MN и, следовательно, $m = \frac{1}{2}(a + b)$.

Из задачи 4 вытекает, что *длина средней линии MN четырехугольника $ABCD$ равна полусумме длин сторон AD и BC тогда и только тогда, когда эти стороны параллельны.*

Задача 5. Противоположные стороны AD и BC четырехугольника $ABCD$ конгруэнтны. Доказать, что прямая, соединяющая середины двух других сторон, образует с прямыми AD и BC конгруэнтные углы.

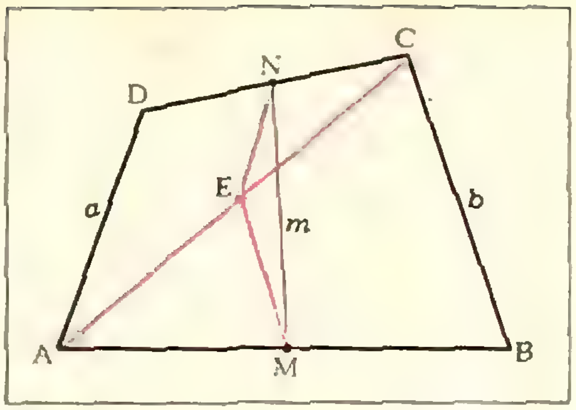


Рис. 5.

Эту задачу, так же как и предыдущую, можно решить различными способами, с помощью тех же приемов. Какое решение вам понравится больше других?

Задача 6. Построить треугольник по двум сторонам и медиане, проведенной к третьей стороне.

Задача 7. Построить четырехугольник, зная все его стороны и отрезок, соединяющий середины двух противоположных сторон.

Следующая задача стоит того, чтобы ее запомнить. Это очень известная задача, которая часто применяется при решении других задач.

Задача 8. Доказать, что середины сторон любого четырехугольника являются вершинами параллелограмма. При каких условиях этот параллелограмм будет

а) ромбом,
б) прямоугольником,
в) квадратом?

Задача 9. Доказать, что средние линии любого четырехугольника и отрезок, соединяющий середины диагоналей, пересекаются в одной точке и делятся ею пополам.

Если точки A, B, C и D не принадлежат одной плоскости, то шесть отрезков, соединяющих попарно эти точки, являются ребрами треугольной пирамиды (тетраэдра).

Задача 10. Доказать, что отрезки, соединяющие середины противоположных ребер тетраэдра, пересекаются в одной точке и делятся ею пополам.

Обратите внимание на то, что задача 9 является частным случаем (лучше сказать *предельным случаем*) задачи 10.

Задача 11. Диагонали четырехугольника взаимно перпендикулярны. Зная их длины e и f, вычислить длины средних линий четырехугольника.

Задача 12. Середины сторон AB и CD, BC и DE выпуклого пятиугольника $ABCDE$ соединены отрезками. Середины H и K полученных отрезков снова соединены. Доказать, что отрезок HK параллелен отрезку AE и $|HK| = |AE|/4$.

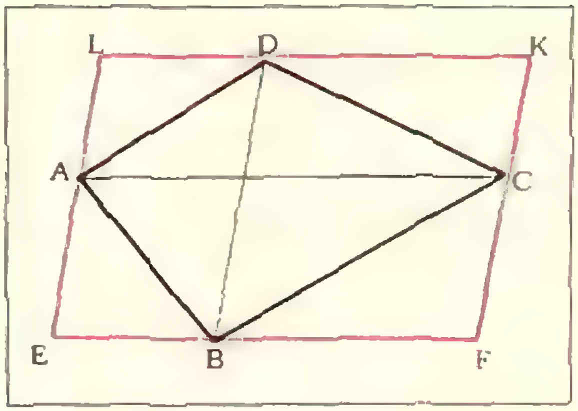


Рис. 6.

Заметим, что почти все приведенные задачи можно решить с помощью дополнительного построения, которое состоит в проведении средней линии треугольника.

Площадь треугольника и четырехугольника

Задача 13. *Доказать, что прямые, проведенные через вершины выпуклого четырехугольника параллельно его диагоналям, ограничивают параллелограмм, площадь которого вдвое больше площади четырехугольника.*

Пусть $ABCD$ — данный четырехугольник (рис. 6). Для решения задачи достаточно заметить, что диагонали AC и BD четырехугольника разбивают описанный параллелограмм $EFKL$ на четыре параллелограмма, а диагональ каждого параллелограмма делит его на два конгруэнтных треугольника.

Задача 14. Используя результат задачи 13, доказать, что площадь любого выпуклого четырехугольника равна половине произведения длин его диагоналей на синус угла между ними.

Заметим, что любой треугольник делится медианой на два равновеликих треугольника. Обладает ли аналогичным свойством средняя линия четырехугольника?

Задача 15. Доказать, что выпуклый четырехугольник $ABCD$ делится средней линией MN, соединяющей середины сторон AB и CD, на два равновеликих четырехугольника тогда и только тогда, когда стороны AB и CD параллельны.

Задача 16. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Точки M и N являются серединами его сторон AB и CD. Доказать, что площадь четырехугольника $AMCN$ равна половине площади четырехугольника $ABCD$.

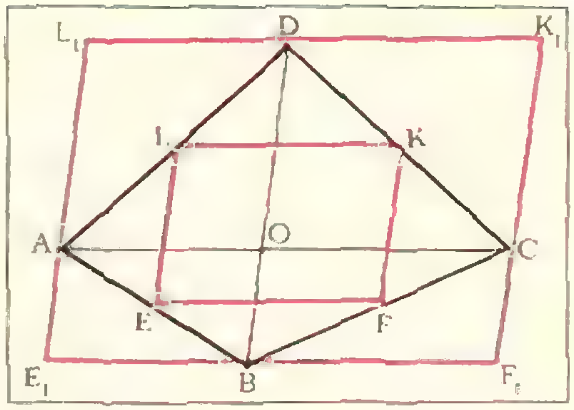


Рис. 7.

Задача 17. Средние линии четырехугольника разбивают его на четыре четырехугольника. Доказать, что сумма площадей одной пары несоседних четырехугольников равна сумме площадей другой пары.

Задача 18. *Доказать, что площадь выпуклого четырехугольника вдвое больше площади четырехугольника, вершинами которого служат середины сторон данного.*

Приведем два решения этой задачи.

Первое решение. Пусть E, F, K, L — середины сторон данного четырехугольника $ABCD$ (рис. 7). Средняя линия EF треугольника ABC отсекает от него треугольник BEF, площадь которого составляет $\frac{1}{4}$ площади треугольника ABC: $S_{BEF} = \frac{1}{4} S_{ABC}$. Аналогично, $S_{DLK} = \frac{1}{4} S_{ACD}$. Сложив эти равенства почленно, получим:

$$S_{BEF} + S_{DLK} = \frac{1}{4} S_{ABCD}.$$

Точно так же докажем, что

$$S_{AEL} + S_{CKF} = \frac{1}{4} S_{ABCD}.$$

Таким образом, сумма площадей треугольников, отсекаемых от четырехугольника $ABCD$ сторонами параллелограмма $EFKL$, равна $\frac{1}{2} S_{ABCD}$. Следовательно, $S_{EFKL} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$.

Второе решение. Опишем около четырехугольника $ABCD$ параллелограмм $E_1F_1K_1L_1$ так, чтобы его стороны были параллельны диагоналям четырехугольника $ABCD$ (рис. 7). Пусть диагонали AC и BD пересекаются в точке O. Тогда $\overrightarrow{OE_1} = 2\overrightarrow{OE}$, $\overrightarrow{OF_1} = 2\overrightarrow{OF}$ и т. д.. Следовательно, параллелограммы $E_1F_1K_1L_1$ и $EFKL$ гомотетичны, коэффициент гомотетии равен 2. Поэтому площадь параллелограмма $E_1F_1K_1L_1$ в 4 раза больше площади параллелограмма $EFKL$. Далее воспользуйтесь задачей 13.

Задача 19. Доказать, что если диагонали выпуклого четырехугольника конгруэнтны, то площадь этого четырехугольника равна произведению длин его средних линий.

Задача 20. Доказать, что площадь выпуклого четырехугольника равна произведению длин его средних линий на синус угла между ними.

Теперь предлагаем вам решить несколько задач на вычисление площадей.

Задача 21. Из вершины C треугольника ABC проведена медиана CM. Найти площадь треугольника ABC, если $|AC| = 13$ $|BC| = 11$, $|CM| = 10$.

Задача 22 (МГУ, мехмат, 1973). Отрезок, соединяющий середины оснований трапеции, равен 5, а длины диагоналей трапеции равны 10 и 12. Вычислить площадь трапеции.

Задача 23. Найти площадь выпуклого четырехугольника, если длина диагонали равна d, длина средней линии равна m и угол между ними равен φ.

В заключение приведем более сложную задачу.

Задача 24. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Точки M и N являются серединами сторон AB и CD. Прямые AN и DM пересекаются в точке P, прямые BN и CM — в точке Q. Известно, что $|AP| = |PN|$. Доказать, что площадь четырехугольника $MQNP$ равна одной четверти площади четырехугольника $ABCD$.

Советуем купить

Гладков К. А. *Атом от А до Я.* Ц. 44 к.

Дорофеев Г. В. и др. *Пособие по математике для поступающих в вузы.* Ц. 58 к.

Голомб С. В. *Полимино.* Пер. с англ. Ц. 46 к.

Кантор И. Л., Солодовников А. С. *Гиперкомплексные числа.* Ц. 22 к.

Ландау Л. Д., Китайгородский А. И. *Физика для всех.* Ц. 71 к.

Литлвуд Дж. *Математическая смесь.* Пер. с англ. Ц. 37 к.

Роджерс Э. *Физика для любознательных.* (Электричество и магнетизм. Атомы и ядра.) Ц. 2 р. 02 к.

Сборник задач по элементарной математике. (Пособие для самообразования.) Ц. 79 к.

Селезнев Ю. А. *Основы элементарной физики.* Ц. 92 к.

Тригг Дж. *Решающие эксперименты в современной физике.* Ц. 41 к.

Физика. Пер. с англ. под ред. А. С. Ахматова, часть I (Вселенная.) Ц. 1 р. 30 к., часть II (Оптика и волны.) Ц. 1 р. 18 к.

Шклярский Д. О. и др. *Геометрические оценки и задачи из комбинаторной геометрии.* Ц. 87 к.

Элементарный учебник физики. Под ред. Г. С. Ландсберга, том I. (Механика. Теплота. Молекулярная физика.) Ц. 1 р. 11 к., том II. (Электричество и магнетизм.) Ц. 94 к., том III. (Колебания, волны. Оптика. Строение атома.) Ц. 1 р. 13 к.

Эллиот Л., Уилкокс У. *Физика.* Пер. с англ. Ц. 1 р. 94 к.

Заказы направляйте по адресу: 103773, Москва, Петровка, 15, магазин № 8 «Техническая книга».

Г. Я. Мякишев

Расчет участка цепи, содержащего э. д. с.

Наибольшие трудности при решении задач на постоянный электрический ток возникают, когда на участке цепи, рассматриваемом в задаче, имеется источник тока.

Закон Ома

Если участок цепи содержит только обычное сопротивление R, то закон Ома имеет следующий вид:

$$I = \frac{U}{R}. \qquad (1)$$

Грубейшая, но тем не менее довольно часто встречающаяся ошибка состоит в том, что этот закон применяют для нахождения силы тока на участке цепи, содержащем источник тока, или другими словами, э. д. с. В действительности сила тока на таком участке зависит не только от напряжения U_{12} на концах участка (1 — начальная, 2 — конечная точки участка), но и от э. д. с. $\mathcal{E}$:

$$I = \frac{U_{12} + \mathcal{E}}{r} \qquad (2)$$

(r — внутреннее сопротивление источника тока).

Это и есть закон Ома для участка цепи, содержащего э. д. с.

Входящие в формулу (2) величины: сила тока I, напряжение U_{12} и э. д. с. $\mathcal{E}$ — алгебраические, т. е. могут быть и положительными, и отрицательными. Только сопротивление r всегда положительно. Главный источник ошибок при использовании этого закона заключается в неправильном выборе знака той или иной величины. Чтобы избежать ошибок при расстановке знаков, надо придерживаться общих правил, справедливых во всех без исключения случаях.

Сначала нужно выбрать (произвольно) положительное направление обхода в контуре. Сила тока на рассматриваемом участке будет положительной, если направление тока (т. е. направление движения положительных зарядов) совпадает с выбранным направлением *). Э. д. с. будет положительной, если работа сторонних сил по перемещению единичного положительного заряда на данном участке цепи положительна. (В случае гальванического элемента или аккумулятора э. д. с. положительна, если этот заряд перемещается внутри источника от отрицательного электрода к положительному.) Наконец, под напряжением U_{12} на участке цепи надо понимать разность потенциалов между начальной 1 и конечной 2 точками участка: $U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2$.

Чтобы лучше понять смысл формулы (2), разберем подробно два при-

---

*) Если заранее (до решения задачи) направление тока не известно, то можно выбрать его произвольно. После решения задачи получится положительное или отрицательное значение силы тока. В первом случае это означает, что мы правильно выбрали направление тока. Во втором случае — направление тока противоположно выбранному.

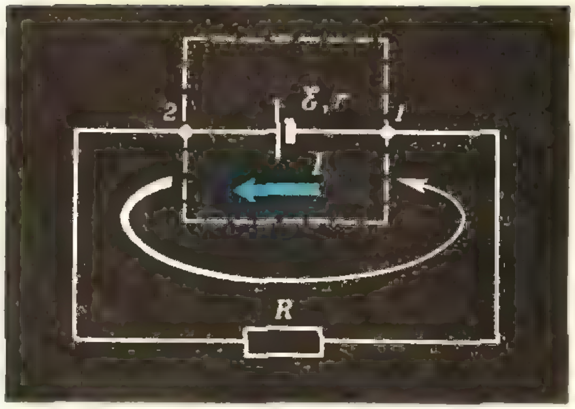


Рис. 1.

мера — разрядку и зарядку аккумулятора.

Разрядка аккумулятора. На рисунке 1 пунктирной рамкой выделен участок цепи с э. д. с. При выбранном направлении обхода против часовой стрелки $I > 0$, $\mathscr{E} > 0$, а $U_{12} < 0$ (ибо потенциал точки *1* — отрицательного полюса аккумулятора меньше потенциала точки *2* — положительного полюса), т. е. электрические силы совершают отрицательную работу *). Поэтому уравнение (2) для модулей запишется так:

$$|I| = \frac{|\mathscr{E}| - |U_{12}|}{r},$$

или

$$|U_{12}| = |\mathscr{E}| - |I|r.$$

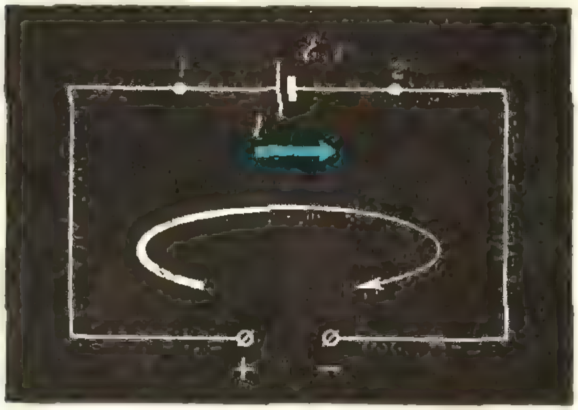


Рис. 2.

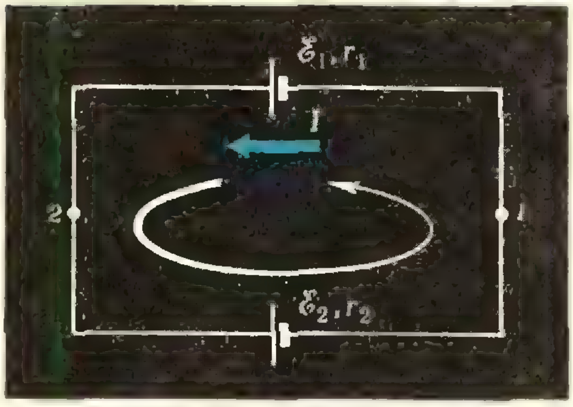


Рис. 3.

Напряжение равно э. д. с. источника минус падение напряжения на сопротивлении участка.

Полученная формула, в частности, показывает, что для разомкнутой цепи ($I = 0$) э. д. с. по модулю равна напряжению на клеммах источника тока. Поэтому э. д. с. можно измерить с помощью вольтметра, подключенного к источнику с разомкнутой внешней цепью. Надо только помнить, что при этом будет допущена некоторая неточность. Обычный вольтметр имеет хотя и очень большое, но все же не бесконечно большое сопротивление, поэтому через вольтметр идет ток и $Ir \neq 0$, так что на самом деле измеряемое напряжение несколько меньше, чем э. д. с.

Зарядка аккумулятора. Схема зарядки аккумулятора показана на рисунке 2. Выберем направление обхода контура по часовой стрелке. Тогда $I > 0$, $U_{12} > 0$, но $\mathscr{E} < 0$. При этом

$$|I| = \frac{|U_{12}| - |\mathscr{E}|}{r}, \text{ или } |U_{12}| = |\mathscr{E}| + |I|r.$$

Напряжение на аккумуляторе больше его э. д. с. на величину падения напряжения на внутреннем сопротивлении аккумулятора.

Рассмотрим теперь несколько конкретных задач.

Задача 1. *Два элемента, электродвижущие силы которых* $\mathscr{E}_1 = 6$ *в и* $\mathscr{E}_2 = 4$ *в и внутренние сопротивления* $r_1 = 0{,}25$ *ом и* $r_2 = 0{,}75$ *ом*,

---

*) Если бы в рассматриваемой цепи были и другие источники, включенные соответствующим образом, то был бы возможен случай $U_{12} > 0$.

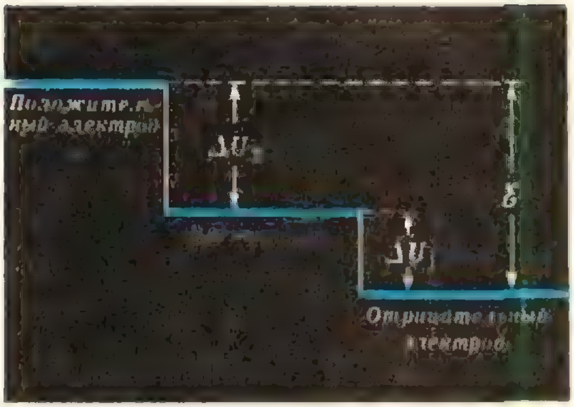


Рис. 4.

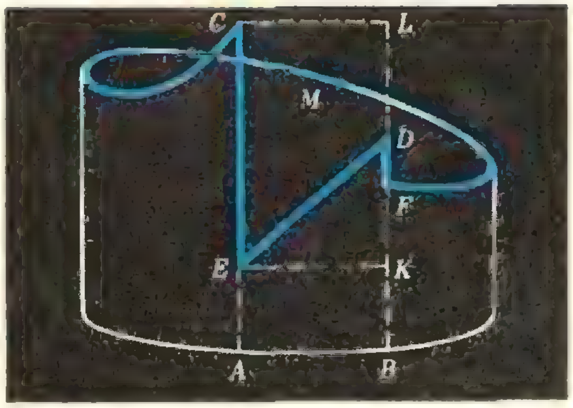


Рис. 5.

соединены по схеме, показанной на рисунке 3. Чему равна разность потенциалов между точками 1 и 2? Сопротивлением соединительных проводов пренебречь.

Условимся считать положительным направление обхода против часовой стрелки. Полная э. д. с. цепи равна $\mathscr{E} = |\mathscr{E}_1| - |\mathscr{E}_2|$, а сила тока в цепи

$$I = \frac{\mathscr{E}}{r_1 + r_2} = \frac{|\mathscr{E}_1| - |\mathscr{E}_2|}{r_1 + r_2}.$$

Закон Ома для верхнего участка цепи между точками *1* и *2* запишется в виде

$$U_{12} = Ir_1 - \mathscr{E}_1 = -\frac{|\mathscr{E}_1| r_2 + |\mathscr{E}_2| r_1}{r_1 + r_2} = -5{,}5\ \textit{в}.$$

Знак минус указывает на то, что потенциал точки *1* меньше потенциала точки *2*.

Тот же результат можно получить, применяя закон Ома к нижнему участку цепи:

$$U_{21} = Ir_2 - \mathscr{E}_2 = \frac{|\mathscr{E}_1| r_2 + |\mathscr{E}_2| r_1}{r_1 + r_2} = 5{,}5\ \textit{в}.$$

Задача 2. *Изобразить графически примерный ход потенциала вдоль замкнутой цепи с гальваническим элементом, изображенной на рисунке* 1.

Пусть сначала цепь разомкнута, поэтому ток и падения напряжения во внешней цепи и внутри источника равны нулю. На границах электрод—электролит в источнике существуют скачки потенциалов ΔU_1 и ΔU_2 (см. рис. 4). Сумма этих скачков равна э. д. с. элемента: $\mathscr{E} = \Delta U_1 + \Delta U_2$.

При замыкании цепи скачки потенциалов на границах электрод—электролит не изменяются. Но потенциал электролита теперь не остается постоянным, а уменьшается в направлении тока, т. е. от отрицательного электрода к положительному. Величина падения напряжения на внутреннем сопротивлении $U_r = Ir$.

На рисунке 5 приведен примерный график распределения потенциала в замкнутой цепи. Отрезок AC изображает потенциал положительного электрода относительно некоторого произвольно выбранного нулевого уровня. Отрезок BF соответствует потенциалу отрицательного электрода. Расстояние между электродами равно AB. Отрезки AE и BD — потенциалы электролита вблизи положительного и отрицательного электродов. Наклонная линия DE изображает падение потенциала внутри элемента. Его величина U_r представлена отрезком DK. Кривая CMF дает представление о падении потенциала во внешней цепи на сопротивлении R. Это падение напряжения $U_R = IR$ изображается отрезком LF. Отрезки $CE = LK = \Delta U_1$ и $DF = \Delta U_2$ соответствуют скачкам потенциала на границах электрод — электролит*).

Линия *CMFDEC*, изображающая ход потенциала во всей цепи, является замкнутой. Это означает равенство нулю полной работы электростатического поля на замкнутом пути. Действительно, поле совершает положительную работу на участках *CMF* и *DE* и отрицательную в тех местах, где имеются скачки потенциала вверх (*FD* и *EC*). По абсолютной величине положительная работа равна отрицательной. При перемещении единичного положительного заряда вдоль цепи положительная работа равна $U_r + U_R = DK + LF$, а отрицательная работа равна $\Delta U_1 + \Delta U_2 = \mathscr{E} = LK + DF$. Но $DK + LF = LK + DF$, т. е. $U_r + U_R = \mathscr{E}$, что представляет собой закон Ома для всей цепи.

Может возникнуть вопрос — за счет чего же происходит выделение тепла в цепи? На всех участках, кроме границ электрод — электролит, действуют лишь электростатические силы. На границах, где есть скачки потенциала, действуют еще и сторонние (в данном случае химические) силы, причем отрицательная работа электростатических сил равна положительной работе сторонних сил. Поэтому положительная работа электростатических сил во всей остальной части цепи оказывается нескомпенсированной. За счет этой работы и происходит выделение тепла.

Рисунок 5 позволяет наглядно истолковать закон Ома для участка цепи, содержащего э. д. с. Как видно из рисунка, модуль напряжения

$$|U_R| = LF = LK - FK = \\ = LK - (DK - DF) = \\ = (LK + DF) - DK = |\mathscr{E}| - |I|r,$$

т. е. напряжение на клеммах источника равно э. д. с. минус падение напряжения внутри источника.

Мощность тока

По определению мощность тока на участке цепи *1—2* равна

$$P = IU_{12}. \tag{3}$$

Эта формула справедлива для любого участка цепи (даже содержащего источник тока). Другие выражения для мощности:

$$P = I^2R \text{ и } P = \frac{U_{12}^2}{R} \tag{4}$$

годятся *только* для однородного участка с обычным сопротивлением R. Однако довольно часто встречаются ошибки, когда формулы (4) записывают для участка, содержащего э. д. с.

Обратим внимание еще на одну особенность участка цепи с источником тока. Для однородного участка мощность всегда положительна (действительно, $P = I^2R > 0$). Энергия, поступающая на этот участок извне, увеличивает его внутреннюю энергию и затем передается окружающим телам в виде тепла (выполняется закон Джоуля — Ленца).

При наличии э. д. с. на участке мощность может быть как положительной, так и отрицательной. Для наглядности обратимся еще раз к процессам зарядки и разрядки аккумулятора.

Как мы уже говорили, *при зарядке аккумулятора* ток и напряжение одинаковы по знаку (ток идет в направлении убыли потенциала, как и на однородном участке цепи), а знак э. д. с. противоположен знаку силы тока. Следовательно, мощность $P = IU_{12}$ положительна, т. е. аккумулятор потребляет мощность извне. На что же она расходуется? Перепишем выражение для мощности в другом виде. Так как $U_{12} = Ir - \mathscr{E}$, то

$$P = I^2r - I\mathscr{E} = I^2r + |I||\mathscr{E}|. \tag{5}$$

Первое слагаемое — это известное из закона Джоуля — Ленца выражение для количества теплоты, выделяющегося в аккумуляторе в единицу времени. А второе слагаемое — это работа в единицу времени, совершаемая

---

*) На рисунке 5 изображен случай, когда скачок потенциала *CE* больше скачка потенциала *DF*. Возможен, конечно, и противоположный случай.

против сторонних (химических) сил; за счет этой работы увеличивается химическая энергия аккумулятора. Таким образом, потребляемая извне энергия частично выделяется в виде тепла, а частично идет на увеличение энергии аккумулятора.

Когда аккумулятор разряжается, знаки тока и напряжения противоположны (ток в аккумуляторе идет в сторону возрастания потенциала), а знаки силы тока и э. д. с. одинаковы. Поэтому мощность

$$P = IU_{12} = -|I|\,|U_{12}| = I^2r - |I|\,|\mathscr{E}| \qquad (6)$$

отрицательна. Это означает, что мощность не поступает на этот участок извне, а наоборот, аккумулятор поставляет мощность во внешнюю цепь. При этом, конечно, часть мощности (I^2r), расходуемой аккумулятором, выделяется в виде тепла на его внутреннем сопротивлении. Остальная мощность отдается внешней цепи.

Следует подчеркнуть, что приведенные рассуждения (в частности, формулы (5) и (6)) справедливы независимо от того, каково происхождение э. д. с. на рассматриваемом участке.

Теперь разберем такую задачу.

Задача 3. *Какую максимальную механическую мощность P_m может развить сериесный*) мотор постоянного тока, включенный в сеть с напряжением $U = 120$ в, если сопротивление его обмоток $r = 20$ ом?*

При вращении якоря мотора в магнитном поле в его обмотке возникает э. д. с. индукции $\mathscr{E}$, поэтому (аналогично случаю зарядки аккумулятора)

$$|U| = |I|r + |\mathscr{E}|. \qquad (7)$$

Тогда полная мощность P, потребляемая мотором, равна

$$P = IU = I^2r + |I|\,|\mathscr{E}|. \qquad (8)$$

Часть мощности $P_т = I^2r$ — это количество теплоты, выделенное в обмотках в единицу времени. Второе слагаемое в выражении (8) представляет собой механическую мощность $P_{мех}$. Выразим силу тока I из (7): $|I| = \frac{|U| - |\mathscr{E}|}{r}$. Подставив полученное значение в выражение для механической мощности, получим:

$$P_{мех} = |I|\,|\mathscr{E}| = \frac{|U|\,|\mathscr{E}| - \mathscr{E}^2}{r}. \qquad (9)$$

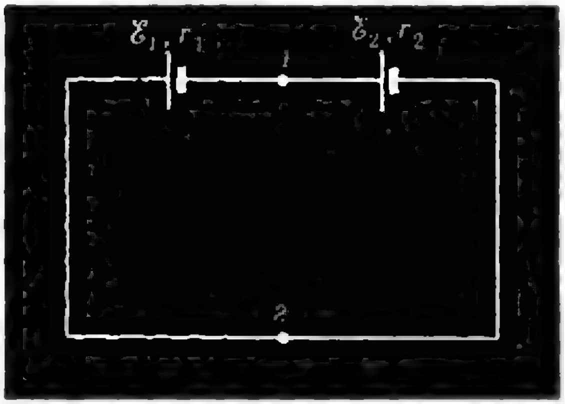


Рис. 6. а) $\mathscr{E}_1 > \mathscr{E}_2$, $r_1 < r_2$; б) $\mathscr{E}_1 = \mathscr{E}_2$, $r_1 = r_2$.

Напряжение U и сопротивление обмоток r заданы, а э. д. с. индукции $\mathscr{E}$ может изменяться, например, в зависимости от скорости вращения мотора. В задаче требуется найти максимальную механическую мощность P_m мотора, а выражение (9) имеет максимум при $\mathscr{E} = \frac{U}{2}$ (см., например, «Квант» 1974, № 5, с. 65). Поэтому окончательно

$$P_m = \frac{U^2}{4r} = 180 \text{ вт}.$$

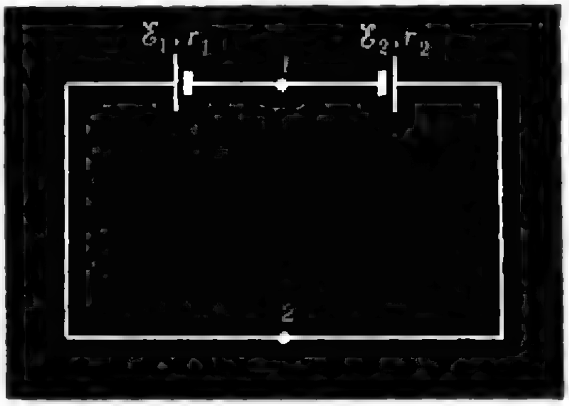


Рис. 7. а) $\mathscr{E}_1 > \mathscr{E}_2$; б) $\mathscr{E}_1 = \mathscr{E}_2$.

---

*) Сериесным мотором называется электромотор, у которого обмотки статора и ротора соединены последовательно.

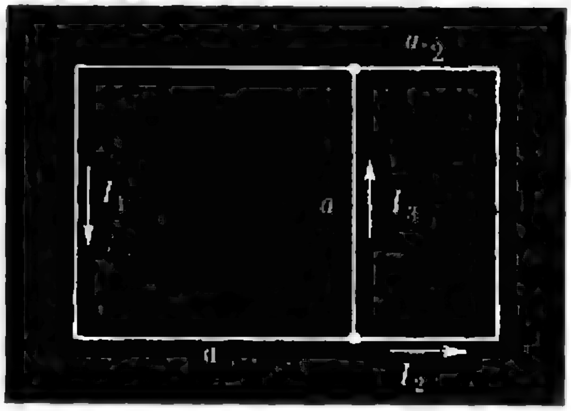


Рис. 8.

Упражнения

1. Через аккумулятор с внутренним сопротивлением $r=0{,}05$ *ом* и электродвижущей силой $\mathscr{E}=12$ *в* течет ток силой $I=10$ *а*. Найти напряжение U на зажимах аккумулятора.

2. Замкнутая цепь питается от источника с э. д. с. $\mathscr{E}$ и внутренним сопротивлением r. Постройте графики зависимост силы тока в цепи и напряжения на зажима источника от величины внешнего сопротивления R.

3. Изобразить графически примерный ход потенциала вдоль замкнутых цепей, показанных на рисунках 6 и 7 (рассмотреть случаи а) и б)). Определить силу тока для каждой цепи и разность потенциалов между точками *1* и *2*. Сопротивлением соединительных проводов пренебречь.

4. Определить силу тока в проводниках цепи, изображенной на рисунке 8, если индукция магнитного поля перпендикулярна плоскости чертежа и изменяется со временем по закону $B=kt$. Сопротивление единицы длины проводников равно r_0.

5. Электродвижущая сила генератора постоянного тока $\mathscr{E}=100$ *в*. Сопротивление его обмоток $r=10$ *ом*. Генератор замкнут на внешнее сопротивление R. Мощность, выделяемая на этом сопротивлении, $P=90$ *вт*. Определить напряжение U на клеммах генератора.

Одно геометрическое неравенство

В «Кванте» № 7 за этот год (с. 65) высказывалось следующее предположение:

$$\frac{9}{20}(ab+bc+ca) \leqslant m_am_b+m_bm_c+m_cm_a,$$

где a, b, c, m_a, m_b, m_c — длины сторон и соответственно медиан произвольного треугольника.

Ниже приводится «геометрическое» доказательство этого утверждения*).

Лемма 1. $m_a+m_b+m_c<a+b+c$.

Лемма 2. $a^2+b^2+c^2 \leqslant 2(ab+ac+bc)$.

Лемма 3. $m_a^2+m_b^2+m_c^2=\frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)$.

Докажите эти леммы самостоятельно

Лемма 4. $m_am_b+m_bm_c+m_am_c \leqslant \frac{5}{4}(ab+bc+ac)$

Доказательство. Согласно лемме 1, $(m_a+m_b+m_c)^2<(a+b+c)^2$, то есть

$$m_a^2+m_b^2+m_c^2+2m_am_b+2m_bm_c+2m_am_c<(a^2+b^2+c^2)+2ab+2bc+2ac,$$

откуда, в силу лемм 3 и 2:

$$2m_am_b+2m_bm_c+2m_am_c<\frac{5}{4}(a^2+b^2+c^2) \leqslant \frac{5}{2}(ab+bc+ac),$$

что и требовалось доказать.

Лемма 5. Если в треугольнике со сторонами $\frac{1}{3}m_a$, $\frac{1}{3}m_b$ и $\frac{1}{3}m_c$ построить медианы, то их длины будут равны $\frac{1}{4}a$, $\frac{1}{4}b$ и $\frac{1}{4}c$.

Доказательство. Пусть G — центр тяжести треугольника ABC, AM, BK и CP — медианы, R — середина отрезка BG. По построению $|RG|=\frac{1}{3}m_b$, $|PG|=\frac{1}{3}m_c$, и PR — средняя линия в треугольнике ABG, откуда $|PR|=\frac{1}{2}|AG|=\frac{1}{3}m_a$. Таким образом, треугольник PRG — искомый. Проведем в нем медиану PQ. Она является средней линией в треугольнике ABK, и, следовательно $|PQ|=\frac{1}{2}|AK|=\frac{1}{4}a$.

Утверждение леммы доказано.

Применив теперь лемму 4 к треугольнику PRG, получим нужное неравенство

А. Резников

---

*) Номер был уже отправлен в типографию, когда в редакцию пришло письмо от Петера Такача из г. Шафариково (Чехословакия) с чисто алгебраическим доказательством.

Международные олимпиады школьников

XVII Олимпиада по математике

XVII Международная математическая олимпиада школьников состоялась в Болгарии в июле 1975 года в г. Бургас. В ней приняли участие команды 17 стран: Австрии, Болгарии, Великобритании, Венгрии, ГДР, Греции, ДРВ, Монголии, Нидерландов, Польши, Румынии, СССР, США, Франции, Чехословакии, Швеции, Югославии. Как обычно, команда каждой страны состояла из 8 школьников (в команде ДРВ было семь человек из-за болезни одного участника). Впервые выступила на олимпиаде команда школьников Греции.

Советская команда была в основном сформирована из победителей IX Всесоюзной математической олимпиады.

В этом году Всесоюзная олимпиада проводилась по новому положению, которое в настоящее время уточняется. Это положение предусматривает проведение республиканских олимпиад, по итогам которых формируются команды союзных республик. Однако ограничения на формирование команды РСФСР и недостатки в организации и проведении Всероссийской математической олимпиады привели к тому, что многие школьники, показавшие высокие результаты на Московской городской олимпиаде, не попали на Всесоюзную олимпиаду. В связи с этим для отбора кандидатов в команду СССР на Международную математическую олимпиаду среди московских школьников были проведены дополнительные соревнования. Победители Всесоюзной олимпиады вместе с победителями московского отбора были приглашены на учебно-тренировочные сборы, которые традиционно проводятся под Москвой в Горках Ленинских. Здесь и был окончательно определен состав команды. В нее вошли:

Александр Корнюшкин, выпускник ФМШ № 18 при МГУ, призер областных и республиканских олимпиад по математике на Всесоюзной математической олимпиаде он получил в 1973 году — I премию, в 1974 году — II премию, в 1975 году — II премию;

Юрий Неретин, выпускник средней школы № 91, г. Москвы, призер Московских городских олимпиад, на Всесоюзной математической олимпиаде он получил в 1974 году I премию, в 1975 году — II премию;

Александр Резников, выпускник ФМШ № 145 при КГУ, призер городских и республиканских олимпиад по математике (I премия в 1974 и 1975 годах), на Всесоюзной математической олимпиаде он получил в 1974 году II премию, а в 1975 году — I премию;

Сергей Финашин, ученик 9 класса ФМШ № 45 при ЛГУ, призер Ленинградских городских олимпиад (1973 год — I премия, 1974 и 1975 годы — II премия), на Всесоюзной математической олимпиаде он получил в 1974 и 1975 годах I премии;

Татьяна Хованова, ученица 9 класса средней школы № 444 г. Москвы, призер Московских городских олимпиад по математике, на Всесоюзной математической олимпиаде она получила в 1974 и 1975 годах I премии;

Георгий Шмелев, выпускник средней школы № 20 г. Ярославля, призер областных и республиканских олимпиад, на Всесоюзной математической олимпиаде получил в 1974 году II премию, в 1975 году — I премию;

Борис Юсин, выпускник очно-заочной вечерней (сменной) школы № 180 г. Москвы, призер Московских городских олимпиад, занял первое место в отборочных соревнованиях школьников на XVII Международную математическую олимпиаду;

Илья Юнус, выпускник средней школы № 27 г. Харькова, призер областных и республиканских олимпиад, на Всесоюзной математической олимпиаде получил в 1974 году III премию, в 1975 году — I премию.

Кроме того, в тренировочных сборах приняли участие кандидаты в команду **Константин Рыбасов** (выпускник ФМШ № 145 при КГУ), **Алексей Музыкантов** (выпускник школы № 130 г. Новосибирска), **Александр Гончаров** (ученик 9 класса школы-интерната № 18 при МГУ), **Владимир Гейзель** (выпускник ФМШ № 18 при МГУ).

Для читателей «Кванта», возможно, представят интерес задачи одной из отборочных олимпиад, результаты которой учитывались при формировании команды.

1. На бесконечной черно-белой шахматной доске со стороной клетки 1 сидит блоха, которая каждую секунду прыгает на α вправо и β вверх, причем $0<\alpha<\beta<1$. Доказать, что блоха когда-нибудь окажется внутри белой клетки.

2. Решить в натуральных числах уравнение $m^m = n^{nn}$.

3. Точка O — центр квадрата $ABCD$. Найти множество точек M таких, что отрезок OM полностью покрывается кругом, лежащим внутри квадрата $ABCD$.

4. Доказать, что существует 1975 последовательных натуральных чисел, ни одно из которых не представимо в виде $p^2+q^3+r^7$, где p, q, r — натуральные числа.

3 июля наша команда выехала в Болгарию, где в Бургасе 7 и 8 июля состоялись оба тура состязаний.

Задачи для олимпиады были предварительно отобраны Международным жюри, в состав которого вошли научные руководители всех команд, председателем жюри был профессор Софийского университета И. Проданов. На решение задач в каждый из дней соревнований, как и в прошлые годы, отводилось по 4 часа (тексты задач приведены в конце статьи, в скобках указано, какой страной была предложена задача и сколько очков давалось за ее полное решение).

Торжественное закрытие олимпиады состоялось в Софии, где победителям были вручены награды.

I премию получили

8 участников, у которых по итогам двух дней оказалось 40 и 39 очков.

40 очков набрали: *Пауль Войта* (США), *Джон Рикард* (Великобритания), *Жан-Клод Сикорав* (Франция), *Пауль Хердег* (США), *Джонатан Хичкок* (Великобритания), *Борис Юсин* (СССР).

39 очков набрали: *Вилфрид Пашер* (Австрия), *Миллер Пукетт* (США).

II премию получили

25 участников, набравших от 37 до 32 очков. Среди них трое советских школьников: *Александр Корнюшкин* (36 очков), *Александр Резников* (34 очка), *Татьяна Хованова* (32 очка).

III премию получили

36 участников, среди них наши школьники: *Георгий Шмелев* (28 очков), *Илья Юнус* (26 очков), *Юрий Не-*

ретин (25 очков), *Сергей Финашин* (25 очков).

По итогам двух дней соревнований лучший результат у команды Венгрии, далее следуют команды ГДР, США и СССР. При этом лишь в трех командах — Венгрии, ГДР и СССР — все участники получили награды.

Задачи первого дня соревнований

1. Пусть x_i, y_i ($i = 1, 2, 3, \ldots, n$) — действительные числа, такие, что $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_n$ и $y_1 \geqslant y_2 \geqslant \ldots \geqslant y_n$. Доказать, что если $z_1, z_2, \ldots, z_n$ — любая перестановка чисел $y_1, y_2, \ldots, y_n$, то

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} (x_i - z_i)^2$$

(Чехословакия, 6 очков).

2. Пусть $a_1, a_2, a_3, \ldots$ — произвольная бесконечная последовательность положительных целых чисел, таких, что $a_k < a_{k+1}$ ($1 \leqslant k$). Доказать, что бесконечно много членов a_m этой последовательности можно представить в виде $a_m = xa_p + ya_q$, где x и y — положительные числа и $p \neq q$ (Великобритания, 7 очков).

3. На сторонах произвольного треугольника ABC вне его (в плоскости ABC) построены треугольники BPC, CQA и ARB так, что

$$\widehat{PBC} = \widehat{CAQ} = 45^\circ, \qquad \widehat{BCP} = \widehat{QCA} = 30^\circ,$$
$$\widehat{ABR} = \widehat{BAR} = 15^\circ.$$

Доказать, что $\widehat{QRP} = 90^\circ$ и $|QR| = |RP|$ (Нидерланды, 7 очков).

Задачи второго дня соревнований

4. Пусть A — сумма цифр в десятичной записи числа 4444^{4444}, а B' — сумма цифр числа A (A и B также рассматриваются в десятичной записи). Найти сумму цифр числа B (СССР, 6 очков).

5. Можно ли на окружности радиуса 1 отметить 1975 точек так, чтобы длины хорд, соединяющих любые две из них, выражались рациональными числами? (СССР, 6 очков).

6. Найти все многочлены P относительно двух переменых, обладающие следующими свойствами:

1) P — однородный многочлен степени n, то есть для всех действительных t, x, y $P(tx, ty) = t^n P(x, y)$;

2) для всех действительных a, b, c $P(a+b, c) + P(b+c, a) + P(c+a, b) = 0$;

3) $P(1, 0) = 1$

(Великобритания, 8 очков).

З. И. Моисеева, В. А. Скворцов,

VIII Олимпиада по физике

В июле 1975 года в городе Гюстрове (ГДР) состоялась VIII Международная олимпиада по физике среди школьников. В олимпиаде участвовали команды Болгарии, Венгрии, ГДР, Польши, Румынии, СССР, Чехословакии, Франции, ФРГ.

Членами команды СССР были школьники — призеры Всесоюзной олимпиады по физике, показавшие наилучшие результаты на тренировочном сборе:

Леонид Авдеев — выпускник физико-математической школы-интерната № 165 г. Новосибирска;

Вадим Борю — выпускник средней школы № 28 г. Запорожья;

Сергей Коршунов — выпускник средней школы № 1 пос. Монино Щелковского района Московской области;

Юрий Македонов — выпускник средней школы № 37 г. Калинина;

Евгений Шахнович — выпускник средней школы № 6 г. Калинина.

7 июля все участники олимпиады собрались в Берлине и на автобусах направились в Гюстров.

9 июля проводился теоретический тур, на котором участникам были предложены три задачи (тексты задач приводятся в конце статьи). Максимальное число баллов в этом туре получили: Раду Опреа (Румыния), Сергей Коршунов (СССР), Антони Лачковский (Польша), Доменик Деланде (Франция). 11 июля на экспериментальном туре, где участникам

нужно было решить одну задачу, наилучших успехов добились Матиас Вагнер (ГДР), Мирослав Лычка (Чехословакия), Сергей Коршунов, Евгений Шахнович (СССР), Иозеф Шмидт (Венгрия), Волькер Фритче (ГДР).

14 июля состоялось торжественное закрытие олимпиады, где были подведены окончательные итоги. Победители были награждены дипломами и ценными подарками.

Наиболее успешно выступили команды ГДР, СССР, Венгрии и Польши, все члены которых были награждены дипломами I, II, III степени.

Победителем олимпиады стал *Сергей Коршунов* (СССР), набравший наибольшее число баллов (43).

I премию получили:
Сергей Коршунов (СССР), *Раду Опрга* (Румыния), *Иозеф Шмидт* (Венгрия), *Волькер Фритче, Матиас Вагнер, Йорг Бергман* (ГДР), *Мирослав Лычка* (Чехословакия).

II премию получили:
Бела Фараче, Ене Шер (Венгрия), *Леонид Авдеев, Евгений Шахнович* (СССР), *Антони Лачковский* (Польша), *Лаурентю Франчу* (Румыния), *Мартин Ханке* (ГДР), *Ян Хула* (Чехословакия), *Доменик Деланде* (Франция).

III премию получили:
Ежи Блавдзевич, Анджей Лусаковский, Дарюш Петрашкевич, Богуслав Суликовский (Польша), *Юрий Македонов, Вадим Борю* (СССР), *Ганс-Георг Мартин* (ГДР), *Геза Георгий, Аттила Вироштек* (Венгрия), *Пьер-Мишель Дельрух, Рене Годефрой* (Франция), *Юри Хулка* (Чехословакия).

В свободное время юным физикам была предоставлена возможность познакомиться с культурными и историческими памятниками ГДР, встретиться со школьниками и студентами.

Участники олимпиады были гостями студентов Высшей педагогической школы им. Лизелотты Германн в Гюстрове, где проходила олимпиада. Школьники совершили прогулку на катерах по озеру, экскурсию по городу, побывали в Политехническом музее, в музее Барлаха, на промышленных предприятиях, возложили венки к памятному месту встречи Советской армией узников Заксенхаузена и на братскую могилу советских солдат.

В Ростоке, познакомившись с городом, участники олимпиады совершили прогулку на катере по Балтийскому морю, встретились в туристическом лагере со школьниками ГДР.

Во время поездки в Потсдам участники олимпиады посетили парк Сан-Суси, Новый дворец, замок Цицилиенхоф, где было подписано знаменитое Потсдамское соглашение.

В Берлине была экскурсия по городу. Во время посещения Трептов-парка школьники возложили венок к памятнику Советскому солдату.

За время олимпиады члены разных команд подружились между собой, обменялись сувенирами.

Ниже приводятся задачи теоретического и экспериментального туров.

Теоретический тур

Задача 1. Стержень закреплен под углом $\frac{\pi}{2}-\alpha$ по отношению к вертикальной оси A (рис. 1). Конструкция может вращаться вокруг этой оси с угловой скоростью ω. На стержне находится подвижное тело весом $G = mg$. Движение тела по стержню происходит с трением. Коэффициент трения покоя μ ($\mu = \operatorname{tg}\beta$).

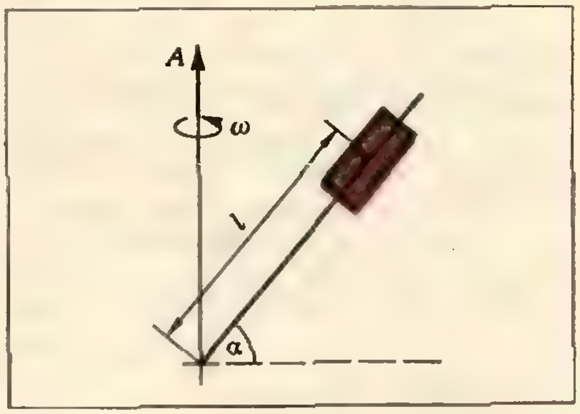


Рис. 1.

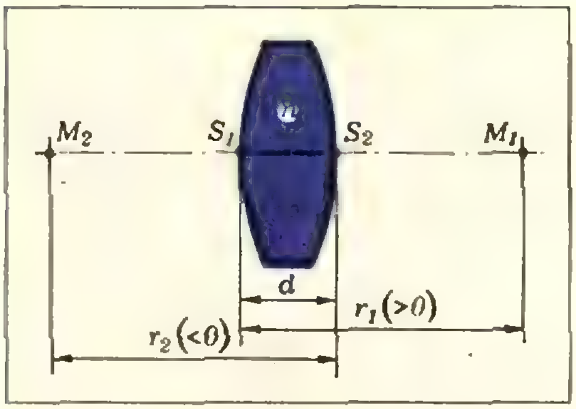


Рис. 2.

а) Для каких значений угла α тело находится в покое и для каких значений α тело движется при $\omega = 0$?

б) Определить условия, при которых тело находится в покое, если конструкция вращается с постоянной скоростью ω. При вращении угол α не меняется.

Используйте следующие соотношения при расчетах:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta.$$

Задача 2. Для толстой стеклянной линзы с радиусами кривизны r_1 и r_2 и толщиной d (рис. 2), находящейся в воздухе, фокусное расстояние f определяется следующим выражением:

$$f = \frac{nr_1r_2}{(n-1)[n(r_2-r_1)+d(n-1)]},$$

где n — показатель преломления (воздух — стекло).

Примечание. $r_i>0$ означает, что центр кривизны M_i лежит с правой стороны от точки S_i; $r_i < 0$ означает, что центр кривизны M_i лежит с левой стороны от точки S_i $(i = 1, 2)$.

Для определенных целей желательно, чтобы фокусное расстояние не зависело от длины волны света λ.

а) Для скольких различных длин волн можно добиться одного и того же значения фокусного расстояния?

б) Найдите соотношение между r_i, d и показателями преломления, при котором фокусное расстояние линзы не зависит от длины волны света (см. предыдущий вопрос), и обсудите это соотношение. Нарисуйте возможные формы линзы. Укажите положения центров кривизны M_1 и M_2.

в) Покажите, что для плоско-выпуклой линзы определенное фокусное расстояние можно получить только для одной длины волны света.

г) Укажите еще случаи, когда при определенных параметрах толстой линзы можно реализовать заданное фокусное расстояние только для одной длины волны. Обратите при этом внимание на физическое и геометрическое обстоятельства.

Задача 3. Из точки Q в одной плоскости испускается пучок положительных однозаряженных ионов (заряд $+e$) одинаковой и постоянной массы m. Ионы, ускоренные напряжением U, отклоняются однородным магнитным полем, которое направлено перпендикулярно к плоскости распространения ионов. Индукция магнитного поля равна B. Границы магнитного поля должны быть такими, чтобы пучок ионов сходился в одной точке A $(QA = 2a)$. Траектории ионов должны быть симметричными относительно линии, перпендикулярной к отрезку QA и проходящей через его середину. Из возможных границ магнитного поля следует выбрать такие, которые находились бы в окрестностях линии, перпендикулярной к середине отрезка QA, но не захватывали точек Q и A. Область должна быть односвязной, т. е. без дыр и разрывов.

а) Выразите радиус кривизны R траекторий частиц в магнитном поле как функцию напряжения U и индукции B.

б) Укажите характерные свойства траекторий частиц в полученной установке.

в) Найдите границы магнитного поля путем геометрического построения для случаев: $R < a$; $R = a$; $R > a$.

г) Найдите математическое выражение для границы магнитного поля.

Экспериментальный тур

Задача. На рабочем месте находятся следующие приборы: полупроводниковый прибор, реостат (140 *ом*), постоянное сопротивление (300 *ом*), источник напряжения (9 *в*), 2 универсальных электроизмерительных прибора (без омметра), соединительные провода.

Используя эти приборы, решите следующие задачи.

а) Соберите цепь и проделайте необходимые измерения для построения вольтамперной характеристики полупроводникового

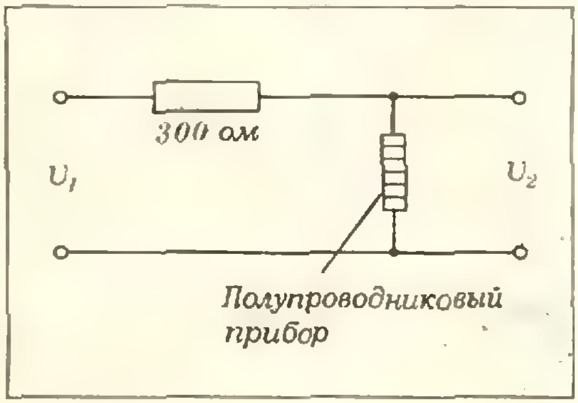


Рис. 3.

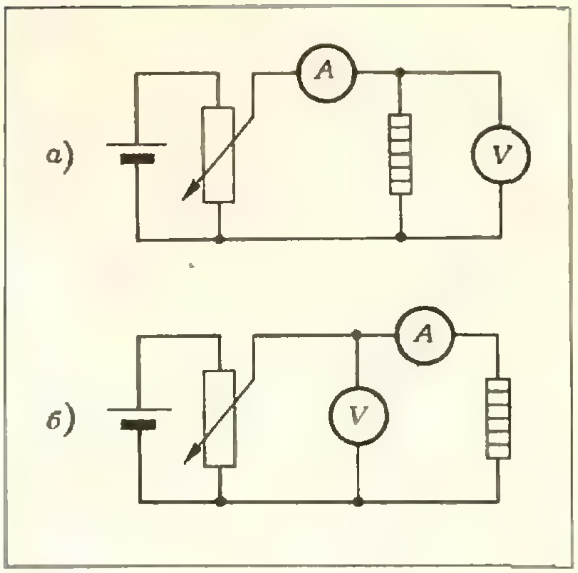


Рис. 4.

прибора в *границах, определяемых* максимально допустимой мощностью 250 *мвт*. Запишите результаты измерений в таблицу и нарисуйте вольтамперную характеристику. Подумайте перед началом измерений о том, как можно надежно предотвратить перегрузку полупроводникового прибора, и запишите ваши рассуждения в отчет. Начертите схему электрической цепи для проведения измерений и проанализируйте систематические ошибки, которые возникают при использовании выбранной вами схемы.

б) Рассчитайте внутренние сопротивления (динамические сопротивления) полупроводникового прибора при силе тока 25 *ма*.

в) Используя схему, указанную на рисунке 3, исследуйте зависимость выходного напряжения U_2 от входного напряжения U_1 и результат представьте в виде таблицы и графически. Входное напряжение U_1 следует менять в пределах от 0 до 9 *в*. При этом полупроводниковый прибор следует включить в цепь так, чтобы U_2 было по возможности больше. Нарисуйте полную схему соединения приборов и обсудите в отчете результаты измерений.

г) Укажите, на какую величину меняется выходное напряжение U_2, если входное напряжение U_1 увеличивается от 7 в до 9 *в*. Объясните качественно отношение $\Delta U_1 : \Delta U_2$.

д) К какому типу полупроводниковых приборов относится прибор, используемый в эксперименте? Приведите пример практического применения схемы, указанной на рисунке 3.

Указание. Электроизмерительные приборы относятся к классу точности 2,5 и имеют следующие параметры:

Диапазон измерения	Внутреннее сопротивление
50 μa	2 *ком*
300 μa	1 *ком*
3 *ма*	100 *ом*
30 *ма*	10 *ом*
300 *ма*	1 *ом*
0,3 *в*	6 *ком*
1 *в*	20 *ком*
3 *в*	60 *ком*
10 *в*	200 *ком*

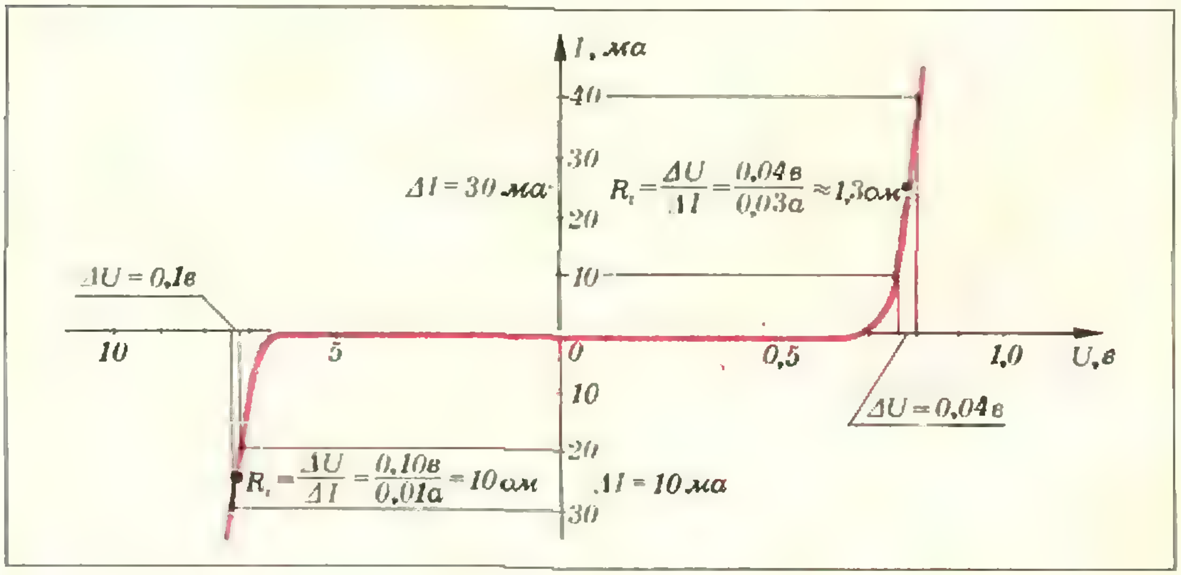


Рис. 5.

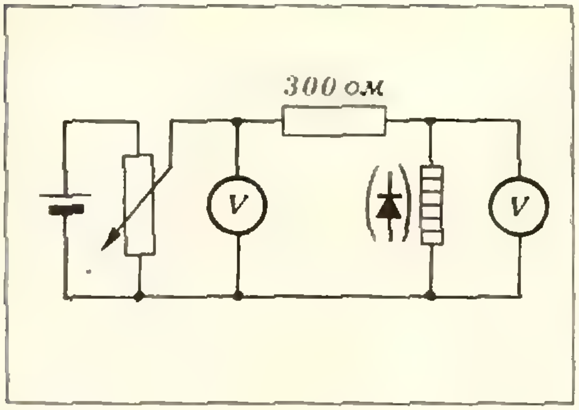


Рис. 6.

Как обычно, решения задач оценивались баллами. Максимальное количество баллов за решение каждой задачи теоретического тура — 10, а за решение экспериментальной задачи — 20. Таким образом, каждый участник олимпиады мог набрать 50 баллов. Для примера приведем решение экспериментальной задачи (решение остальных задач см. на с. 74). Заметим, что здесь и далее решения задач даны так, как они были предложены устроителями олимпиады. После каждого этапа решения в скобках будет указано соответствующее количество баллов.

а) Максимально допустимая мощность для полупроводникового диода 250 *мвт*. Следовательно, серию измерений надо проводить так, чтобы произведение напряжения на полупроводниковом приборе на силу тока всегда было меньше допустимой мощности. (1 балл)

Схемы для эксперимента могут быть такими, как показано на рисунке 4. (2 балла)

Систематические ошибки возникают, во-первых, из-за измерительных приборов. В первой схеме (рис. 4, *а*) амперметр измеряет также ток, текущий через вольтметр. Во второй схеме (рис. 4, *б*) вольтметр измеряет еще падение напряжения на амперметре. Поэтому при расчетах необходимо использовать данные о внутренних сопротивлениях амперметра и вольтметра. Во-вторых, систематическая ошибка возникает из-за неконтролируемого повышения температуры полупроводникового прибора, при этом увеличивается его электропроводность. (1 балл)

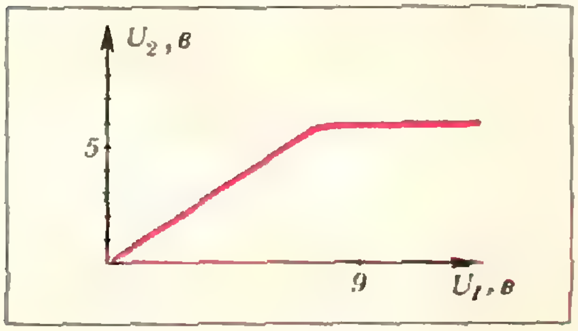


Рис. 7.

Вольтамперная характеристика полупроводникового прибора, полученная по результатам измерений, приведена на рисунке 5. (2 балла)

б) Внутреннее сопротивление определяется так: $R_i = \frac{\Delta U}{\Delta I}$. (1 балл)

При силе тока 25 *ма* внутреннее сопротивление для прямого направления тока равно 1 *ом*±50%, а для запирающего направления тока — 10 *ом* ± 50% (см. рис. 5). Относительная ошибка до 50% считалась допустимой. (2 балла)

в) Полная схема, необходимая для исследования, показана на рисунке 6. (1 балл)

Для обоих направлений тока график зависимости $U_2 = f(U_1)$ имеет одинаковый вид (рис. 7), но абсолютные значения различны. (3 балла)

Обратите внимание на то, как включен полупроводниковый диод. Именно в этом случае выходное напряжение U_2 будет больше. (1 балл)

Начиная с некоторого значения входного напряжения U_1, напряжение U_2 изменяется очень незначительно потому, что произошел пробой полупроводникового прибора. С увеличением U_1 растет ток в цепи и соответственно растет падение напряжения на добавочном сопротивлении. (1 балл)

г) По результатам измерений $\Delta U_2 = 0{,}1$ *в* ± 50%. (1 балл)

Таким образом, ΔU_2 гораздо меньше ΔU_1. Это объясняется тем, что внутреннее сопротивление полупроводникового прибора намного меньше добавочного сопротивления, поэтому изменение входного сопротивления сильнее всего сказывается на падении напряжения на добавочном сопротивлении. (2 балла)

д) Полупроводниковый прибор является диодом. Правильным считается также ответ: выпрямитель. (1 балл)

Данную схему можно использовать как стабилизатор напряжения. (2 балла)

Внимание! При разрушении диода вычитаются 2 балла, а при повреждении измерительного прибора — 5 баллов.

В. Г. Разумовский, Г. С. Тарасюк

РЕЦЕНЗИИ.
БИБЛИОГРАФИЯ

Школьникам о физике твердого тела

Редакция физики издательства «Просвещение» начала издание серии книг под общим названием «Школьникам о современной физике». Это сделано весьма своевременно, поскольку средняя школа перешла на новую программу по физике, в которой заметно возрос удельный вес разделов современной физики и поднят научный уровень всего курса.

В 1974 году вышла первая книга этой серии, в которой рассказывалось о некоторых фундаментальных проблемах современной физики. В журнале «Квант» была опубликована рецензия на эту книгу*). Недавно вышла вторая книга, посвященная физике твердого тела**). Физика твердого тела в наше время превратилась в обширную, разветвленную науку. Каждое направление этой науки имеет большое теоретическое значение и широкие практические применения. Почти невозможно указать отрасль промышленности, где бы не применялись достижения современной физики твердого тела. Например, в современных вычислительных машинах используется явление сверхпроводимости, свойственное некоторым металлам и сплавам при низких температурах. Свойства полупроводников дают широчайшие возможности применения полупроводников в технике. Таких примеров можно было бы привести очень много.

В школьном курсе физики рассматриваются некоторые вопросы физики твердого тела. Но рассказать о современном состоянии физики твердого тела так, чтобы было понятно школьнику, очень трудно. Однако эта трудная задача в основном успешно решена авторами статей, помещенных в книге.

Книга содержит шесть статей, посвященных важнейшим проблемам физики твердого тела, и одну статью, рассказывающую о некоторых особенностях связи современной физики с математикой.

Книга начинается статьей доктора физико-математических наук, старшего научного сотрудника Института физических проблем АН СССР, профессора Московского физико-технического института А. Ф. Андреева «Сверхтекучесть жидкого гелия». В ней рассказывается о явлении сверхтекучести жидкого гелия, открытом в 1938 году крупнейшим советским физиком академиком П. Л. Капицей. Из этой статьи читатели узнают не только об удивительных свойствах жидкого гелия II, но и поймут, почему гелий даже при сверхнизкой температуре и нормальном давлении нельзя превратить в твердое тело.

Необычные свойства, которые обнаруживает жидкий гелий при температурах, близких к абсолютному нулю, — не единственное замечательное явление в этой области температур. Второе уникальное явление, свойственное некоторым металлам и сплавам при сверхнизких температурах, — сверхпроводимость. Этому явлению в книге «Школьникам о современной физике. Физика твердого тела» уделено особое внимание. В статье «О сверхпроводимости», написанной доктором физико-математических наук, профессором В. З. Кресиным, рассказывается о том, как в физической лаборатории Лейденского университета голландский ученый Г. Камерлинг-Оннес в 1911 году открыл удивительное свойство ртути: при температуре, близкой к 4°К, электрическое сопротивление этого металла скачкообразно обращается в нуль. Так возникло одно из наиболее интересных и важных направлений в современной физике твердого тела.

Явление сверхпроводимости наблюдается только при очень низких температурах. В настоящее время удалось осуществить переход в сверхпроводящее состояние сплава Nb_3Ge при температуре $T = 22{,}3$ °К. Это пока наиболее высокая температура перехода. В статье приводится объяснение явления сверхпроводимости, обсуждаются направления поисков высокотемпературной сверхпроводимости, рассмотрено влияние на сверхпроводимость магнитных полей. С большим интересом читатели ознакомятся с уже существующими применениями сверхпроводников, а также со связью сверхпроводимости с другими областями физики (сверхпроводящее состояние атомных ядер, сверхпроводимость и нейтронные звезды, сверхпроводимость и биофизика).

Статья **В. А. Белякова**, кандидата физико-математических наук, старшего научного сотрудника Института физико-технических и радиотехнических измерений, «Эффект Мёссбауэра», пожалуй, наиболее трудная в этой книге. В статье рассказывается о том, как происходит излучение и поглощение γ-лучей ядрами атомов.

---

*) Д. Бородин. «Школьникам о современной физике», «Квант», 1975, № 4.

**) *Школьникам о современной физике. Физика твердого тела.* М., «Просвещение», 1975.

Как и электроны в атомах, нуклоны в ядрах (протоны и нейтроны) находятся на определенных энергетических уровнях. Переходы нуклонов с одного уровня на другой являются причиной излучения или поглощения гамма-лучей ядрами. В 1958 году молодой немецкий физик Р. Мёссбауэр изучал резонансное поглощение γ-лучей. Энергия кванта этих лучей равна разности энергетических уровней нуклонов. Поэтому такое поглощение и называется резонансным. Мёссбауэр обнаружил, что если поглощение или излучение γ-лучей происходит в кристаллической решетке, где ядра атомов жестко связаны, то не происходит отдачи ядер. (Если человек прыгает в воду с корабля, то корабль не испытывает отдачи, так как масса корабля значительно больше, чем масса человека. Если бы человек прыгал с лодки, то отдача была бы заметной.) Оказалось, что в условиях эффекта Мёссбауэра спектральные линии испускания и поглощения γ-лучей очень узкие. Это позволяет использовать эффект Мёссбауэра для измерений очень малых разностей энергий и частот с огромной точностью. В статье В. А. Белякова рассказывается о возможности применения эффекта Мёссбауэра в разных областях физики и химии (наблюдение эффектов в теории относительности, изучение структуры сложных молекул твердых тел и т. д).

Доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник Института физических проблем АН СССР, профессор МГУ М. И. Каганов в статье «Магнитные свойства вещества» увлекательно рассказывает о современных взглядах на магнитные свойства твердых тел. Начиная с рассмотрения магнитных свойств элементарных носителей магнетизма — электронов, протонов и нейтронов, автор постепенно переходит к магнитным свойствам атомов, молекул и кристаллов. Статья содержит изложение природы парамагнетизма и обменного взаимодействия. При изучении магнитных свойств вещества наибольшие трудности у школьников вызывает понимание свойств и физической природы ферромагнетизма. В статье профессора М. И. Каганова они не только найдут доступное и современное объяснение этих вопросов, но и познакомятся с антиферромагнетизмом, с поведением веществ, обладающих магнитными свойствами, вблизи абсолютного нуля температур и со многими другими интереснейшими проблемами.

Статья кандидата физико-математических наук, доцента Московского педагогического института им. В. И. Ленина Ю. А. Гурвича посвящена полупроводникам. В школьном курсе физики изучению электрических свойств полупроводников отводится заметное место. Поэтому содержание этой статьи в бóльшей мере, чем материалы других статей, покажется читателям знакомым. Однако статья «Полупроводники» существенно расширяет те сведения, которые школьники получают в обязательном курсе физики. Все свойства собственных и примесных полупроводников рассматриваются на основе зонной теории твердых тел, анализа характера расположения и заполнения электронами энергетических уровней в кристаллах. Такой подход позволил автору рассмотреть все основные свойства электронных и дырочных полупроводников и рассказать о важнейших их применениях.

Шестая физическая статья книги, написанная кандидатом физико-математических наук, научным сотрудником Физического института АН СССР А. А. Самохиным, называется «Лазеры». Эти оптические квантовые генераторы света были созданы в 1954—1955 годах советскими учеными академиками Н. Г. Басовым и А. М. Прохоровым в Физическом институте АН СССР в Москве и американским ученым Ч. Таунсом в Колумбийском университете в Нью-Йорке. Статья А. А. Самохина существенно расширяет и углубляет сведения, изложенные в школьном учебнике. В ней говорится о физических принципах работы лазеров, об их основных типах, режиме работы, а также о многочисленных и все расширяющихся возможностях применения лазеров в самых разнообразных областях науки и техники.

Последняя, седьмая статья называется «Физика и математика». Она написана кандидатом физико-математических наук, старшим научным сотрудником Института атомной энергии им. И. В. Курчатова В. П. Смилгой. Тематически эта статья не связана с физикой твердого тела. Однако она имеет прямое отношение ко всей серии книг «Школьникам о современной физике». В статье рассказывается о том, насколько в наше время переплетаются математика и современная физика, о роли математики в достижениях физики, о значении математической красоты в физических теориях и о многом другом. Написана статья мастерски, на примерах восьми конкретных историй, охватывающих большой период времени.

Подведем итоги. С большим педагогическим тактом, на доступном и вместе с тем серьезном уровне школьникам рассказывается о сложнейших вопросах современной физики. Можно только пожелать, чтобы и следующие книги этой серии принесли такую же пользу учащимся, как уже вышедшие.

Б. М. Яворский

ИНФОРМАЦИЯ

VI Математическая олимпиада МЭСИ

Московский экономико-статистический институт в настоящее время занимает ведущее положение в стране по подготовке специалистов по статистике, машинной обработке экономической информации и применению математических методов в экономике. Вот почему математика играет для поступающих в МЭСИ особо важную роль. В этом году МЭСИ 6-й раз проводит математическую олимпиаду для школьников.

Олимпиада проводится в 2 тура: I тур — заочный и II — очно-заочный.

К участию во втором очно-заочном туре будут допущены школьники, успешно справившиеся с задачами I тура и приславшие решения не позднее 25 февраля 1976 года (по штемпелю почты). Школьники Москвы для очного участия будут приглашаться в МЭСИ. Иногородние школьники участвуют во втором туре заочно. Каждый участник олимпиады, допущенный ко второму туру, будет извещен об этом. Чтобы ускорить получение ответа из института, приложите к письму конверт с вашим адресом.

Адрес МЭСИ: 119435, Москва, Б. Саввинский пер., 14, «Олимпиада-76».

Решение задач выполняется на русском языке в ученической тетради. Проверка всех работ, представляемых на олимпиаду, будет производиться ЭВМ. Поэтому просим в конце тетради поместить ответы к задачам, заполнив следующую таблицу.

Номера задач	1	2	3	4	5
Ответы					

Задачи первого тура:

1. Найти остаток от деления $19^{1975}-2^{1976}+6^{3950}$ на 17.

2. Вычислить произведение:

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\times\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{1976^2}\right).$$

3. Найти максимум выражения $2\cos x+3\cos y-4\cos(x+y)$.

4. На стороне AD вписанного в окружность четырехугольника находится центр окружности, касающейся трех других сторон четырехугольника. Найти $|AD|$, если $|AB|=2$ *см* и $|CD|=3$ *см*.

5. В усеченный конус, площадь полной поверхности которого равна 200 *см*^{2}, вписан шар. Второй шар касается боковой поверхности конуса по границе нижнего основания конуса. Площадь части поверхности второго шара, находящейся внутри первого шара, равна 9π *см*^{2}. Найти объем усеченного конуса.

И. Г. Венецкий,
Ю. И. Соркин, Н. Б. Шкундина

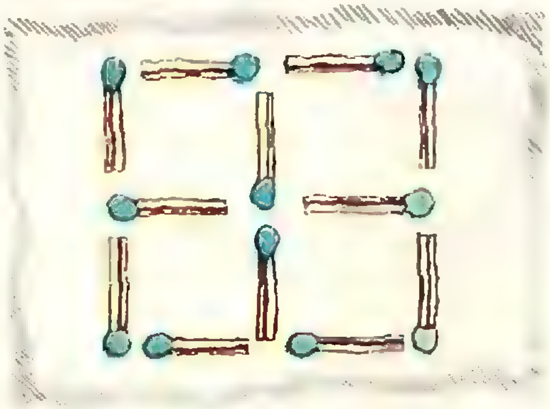
«Квант» для младших школьников

Задачи

1. Мне и моей сестре сейчас вместе 26 лет, причем сестре в три раза меньше лет, чем мне будет тогда, когда нам вместе будет в пять раз больше лет, чем мне сейчас.

Сколько сейчас лет каждому из нас?

2. Из фигуры на рисунке удалите две спички так, чтобы осталось два квадрата.



3. Сколько надо взять слагаемых суммы

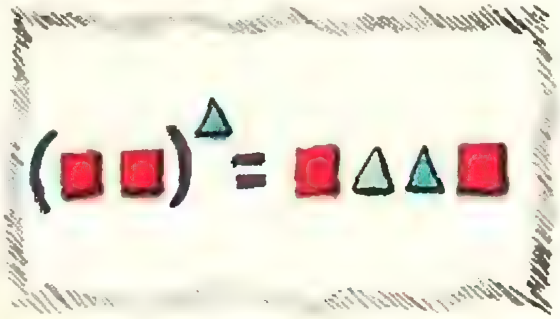
$$1+2+3+4+5+\ldots$$

чтобы получилось трехзначное число, состоящее из одинаковых цифр?

4. Петя сказал Васе: «Задумай какое-нибудь трехзначное число. Первую его цифру удвой. К полученному произведению прибавь три. Затем умножь полученную сумму на пять и прибавь к результату вторую цифру задуманного числа. Наконец, к полученной сумме припиши справа последнюю цифру задуманного числа. Сколько получилось? Пятьсот сорок? Ты задумал триста девяносто».

Как Петя узнал, какое число задумал Вася?

5. В примере (см. рисунок) цифры зашифрованы геометрическими фигурами. Расшифруйте пример.



6. Известно, что число a больше числа b в n раз, а сумма чисел a и b больше их разности в m раз. Найти сумму чисел m и n, если и m, и n — натуральные числа.

Рисунки Э. Назарова

Точка, прямая... — что это такое?

Е. Семенов

В «Кванте» № 11 рассказывалось о фантастической ситуации — в одну из московских школ на урок геометрии прилетел марсианин Инко. Ребята не смогли «рассказать» ему, что такое точка, прямая, и только с помощью аксиом принадлежности он начал разбираться в свойствах этих понятий. В этом номере мы предлагаем вам продолжить знакомство со свойствами точек и прямых — мы приводим еще две группы аксиом и задачи, решая которые, вы сможете проверить, правильно ли вы поняли эти аксиомы.

1. Расстояние от одной точки до другой

Аксиомы расстояния

Аксиома Π_1. *Для любых двух точек A и B имеется неотрицательная величина $|AB|$, называемая расстоянием от A до B. Расстояние равно нулю в том и только в том случае, если точки A и B совпадают.*

Аксиома Π_2. *Расстояние от точки A до точки B равно расстоянию от точки B до точки A: $|AB|=|BA|$.*

Аксиома Π_3. *Для любых трех точек A, B, C расстояние от A до C не больше суммы расстояний от A до B и от B до C: $|AC|\leqslant|AB|+|BC|$.*

Аксиомы Π_{1-3} определяют понятие расстояния от одной точки до другой. При решении задач будем пользоваться обозначениями вида «расстояние (Π_1)» (расстояние, описываемое только аксиомой Π_1), «расстояние ($\Pi_{1,2}$)» (расстояние, описываемое аксиомами Π_1 и Π_2), «точка (Π_1)» (точка, описываемая аксиомой Π_1) и т. п.

Задача 1. Определим расстояние между двумя фигурами как наименьшее из расстояний между точками, одна из которых принадлежит первой фигуре, а другая — второй.

а) На рисунке 1 изображена карта государств A, B, C, D, каждое из которых имеет форму квадрата со стороной 100 *км*. Каково расстояние между государствами A и B, B и C, A и C, A и D? Можно ли эти государств назвать точками (Π_1)?

б) Можно ли считать точками (Π_1) окружности, изображенные на рисунке 2?

Задача 2. Расстоянием между двумя населенными пунктами, расположенными на берегу реки, назовем время движения от одного из них до другого на лодке. Можно ли считать населенные пункты *A*, *B* и *C* (рис. 3) точками ($\text{П}_{1,2}$)?

Задача 3. Трамвай ходит по кольцевому маршруту в направлении, указанном стрелкой на рисунке 4. Расстояние между остановками измеряется длиной пути, пройденного трамваем. Можно ли остановки *A*, *B*, *C* считать

а) точками (П_1);

б) точками (П_2);

в) точками ($\text{П}_{1,2}$)?

г) Можно ли доказать аксиому П_2 на основе аксиомы П_1?

д) Если аксиома П_2 не выполняется, то означает ли это, что не выполняется и аксиома П_1?

е) При каком условии в данной задаче будет выполняться равенство $|AB| = |BA|$?

Задача 4. На рисунке 5 изображены дороги, соединяющие населенные пункты *A*, *B*, *C*. Расстояние между указанными населенными пунктами измеряется длиной пути между ними. Можно ли пункты *A*, *B*, *C* считать

а) точками (П_1);

б) точками (П_2);

в) точками ($\text{П}_{1,2}$)?

Задача 5. Выполняется ли аксиома П_3 для государств, изображенных на рисунке 1?

Задача 6. а) Выполняется ли аксиома П_3 для окружностей, изображенных на рисунке 2?

б) Можно ли эти окружности считать точками ($\text{П}_{2,3}$)?

в) Можно ли доказать аксиому П_1 на основе аксиом П_2 и П_3?

Задача 7. а) Проверьте выполнение аксиомы П_3 для населенных пунктов в задаче 2.

б) Можно ли населенные пункты *A*, *B*, *C* считать точками ($\text{П}_{1,3}$)?

в) Можно ли доказать аксиому П_2, опираясь на аксиомы П_1 и П_3?

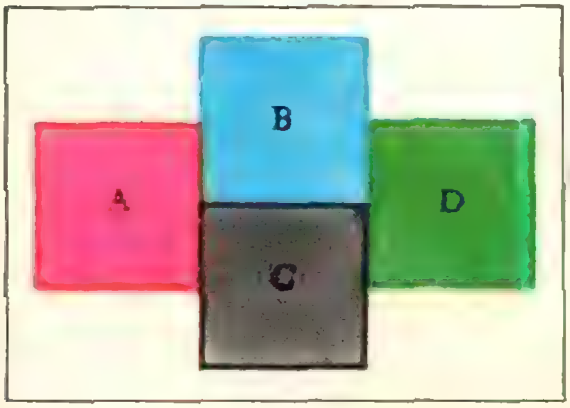


Рис. 1.

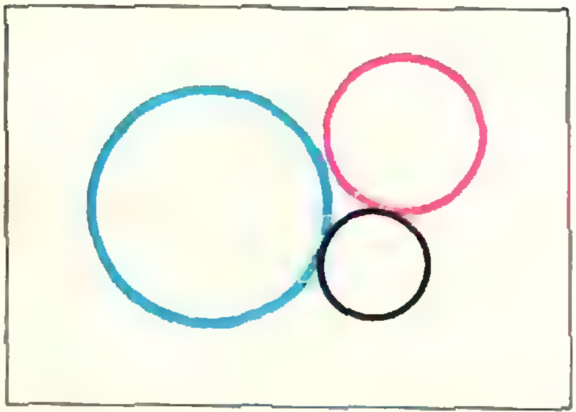


Рис. 2.

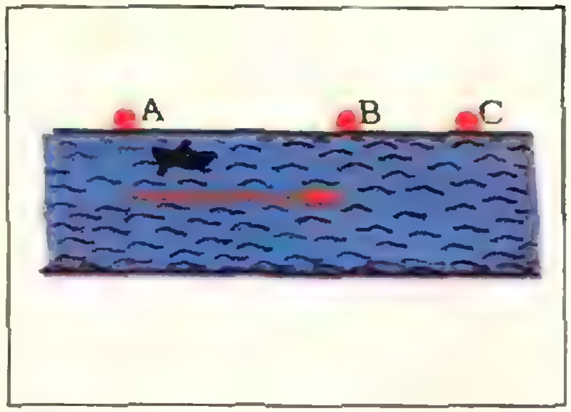


Рис. 3.

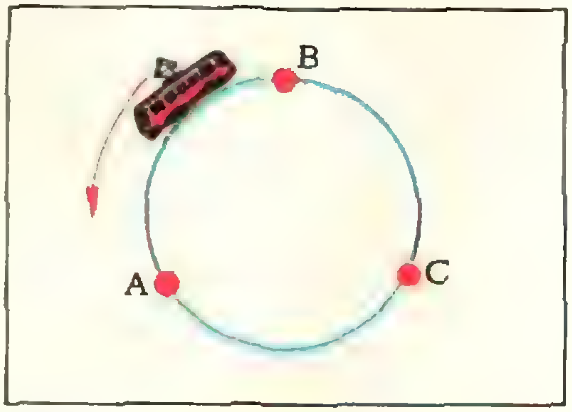


Рис. 4.

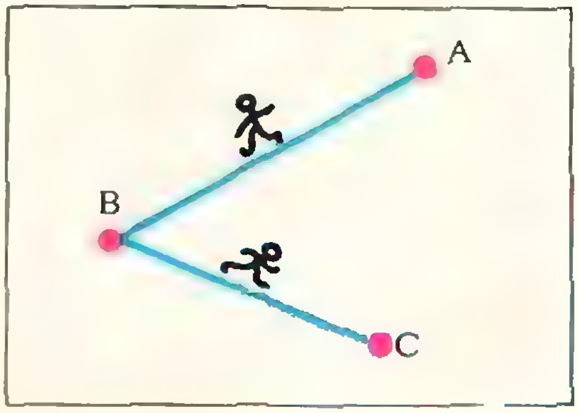


Рис. 5.

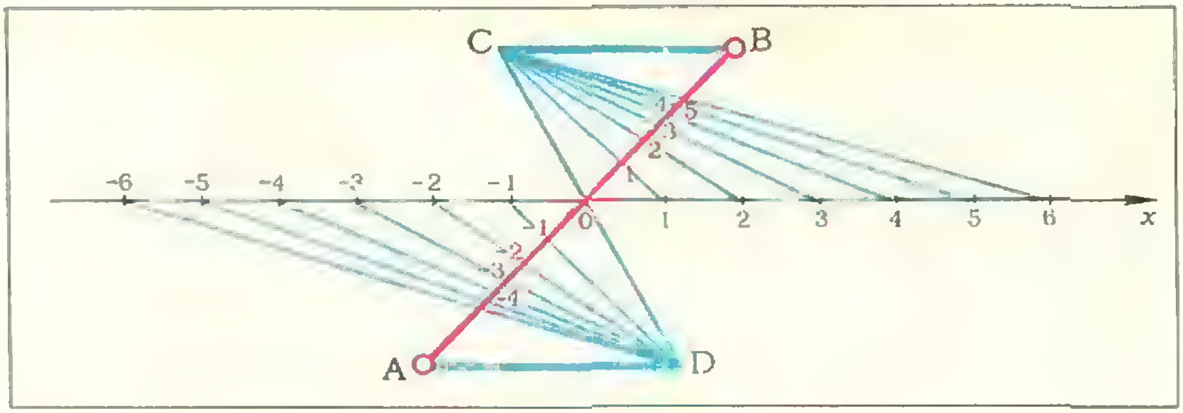


Рис. 6.

2. Аксиомы порядка

Аксиома III_1. *Любая точка O прямой p разбивает множество отличных от O точек прямой p на два непустых множества так, что:*

а) *для любых двух точек A и B, принадлежащих разным множествам, точка O лежит между A и B;*

б) *если точки A и B принадлежат одному и тому же множеству, то одна из них лежит между другой точкой и точкой O.*

Множества, о которых идет речь в аксиоме III_1, называют *открытыми лучами*, а объединение каждого из них с точкой O называют *лучом с началом O.*

Аксиома III_2. *Для любого расстояния a на заданном луче с началом O существует одна и только одна точка A, расстояние которой от точки O равно a: $|OA| = a$.*

Аксиома III_3. *Если точка C лежит между точками A и B, то точки A, B, C принадлежат одной прямой.*

Аксиома III_4. *Любая прямая p разбивает множество не принадлежащих ей точек плоскости на два непустых множества так, что:*

а) *любые две точки, принадлежащие разным множествам, разделены прямой p;*

б) *любые две точки, принадлежащие одному и тому же множеству, не разделены прямой p.*

Задача 8. Возьмем числовую ось Ox, открытый отрезок $]AB[$, пересекающий эту ось (рис. 6), и точки C и D такие, что $(BC) \parallel (Ox)$, $(AD) \parallel (Ox)$. Точки луча Ox спроектируем на отрезок OB из центра C; точки луча, противоположного лучу Ox, спроектируем из центра D на отрезок AO. Тогда на открытом отрезке $]AB[$ получим бесконечную числовую шкалу. Будем измерять расстояния между точками открытого отрезка AB с помощью полученной числовой шкалы: если в точке M стоит число m, а в точке N стоит число n, то $|MN| = |m-n|$.

а) Укажите на $]AB[$ несколько пар точек, находящихся друг от друга на расстоянии 2 единицы; 5 единиц; 8 единиц; 10 единиц.

б) Укажите примерное положение точки, лежащей на отрезке AB и отстоящей от O на 1000 единиц.

в) Выполняются ли аксиомы II_{1-3} для точек $]AB[$ при таком измерении расстояний?

Задача 9. На рисунке 7 изображено несколько линий. Под расстоянием между двумя точками линий будем подразумевать длину кратчайшего пути от одной точки до другой по этой линии. Под плоскостью будем подразумевать обычную пло-

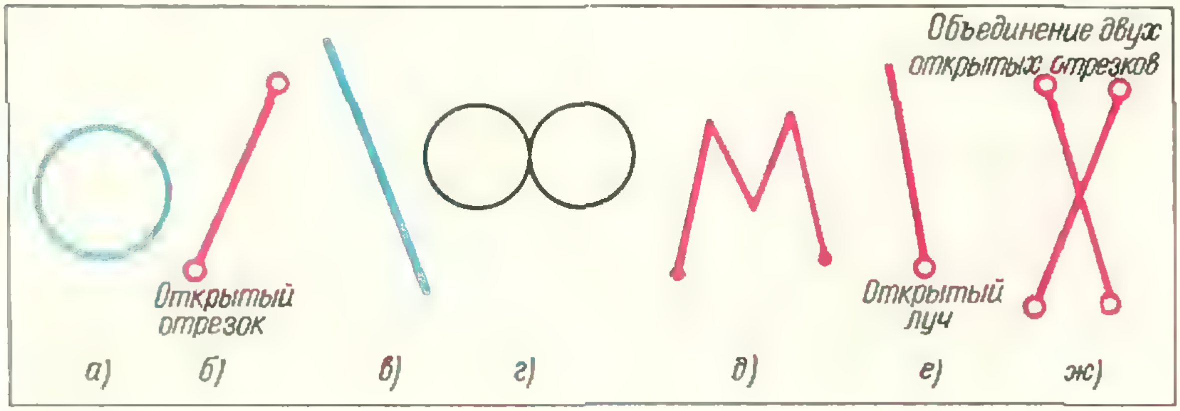


Рис. 7.

скость. Проверьте выполнение всех аксиом для изображенных линий.

Заключение

Мы рассмотрели несколько простейших моделей, в которых выполняются те или иные аксиомы. Существует много моделей, в которых выполняются все аксиомы геометрии. Это объясняется тем, что точка — не укол булавки, а прямая — не туго натянутая нить, мысленно неограниченно продолженная в обе стороны. Точками и прямыми можно назвать любые объекты, для которых выполняются свойства, указанные в группах аксиом. Например, под точкой мы можем подразумевать пару чисел (x, y), а под прямой — всякое множество пар (x, y), являющихся решением уравнения $ax + by + c = 0$.

Итак, *точка и прямая — это те геометрические понятия, свойства которых описаны в аксиомах.* Таким может быть ваш краткий ответ преподавателю на экзамене.

— А как же быть с изображениями точек и прямых с помощью мела и карандаша? — спросите вы. Ну что ж, это всего навсего изображения точек и прямых, помогающие в наших рассуждениях. И только. Но ни в коем случае не точки и не прямые. И кто знает, может, на какой-то далекой планете ученики изображают точки и прямые совсем иначе и не знают, что их можно изображать так, как это делается у нас, в «земных» школах.

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

К статье «Медианы и средние линии»

9. Сначала проведите только средние линии четырехугольника $ABCD$ и докажите, что их середины совпадают. Затем проведите отрезок, соединяющий середины диагоналей, и докажите, что его середина совпадает с серединой любой из средних линий.

15. Соедините точку N с вершинами A и B.

20. Используйте результат задачи 18.

21. Сделайте некоторое дополнительное построение.

22. С помощью параллельного переноса эту задачу можно свести к предыдущей. Но существует и другое решение, с использованием результата задачи 18. Убедитесь в том, что условие задачи содержит лишнее данное: покажите, что площадь любого выпуклого четырехугольника можно вычислить, если даны длины диагоналей и одной средней линии (или длины двух средних линий и одной диагонали).

24. Докажите, что треугольники AMP и MNP, MNQ и CNQ равновелики и воспользуйтесь результатом задачи 13.

К статье «Расчет участка цепи, содержащего э. д. с.»

1. При зарядке аккумулятора $U = |I| r + |\mathcal{E}| = 12{,}5$ *в*, а при разрядке $U = |\mathcal{E}| - |I| r = 11{,}5$ *в*.

2. См. рис. 1 и рис. 2.

3. Для первой схемы а) $I = \frac{|\mathcal{E}_1| + |\mathcal{E}_2|}{r_1 + r_2}$,

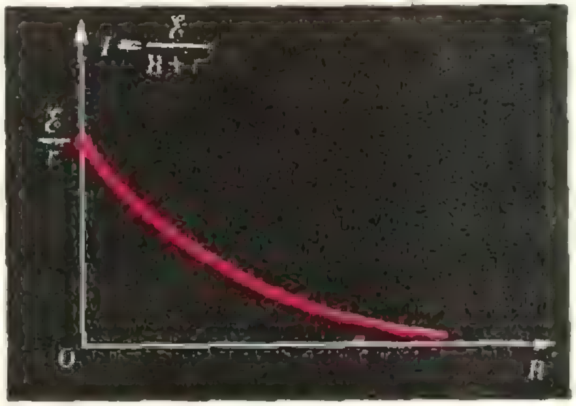


Рис. 1.

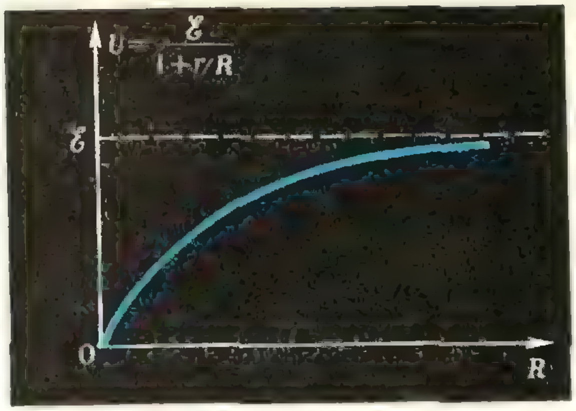


Рис. 2.

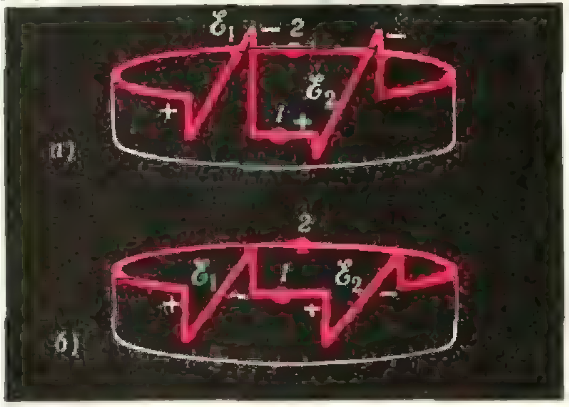


Рис. 3.

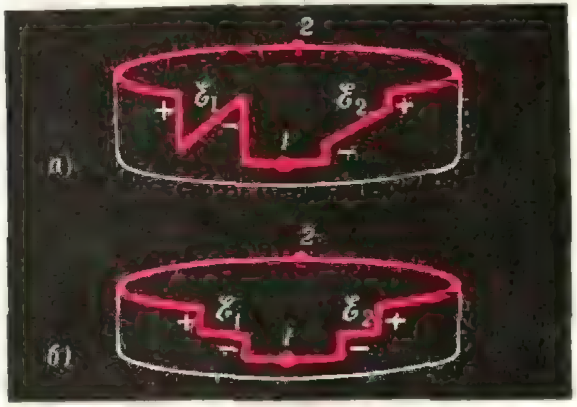


Рис. 4

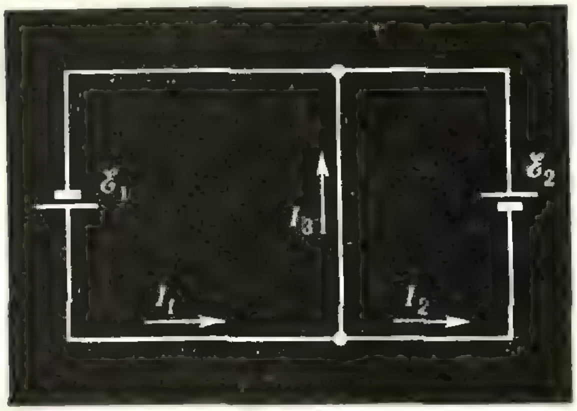


Рис. 5.

$$U_{12}=\frac{|\mathscr{E}_1|r_2-|\mathscr{E}_2|r_1}{r_1+r_2}>0;$$

б) $I=\frac{|\mathscr{E}_1|}{r_1}$, $U_{12}=0$. Для второй схемы

$$\text{а) } I=\frac{|\mathscr{E}_1|-|\mathscr{E}_2|}{r_1+r_2},$$

$$U_{12}=\frac{|\mathscr{E}_1|r_2+|\mathscr{E}_2|r_1}{r_1+r_2};$$

$$\text{б) } I=0,\quad U_{12}=|\mathscr{E}_1|.$$

Графики распределения потенциала показаны на рисунках 3 и 4.

$$4.\quad I_1=\frac{7}{22}\frac{ka}{r_0},\qquad I_2=\frac{3}{11}\frac{ka}{r_0},$$

$$I_3=\frac{1}{22}\frac{ka}{r_0}.$$

Указание. См. рис. 5, где представлена эквивалентная схема с химическими источниками. Их э. д. с. равны соответствующим э. д. с. индукции, возникающим в *левом и правом контурах (рис. 8 в статье).*

$$5.\quad U_{1,2}=\frac{|\mathscr{E}|}{2}\pm\sqrt{\frac{\mathscr{E}^2}{4}-Pr},$$

$$U_1=90\ \text{в},\quad U_2=10\ \text{в}.$$

К статье «XVII Олимпиада по математике»

1. Раскрывая скобки в доказываемом неравенстве, легко убедиться, что оно эквивалентно неравенству

$$\sum_{i=1}^{n}x_iz_i\leqslant\sum_{i=1}^{n}x_iy_i.$$

Докажем это неравенство по индукции. При $n=1$ оно очевидно. Пусть оно справедливо при $n=k$. Проверим его для $n=k+1$. Если $z_1=y_1$, то по предположению индукции

$$\sum_{i=2}^{k+1}x_iz_i\leqslant\sum_{i=2}^{k+1}x_iy_i,$$

и, прибавляя к этому неравенству x_1y_1, получаем доказываемое неравенство.

Пусть теперь $z_1=y_m$, $m\neq1$, а $y_1=z_l$, $l\neq1$. Поскольку $x_1\geqslant x_l$ и $y_1\geqslant y_m$, то $(x_1-x_l)(y_1-y_m)\geqslant0$, откуда $x_1y_1+x_ly_m\geqslant x_1y_m+x_ly_1$. Поэтому, если в сумме $\sum\limits_{i=1}^{k+1}x_iz_i$ слагаемые $x_1z_1=x_1y_m$ и $x_lz_l=x_ly_1$ заменить слагаемыми x_1y_1 и x_ly_m, то сумма от этого не уменьшится. Новую сумму можно представить в виде

$$x_1y_1 + \sum_{i=2}^{k+1} x_iz'_i,$$

где при $i \geqslant 2$

$$z'_i = \begin{cases} z_i, & \text{если } i \neq l, \\ y_m, & \text{если } i = l, \end{cases}$$

откуда видно, что $z'_2, z'_3, \ldots, z'_{k+1}$ — некоторая перестановка чисел $y_2, y_3, \ldots, y_{k+1}$. Поэтому по предположению индукции

$$\sum_{i=2}^{k+1} x_iz'_i \leqslant \sum_{i=2}^{k+1} x_iy_i,$$

и, значит,

$$\sum_{i=1}^{k+1} x_iz_i \leqslant x_1y_1 + \sum_{i=2}^{k+1} x_iz'_i \leqslant \sum_{i=1}^{k+1} x_iy_i,$$

что и требовалось доказать.

2. Пусть A_r — подпоследовательность из тех чисел a_k $(k > 1)$, которые при делении на a_1 дают остаток r. Поскольку при изменении r от 0 до $a_1 - 1$ каждое число a_k попадает в одну из подпоследовательностей A_r, то хотя бы одна из них бесконечна. Покажем, что члены этой бесконечной подпоследовательности $a_{k_1}, a_{k_2}, \ldots, a_{k_i}, \ldots$, начиная с a_{k_2}, образуют искомые числа a_m. В самом деле, они представлены в виде $a_{k_i} = p_ia_1 + r$. Поэтому при $i \geqslant 2$

$$a_{k_i} - a_{k_1} = (p_i - p_1)\, a_1,$$

откуда $a_{k_i} = xa_{k_1} + ya_1$, причем $x = 1$, $y = p_i - p_1 > 0$ и $k_1 \neq 1$, так как $k_1 > 1$.

3. Обозначим величины углов треугольника ABC при вершинах A, B, C соответственно через α, β, γ. Внутри угла ARB $(\widehat{ARB} = 150°)$ построим точку B' такую, что

$$|B'R| = |BR| \qquad (1)$$

и $\widehat{BRB'} = 90°$ (рис. 6). Тогда $\widehat{B'RA} = 60°$. Но $|B'R| = |AR|$, поэтому треугольник ARB' — равносторонний.

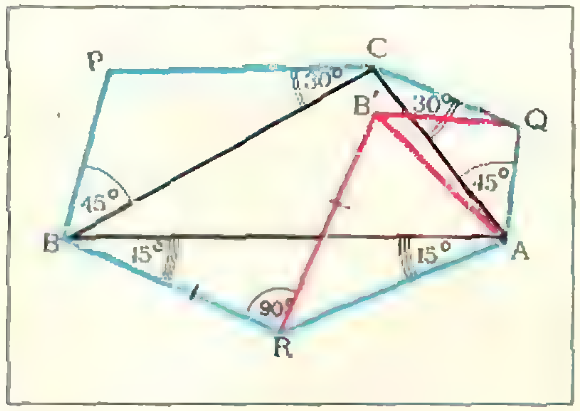


Рис. 6

Соединим B' с Q и рассмотрим треугольник $AB'Q$. Легко подсчитать, что $\widehat{B'AQ} = \alpha$. Заметим, что по теореме синусов

$$\frac{|AQ|}{|AC|} = \frac{\sin 30°}{\sin 105°} = \frac{1}{2\cos 15°},$$

то есть $|AQ| = \dfrac{|AC|}{2\cos 15°}$. Из треугольника ARB $|AR| = \dfrac{|AB|}{2\cos 15°}$. Но $|AR| = |AB'|$, откуда $\dfrac{|AQ|}{|AB'|} = \dfrac{|AC|}{|AB|}$, то есть $\triangle AB'Q \sim \triangle ABC$. Значит, $\widehat{AB'Q} = \beta$, откуда

$$\widehat{RBP} = \widehat{RB'Q}. \qquad (2)$$

Из подобия треугольников BCP и ACQ следует $\dfrac{|BC|}{|BP|} = \dfrac{|AC|}{|AQ|}$. А из подобия треугольников $AB'Q$ и ABC следует $\dfrac{|AC|}{|AQ|} = \dfrac{|BC|}{|B'Q|}$, откуда

$$|B'Q| = |BP|. \qquad (3)$$

Из (1), (2), (3) следует, что при повороте ломаной RBP на 90° по часовой стрелке с центром в точке R она переходит в ломаную $RB'Q$, причем точка P переходит в Q, откуда и следует, что $|PR| = |QR|$ и $\widehat{PRQ} = 90°$.

4. Заметим, что поскольку $4444^{4444} < 10000^{4444}$, то число цифр в десятичной записи числа A не больше $4444 \cdot 4 - 1 < 20\,000$. Отсюда $A < 9 \cdot 20\,000 = 180\,000$. Значит, $B < 9 \cdot 5 = 45$. Поэтому, обозначив сумму цифр числа B через C, получим

$$C < 4 + 9 = 13. \qquad (1)$$

Заметим теперь, что сумма цифр числа дает при делении на 9 тот же остаток, что и само число. Отсюда

$$4444^{4444} \equiv C \pmod 9. \qquad (2)$$

С другой стороны, $4444 \equiv 7 \pmod 9$ и поэтому $4444^{4444} \equiv 7^{4444} \pmod 9$, откуда $4444^{4444} \equiv (-2)^{3\cdot 1481} \cdot 7 \equiv (-8)^{1481} \cdot 7 \equiv 7 \pmod 9$. Учитывая (1) и (2), получаем, что $C = 7$.

5. Легко проверить, что существует бесконечно много попарно различных прямоугольных треугольников с гипотенузой длины 2, и с рациональными длинами катетов (например, такими будут треугольники с катетами $\dfrac{4n}{n^2+1}$ и $\dfrac{2n^2-2}{n^2+1}$, где n — натуральное число). Зафиксируем диаметр AB данной окружности радиуса 1 и построим на этом диаметре 1975 таких различных тре-

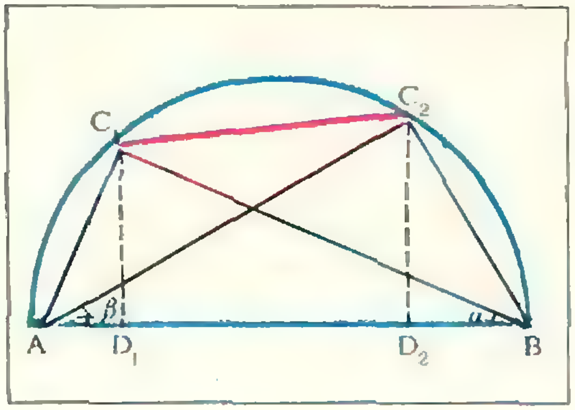


Рис. 7.

угольников ABC_i ($i = 1, 2, \ldots, 1975$). Пусть все точки C_i лежат на одной и той же полуокружности. Покажем, что точки C_i являются искомыми. Рассмотрим две из них: C_1 и C_2. Пусть D_1 и D_2 — основания перпендикуляров, опущенных соответственно из точек C_1 и C_2 на диаметр AB (рис. 7). Пусть $\widehat{C_1BA} = \alpha$, $\widehat{C_2AB} = \beta$. Тогда $|C_1C_2| = \frac{|D_1D_2|}{\cos(\alpha - \beta)}$. Величина $|D_1D_2|$ является рациональной, так как легко проверить, что рациональными будут величины $|AD_1|$ и $|D_2B|$. Кроме того, являются рациональными $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\sin\beta$, $\cos\beta$, а поэтому рациональным будет и $\cos(\alpha - \beta)$. Итак, $|C_1C_2|$ выражается рациональным числом.

6. Воспользуемся свойством 2), положив $a = b = c = y$. Получим $P(2y, y) = 0$ при любом y. Отсюда заключаем, что многочлен $P(x, y)$ делится на $x - 2y$. Полагая $a = b = x$, $c = -2x$ и воспользовавшись свойстаами 2) и 1), получаем

$$2^n P(x, -x) + 2P(-x, x) = 0. \qquad (4)$$

Полагая $a = x$, $b = -x$, $c = 0$, получим $P(0, 0) + P(-x, x) + P(x, -x) = 0$. Но, очевидно, $P(0, 0) = 0$. Отсюда $P(-x, x) = -P(x, -x)$. Используя (4), получим $(2^n - 2)P(x, -x) = 0$ при любых x. Поэтому $P(x, -x) = 0$ при $n > 1$. Значит, многочлен $P(x, y)$ делится на $(x + y)$.

Положим $P_1(x, y) = \frac{P(x, y)}{x + y}$.

Покажем, что многочлен $P_1(x, y)$ степени $n - 1$ обладает свойствами 1), 2), 3).

В самом деле,

$$P_1(tx, ty) = \frac{t^n P(x, y)}{t(x + y)} = t^{n-1} P_1(x, y),$$

$$P_1(a + b, c) + P_1(b + c, a) + P_1(c + a, b) = \frac{P(a+b, c) + P(b + c, a) + P(c + a, b)}{a + b + c} = 0,$$

то есть свойство 2) выполняется при $a + b + c \neq 0$. При $a + b + c = 0$ свойство 2) следует из непрерывности многочлена. *Свойство 3) проверяется без труда.*

Таким образом, $P_1(x, y)$ делится на $(x - 2y)$ и $(x + y)$. Теперь, применяя индукцию, получаем, что $P(x, y) = (x - 2y)\cdot(x + y)^{n-1}$.

К статье «VIII Олимпиада по физике»

1. а) При углах α таких, что $\operatorname{tg}\alpha \leqslant \operatorname{tg}\beta$, тело покоится, а при $\operatorname{tg}\alpha > \operatorname{tg}\beta$ тело движется по стержню вниз.

б) Силы, действующие на тело в инерциальной системе отсчета, связанной с неподвижной осью вращения, показаны на рисунке 8. Это сила тяжести mg, сила реакции опоры $F_р$ и сила трения $F_{тр}$, которая может быть направлена как вверх, так и вниз по стержню. Записав уравнения движения тела по горизонтали и вертикали, получим, что тело покоится относительно стержня, если расстояние от тела до оси вращения равно

$$r_{1,2} = \frac{g}{\omega^2}\operatorname{tg}(\alpha \mp \beta).$$

Знак «минус» относится к случаю, когда $F_{тр}$ направлена вверх, а «плюс» — вниз по стержню.

Заметим, что если $\alpha > \beta$, то возможны оба положения равновесия, т. е.

$$l_{1,2} = \frac{r_{1,2}}{\cos\alpha} = \frac{g}{\omega^2\cos\alpha}\operatorname{tg}(\alpha \mp \beta).$$

Если же $\alpha \leqslant \beta$, то тело покоится только при

$$r_2 = \frac{g}{\omega^2}\operatorname{tg}(\alpha + \beta),$$

$$\text{или } l_2 = \frac{g}{\omega^2\cos\alpha}\operatorname{tg}(\alpha + \beta).$$

2. а) Известно, что n зависит от λ. По условию задачи зависимость f от n квадратичная. Это означает, что двум разным зна-

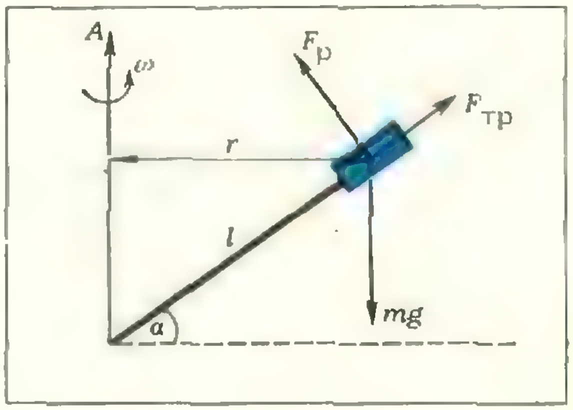


Рис. 8

чениям n (или λ) соответствует одно значение f.

б) В этом случае $f(n_1) = f(n_2)$, т. е.

$$\frac{n_1 r_1 r_2}{(n_1 - 1)[n_1(r_2 - r_1) + d(n_1 - 1)]} =$$

$$= \frac{n_2 r_1 r_2}{(n_2 - 1)[n_2(r_2 - r_1) + d(n_2 - 1)]},$$

или

$$r_1 - r_2 = d\left(1 - \frac{1}{n_1 n_2}\right).$$

Из физических соображений $n_1 > 1$, $n_2 > 1$ и $d > 0$, поэтому $0 < r_1 - r_2 < d$. Возможны такие случаи:

1) $r_1 > 0$, $r_2 > 0$, при этом $0 < r_1 - r_2 < d$;
2) $r_1 > 0$, $r_2 < 0$, при этом $|r_1| + |r_2| < d$;
3) $r_1 < 0$, $r_2 < 0$, при этом $0 < |r_2| - |r_1| < d$.

Соответствующие формы линз и положения центров кривизны приведены на рисунке 9.

в) Для плоско-выпуклой линзы один из радиусов кривизны неограниченно большой, например, $r_1 \to \infty$. Тогда $f = \frac{r_2}{1 - n}$, т. е. одному значению n соответствует одно значение f.

г) Выражение для f можно переписать в виде: $An^2 + Bn + C = 0$, где $A = f(r_2 - r_1 + d)$, $B = -[f(r_2 - r_1) + 2fd + r_1 r_2]$, $C = fd$. Это квадратное уравнение может иметь только одно решение в следующих случаях: 1) $A = 0$ и $n = -\frac{C}{B} > 1$, т. е.

$$r_1 - r_2 = d \text{ и } \frac{fd}{fd + r_1 r_2} > 1;$$

2) $B^2 = 4AC$ и $n = -\frac{B}{2A} > 1$, т. е.

$$[f(r_2 - r_1) + r_1 r_2]^2 + 4fdr_1 r_2 = 0$$

и

$$\frac{f(r_2 - r_1) + 2fd + r_1 r_2}{2f(r_2 - r_1 + d)} > 1;$$

3) $B = 0$ и $n^2 = -\frac{C}{A} > 1$, т. е.

$$f(r_2 - r_1) + 2fd + r_1 r_2 = 0 \text{ и}$$

$$-\frac{d}{r_2 - r_1 + d} > 1.$$

3. а) $R = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2mU}{e}}$.

б) Траектории ионов состоят из дуг окружностей в области магнитного поля и из участков прямых, касательных к дугам в точках выхода за границы магнитного поля. Центры кривизны круговых участков лежат на оси симметрии траекторий. Все сфокусированные траектории ионов лежат по одну сторону от отрезка QA.

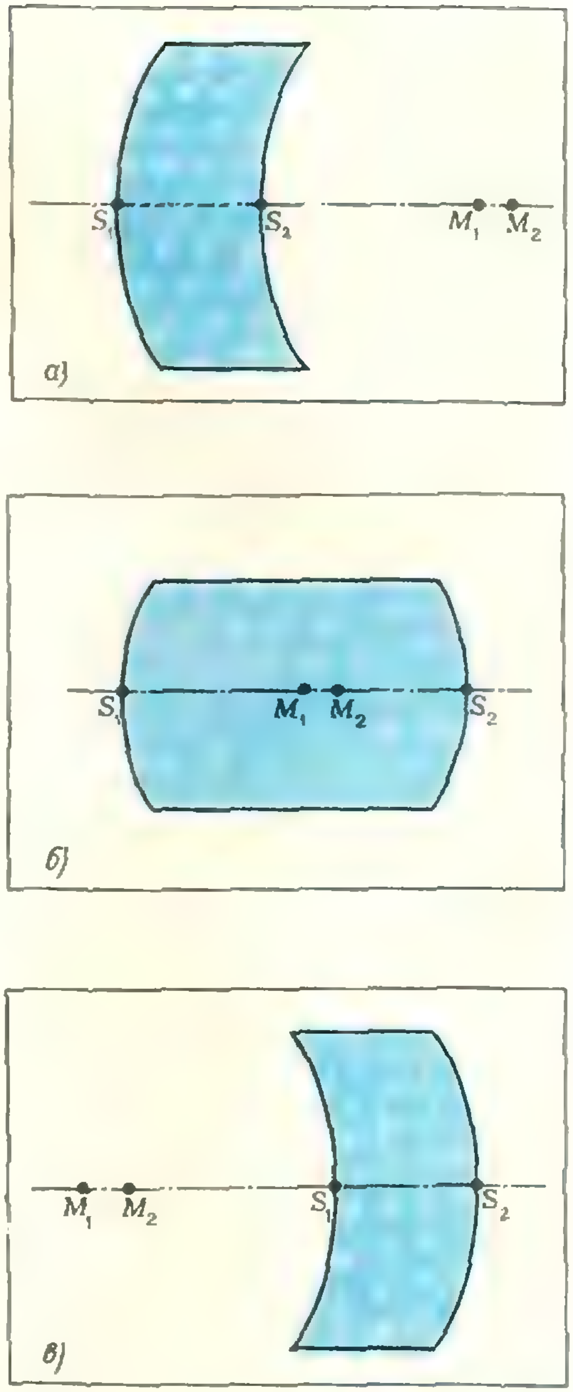


Рис. 9.

в) См. рис. 10. Случай $R > a$ в указанной области принципиально ничем не отличается от случая $R = a$.

г) Рассмотрим произвольную точку P, найдем ее координаты и свяжем их между собой. В декартовых координатах (рис. 11, а)

$$x = R\sin\alpha, \quad y = (a - x)\operatorname{tg}\alpha.$$

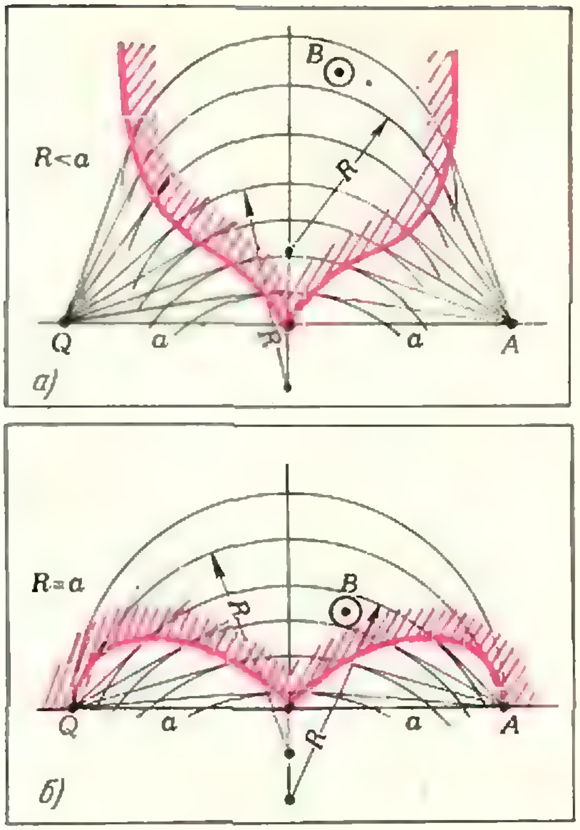


Рис. 10.

Отсюда

$$y = \frac{x(a-x)}{\sqrt{R^2-x^2}}.$$

В полярных координатах (рис. 11, *б*)

$$r\cos\varphi + R\sin\varphi = a,$$

откуда

$$r = \frac{a}{\cos\alpha}\left(1-\frac{R}{a}\sin\varphi\right).$$

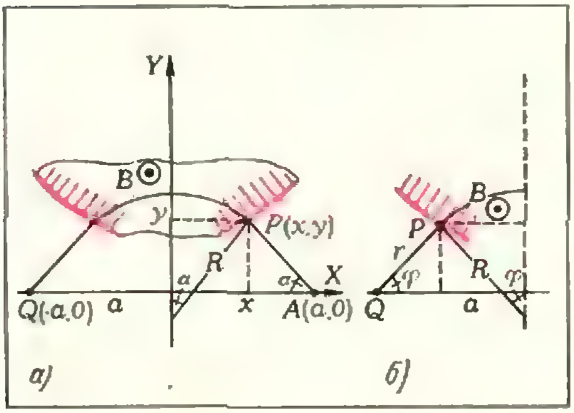


Рис. 11.

К статье «Точка, прямая ... — что это такое?»

(см. «Квант», № 11)

1. *в*) У Саши шесть прямых (I_1): {*в, и, к, е*}, {*о, ч, е, н, ь*}, {*п, о, н, р, а, в, и, л, с, я*}, {*г, о, р, д*}, ∅, {*к, и, е, в*}, из которых пять различных, так как первая и последняя прямые (I_1) совпадают: {*в, и, к, е*} = {*к, и, е, в*}. Заметим, что в слове *«город»* буква о встречается дважды, но в прямой (I_1), определяемой этим словом, точка (I_1) указывается один раз: {*г, о, р, д*}. Прямые {*о, ч, е, н, ь*} и {*г, о, р, д*} имеют единственную общую точку *о*. Прямые {*г, о, р, д*} и {*к, и, е, в*} общих точек не имеют (они «параллельны»). Различные Сашины точки: *в, и, к, е, о, ч, н, ь, п, р, а, л, с, я, г, д*.

г) Колей указаны 4 различные прямые, так как некоторые из написанных им множеств равны (состоят из одних и тех же элементов): {*а, б*} = {*б, а*}, {*а, в*} = {*в, а*}, {*б, в*} = {*в, б*} {*а, б, в*} = {*б, в, а,*} = {*в, б, а*}.

2. В первом примере, приведенном марсианином, прямыми ($\mathrm{I}_{1,2}$) можно считать множества {1}, {2}, {3}, {1, 2}, {1, 3}, {2, 3}, ∅ или {1}, {2}, {3}, {1, 2, 3}, ∅. Считать, например, одновременно прямыми ($\mathrm{I}_{1,2}$) множества {1, 2} и {1, 2, 3} нельзя, так как тогда получится, что существуют различные прямые, содержащие точки 1 и 2.

Например, для Сашиных точек *о* и *р* существуют две различные прямые, их содержащие: {*п, о, н, р, а, в, и, л, с, я*} и {*г, о, р, д*}. Таким образом, аксиома I_2 для Сашиных «прямых» не выполняется, поэтому считать Сашины прямые прямыми ($\mathrm{I}_{1,2}$) нельзя.

5. ∅ не может считаться прямой ($\mathrm{I}_{1,2,3}$). Из аксиомы I_3 следует, что на прямой должна существовать хотя бы одна точка, поэтому Лена теперь уже не вправе считать, что точек нет.

(см. с. 68)

1. *а*) Нет, так как $|AB| = 0$, но $A \neq B$.

б) Нет, по той же причине.

2. Нет, так как при введенном в задаче соглашении $|AB| < |BA|$; $|BC| < |CB|$; $|AC| < |CA|$.

3. а) да; б), в) нет, так как $|AB| > |BA|$; г) нет, так как в моделях, приведенных в задачах 2 и 3, аксиома II_1 выполняется, а аксиома II_2 не выполняется; д) нет, так как в моделях, приведенных в задаче 1, аксиома II_2 выполняется, а аксиома II_1 не выполняется; е) если точки *A* и *B* будут концами одного диаметра.

4. Да, аксиомы II_{1-3} в этой модели выполняются.

5. Нет, так как $|AB| + |BD| = 0 + 0 = 0$, а $|AD| = 100$ *км*.

6. а) да; б) да; в) нет, так как в рассматриваемом случае вторая и третья аксиомы расстояний выполняются, а первая не выполняется.

7. а) аксиома II_3 выполняется; б) да; в) нет, так как в рассматриваемой задаче аксиомы II_1 и II_3 выполняются, а аксиома II_2 не выполняется.

BeatriceGloria_personal library

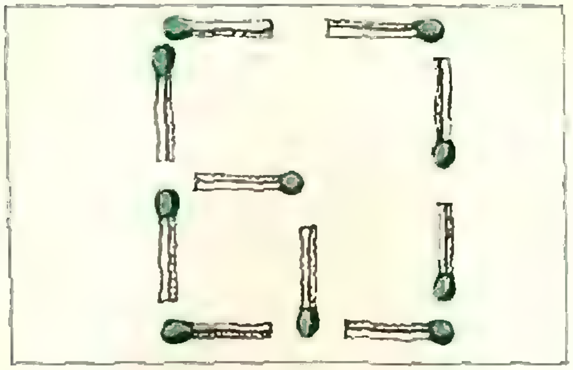


Рис. 12.

К задачам «Квант» для младших школьников»

(см. с. 67)

1. Из таблицы

	сейчас	будет
мне лет	x	$3(26-x)$
сестре лет	$26-x$	$5x-3(26-x)$

получаем уравнение

$$x-(26-x)=3(26-x)-\\ -[5x-3(26-x)],$$

откуда $x=14$, $26-x=12$.

2. См. *рис.* 12.

3. Из равенства

$$\frac{n(n+1)}{2}=111\cdot k=3\cdot 37\cdot k$$

следует, что $n=36$ или $n=37$. Подходит $n=36$, сумма равна 666.

4. Надо вычесть из результата 150. Разность — задуманное число.

5. $(11)^3=1331$. Указание. Δ ⩽ 3 (при бóльших значениях получится пятизначное число).

6. Из условия задачи следует, что $\frac{a}{b}=n-1=\frac{2}{m-1}$. Тогда $n=3$ при $m=2$ и $n=2$ при $m=3$, в обоих случаях $m+n=5$.

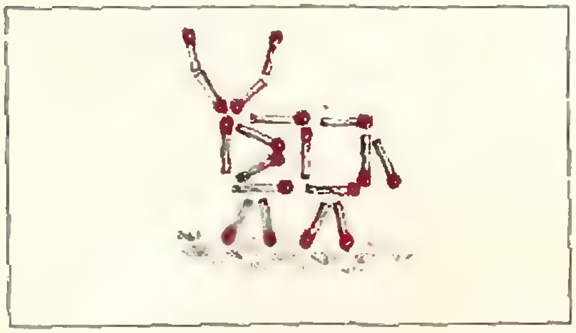


Рис. 13

(см. «Квант» № 11)

1. $26^2=676$. Указание. Λ = 2 (при больших значениях получится четырехзначное число).

2. Котлеты поджарятся быстрее всего на плитке с сопротивлением 20 *ом*.

3. 7194 — 3282 = 3912
491 — 123 = 368
457 — 163 = 294.

Указание. Из первого и третьего равенства получаем П = 2К + 1, Т = 2Λ, Т = К + 1, откуда П = 4Λ — 1, А = 1 или Λ = 2. Но А ≠ 1 (так как К = 2А — 1 ≠ А), поэтому А = 2 и т. д.

4. Снег очень плохо проводит тепло и имеет большую удельную теплоту плавления. Поэтому он тает очень медленно и при температуре немного выше нуля может сохраняться длительное время.

5. См. рис. 13.

6. В книге 500 страниц: на нумерацию страниц 1—9 идет по одной цифре, страниц 10—99 — по две, страниц 100—500 — по три.

К задачам

(см. с. 35)

1. Если $a^4+a^3=b^4+b^3=1$, то $a^3b^3(a+1)(b+1)\equiv q^3(p+q+1)=1$, где $p=a+b$, $q=ab$. Кроме того, $a^4-b^4+a^3-b^3=0$, то есть $a^3+a^2b+ab^2+b^3+a^2+ab+b^2=0$, откуда $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+ab(a+b+1)=0$ или $\frac{p}{q}+q(p+1)=0$. Исключая p, получаем $q^3(q^3+q+1)=q^2+1$.

2. Мы имеем

$$k(1+yz)-(y+z)=(y-z)u,$$
$$k(1+zx)-(z+x)=(z-x)u,$$
$$k(1+xy)-(x+y)=(x-y)u,$$

отсюда

$$(kz-1+u)x=(1+u)z-k,$$
$$(ky-1-u)x=(1-u)y-k.$$

Исключая x, получаем

$$(kz-1+u)\{(1-u)y-k\}=\\ =(ky-1-u)\{(1+u)z-k\},$$

или

$$2u\{k(1+yz)-(y+z)\}+\\ +(y-z)(u^2+1-k^2)=0.$$

Отсюда

$$2u^2(y-z)+(y-z)(u^2+1-k^2)=0.$$

Но $y-z\neq 0$, откуда получаем требуемое равенство.

3. Имеем $x^2y^2z^2(x+y)(x+z)(y+z)=abc$,

$$(x+y)(x+z)(y+z)=\frac{abc}{d^2},$$

$$xy(x+y)+xz(x+z)+yz(y+z)+\\ +2xyz=\frac{abc}{d^2},$$

$$a+b+c+2d=\frac{abc}{d^2}.$$

4. Воспользоваться задачей 5 (см. «Квант», 1975, № 7, с. 65).

5. Положить $n=2$ в задаче 5 (там же).

Напечатано в 1975 году

Великий подвиг советского народа	5	2
Ленин о науке	10	4
Международная встреча на космической орбите	7	2
Ученые о Ленине	10	5
Штаб советской науки	10	2

Статьи по математике

Белага Э Г Узел на столе математика	7	6
Бендукидзе А Д У истоков Грузинской математической школы	9	12
Березин В Н Одиннадцать кругов	6	21
Болтянский В Г Оптические свойства эллипса, гиперболы и параболы	12	19
Бронштейн И Н Эллипс	1	2
Бронштейн И Н Гипербола	3	16
Бронштейн И Н Парабола	4	9
Бронштейн И Н Общие свойства конических сечений	5	31
Вагутен В Н Близкие дроби	8	33
Веров С Г Касательные к рулеттам	5	22
Веров С Г Тайны циклоиды	8	19
Веров С Г Брахистохрона, или еще одна тайна циклоиды	12	29
Виленкин Н Я Анри Лебег	8	2
Виленкин Н Я , Лишевский В П Софья Васильевна Ковалевская	3	2
Виленкин Н Я , Мордкович А Г Что такое производная	12	10
Гастев Ю А С чего начинается логика	1	24
Гиндикин С Г Феликс Клейн	12	2
Гуревич Г А Бесповторные последовательности	9	7
Жаутыков О А , Кубесов А Г Выдающийся математик средневековья	10	6
Кац М О О плоских правильных графах	11	12
Лопшиц А М Функциональные уравнения	1	30
Маневич М А , Слуцкин М М ЭВМ в конструкторском бюро	10	24
Матиясевич Ю В Формулы для простых чисел	5	5
Николаев Е Г Равноправны ли все цифры?	11	16
Нильме В Д Циркулем и линейкой	6	2
Тьмеладзе З Я Физика и линейные неравенства	10	17
Фишман В М Решение задач с помощью геометрических преобразований	7	30
Хацет А Б Транспортные сети и электрические цепи	2	10
Хренов Л С Средства вычислений	3	20
Яглом И М О задаче Радо	8	40

Статьи по физике

Арабаджи В И Дифракционная окраска насекомых	2	18
Асламазов Л Г Почему звучит скрипка	10	9
Быстрый И М Конструирование уравнений по графикам функций	8	54
Воробьев И И Электронный ветер	3	12
Гельфер Я М , Лешковцев В А Андре-Мари Ампер	11	2
Елецкий А В Скорость света и ее измерение	2	2
Ерозолимский Б Г Бета превращения ядер и свойства нейтрино	6	10
Компанеец А С Размерность физических величин и подобие явлений	1	9
Кресин В З Гигантские кванты	7	21
Кришталь Н Л Метод размерностей	1	18
Ланге В Н Зачем топят печи?	4	17
Ланге В Н , Ланге Т И К механике буерного спорта	11	21
Мигдал А Б Письмо школьникам, которые хотят стать физиками	3	36
Михайлов А А Что такое долгота и широта?	8	11
Ратнер Б С Оценка физической величины	1	22
Смородинский Я А Сила Кориолиса	4	2
Стаханов И П Масса и энергия в теории относительности	3	25
Стаханов И П Электродинамика движущихся сред	9	2
Файнгольд М И Этот удивительный параболоид	12	24
Френкель В Я Пушкин и точные науки	8	28
Чаплик А В Волновая механика	5	14

Лаборатория «Кванта»

Головей М П Опыты со струей воды	5	41
Головей М П Отражательные поляризаторы	11	22
Дагаев М М Полное лунное затмение	10	30
Емельянов М И , Жарков А М , Загайнов В М , Маточкин В С Суточное вращение Земли	4	19
Ростовцев Н М Как можно измерить толщину зеркального слоя?	6	18

Математический кружок

Березин В Н , Слепой В Н Если треугольник задан	7	36

Винниченко А. П. Квадратичный треугольник и непрерывные цепочки 4 21
Готман Э. Г. Прямая Эйлера 2 20
Копылов Г. И. Задача на дом 9 24
Резников А. Г. Две последовательности треугольников 8 46
Скопец З. А. Расстояние между центроидами двух систем точек 3 39
Степин А. М., Таги-Заде А. Т. Слова с ограничениями 10 32
Суконник Я. Н. Арифметико-геометрическая прогрессия 1 36
Тоноян Г. А. Одна задача о расположении точек 11 26
Шарыгин И. Ф. Выход в пространство 5 45

Задачник «Кванта»

Задачи

M301—M305; Ф313—Ф317 1 41
M306—M310; Ф318—Ф322 2 26
M311—M315; Ф323—Ф327 3 46
M316—M320; Ф328—Ф332 4 25
M321—M325; Ф333—Ф337 5 50
M326—M330; Ф338—Ф342 6 22
M331—M335; Ф343—Ф347 7 40
M336—M340; Ф348—Ф352 8 49
M341—M345; Ф353—Ф357 9 32
M346—M350; Ф358—Ф362 10 38
M351—M355; Ф363—Ф367 11 30
M356—M360; Ф368—Ф372 12 35
Победители конкурса «Кванта» 3 44
Победители конкурса «Кванта» 9 30

Решения задач

M261—M267; Ф273—Ф277 1 43
M268—M272; Ф278—Ф284 2 28
M273—M279; Ф285—Ф290 3 48
M280—M285; Ф291—Ф295 4 27
M286—M290; Ф296—Ф298 5 52
M292—M295; Ф300—Ф302 6 24
M291, M296—M299; Ф303—Ф311, Ф299 7 42
M301—M303 8 51
M304—M307, M310; Ф312—Ф317 9 34
M308, M309, M311—M313, M300, M315; Ф318—Ф321 10 40
M314, M316, M317; Ф322—Ф327 11 32
M318—M320; Ф328—Ф332, Ф334 12 38

Практикум абитуриента

I

Баканина Л. П. Задачи о воздушных шарах 1 60
Белый С. Б. Учитесь делать дополнительные построения 10 48
Берколайко С. Т. Использование неравенства Коши при решении задач 4 37
Ваховский Е. Б., Рывкин А. А. Когда помогают графики 2 43
Готман Э. Г. Медианы и средние линии 12 46
Дорофеев Г. В. Отношения отрезков, площадей и объемов 1 55
Егерев В. К., Мордкович А. Г. Правильная пирамида 3 61
Козел С. М. Физические аналогии 11 50
Мякишев Г. Я. Электростатическое поле 4 41
Мякишев Г. Я. Расчет участка цепи, содержащего э. д. с. 12 51
Розенблат Г. И. Как приступить к решению задачи по физике? 5 60
Романов С. В., Шарыгин И. Ф. Алгебраический метод решения геометрических задач 11 45
Рыжков Л. В., Ионин Ю. И. Однородные уравнения 9 49
Садовский Л. Е. Прикладная математика и математики 6 31
Яковлев А. Я. Абитуриент-1975 6 39

II

Бабурин Ю. С. Куйбышевский государственный университет 7 57
Белонучкин В. Е., Чехлов В. И. Московский физико-технический институт 2 49
Белопухов Л. К., Сухарев М. Г. Московский институт нефтехимической и газовой промышленности 3 66
Боровских Л. П. Новосибирский институт инженеров железнодорожного транспорта 7 60
Воронин Л. И. и др. Завод-втуз при Московском автомобильном заводе им. И. А. Лихачева 11 56
Голубов Э. А. Уральский государственный университет им. А. М. Горького 7 55
Граковский Г. Ю., Кабилевский Ю. Д., Самойленко П. И. Математические специальности в техникумах 7 53
Забоев А. И., Пантюхов Г. И., Ростокин В. И., Шолохов Н. В. Московский инженерно-физический институт 1 64
Карелин Н. Н., Осипишин И. С., Паленичка М. А. Львовский политехнический институт 7 61
Колпаков В. С., Сахарова Р. Н. Ярославский политехнический институт 7 59
Комленко Ю. В. Ижевский механический институт 7 63
Меледин Г. В., Ширшов А. И. Новосибирский государственный университет 4 48
Михайлов Ж. М., Слудский В. Н., Устинова А. В. Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова 5 64
Молотков И. А., Осипов В. Ф., Славянов С. Ю., Товстик П. Е. Ленинградский государственный университет им. А. А. Жданова 6 44
Слудский В. Н. Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова 6 43
Тонян В. А. Московский институт электронного машиностроения 7 58

Рецензии, библиография

Бородин Д. Школьникам о современной физике	4	52
Брук Ю. М. Солнце, воздух и вода	9	67
Кугель К. И. Как это измерить?	2	52
Левитан Е. П. Как создавалась современная физика звезд и галактик	6	50
Левитан Е. П. О космических фейерверках	10	53
Лешковцев В. А. Всесоюзный конкурс общества «Знание» на лучшее произведение научно-популярной литературы	1	70
Метельский Н. В. Математики о математике	2	52
Петраков И. С. История математики	10	52
Петрова Т. С., Смолянский М. Л. Новые книги	2	55
Петрова Т. С., Смолянский М. Л. Новые книги	6	51
Петрова Т. С., Смолянский М. Л. Новые книги	9	68
Петрова Т. С., Смолянский М. Л. Новые книги	10	55
Рудов В. А. Будущее науки	1	71
Рудов В. А. Жизнь науки	11	68
Шаскольская М. П. О диффузии в кристаллах	7	64
Яворский Б. М. Школьникам о физике твердого тела	12	64

Информация

Березин В. Н., Виленкин А. Н., Пшеничнер Б. Г., Тихомирова В. А. Всероссийский слет актива научных обществ учащихся	9	58
Библиотеке имени К. Д. Ушинского — 50 лет	9	64
Быков А. А., Ионин Ю. И. Школа-интернат при Ленинградском государственном университете им. А. А. Жданова	5	70
Венецкий И. Г., Соркин Ю. И. Пятая математическая олимпиада МЭСИ	2	57
Венецкий И. Г., Соркин Ю. И., Шкундина Н. Б. VI Математическая олимпиада МЭСИ	12	66
Жгенти М. И. Шестой праздник юных математиков Закавказья	9	55
Качанов А. В., Наслузов И. И. Голубой экран — для поступающих в вузы	9	65
Новый прием во Всесоюзную заочную математическую школу	1	68
Стасенко А. Л. ФАЛТ — что это такое?	5	68
Чернавский А. В. О математической олимпиаде МИИТа	11	71

Всесоюзные и Международные олимпиады школьников

Гутенмахер В. Л. Олимпиада по математике	11	60
Моисеева З. И., Скворцов В. А. XVII Олимпиада по математике	12	57
Петрова Т. С., Чернова Л. В. Олимпиада по физике	11	62
Разумовский В. Г., Тарасюк Г. С. VIII Олимпиада по физике	12	59

«Квант» для младших школьников

Барболин М. П. Головоломки и графы	2	59
Бендукидзе А. Д. О системах счисления	8	59
Гик Е. Я. Математические игры на шахматной доске	4	54
Гик Е. Я. Шахматно-математические задачи С. Лойда	6	55
Головоломки Дьюдени	10	57
Горст Ю. Г. На даче	9	71
Кордемский Б. А. Подарок веселого капитана	8	62
Кордемский Б. А. Как? А если невозможно, то почему?	9	73
Савин А. П. Для чего нужны проценты?	3	72
Савин А. П., Финк Л. М. Разговор в трамвае	7	67
Семенов Е. Е. Точка, прямая... — что это такое?	11	73
Семенов Е. Е. Точка, прямая... — что это такое? (*продолжение*)	12	68
Тихомирова В. А. Электризация через влияние	1	74
Чопенко О. П. Про счеты	5	72

Наши интервью

Когда катет длиннее гипотенузы	9	17

Спрашивайте — отвечаем

1 66; 3 69; 9 45; 11 70

Уголок коллекционера

Алтыкис А. В. XXX лет победы над гитлеровским фашизмом	5	3-я с. обл.
Рудов В. А. Подвигу — десять лет	3	3-я с. обл.

Корректор *А. Л. Ипатова*
113035, Москва, Ж-35, Б. Ордынка, 21/16.
«Квант», тел. 231-83-62. Сдано в набор 17/IX-75 г.
Подписано в печать 4/XI-75 г.
Бумага $70\times100^{1}/_{16}$. Физ. печ. л. 5
Усл. печ. л. 6,5. Уч.-изд. л. 8,00. Т-18339
Цена 30 коп. Заказ 2040. Тираж 318 395 экз.

Чеховский полиграфический комбинат
Союзполиграфпрома
при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли, г. Чехов Московской области

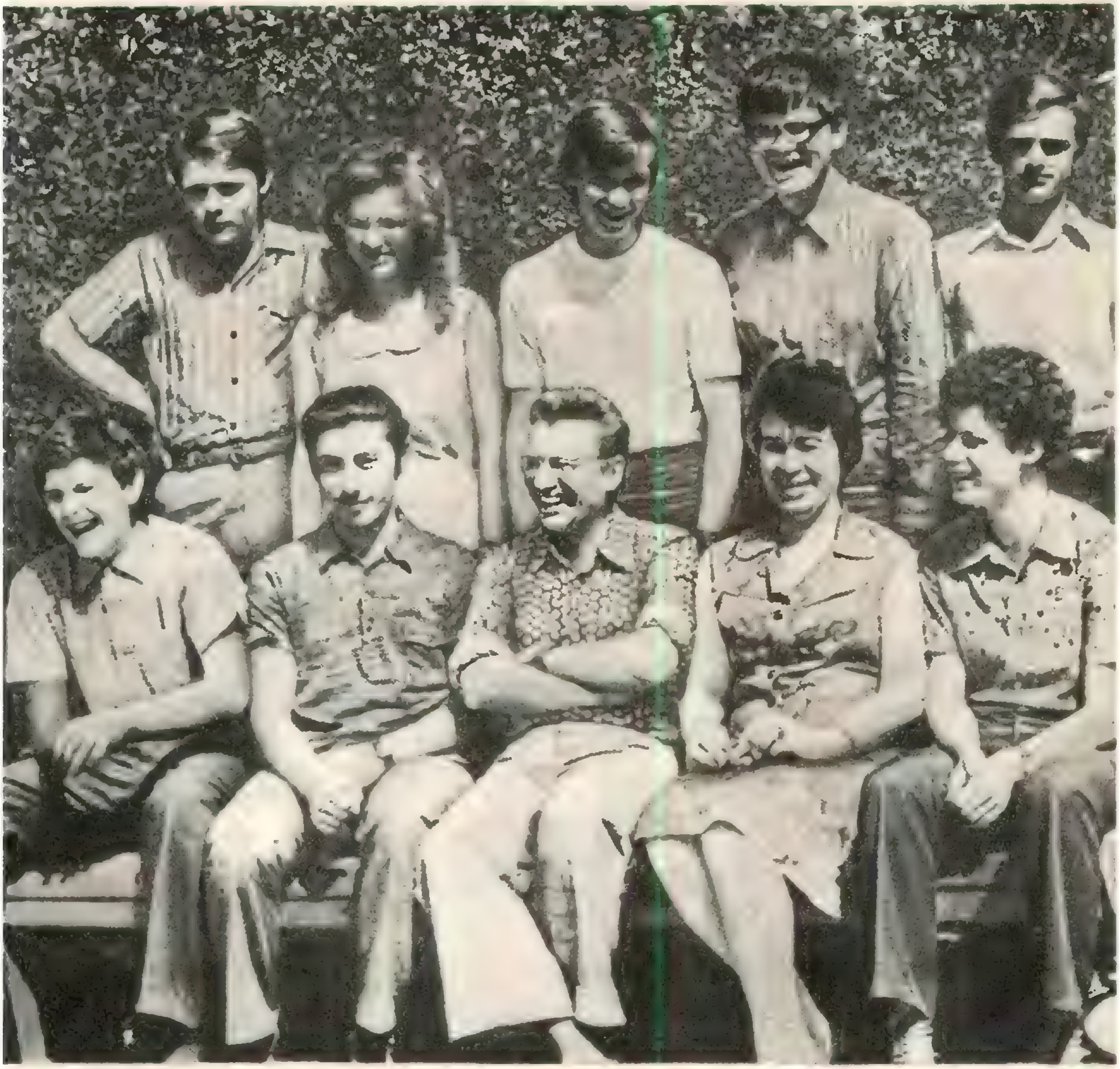
Рукописи не возвращаются

XVII Международная олимпиада школьников по математике

В июле этого года в болгарском городе Бургасе прошла XVII математическая Международная олимпиада школьников. Подробно об этой олимпиаде вы можете прочитать в статье на с. 57. Редколлегия и редакция «Кванта» поздравляют участников советской команды, успешно выступившей на олимпиаде.

На этом снимке вы видите участников советской математической команды. Слева направо сидят: А. Резников, И. Юнус, В. А. Скворцов (руководитель команды), З. И. Моисеева (зам. руководителя команды), Б. Юсин; стоят: Г. Шмелев, Т. Хованова, С. Финашин, Ю. Неретин, А. Корнюшкин.

Фото Н. Васильева



по физике

В июле этого года в городе Гюстрове (ГДР) состоялась VIII Международная олимпиада школьников по физике. Подробно об этой олимпиаде вы можете прочитать в статье на с. 59.

Редколлегия и редакция «Кванта» поздравляют участников советской команды, успешно выступившей на олимпиаде.

Торжественное закрытие олимпиады. Вручение победителям дипломов и ценных подарков.

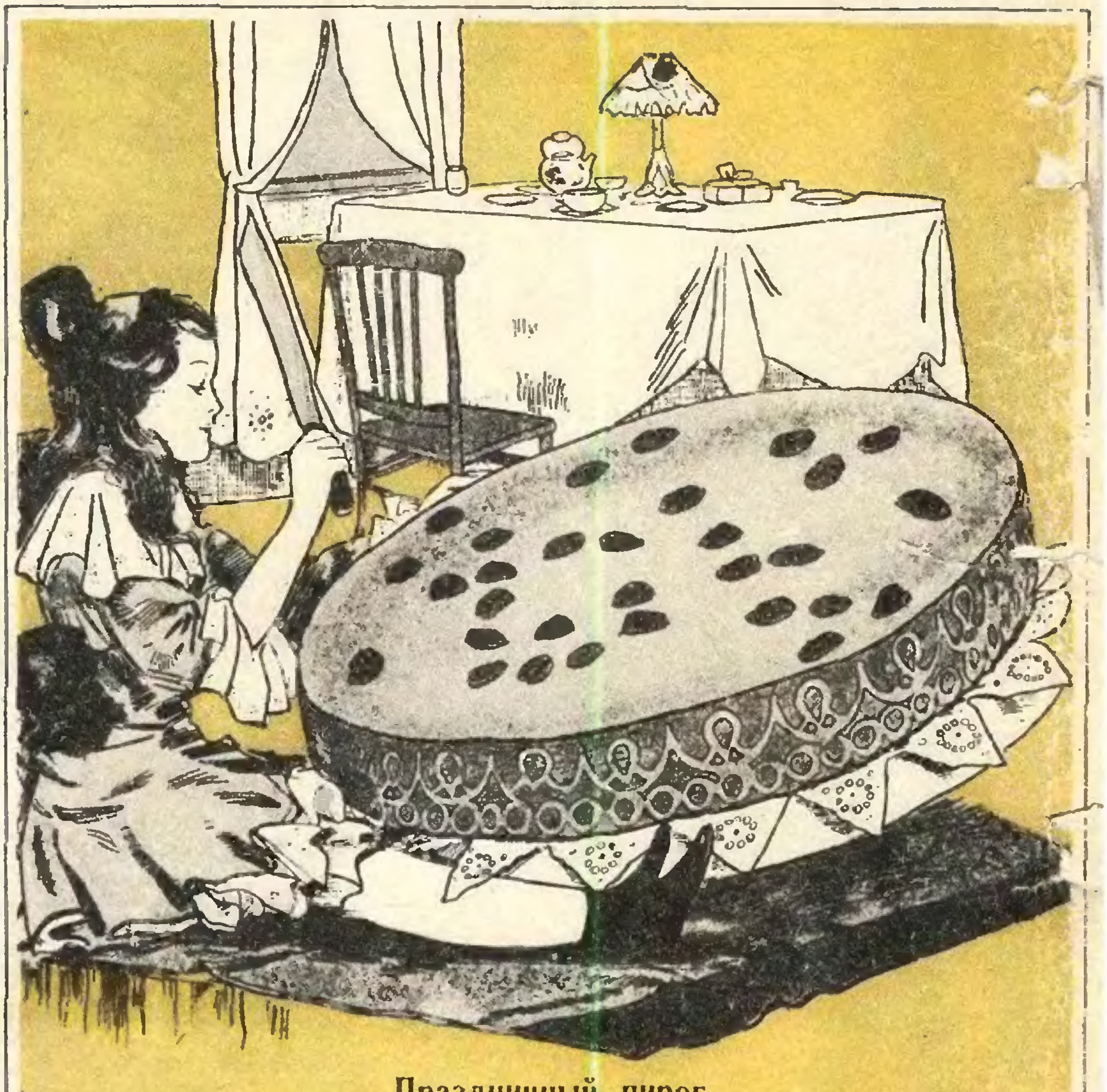
Команда Советского Союза во время экскурсии в зоопарк в городе Ростоке. Слева направо: В. Борю, Ю. Мвкедонов, С. Коршунов, Е. Шахнович и Л. Авдеев.

Фото К. Гимбер, ГДР

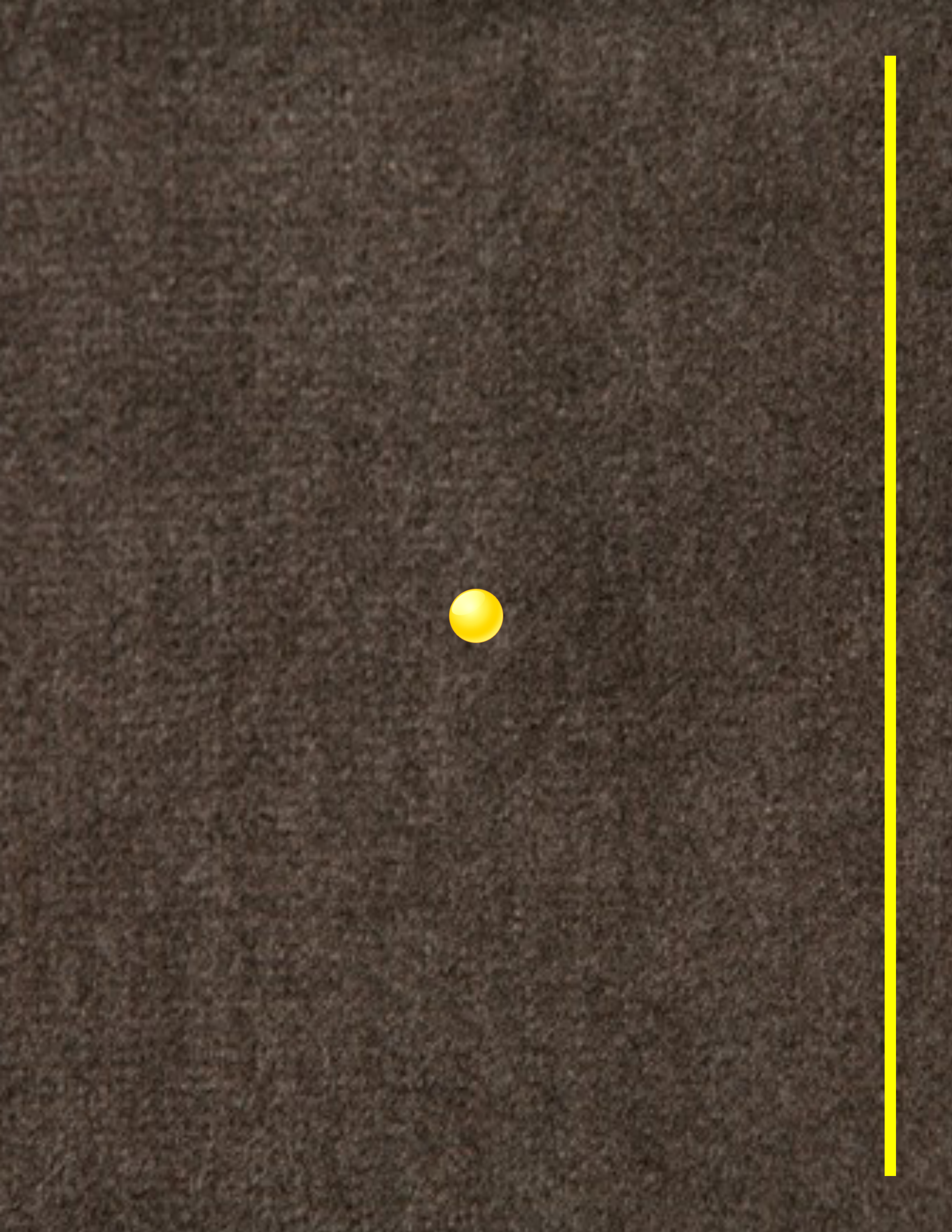
Цена 30 коп.
Индекс 70465

12

Головоломка Сэма Лойда.



Праздничный пирог

Сумеете ли вы разделить этот пирог на две части с пятнадцатью изюминками на каждой тремя прямыми разрезами!